# CUADERNOS del ICE

César Sáenz Castro

# Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades.

## Propuesta de un modelo teórico

21

UAM EDICIONES

CÉSAR SÁENZ CASTRO

# MATERIALES PARA LA ENSEÑANZA DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES

## PROPUESTA DE UN MODELO DIDÁCTICO

UAM EDICIONES

Diseño portadas Colección: Servicio de Publicaciones de la UAM
ISBN: 84-7477-737-2
Depósito Legal: GU-448/1999
Realiza: Palop, Producciones Gráficas
Impreso en Talleres Minaya, s.a.

*A Helena y Xiana*
*mi necesidad y mi azar,*
*mi azar y mi necesidad*

PORTIA:

*Id, corred las cortinas, y mostrarle*
*los varios cofres a este noble principe.*

PRINCIPE DE MARRUECOS:

*El primero, el de oro; que lleva esta inscripción:*
*«Quién a mí me elija tendrá todo lo que un hombre*
*pueda desear»*
*El segundo, el de plata, portadores de promesas:*
*«Aquel que a mí me elija obtendrá tanto como mereciere»*
*Y el tercero, de sombrío plomo, con una advertencia*
*[igualmente sombría:*
*«Quienquiera que me elija debe arriesgarse a dar cuanto*
*[posea»*
*¿Cómo saber cuál entre todos elegir?*

PORTIA:

*Sólo uno contiene mi retrato, pincipe.*
*Si lo elegís, con él a vos me entrego.*

**El Mercader de Venecia** (W. SHAKESPEARE)

# ÍNDICE

**Primera parte:**
**Presentación del modelo didáctico**



**Segunda parte:**
**Actividades de enseñanza–aprendizaje acordes con el modelo**

PRIMERA PARTE

# PRESENTACIÓN DEL MODELO DIDÁCTICO

# Capítulo 1
# INTRODUCCIÓN

**Primer azar: De la epistemología**

*Las ecuaciones cuánticas son deterministas, pero cuando se amplifican los efectos cuánticos hasta el nivel clásico se introducen incertidumbres y probabilidades en la teoría cuántica.*

*(Penrose, 1991)*

La probabilidad entra en nuestras vidas de manera continua. Jugamos a distintos juegos de azar como los dados, las cartas o las numerosísimas loterías. Los periódicos están llenos de estadísticas de nacimientos, defunciones, accidentes y pronósticos del tiempo (que pensamos que casi nunca se cumplen). El lenguaje común reconoce la existencia del azar y asumimos esa existencia con un sentimiento ambivalente, si por un lado nos provoca una cierta ansiedad y turbación, por otro nos anima al riesgo porque «la suerte favorece a los valientes» (Pio Baroja: Pilotos de altura).

El azar juega un papel todavía más importante en las sociedades avanzadas. Las nociones de seguros de vida y otros tipos de seguros y de control de calidad que llevan incorporados principios probabilísticos o la importancia de los métodos estadísticos como instrumento de trabajo en diversas ciencias, son ejemplos de este papel; la mecánica cuántica nos enseña que los procesos microfísicos fundamentales son esencialmente probabilísticos. En definitiva, cualquier fenómeno natural o social lo bastante complejo, aún en el caso de que sea totalmente determinista, a menudo sólo puede ser tratado mediante una simulación aleatoria (véase la cita de Penrose en el primer azar).

Esta importancia de la probabilidad en la civilización moderna se refleja en la presencia creciente de la teoría de probabilidades dentro de los currícula escolares de la mayoría de los países. Una de las principales razones para enseñar matemáticas es que es un poderoso medio de comunicación y ofrece estructuras para pensar. Los primeros enfoques curriculares, a través de la aritmética y la geometría, educaban el pensamiento causal y determinista. Un enfoque reciente pero igualmente importante es el de «los esfuerzos para domesticar el azar», por usar una frase muy sugerente de Hacking (1990); el estudio de la teoría de probabilidades educa un tipo de pensamiento diferente y complementario del pensamiento lógico o causal. Otra justificación importante para enseñar probabilidades es que es un medio significativo de aplicar ideas matemáticas en situaciones reales, a diferencia de otras ramas de la matemática donde las aplicaciones a la realidad no son tan directas.

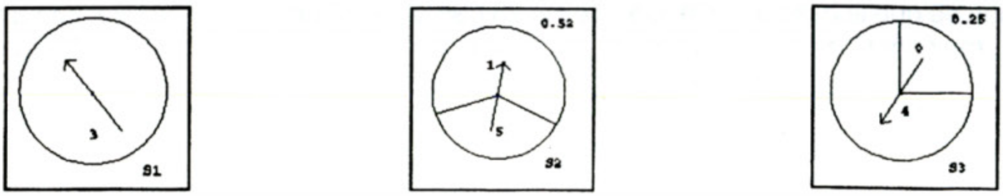
La teoría de probabilidades es un tema difícil para aprender y para enseñar. Engel (1971) afirma que el concepto de probabilidad no es ni natural ni intuitivo sino que es fruto de una progresiva reflexión y de un prolongado contraste con la realidad. Muchos profesores piensan que el comienzo de ese camino está en la práctica de juegos con apuesta equitativa. Pero aun este concepto de apuesta equitativa está lejos de ser un concepto primario, por dos razones. En primer lugar, porque la mayoría de los alumnos cree que apostar es «jugarse algo» en favor de que ocurra cierto fenómeno pero sin tener en cuenta que siempre se juega algo contra alguien. Es muy fácil ganarles algunas pesetas sin que protesten, en un juego que consista en lanzar al aire dos monedas, porque apostarán al suceso «salen dos caras» la misma cantidad que el contrario jugará a «no salen dos caras».

En segundo lugar, porque hay en casi toda apuesta un elemento de decisión personal que es algo misterioso. Un ejemplo antiguo y turbador de ese factor personal está en la polémica afirmación de Pascal de que él no duda en apostar por la existencia de Dios, ya que, por pequeña que sea la probabilidad de que ello ocurra, la ganancia es infinita si es que, en efecto, Él existe: tal juego tiene la propiedad de tener una utilidad esperada mayor que cero.

La causalidad es mucho más confortable y el pensamiento lógico mucho más claro pero el azar es una realidad. Se puede pensar en la probabilidad como el enfoque matemático para la cuantificación del azar del mismo modo que la geometría lo es para medir distancias. La diferencia radica en que las paradojas en geometría ocurren en un nivel epistemológico más profundo que el que se necesita para las matemáticas escolares. En cambio, en la teoría de probabilidades, las paradojas o ideas contraintuitivas ocurren en el mismo corazón del tema, en la definición de probabilidad, y por tanto en aplicaciones relativamente simples. Esto está confirmado por las dificultades que experimentan los alumnos para aplicar nociones probabilísticas. Engel (1971) afirma que las personas no parecen tener intuición probabilística de la misma manera que tienen intuición geométrica o visual.

El pensamiento causal tiene raíces muy profundas y con frecuencia su activación dificulta la percepción probabilística de una situación. El solapamiento del pensamiento probabilístico con el pensamiento lógico es una paradoja en sí misma. La formación del concepto de probabilidad dentro de una teoría matemática, lógicamente organizada, no significa que el razonamiento probabilístico en sí mismo (como un tipo teórico de razonamiento) siga la estructura de la lógica. En particular, observemos que no está garantizada la transitividad de conclusiones probabilísticas cuando, sin embargo, estamos acostumbrados a aceptar la propiedad transitiva de las relaciones causales. En efecto, analicemos el siguiente juego:

*«Se dispone de las tres ruletas de la figura.¿Cuál debe elegir un jugador para jugar si ha de competir con otro jugador?»*




Como $P(S_1 > S_2)=0.52$, $P(S_2 > S_3)=0.61$ y $P(S_1 > S_3)=0.25$, la ruleta $S_1$ es preferible a $S_2$, $S_2$ es preferible a $S_3$, pero $S_1$ no es preferible a $S_3$. No hay transitividad en la elección, cualquier ruleta mejora y es mejorada por otra ruleta, por tanto el jugador que elige segundo tiene ventaja. Esto es una paradoja desde la perspectiva de la lógica ordinaria en donde la transtitividad de las conclusiones es normal. La estocástica no es una forma débil de la lógica sino una forma diferente de razonamiento.

Ya metidos en el meollo de las intuiciones y los cálculos probabilísticos, trate el lector de resolver la siguiente cuestión: *«¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de 23 personas, al menos 2 celebren su cumpleaños el mismo día?» (Pausa para rascar la cabeza).*

Si el lector se comporta como la mayoría de los sujetos interpelados con esta cuestión, puede pensar que si el grupo es de 366 personas tiene probabilidad 1 (es un suceso seguro) de encontrar al menos 2 personas con el mismo día de cumpleaños y, por tanto, si el grupo es de 183 tiene probabilidad 1/2 (¡viva la regla de tres!)... pero como el grupo es de sólo 23 personas la probabilidad pedida es muy pequeña.

Sin embargo, el cálculo probabilístico normativo nos dice que la probabilidad pedida es un poquito mayor de 0.5. En efecto, la probabilidad de que al menos 2 personas tengan el mismo día de cumpleaños es 1 menos la probabilidad de que ninguna pareja tenga el mismo día de cumpleaños. Esto sugiere un modo de resolver el problema: se selecciona una persona al azar, del grupo de 23; esta persona tendrá su correspondiente día de cumpleaños; ahora seleccionamos una segunda persona, la probabilidad de que esta otra persona introduzca un nuevo dato en la lista de cumpleaños es 364/365; la probabilidad de que una tercera persona lo haga es 363/365 y así sucesivamente para las 20 personas restantes. Puesto que esos 23 sucesos son independientes obtendremos la probabilidad conjunta multiplicando todas las anteriores probabilidades (no se aconseja hacerlo a mano): el producto es 0.4931. En conclusión la probabilidad de que al menos 2 personas en un grupo de 23 tengan el mismo día de cumpleaños es 0.5069. Si el grupo es de 46 personas, la probabilidad es 0.95.

Esta cuestión ilustra muy bien los problemas que encontramos cuando la intuición y el cálculo probabilístico se enfrentan. ¿Estamos dispuestos, están los alumnos dispuestos, a dejarse guiar por el cálculo matemático incluso cuando entra en conflicto con nuestras, con sus intuiciones? A lo mejor, en el problema del cumpleaños contestamos, contestan, que sí a esta pregunta, porque los presupuestos que hacen el cálculo razonable son fáciles de verificar. Hay sólo dos; uno es que la base de selección de las 23 personas no tiene nada que ver con los cumpleaños; esto justifica tratar los sucesos como independientes y multiplicar sus probabilidades. El otro presupuesto es que las personas tienen igual probabilidad de nacer en cualquier día del año. Este dato no es realmente correcto; su incorrección simplemente incrementa la probabilidad de que los cumpleaños coincidan. Si este razonamiento teórico no basta, todavía se puede hacer una investigación estadística en varias aulas, por ejemplo; esta experiencia es muy educativa para la intuición.

¿Qué causa el conflicto entre la intuición y el cálculo probabilístico? En el problema del cumpleaños, por ejemplo, se puede observar la dificultad que tienen los alumnos para apreciar la rapidez de decrecimiento del producto de un conjunto de números entre 0 y 1, a medida que se añaden números al producto. Es una manifestación del anumerismo de los alumnos (me atrevería a decir de las personas, en general), una consecuencia de su analfabetismo matemático (Paulos, 1990). Como dice este autor, una de las principales características de las personas anuméricas es la tendencia a sobreestimar la frecuencia de las autocoincidencias y a subestimar la frecuencia de coincidencias generales. Generalmente dan mucha importancia a todo tipo de correspondencias («Tú también eres Aries. ¡Qué emoción!») y, en cambio, dan muy poca a evidencias estadísticas menos relumbrantes pero absolutamente concluyentes. El problema del cumpleaños es una buena ilustración de la sorprendente probabilidad de las coincidencias de tipo genérico.

En definitiva, deberíamos aceptar nuestras intuiciones pero sólo después de que hayamos buscado argumentos y datos que puedan influir en ellas. Como muestra la tarea del cumpleaños, la intuición primaria, no educada, puede llevar a errores. No conocemos ningún método alternativo al razonamiento riguroso para resolver problemas difíciles y consideramos un hecho favorable que el conflicto entre intuición y cálculo normativo señale esa necesidad de comprensión profunda de los principios probabilísticos. Este conflicto va a ser la piedra angular de nuestra propuesta didáctica.

Hay bastantes cuestiones importantes que requieren análisis e investigación en el campo del razonamiento y el aprendizaje probabilístico. Revisiones y resúmenes de la literatura con un enfoque psicológico (Hogarth, 1987; Kahneman, Slovic y Tversky, 1982; Pérez Echeverría, 1990; Scholz, 1991) y con un enfoque didáctico (Batanero, 1995; Borovcnik y Bentz, 1991; Garfield y Ahlgren, 1988; Godino, Batanero y Cañizares, 1987; Sáenz, 1995; Shaughnessy, 1992) nos proporcionan perspectivas de investigación en profundidad desde varios puntos de vista.

Una primera consideración que emerge del análisis de esta literatura es que las diferentes líneas de investigación proceden de diferentes tradiciones epistemológicas. Como consecuencia no hay un punto de referencia filosófico común en la comunidad científica para realizar investigación en probabilidades y las distintas agendas de investigación no sólo utilizan metodologías distintas sino que llegan a malinterpretarse unas a otras (Shaughnessy, 1992).

En efecto, en los siglos XVII y XVIII se produce la gran controversia epistemológica entre la tradición racionalista continental y la empiricista inglesa. Los filósofos racionalistas continentales, tales como Descartes, Leibniz y Spinoza veían la adquisición del conocimiento como un proceso de pura razón que trataba de descubrir o deducir verdades absolutas que estaban a priori en la mente. Los racionalistas estaban en la tradición de Platón y para ellos el conocimiento era deductivo y no estaba basado en la percepción sensorial. Por contra, los empiricistas ingleses dirigidos por Locke, Berkeley y Hume, dudaban de la existencia de verdades absolutas y sostenían que todo conocimiento está basado en inferencias realizadas desde las observaciones sensoriales de los objetos. Seguían la tradición de Aristóteles y su pensamiento filosófico encajaba con la emergencia del método experimental como herramienta de las ciencias de la naturaleza y la inducción como método de razonamiento (los trabajos de Newton, por ejemplo).

Shaughnessy (1992) encuentra huellas de ambas tradiciones filosóficas en la investigación en comprensión y aprendizaje de las probabilidades y la estadística que se hace en la época actual, al comparar el trabajo de Green (1982, 1987, 1988) en Gran Bretaña con el trabajo de los investigadores centroeuropeos (Borovcnik y Bentz, 1991; Steinbring, 1991). Green ha realizado investigaciones empíricas con miles de adolescentes ingleses para comprender el pensamiento probabilístico mientras que Bentz, Borovcnik y Steinbring han proporcionado perspectivas teóricas para analizar este pensamiento. La investigación de Steinbring, en directo contraste con la de Green, casi nunca informa de tareas administradas o de entrevistas realizadas a los sujetos para explorar su pensamiento y en cambio aporta un enfoque fundamentalmente teórico para cambiar y mejorar la enseñanza de las probabilidades.

En el mismo sentido, aunque Bentz y Borovcnik emprenden un análisis de estudios empíricos que han sido realizados por otros, su propósito principal parece consistir en señalar todos los fallos y errores que pueden ocurrir cuando se realiza investigación empírica. Da la impresión de que son más bien escépticos de las posibilidades de investigar empíricamente la comprensión probabilística. En el capítulo 2 tendremos ocasión de estudiar las ideas probabilísticas de los estudiantes y el problema de su investigación.

Además de influencias filosóficas en la epistemología de las probabilidades, hay algunos desarrollos históricos en el concepto mismo de probabilidad que han influido en la investigación. Hacking (1975) afirma que la tardía aparición histórica de la probabilidad matemática se debió fundamentalmente al significado dual que ha tenido la noción de probabilidad (como grado de creencia y como cálculo de frecuencias estables en sucesos aleatorios) y a las definiciones respectivas de evidencia científica que acompañó cada uno de esos dos significados.

Esta tardía aparición de la probabilidad matemática en la historia parece corresponderse con la tardía emergencia de las nociones probabilísticas en el desarrollo cognitivo del sujeto. Piaget e Inhelder (1951) afirman que sólo las operaciones del pensamiento formal, último y supremo estadio de la evolución intelectual, permiten que las personas comprendan y utilicen las leyes del azar y la probabilidad. Sin embargo, Kahneman et al. (1982) encuentran que sujetos adultos y por tanto en la etapa de las operaciones formales, incluso expertos en estadística, cometen numerosos errores de juicio probabilístico.

De estas consideraciones de tipo histórico, epistemológico, psicológico y metodológico se desprende la necesidad de reflexionar sobre la naturaleza de la probabilidad y sobre el pensamiento y aprendizaje probabilístico, antes de cualquier propuesta didáctica de la teoría de probabilidades. En el capítulo 3 profundizamos en dichas consideraciones para poder establecer los elementos básicos de una educación probabilística eficaz.

Ya hemos comentado que de la revisión de la literatura de investigación, se desprenden dos tipos de estudios. El primer tipo describe cómo piensan las personas, el segundo tipo se interesa en cómo influir desde la educación en lo que la gente piensa. El primer tipo investiga la génesis de la idea de azar, las intuiciones primitivas de probabilidad y estadística, las concepciones erróneas, los sesgos de razonamiento y, en general, la comprensión probabilística de las personas. El segundo tipo pretende influir en esas intuiciones o concepciones, incluso cambiándolas cuando sea necesario y posible, por medio de la instrucción. El primer tipo de estudios lo han realizado fundamentalmente psicólogos (Hogarth, 1987; Kahneman, Slovic y Tversky, 1982; Piaget e Inhelder, 1951) y el segundo tipo expertos en didáctica de la matemática (Engel, 1988; Shaughnessy, 1981 y 1985, 1992); bien es verdad que también hay psicólogos que se han interesado por las cuestiones de entrenamiento en razonamiento probabilístico (Fischbein, 1975, 1987; Nisbett, Fong, Lehmean y Cheng, 1987; Well, Pollatsek y Boyce, 1990).

Pues bien, las perspectivas del observador y el interventor, según términos utilizados por Shaughnessy (1992), proporcionan una base excelente para la cooperación de modelos teóricos y metodologías de investigación. Sin embargo ha habido poca comunicación entre ambos enfoques y en todo caso ha sido unidireccional ya que si bien algunos investigadores en didáctica de las probabilidades están influidos por las investigaciones de los psicólogos, el proceso inverso parece que se ha dado menos. En la investigación que sustenta la propuesta didáctica que presentamos en este libro (Sáenz, 1998) hemos intentado compaginar estas dos diferentes tradiciones de tal modo que utilizamos la perspectiva del observador para comprender el pensamiento probabilístico de los sujetos y la perspectiva del interventor para diseñar un método de enseñanza basado precisamente en ese pensamiento.

Hablemos ahora, brevemente, desde la perspectiva del interventor. Las distintas posturas que se dan en relación a la didáctica de las matemáticas responden a las diversas concepciones que se tienen de la disciplina. Una concepción, dominante entre los matemáticos y los profesores de matemáticas (aún a veces de modo implícito), intenta reducir las matemáticas a una teoría ideal que viene dada por un sistema deductivo que consiste en un conjunto de proposiciones verdaderas (axiomas) como punto de partida y que transmite la verdad al resto del sistema mediante las reglas de la inferencia lógica. Lakatos (1981) llama a este modelo ideal Sistema Euclídeo y lo critica, argumentando que después de la conjetura de Gödel la tesis de la verdad absoluta en matemáticas no se sostiene. Apoyándose en diversos filósofos de la matemática como Russell o Mostowski, defiende un modelo cuasi-empírico para las matemáticas en donde los axiomas son explicados por el resto del sistema y no al revés como ocurre en los sistemas euclídeos. Al presentar la matemática como una teoría cuasi-empírica está admitiendo que las matemáticas, como las ciencias físicas, están basadas y contrastadas en la práctica.

Otra cuestión que interesa señalar es que las formalizaciones que se han hecho de las distintas ramas de las matemáticas, desde la geometría de Hilbert hasta la axiomática de Zermelo-Frankel para la teoría de conjuntos, se presentan como un todo ya estructurado en el que no se vislumbra el camino que se siguió para su establecimiento; una teoría cuasi-empírica permite superar este estado de cosas ya que presenta sincrónicamente todos los procesos que en el devenir histórico condujeron a la configuración actual de las matemáticas. Consideramos que esta caracterización que hace Lakatos de la matemática como teoría cuasi-empírica tiene profundas implicaciones didácticas. La metodología euclídea es primitiva en el sentido de que niega los procesos históricos y psicológicos mientras la metodología cuasi-empírica lleva a la proliferación de hipótesis alternativas, pruebas y refutaciones, con un gran poder heurístico y didáctico.

La otra columna que sustenta nuestra propuesta didáctica es el enfoque constructivista del aprendizaje. Siempre se dice que si nos obligaran a resumir en una sola frase la idea central del constructivismo habría que citar a Ausubel, Novak y Hanesian (1978, p.1):

> *«Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averigüese esto y enséñese en consecuencia».*

Pero en cuanto se intenta profundizar en el significado del concepto aparecen las distintas interpretaciones o formas de «averiguar lo que el alumno ya sabe», que a su vez llevan a distintas opciones curriculares.

Pozo et al. (1991) establecen una distinción entre dos sentidos o acepciones distintas del constructivismo. Uno es un constructivismo estático según el cual la percepción o comprensión que una persona tiene de un hecho dado depende no sólo del hecho percibido sino depende fundamentalmente de las ideas que esa persona tenga en el dominio al que pertenece el hecho. Otro es un constructivismo dinámico según el cual no sólo construimos el mundo en el que vivimos a partir de nuestras ideas, concepciones y estructuras cognitivas sino que también construimos esas ideas, concepciones y estructuras que, por tanto, estarán en continuo cambio.

Buena parte de la investigación sobre la enseñanza de las ciencias ha estado basada en el primer tipo o principio del constructivismo, constructivismo estático, que si bien aporta un buen catálogo de ideas previas de los alumnos sobre los fenómenos científicos no resuelve el problema de conseguir que los alumnos desarrollen los núcleos conceptuales de la ciencia a partir de sus concepciones previas, es decir, que aprendan ciencia. Según el constructivismo dinámico el aprendizaje es siempre el producto de la interacción de la idea previa activada y la nueva información proporcionada por la actividad de aprendizaje. Para que haya algún cambio en la idea previa debe producirse algún tipo de conflicto cognitivo así como una toma de conciencia por parte del alumno con respecto a sus propias ideas y a su diferencia con otros modelos conceptuales alternativos.

Nuestra estrategia didáctica para el cambio conceptual se basa en el constructivismo dinámico y como tal, parte del conocimiento de las ideas propias de los alumnos, diseña situaciones para que los alumnos tomen conciencia de sus propias ideas y no pretende suprimir o sustituir sin más las ideas de los alumnos sino desarrollar conceptos científicos a partir y a través de ellas. Entendemos el cambio conceptual como un proceso progresivo, gradual, que utiliza los contraejemplos y los datos en contra para ayudar a tomar conciencia de las debilidades de las concepciones alternativas de los alumnos y presentamos explícitamente la teoría que resulta más explicativa para conseguir un verdadero cambio conceptual.

Nos atrevemos a postular que una estrategia didáctica con estos presupuestos no sólo favorece el cambio conceptual sino también un cambio actitudinal. Se ha dicho muchas veces (Aiken, 1976; Gairín, 1987) que la actitud hacia la matemática tiene una relación directa con la aptitud para la matemática y se ha discutido en qué sentido va la flecha causal, si desde la actitud hacia la aptitud o viceversa. Si somos conscientes de nuestra resistencia emocional a cambios bruscos en nuestro estatus cotidiano (manifestación paralela a la de la aversión al riesgo, que se estudia en la teoría de la decisión conductual) tendremos que reconocer la resistencia emocional de los estudiantes a un cambio conceptual que le exige el abandono de unas ideas, quizá erróneas desde la perspectiva científica, pero funcionales fuera del aula. Este reconocimiento lo incorporamos a nuestra metodología y esperamos mejorar así la actitud y la aptitud de nuestros alumnos para las matemáticas.

Pues bien, a la luz de estos dos principios, el cuasi-empírico y el de cambio conceptual, diseñamos el currículo y el programa de aprendizaje que se presentan en el capítulo 4, y los materiales didácticos que se presentan en la segunda parte de este libro.

Por último, decir que en un trabajo dedicado al azar y la probabilidad no podía faltar un juego de azar como homenaje a los pioneros de la ciencia probabilística (y a Eric Rohmer, el cineasta del azar). Por eso proponemos el juego equitativo de los n azares: en cada capítulo de este libro figura un azar; el lector, en pago al placer experimentado en su lectura (del libro o de los azares, supongo que algo lúdico habrá), debe enviar un nuevo azar al autor o si lo prefiere puede enviar $2^n$ Euros (el azar de Europa) siendo n el número de azares que hasta ese momento se lleven recogidos.

## CAPÍTULO 2
# LAS IDEAS PROBABILÍSTICAS DE LOS ESTUDIANTES. EL PROBLEMA DE SU INVESTIGACIÓN

**Segundo azar: De la ciencia**

*«Dios no juega a los dados con el universo»*

*Albert Einstein».*

*«Dios no sólo juega a los dados, sino que a veces los arroja donde no podemos verlos»*

*Stephen Hawking*

## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis del desarrollo histórico-matemático de la teoría de probabilidades y de las ideas filosóficas y psicológicas sobre el razonamiento probabilístico muestra el carácter poliédrico de la probabilidad (Sáenz, 1995). La estructura axiomática de Kolmogorov, a la que se suele reducir la teoría de probabilidades que se enseña en niveles elementales, no refleja la complejidad de las ideas estocásticas. La abundancia de paradojas y falacias no sólo se dió en el desarrollo histórico de la disciplina, aparece también en el proceso de aprendizaje individual. Las concepciones previas de los estudiantes, a veces son obstáculos para comprender y aceptar las ideas normativas.

En este capítulo abordaremos dos cuestiones:

1. La catalogación de las principales concepciones alternativas de los estudiantes de las que ha informado la investigación empírica en comprensión probabilística;
2. El análisis crítico de algunas tareas que se han utilizado en esta investigación y de las conclusiones extraídas de los resultados.

Revisaremos los trabajos empíricos más representativos. Green (1982) diseñó su propio test de conceptos de probabilidad y analizó las respuestas de una muestra representativa de casi 3000 adolescentes ingleses. Varios de sus ítemes son meras reproducciones de las tareas originales piagetianas (Piaget e Inhelder, 1951) planteadas en versiones de «lápiz y papel»; en este sentido, Green se preocupa sobre todo del concepto de probabilidad a priori, el enfoque clásico de la probabilidad. Algunos de sus resultados soportan la teoría piagetiana de la evolución en estadios de la comprensión probabilística. Con todo, también incluye cuestiones que exploran otros enfoques de la probabilidad, como la probabilidad subjetiva.

Fischbein y colaboradores han realizado numerosas y valiosas aportaciones a la comprensión de la probabilidad por los estudiantes. El libro de Fischbein de 1975 se ha convertido en un texto clásico para estudiar la evolución de la cognición probabilística, desde una perspectiva que permite la exploración de los fundamentos y precursores intuitivos de los conceptos formales. En un estudio exploratorio, Fischbein y Gazit (1984) encuentran que la enseñanza de la probabilidad mejora algunas intuiciones probabilísticas, por ejemplo, las que tienen que ver con el efecto de representatividad y el efecto de recencia positiva. En un trabajo posterior, Fischbein, Nello y Marino (1991) identifican varios factores que afectan positiva o negativamente los juicios probabilísticos en niños y adolescentes.

Shaughnessy (1985, 1992) ha analizado las concepciones erróneas en probabilidad que tienen su origen en los heurísticos de juicio (Kahneman et al., 1982) y ha diseñado metodologías de enseñanza para adolescentes con el objetivo de superar tales errores conceptuales. Dentro de esta misma perspectiva de los sesgos cognitivos son importantes los trabajos de Falk (1983, 1986, 1989) sobre las dificultades que tienen los estudiantes para comprender los conceptos de independencia y probabilidad condicionada. También revisaremos las investigaciones de Pollatsek y colegas (Pollatsek, Lima y Well, 1981) sobre la comprensión de la relación entre los conceptos de media muestral y media poblacional.

Nos parece muy sugerente la revisión de la investigación empírica en comprensión probabilística realizada por Borovcnik y Bentz (1991). Estos autores han proporcionado un detallado análisis de tarea de varios ítemes usados por los investigadores que acabamos de citar. Con ello han rendido un gran servicio a la investigación, alertando de las numerosas interpretaciones posibles que pueden hacer los estudiantes de una tarea y sugiriendo interpretaciones alternativas de las respuestas de los sujetos. Su revisión enfatiza la complejidad de algunas de las tareas que se utilizan en la investigación empírica y analiza cómo cambios leves en el enunciado de las tareas pueden conducir a diferentes soluciones de los alumnos. Incluiremos su análisis en la revisión de varias tareas prototípicas de la investigación en el campo.

Ellos mismos resumen los aspectos cruciales para interpretar los resultados de la investigación y señalan dificultades de comunicación entre el investigador y el sujeto que tienen implicaciones educativas en cuanto que pueden servir de guía para la enseñanza. Argumentan que la comunicación en clase es similar a la situación experimental y por tanto su análisis puede mejorar también la enseñanza real. Los analizaremos simultáneamente con la revisión de las tareas. Ahora los enumeramos:

- Condiciones externas de las entrevistas.
- Reconstrucción del problema y su verbalización.
- Tipo de situaciones aleatorias implicadas (tareas artificiales o pseudo-reales).
- Espectro limitado de conceptos de probabilidad: casi siempre, enfoque de simetría.
- Estrategias para resolver vs conceptos para percibir un problema.
- Patrones de explicación de las concepciones erróneas: heurísticos vs sesgos.

Sin embargo, Bentz y Borovcnik han ido demasiado lejos afirmando que no hay evidencia directa para las conclusiones alcanzadas en las investigaciones empíricas que han revisado. A nuestro juicio, esta afirmación es una distorsión e interpretación errónea de dicha investigación. Si el objetivo de un investigador es descubrir intuiciones probabilísticas primarias, brutas, previas a la instrucción, es difícil imaginar una metodología que no presente algunas tareas a los estudiantes y después intente interpretar sus respuestas. No queda claro qué tipo de variaciones o modificaciones metodológicas proponen Bentz y Borovcnik. En todo caso, argumentan que las respuestas obtenidas con una metodología como la utilizada, pueden no representar los procesos de pensamiento de los estudiantes o bien porque el lenguaje les puede confundir, o bien porque no saben bastante acerca de la probabilidad o bien porque hay una interpretación alternativa de los datos que el investigador no tiene en cuenta.

Como conclusión del presente capítulo exponemos la necesidad y las dificultades de establecer un modelo de desarrollo conceptual probabilístico y las aportaciones que en este sentido puede hacer la perspectiva de procesamiento adaptativo de Payne, Bettman y Johnson (1993) desde el campo de la teoría de la decisión conductual. Este enfoque comparte muchos puntos con la novedosa propuesta de Anderson (1990) que estudia el pensamiento desde el carácter adaptativo que posee y con la audaz reflexión de Penrose (1991) sobre la naturaleza no-algorítmica de ciertos aspectos del conocimiento. Nos atrevemos a proponer el sistema de ideas probabilísticas de los adolescentes al que llegamos en nuestra investigación (Sáenz, 1995).

## 2. PRINCIPALES LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE LAS IDEAS PROBABILÍSTICAS DE LOS ADOLESCENTES

### 2.1. La investigación de Green

En lo que ha sido el estudio más amplio emprendido para investigar los conceptos de probabilidad de adolescentes, Green (1982,1987) estudió lo que sabían 3.000 estudiantes en Gran Bretaña entre 11 y 16 años sobre conceptos de probabilidad y lo puso en relación con su nivel de desarrollo piagetiano. Las tareas de Green consistían en diagramas de árbol, representaciones visuales de aleatoriedad, ruletas y tareas con urnas y canicas. La mayoría de los ítemes de Green son de elección múltiple y aunque pidió a sus estudiantes que escribiesen razones de sus elecciones, esta información resultó muy incompleta y no demasiado útil para clarificar el pensamiento de los estudiantes. En todo caso, Green pinta un cuadro nada prometedor de la situación estocástica en las escuelas inglesas.

Hallazgos o conclusiones de su investigación:

*1.* En relación a la teoría piagetiana, Green encontró que la mayoría de los jóvenes, incluidos los de 16 años, no habían alcanzado el estadio de las operaciones formales. Aunque un 75% de los alumnos resolvieron bien una tarea combinatoria correspondiente al estadio de las operaciones concretas (permutación de tres objetos) sólo un 12% y un 4% resolvieron bien los ítemes de combinatoria correspondientes al estadio evolutivo formal (permutaciones de cuatro y cinco objetos).

*2.* Green afirma que los alumnos entre 11 y 13 años muestran patrones de respuesta similares y su rendimiento en el test es inferior a los alumnos en un rango de edad 14-16 años, aunque no presenta el análisis estadístico.

*3.* El estilo de enseñanza empleado, que Green define en un continuo «centrado en el profesor... aprendizaje individualizado», no es un factor significativo en el rendimiento en el test.

*4.* Pobre habilidad verbal de los alumnos para describir correctamente situaciones probabilísticas. No desarrollan espontáneamente significados comunes para términos que indican distintos grados de probabilidad.

*5.* Los estudiantes resuelven mucho mejor ítemes de tipo combinatorio que ítemes donde hay que utilizar proporciones. Emplean varias estrategias para resolver cuestiones de comparación de probabilidades y lo hacen con poca consistencia. Por ejemplo, en una serie de tareas similares en que tienen que comparar las posibilidades de extraer una bola negra de dos bolsas que tienen distintas composiciones de bolas negras y blancas, utilizan sobre todo y de manera poco consistente, estrategias de conteo (elegir la bolsa con más bolas negras) y estrategias aditivas (elegir la bolsa donde la diferencia entre bolas negras y blancas es mayor); la estrategia de proporción (elegir la bolsa donde la proporción entre bolas negras y blancas es mayor) sólo la usan los alumnos mayores y de más nivel intelectual.

*6.* Green encontró una pobre aplicación de los diagramas de árbol y de la ley de multiplicación de probabilidades.

*7.* Realizar inferencias desde un muestreo resulta difícil para los alumnos. Tienden a confiar en la idea abstracta de equiprobabilidad descuidando la situación aleatoria específica.

*8.* Se podría pensar que con el énfasis dado a la simetría en las matemáticas escolares, los alumnos tendrían pocas dificultades al abordar tareas donde la simetría fuese un factor fundamental para definir el espacio muestral. Esto no es así como vemos al analizar los ítemes 1 y 2 que vienen a continuación.

### *Nº1: Lanzamiento de una ficha (Green, 1982)*

*Una pequeña ficha redonda es **roja** en un lado y **verde** en el otro. Se sostiene con la cara **roja** hacia arriba y se lanza alto en el aire. Gira y después cae. ¿Qué lado tiene más probabilidad de caer de cara, o no hay diferencia? Señala la respuesta correcta:*

*A. El lado rojo tiene más probabilidad*
*B. El lado verde tiene más probabilidad*
*C. No hay diferencia*
*D. No sé*

**RESULTADOS**

| Edad | A | B | C* | D |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 18 | 28 | **45** | 9 |
| 16 | 11 | 12 | **74** | 4 |
| Global | 14 | 20 | **61** | 5 |

La respuesta que se considera correcta se ha marcado con un asterisco. Los números indican porcentajes de cada respuesta por edad, es decir, el 45% de los alumnos de 11 años y el 74% de los alumnos de 16 años eligen la respuesta (C) que es la que se considera correcta.

*Interpretación:*

El porcentaje de respuestas correctas de esta sencilla cuestión es relativamente bajo. Es llamativo el dato de que sólo el 45% de los alumnos de 11 años la contestaron correctamente. Se supone que la respuesta (B), superior en porcentaje a la (A), está inducida por el «efecto de recencia negativa». Con todo, en los alumnos de 16 años prevalece el enfoque de simetría.

Borovnick y Bentz (1991) discuten varias estrategias potenciales (aunque no afirman que estén todas en las mentes de los alumnos) que revelan la complejidad del ítem y de la interpretación de las respuestas, a pesar de su aparente simplicidad:

1. La estrategia normativa (ésta es la estrategia que lleva a la solución formalmente aceptada): Después de haber podado el problema de toda la información irrelevante se llega al espacio muestral S={V,R} y consideraciones de simetría conducen a una distribución uniforme que proporciona la respuesta (C).
2. Comprensión verbal: Los sujetos se fijan en el patrón de las palabras en negrita: 'rojo-verde-rojo' y llegan a la respuesta (B). En el mismo sentido, la cadena de asociaciones 'cara roja hacia arriba' + 'gira' + 'gira una vez', lleva a la misma respuesta (B).
3. Interferencia con el pensamiento causal: Si el lanzamiento de la ficha fuese un experimento físico entonces las mismas condiciones de realizar el

experimento llevarían a la misma caída cada vez. En este sentido, parece prometedor estudiar la física del lanzamiento de la ficha para poder predecir el resultado concreto bajo condiciones específicas. Sin embargo, la solución normativa probabilística implica desechar las características físicas con la excepción de la simetría de la ficha. El lanzamiento de una moneda o ficha se usa como un paradigma de la probabilidad 1/2; el problema es que esta probabilidad es un resultado poco útil en cuanto que no sirve para especificar el resultado de un ensayo concreto. La ficha puede caer o bien de cara o bien de cruz. Ambos resultados son igualmente impredecibles en el sentido que no hay procedimiento de conjetura que garantice el 100% de éxito, por tanto se elige la respuesta (C). El propio enunciado del ítem puede sugerir causalidad y en este sentido se puede esperar cualquier respuesta.

*4.* Conflicto reflexión-decisión: La reflexión del alumno finaliza con una estimación de 50 a 50, es decir $P(V)=P(R)=1/2$. Pero ¿Cuál de las respuestas elegir si se fuerza al alumno a hacerlo? El resultado de la reflexión no ayuda a la decisión real. Los autores ven una discrepancia entre concepto y estrategia y suponen que si un sujeto tiene realmente este conflicto ha de esperarse una de las respuestas (A), (B), o (D) y además si se le pide una justificación no la va a tener. Este conflicto es tanto más posible que ocurra cuanto más orientado hacia la acción esté el enunciado del ítem, por ejemplo, con preguntas del tipo: «¿Qué resultado esperas?» o «¿Por cuál resultado estarías dispuesto a apostar?».

*Implicaciones didácticas:*

Este ítem es muy apropiado para comprobar que las justificaciones probabilísticas son peculiares. Si $P(V)=5/6$ y $P(R)=1/6$, entonces hay una justificación intuitivamente comprensible para elegir V en el siguiente ensayo, pero si $P(V)=P(R)=1/2$ entonces se justifica con la misma fuerza la elección de V o de R. ¿Cómo puede una justificación para un suceso ser al mismo tiempo justificación para su negación?

La interferencia con el pensamiento causal es profunda. Los experimentos probabilísticos son replicables bajo las mismas condiciones como lo son los experimentos en ciencias experimentales. Sin embargo muestran muy distintas características: aunque las condiciones sean perfectamente reproducibles los resultados del experimento aleatorio pueden variar.

Hogarth (1987) enuncia una diferencia fundamental entre los pensamientos probabilístico y causal: el razonamiento causal es unidireccional por naturaleza; cuando se puede enunciar que X (por ejemplo, esfuerzo) precede y causa Y (por ejemplo, fatiga), no se puede mantener simultáneamente que Y causa X. En estadística, sin embargo, la relación entre X e Y se puede describir o discutir en cualquier dirección (de X a Y o de Y a X); además, ni X ni Y tienen prioridad temporal (pensemos en la correlación estadística entre dos variables, por ejemplo). Estepa (1995) analiza en profundidad la relación existente entre asociación estadística y casualidad. Tendremos ocasión de profundizar en este problema al analizar la tarea 6.

Hay un conflicto entre el concepto como un resultado de la reflexión y las estrategias de resolución de problemas como herramientas orientadas a una decisión para encontrar una solución concreta. Es diferente deliberar sobre pesos abstractos para las posibilidades que elegir una posibilidad como un resultado para el siguiente ensayo. Los procesos cognitivos implicados son distintos y llevan a diferentes resultados; si no se presta atención a los procesos cognitivos reales de los estudiantes se impide la comunicación necesaria entre profesor y alumnos en el aula.

Borovcnik y Bentz afirman que la comprensión verbal es débil y variable en cuanto que suaves cambios en el enunciado de un ítem pueden tener consecuencias imprevistas en su resolución. Hablar del proceso de enseñanza-aprendizaje supone que el concepto que el alumno aprende significativamente no depende sólo de lo que le enseña el profesor sino también de sus propias ideas previas sobre dicho concepto.

### ***Nº 2: Extracción de un nombre al azar (Green, 1982)***

*En una clase de matemáticas hay 13 chicos y 16 chicas. El nombre de cada alumno se escribe en un papelito. Todos los papelitos se ponen en un sombrero. El profesor extrae un papelito sin mirar. Señala la respuesta correcta:*

*A. Es más probable que el nombre sea de un chico que de una chica*
*B. Es más probable que el nombre sea de una chica que de un chico*
*C. Es igual de probable que sea el de un chico como de una chica*
*D. No sé*

**RESULTADOS:**

| Edad | A | B* | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 5 | **38** | 53 | 4 |
| 16 | 4 | **71** | 25 | 0 |
| Global | 4 | **53** | 42 | 2 |

*Interpretación:*

Es destacable el bajo porcentaje de respuestas correctas aunque es verdad que este item es un poco más difícil que la tarea nº 1 si consideramos que aquí se pueden considerar dos tipos de simetría, los niños considerados uno a uno y los niños clasificados en categorías de niños y niñas. Al utilizar esta tarea, Kapadia (1988) encuentra una diferencia significativa de sexo: el 81% de los chicos y el 61% de las chicas responden correctamente a este item. Esto parece implicar que la pseudo-realidad del contexto lleva a las chicas a usar en mayor medida sus propias nociones de sentido común que surgen con la experiencia cotidiana.

Borovcnik y Bentz (1991) discuten las estrategias potenciales de los alumnos para resolver este ítem:

*1.* Estrategia normativa: La consideración de la simetría en el espacio muestral $S=\{m_1, ..., m_{16}, v_1, ..., v_{13}\}$, donde m significa mujer y v varón, lleva a la respuesta (B).
*2.* Estrategia basada en otra simetría: La consideración de la simetría en $S^*=\{M,V\}$, lleva a escoger la respuesta (C).
*3.* Pseudo-realidad del contexto: El enunciado del item puede inducir a los sujetos a utilizar la información del item sólo si les parece relevante. En este sentido, no se tienen en cuenta intencionadamente los numeros 13 y 16 porque producen proporciones de 0.45 y 0.55 que no difieren demasiado de la probabilidad previa 0.5. Por otra parte, las características pseudo-reales podrían inducir al sujeto a la utilización de otras estrategias de resolución de problemas o a una reconstrucción mental diferente del item del tipo «hay aproximadamente el mismo número de chicos y chicas en el mundo» (sin reconocer los números 13 y 16) o «en este mundo se prefiere a los chicos» o «hay más chicos en mi clase». Tales reconstrucciones llevan a desechar inconscientemente información relevante.
*4.* Pensamiento causal: Se extrae el papelito o de un chico o de una chica, para cualquiera de ambos sucesos es completamente imposible predecir con certeza el resultado real; esta ignorancia simétrica lleva a la respuesta (C).
*5.* Conflicto reflexión-decisión: la conclusión '50 a 50' o 'es más probable el papelito de chica' (reflexión) conjuntamente con el reconocimiento de que estará escrito sólo un símbolo en el papelito que se extraiga realmente (acción), lleva a que los sujetos contesten (A), (B) o (D). Una estrategia no probabilística puede determinar la elección real, por eso pedir a los sujetos razones de su respuesta puede ser inútil.

*Implicaciones didácticas:*

Borovcnik y Bentz hacen una clarificadora distinción entre las dos categorías en que se pueden clasificar los métodos usados para resolver este problema. Una se refiere al proceso de abstracción que reconoce hasta que punto el experimento es simétrico, es decir cuál es el espacio muestral elegido; la otra categoría se refiere a las destrezas numéricas necesarias para la solución que incluye el uso de fracciones.

El proceso de abstracción es predominante en las tareas 1 y 2 en cuanto que los números implicados en ellas son sencillos. Hay una serie de cinco ítemes en la investigación de Green (1982) relacionados con la comparación de probabilidades en dos urnas; la situación en esos ítemes es altamente preestructurada y por tanto el proceso de abstracción requerido es trivial y la principal fuente de problemas viene de las destrezas numéricas requeridas. En concreto, la tarea consiste en que el alumno tiene que decidir en cual de dos urnas A o B, que contienen un número variable de bolas negras (n) y blancas (b), hay más posibilidades de extraer una bola negra. Las cinco situaciones son las siguientes:

| | Situación 1 | Situación 2 | Situación 3 | Situación 4 | Situación 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Urna A | 3n, 1b | 5n, 2b | 2n, 2b | 12n, 4b | 3n, 1b |
| Urna B | 2n, 1b | 5n, 3b | 4n, 4b | 20n, 10b | 6n, 2b |

Sólo el 20% de la muestra respondió correctamente a los 5 ítemes. Si los números implicados son sencillos (como en la situación 1), el porcentaje de respuestas correctas puede superar el 90% incluso en alumnos de 11 años, lo cual indica un rendimiento muy superior al de los problemas 1 y 2; el porcentaje baja a medida que aumenta la complejidad de los números (como en la situación 4).

Hay que decir que se han criticado los problemas de urnas por su artificiosidad y como consecuencia se han recomendado en la enseñanza problemas reales. Muchas veces, sin embargo, estos problemas son sólo pseudo-reales (por ejemplo, el ítem 2, que acabamos de realizar) y puede que no sean mejores que los problemas artificiales sino simplemente diferentes. Se deben usar en la enseñanza pero hay que prestar atención a sus características. Hay otro problema que es consecuencia del tipo específico de conocimiento que proporcionan las proposiciones probabilísticas. Las experiencias aleatorias se explican generalmente como experimentos en los que se carece de cualquier conocimiento para predecir el resultado específico. La completa falta de habilidad en el nivel intuitivo se traduce o modela por equiprobabilidad en el nivel de la teoría. El no tener razón suficiente para preferir uno de los resultados es el principio de Laplace que aplica iguales probabilidades a todas las posibilidades de un experimento aleatorio. Un sujeto podría elegir la respuesta de igual probabilidad a pesar del número diferente de chicos y chicas y justificarla con un argumento del tipo: «es una cuestión de suerte» o «puede ser cualquiera de las dos cosas», tal como Kapadia (1988) encontró en su investigación. No se puede igualar la completa ignorancia, en el sentido de ser incapaz de predecir resultados específicos, con la simetría que exige la regla de Laplace; la enseñanza tiene que clarificar esta cuestión.

### ***Nº 3: Lanzamiento de monedas (Green,1982)***

*Una moneda ordinaria es lanzada cinco veces y todas las veces aparece 'cara'. Señala la frase correcta:*

*A. La próxima vez es más probable que salga 'cara' de nuevo*
*B. la próxima vez es más probable que salga 'cruz'*
*C. La próxima vez, 'cara' es tan probable como 'cruz'*
*D. No sé*

**RESULTADOS:**

| Años | A | B | **C*** | D |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 14 | 14 | **67** | 5 |
| 16 | 10 | 9 | **80** | 1 |
| Global | 11 | 12 | **75** | 2 |

*Interpretación:*

La conclusión de Green sobre las respuestas no correctas de los niños es la atribución de un pensamiento erróneo, sesgado, pero no da interpretación detallada de esta idea. Kahneman et al (1982) atribuyen la falacia del jugador (solución B) al heurístico de representatividad. Con todo, los resultados de Green indican una relativa debilidad de este sesgo.

Borovcnik y Bentz (1991) analizan las estrategias potenciales:

1. Estrategias normativas: La hipótesis P('cara en un lanzamiento')=1/2 y la información muestral CCCCC se combinan para dar una nueva evaluación de P('cara en el 6º lanzamiento')=1/2. Decimos que una hipótesis es fuerte si hay una fuerte evidencia o creencia en que es verdadera en la situación específica. Claramente, P('cara')=1/2 es una hipótesis fuerte para el lanzamiento de una moneda; junto con la suposición de independencia produce la respuesta (C). Si la creencia en esta hipótesis es más débil (por estar jugando con un tahur, por ejemplo), entonces se debe aplicar una prueba de contraste de hipótesis.
2. Estrategias simétricas ingenuas: Una simetría ingenua respecto al espacio muestral {C,X} lleva a la respuesta (C) pero la simetría relativa a la muestra real lleva a la respuesta equilibradora (B).
3. Efecto de trampa: La información sesgada de 5 caras puede inducir a los sujetos a reformular el enunciado del item en un sentido no probabilístico. La trampa parece muy plausible y por ello los estudiantes no sabrían qué responder.
4. Conflicto reflexión-decisión: Si el niño finaliza con una evaluación 50:50, el resultado de la reflexión no le da clave para la predicción del sexto ensayo. Sin embargo, el niño puede sentirse urgido a elegir una posibilidad específica C o X y replantear la cuestión en una dirección orientada hacia una decisión tal como «¿ que lado mostrará la moneda en el siguiente lanzamiento?».
5. Reconocimiento de patrón: Los patrones lógicos en la muestra presentada se pueden usar para hacer predicciones. Dependiendo del patrón específico, son posibles las respuestas (A) o (B). El patrón lógico que conduce a (B) parece más atractivo a bastantes personas (falacia del jugador).

*Implicaciones didácticas:*

Borovcnik y Bentz concluyen que la cuestión de cómo un sujeto reconstruye un ítem no es trivial y además es crucial para cualquier interpretación de una respuesta. Incluso en contextos artificiales simples (como el ítem 3), una idea engañosa o una reformulación orientada a la acción puede conducir en la mala dirección de respuesta. Los profesores necesitan una clara visión de varias posibles estrategias y no deberían perseguir únicamente la solución que se presume normativa. La tarea nº 3 muestra claramente que hay diferentes estrategias normativas y si se ignora este hecho puede romperse la comunicación necesaria profesor-alumno. Además, este experimento ayuda a clarificar diferentes tipos de información probabilística. ¿Cómo se podría distinguir entre la información P(H)=1/2 en monedas en general y en esta moneda concreta de la que tenemos la información muestral CCCCC? Esto nos lleva directamente a la estadística inferencial y a las pruebas de contraste.

## 2.2. Las investigaciones empíricas de Fischbein

Estas investigaciones (1975, 1987, 1991) constituyen un conjunto muy rico de hallazgos sobre el pensamiento probabilístico de los estudiantes en un rango de edad entre 11 y 17 años y sugerencias para la enseñanza, que resumimos a continuación:

*1.* Los alumnos admiten una ambigüedad en los conceptos de suceso seguro y suceso posible: «obtener menos de un siete al lanzar un dado» es un suceso seguro y también posible; este hecho les conduce a identificaciones abusivas entre ambos conceptos.

*2.* Los fenómenos aleatorios pueden ser controlados por las personas que gracias a su destreza pueden aumentar la probabilidad de ciertos sucesos.

*3.* Los axiomas de la teoría de probabilidades ($P(A) \geq 0$; $P(S)=1$; $P(AUB)=P(A)+P(B)$ donde A y B son sucesos incompatibles) derivan de una fuente intuitiva primaria. Por ejemplo, ningún sujeto en ninguna circunstancia usó un número negativo para representar la probabilidad. También hay una intuición primaria favorable para la regla de Laplace.

*4.* En las experiencias aleatorias de varias pruebas es difícil establecer el espacio muestral, sobre todo por dificultades combinatorias. Pocos alumnos comprenden que hay que considerar el orden de los resultados elementales que constituyen los sucesos: el par (5,6) es un resultado distinto que el par (6,5), en el lanzamiento de dos dados. Tendremos ocasión de revisar esta tarea posteriormente.

*5.* Cuando la variable aleatoria es la suma de puntos al lanzar dos dados, la mayoría de los sujetos no comprenden la distribución de probabilidad que se origina y eligen la suma mayor como el resultado de mayor probabilidad.

*6.* La multiplicación de probabilidades cuando se trata de la intersección de dos sucesos independientes (extracciones sucesivas con reemplazamiento de una canica de una bolsa que contiene una canica negra y una canica blanca) no la utilizó espontáneamente ningún alumno de 13 años y la utilizaron 2 sujetos (el 10%) de un grupo de alumnos que no estudiaba matemáticas y 8 sujetos (el 40%) de un grupo que sí estudiaba matemáticas, ambos grupos de 17 años.

*7.* La mayoría de los sujetos comprenden intuitivamente que, en la situación aleatoria anterior, P(negra, negra) < P(negra) pero tienen dificultades para cuantificar que P(negra) = 2xP(negra, negra).

*8.* Una vez ejercitada la ley de la multiplicación de probabilidades y utilizada correctamente en tareas con dados, pocos sujetos transfirieron la destreza al cálculo de la probabilidad de la extracción de 3 manzanas maduras de una cesta que contiene un 90% de manzanas maduras y un 10% de manzanas verdes; sólo en el grupo de matemáticas de 17 años, el 60% de los sujetos hizo el cálculo correcto.

9. Fischbein había supuesto que una vez que una intuición primaria correcta se había hecho explícita al alumno y asociada con el correspondiente cálculo normativo, se produciría el establecimiento de una estructura intelec-

tual capaz de transferirse a otras tareas. Los datos en la experiencia de la multiplicación de probabilidades desmienten este supuesto.

10. Parece que no hay mejora significativa de la comprensión probabilística con la edad salvo en la amplitud de la transferencia, una vez que una regla de cálculo se aprende en una situación determinada.
11. La superioridad del grupo de alumnos de matemáticas apareció cuando se les indujo a transferir una operación aprendida. Fischbein establece la siguiente hipótesis: la aptitud para la matemática presupone la habilidad para adaptar un procedimiento de cuantificación a intuiciones preexistentes pero no supone necesariamente una mayor capacidad para generar intuiciones probabilísticas correctas.

Resumiendo a Fischbein diríamos que la enseñanza convencional establece pocas conexiones entre las intuiciones primarias y el modelo matemático. Esto es crítico en el caso de la probabilidad porque no hay experiencias directas que ayuden a los alumnos a establecer esas conexiones por sí mismos. Para que los alumnos comprendan los conceptos matemáticos necesitan ver cómo las matemáticas reconstruyen sus concepciones, desde vagas intuiciones primarias a intuiciones secundarias que emergen de una teoría formalizada.

Como ejemplo de su trabajo revisemos una tarea utilizada por Fischbein que muestra que el concepto de suceso compuesto presenta bastantes dificultades, sobre todo en relación con el papel del orden en la generación de resultados diferentes; es un problema de raigambre histórica (Sáenz, 1995).

***Nº 4: Lanzamiento de dados y de monedas (Fischbein, Nello y Marino, 1991)***

*a) Vamos a considerar el lanzamiento de dos dados. ¿ Es más probable obtener 5 con un dado y 6 con el otro, o 6 con ambos dados? ¿O la probabilidad es igual en ambos casos?*

*b) Cuando lanzamos dos monedas ¿ Qué resultado es más probable: conseguir «cara» con una moneda y «cruz» con la otra, o conseguir «cara» con las dos monedas; o hay igual probabilidad para ambos resultados ?*

**RESULTADOS (EN PORCENTAJES):**

| Edad/Instrucción previa en probabilidades | Sin respuesta | P(6,6)<P(5,6 ó 6,5) | Concepción errónea | Errores Tipo I | Errores Tipo II |
|---|---|---|---|---|---|
| 9-11 (S.I) | 14.7 | **22.6** | 62.7 | 73.4 | 12.5 |
| 11-14 (S.I) | 18.7 | **18.7** | 62.6 | 89.6 | 4.6 |
| 11-14 (C.I) | 12.3 | **9.2** | 78.5 | 92.2 | 5.9 |

| Edad/Instrucción previa en probabilidades | Sin respuesta | P(C,C)<P(C,X ó X,C) | Concepciones erróneas | Errores Tipo I | Errores Tipo II |
|---|---|---|---|---|---|
| 9-11 (S.I) | 13.8 | **21.1** | 65.1 | 63.3 | 5.6 |
| 11-14 (S.I) | 16.5 | **10.1** | 73.4 | 73.4 | 2.9 |
| 11-14 (C.I) | 20 | **18.5** | 61.5 | 87.5 | 2.5 |

(S.I) significa «sin instrucción previa» y (C.I) significa «con instrucción previa». Fischbein et al. (1991) definen dos tipos de concepciones erróneas: En la primera tabla, el error de tipo I significa: la misma probabilidad de obtener la pareja (6,6) que la pareja (5,6); el error de tipo II significa que la pareja (6,6) es más probable. En la segunda tabla, el error de tipo I significa: las parejas CX y CC son equiprobables y el error de tipo II significa que es más probable conseguir la pareja CC. Los porcentajes de ambos tipos de concepciones erróneas se calculan en base al número total de errores.

*Interpretación:*

Analizando la naturaleza de las concepciones erróneas, se puede observar que casi todas las respuestas afirman que los dos resultados tienen la misma probabilidad. La idea de que la probabilidad de la pareja 5-6 es el doble que la probabilidad de la pareja 6-6 sólo se puede comprender si se tiene alguna representación del correspondiente espacio muestral. Se podría asumir que algunos alumnos consideraron los pares como pares concretos ordenados y por tanto la respuesta correcta es que las parejas (5,6) y (6,6) son equiprobables; esto también es verdad para las parejas (C,X) y (C,C). Pero esto no fue el caso. Analizando las justificaciones, quedó claro que los alumnos no consideraron ningún orden y que la respuesta de equiprobabilidad, muy frecuente, se justificaba por el efecto del azar: «la probabilidad es la misma porque se puede obtener 6-6 y 6-5 o ninguno de estos resultados», «en mi opinión la probabilidad es la misma porque el número obtenido es una sorpresa», «la probabilidad es la misma, porque no se puede determinar algo que depende sólo en el movimiento de un pequeño objeto como un dado, que es lanzado por cada persona de diferente manera». El primero de los dos problemas ha sido utilizado también por Lecoutre y Durand (1988) con resultados muy similares.

Es interesante considerar los resultados obtenidos y las justificaciones dadas por los alumnos de más edad que recibieron una cierta instrucción en probabilidades. Desde luego, es muy sorprendente el dato de que consiguieron un porcentaje de respuestas correctas menor que los alumnos más jóvenes que no recibieron ningún tipo de instrucción en probabilidades. Al considerar sus justificaciones se puede explicar el por qué de ese hecho sorprendente: «cada dado es independiente del otro. La probabilidad de obtener con un dado un número determinado es 1/6 y es la misma probabilidad de obtener el mismo número con el otro dado». Está claro que este estudiante fue instruido en probabilidades. Utilizó las nociones básicas que le enseñaron: el concepto de independencia y el hecho de que las seis caras son equiprobables. Combinando esas dos ideas y considerando los dos posibles resultados 5 y 6 separadamente (sucesos simples) se llega a la conclusión de que las parejas 5-6 y 6-6 tienen la misma probabilidad.

Se utilizan, pues, dos ideas erróneas para justificar la igualdad de probabilidades de conseguir 6-6 y de conseguir 5-6: a) la idea más primitiva de que ambos sucesos son el efecto del azar y por tanto no hay razón para esperar uno más que otro; b) la idea más sofisticada de que 5 y 6 son resultados equiprobables y por tanto cada suceso que representa una combinación binaria de ellos, tiene la misma probabilidad.

En cuanto a los sujetos que afirman que la pareja (6,6), o la (C,C), es menos probable, la mayoría hace, simplemente, la consideración empírica de que los resultados idénticos aparecen con menor frecuencia que los resultados diferentes; con todo, hay algunos alumnos de 13 o 14 años que recibieron alguna instrucción en probabilidades que fueron capaces de encontrar la respuesta correcta y justificarla formalmente: «es más probable obtener un 5 y un 6 porque hay dos posibilidades (5,6) y (6,5) mientras (6,6) representa sólo una posibilidad».

*Implicaciones didácticas:*

No hay una comprensión natural de que en un espacio muestral, los resultados posibles se deben distinguir y contar de forma separada si el orden de sus componentes elementales es diferente. Nuestra intuición se sorprende por este descubrimiento. ¿Deberíamos concluir que la idea de un suceso compuesto y la evaluación de su probabilidad carece de cualquier base intuitiva? La respuesta es negativa. Con otros tipos de problemas muchos sujetos comprenden la función del correspondiente espacio muestral en la determinación de la probabilidad de un suceso compuesto.

Hay en la investigación de Fischbein et al.(1991) dos tipos de problemas que apoyan esta conclusión, es decir, indican claramente que, en ciertas circunstancias, los sujetos son capaces de evaluar espontáneamente la probabilidad de un suceso compuesto. El primer caso es cuando el problema de las parejas de dados o monedas se considera en una forma general: «¿Al lanzar dos dados es más probable conseguir dos números diferentes o conseguir los mismos números?»; en esta forma general, la cuestión genera muchas más respuestas correctas y las justificaciones hacen referencia al correspondiente espacio muestral aunque, con frecuencia, descrito incompletamente. El segundo tipo de problemas son aquellos en que hay que comparar las probabilidades de conseguir ciertos números obtenidos por suma de las caras cuando lanzamos dos dados. Hablando de modo general, bastantes sujetos parecen ser capaces de establecer la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria. Con todo, el hecho de que un número es mayor se asocia frecuentemente con una mayor probabilidad sin utilizar otra justificación que la magnitud del número: por ejemplo, se considera más probable obtener la suma 10 que la suma 7.

Un importante factor que influye en algunas de las reacciones de los sujetos (incluso en adolescentes) tiene que ver con la capacidad de sintetizar lo necesario y lo aleatorio en el concepto de probabilidad. Este factor ya ha sido analizado por Piaget e Inhalder (1951) y por Fischbein (1975). La idea de que un resultado de un experimento estocástico depende sólo del azar, sin importar las condiciones del experimento, hace cualquier predicción infundada. Este es un hallazgo muy importante y debe ser tratado con mucho cuidado por los profesores.

## 2.3.- Las investigaciones de Shaughnessy

Los trabajos sobre comprensión probabilística de este autor (1981, 1985, 1992) los podemos enmarcar dentro del paradigma de heurísticos y sesgos (Kahneman et al., 1982) pero tienen una fuerte vertiente didáctica que es la que nos interesa en este momento. Sus hallazgos y conclusiones principales son:

1. Los estudiantes no instruídos en teoría de probabilidades poseen conceptos probabilísticos erróneos debido a su desconocimiento de las leyes matemáticas de la probabilidad; así, parece posible eliminar estas concepciones erróneas familiarizando a los estudiantes con la teoría formal de probabilidades. Sin embargo, algunas concepciones erróneas están establecidas muy profundamente y no son el resultado de simple inexperiencia matemática; tienen una base psicológica y la mera exposición a las leyes estadísticas no son suficientes para superarlas, aún en el mejor de los cursos.
2. Shaughnessy relaciona los errores combinatorios de los alumnos con el sesgo de accesibilidad (Kahneman et al., 1982). Por ejemplo, cuando se les pide comparar el número de comités de 2 personas y el de 8 personas que se pueden generar a partir de 10 personas, los alumnos dicen que hay más comités de 2 personas. Shaughnessy explica esta violación del cálculo combinatorio $C_{10,2} = C_{10,8}$, argumentando que es más fácil, más accesible, imaginar comités de 2 personas que de 8 personas; este hecho impide constatar que un comité de 2 personas define biunívocamente un comité de 8, cuando los seleccionamos de un grupo de 10 personas.
3. Shaughnessy explica por el heurístico de representatividad (Kahneman et al., 1982) el sesgo de insensibilidad al tamaño muestral. Planteó a estudiantes de primer año de universidad matriculados en un curso introductorio de estadística, el problema de dos maternidades (una con 15 nacimientos diarios y otra con 45 nacimientos diarios) y les preguntó en cual de las dos habría un mayor número de días, en el transcurso de un año, en que al menos el 60% de los nacidos sean niñas. Los estudiantes contestaron que aproximadamente el mismo número en las dos maternidades porque usaron la distribución 50%-50% de chicos y chicas en la población como una estimación representativa y no tuvieron en cuenta el tamaño muestral (15 frente a 45) que lleva a responder que es la maternidad más pequeña donde habrá un mayor número de días en que al menos el 60% de los nacidos sean niñas.
4. Una estimación para la probabilidad de un suceso puede no estar basada en un modelo probabilístico, sino en modelos determinísticos o en sistemas de creencias personales. Por ejemplo, revisemos una tarea que ha generado muchísima investigación conocida como «el problema de los taxis»: *«Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno. Dos compañías de taxis operan en la ciudad: el 85% de los taxis son verdes y el 15% son azules. Un testigo identificó el taxi del accidente como de color azul. En el juicio se evaluó la habilidad del testigo para identificar colores de taxi en las*

*mismas condiciones de visibilidad que en el momento del accidente: le pidieron que identificase el color de una muestra de taxis (el 50% azules y el 50% verdes) y el testigo identificó correctamente el color del 80% de los taxis presentados y falló en el 20% ¿ Cuál es la probabilidad de que el taxi del accidente sea azul?».*

En este problema, Kahneman et al. (1982) encontraron que los sujetos tienden a descuidar la información de las probabilidades previas (15% de taxis azules) que debería sugerir que un taxi azul es un suceso improbable, y se centran en la fiabilidad del testigo. Los sujetos parecen aceptar que el simple ejemplo de un accidente debe ser representativo (sesgo de representatividad) del dato de fiabilidad del testigo del 80%: la respuesta modal al problema fue 80% que coincide exactamente con la credibilidad del testigo e ignora las probabilidades previas. Sin embargo, al replicar esta tarea, Shaughnessy (1992) ha encontrado un amplio rango de estimaciones de probabilidad como respuestas. Por ejemplo, hay un grupo de sujetos que defienden que la posibilidad de que el taxi sea azul es del 100% porque confían ciegamente en el testimonio del testigo. En su argumentación, no hay azar ni probabilidad; el porcentaje dado es más una expresión de confianza que una estimación de probabilidad. La información de base (las probabilidades previas) puede despreciarse si no conecta con preconcepciones o creencias del sujeto.

5. En esta línea de enfatizar el papel que juegan las creencias en los juicios y toma de decisiones con incertidumbre, Shaughnessy les planteó a los mismos estudiantes el siguiente problema: «Suponte que estás siguiendo un curso de estadística y que cada semana tienes un examen de 10 preguntas. Tu promedio a lo largo del año ha sido de 7 respuestas correctas de 10. Esta semana has estudiado con un amigo y conseguiste 9 respuestas correctas ¿Te ayudó estudiar con un amigo?». Encontró respuestas en un amplio abanico que van desde «naturalmente ayudó porque 9 es mejor que 7» hasta «no ayudó, un alumno que tiene de media 7 respuestas correctas puede conseguir en un examen 9 respuestas correctas, 7 y 9 son números cercanos»; en el medio encontró muchas respuestas «depende». Shaughnessy afirma que estos alumnos están empleando un sistema de creencias y no realizando un cálculo.

A continuación analizamos una tarea que es una variante de un ítem que Kahneman y Tversky utilizaron para estudiar el sesgo de representatividad. Shaughnessy (1985) la propuso a 70 alumnos de primer curso de universidad, previamente a un curso introductorio de probabilidad.

### ***Nº 5: Los seis niños***

*La probabilidad de tener un bebé niño es aproximadamente 1/2. ¿Cuál de estas secuencias es más probable que ocurra teniendo 6 hijos?*

*A VMMVMV*
*B VVVVMV*
*C Las dos secuencias anteriores son igualmente probables*

**RESULTADOS (EN %)**

| A | B | C* |
|---|---|---|
| 70 | 3 | **27** |

*Interpretación:*

La secuencia (A) es más representativa del proceso de nacimientos porque en ella la frecuencia relativa de varones es 1/2 que es precisamente la probabilidad teórica de que nazca un varón. Cuando Shaughnessy pide a los sujetos que le den una razón de su elección de (A), ellos frecuentemente dicen «porque VMMVMV se ajusta más a la proporción esperada de chicos y chicas de 50:50». Los estudiantes han usado la probabilidad de que nazca un niño en un nacimiento, 1/2, como una indicación de la probabilidad de la secuencia global de nacimientos.

Borovcnik y Bentz (1991) discuten las potenciales estrategias de los sujetos para resolver este ítem, las cuales cubren un abanico bastante más amplio que explicar la conducta sólo en base al heurístico de representatividad:

1. Estrategia normativa: Argumentos de simetría en S={V,M} llevan a equiprobabilidad para niños y niñas, es decir P(V)=P(M)=1/2. Debido al principio de independencia del sexo de los bebes en los sucesivos nacimientos, todos los elementos del espacio producto SxSxSxSxSxS tienen la misma probabilidad $(\frac{1}{2})^6$: P(VMMVMV) = P(V).P(M).P(M).P(V).P(M).P(V) = $(\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{64} = 0.015$, por tanto, la respuesta (C) es la correcta.
2. Comprensión verbal: La respuesta (C) puede haber sido interpretada en el sentido de que hay una probabilidad de 1/2 para cada secuencia (esta interpretación aparece en nuestra propia investigación: Sáenz, 1995). Esto entra en conflicto con la intuición correcta de que los resultados (A) y (B) son altamente improbables, cada secuencia de longitud 6 tiene la pequeña probabilidad de 0.015.

   Otra fuente de confusión surge de identificar la secuencia (A) con el enunciado «número de chicos es 3» y la secuencia (B) con el enunciado «número de chicos es 5». Como, intuitivamente, P(3 chicos) > P( 5 chicos) se llega a la respuesta (A). Es decir, si los sujetos basan sus respuestas en clases de secuencias, por ejemplo, el número de chicos, y no en secuencias simples, es natural que contesten (A).
3. Pseudo-realidad del contexto: Naturalmente, la probabilidad de nacimiento de un niño no es exactamente 1/2, esto se confirma con la evidencia experimental de unas suaves tendencias asimétricas en las familias; sin embargo, sí se espera que los sujetos asuman la hipótesis de independencia en los sucesivos lanzamientos de una moneda. Con todo, no es fácilmente asumible por los alumnos modelar el fenómeno

de nacimientos de personas mediante el lanzamiento de una moneda. Además en los problemas reales normalmente no hay interés en el orden especial de la secuencia sino sólo en los números. En definitiva, este tipo de contexto puede inducir a los sujetos a no tener en cuenta el orden y escoger la respuesta (A). Las investigaciones de Borovcnik y Bentz indican que los sujetos están más dispuestos a respetar el orden en un ítem de lanzamiento de moneda equivalente al que estamos analizando.

*4.* Conflicto reflexión-decisión: Aunque en este item se pide una probabilidad, los sujetos tienden a percibirlo en una formulación que pide una decisión, lo cual es más cercano a sus intuiciones. Las propias investigaciones de los autores citados muestran que si la formulación del ítem se orienta más a la toma de una decisión, los sujetos escogen en mayor proporción la respuesta (A).

Konold (1991) tiene evidencias de que aunque los estudiantes parezcan razonar en base del concepto de independencia, si se indaga con más profundidad se pueden encontrar inconsistencias en sus respuestas. En su estudio encontró que un elevado número de sujetos contestaron inicialmente que varias secuencias de cinco lanzamientos de una moneda (XCXCC, CCCXX, XCXXX,...) eran igualmente probables cuando se les preguntó cuál de las secuencias tenía mas probabilidad de ocurrir, pero cambiaron de estrategia y seleccionaron una secuencia particular cuando se les preguntó qué secuencia tenía menos probabilidad de ocurrir. A partir del análisis de las razones dadas por los estudiantes para sus elecciones en la tarea, Konold concluye que los estudiantes no basaban sus respuestas en la falacia del jugador o en el heurístico de representatividad, y sugiere que mucha gente toma decisiones en tareas probabilísticas basándose en lo que él llama el enfoque del resultado.

*Implicaciones didácticas:*

¿Cómo se manifiesta la aleatoriedad en ensayos repetidos de una experiencia de azar? La Ley de los Grandes Números responde teóricamente a esta pregunta pero muchas concepciones erróneas subrayan la complejidad del concepto de límite de frecuencias relativas. Otro aspecto se refiere al patrón de ocurrencias específicas: hay una confianza intuitiva en patrones de resultados lógicos, causales o incluso mágicos; por ejemplo, después de cinco caras consecutivas en el lanzamiento de una moneda se espera una cruz porque el patrón resultante parece más lógico. Estos patrones pueden ser un obstáculo para deducir el espacio muestral y la simetría asociada que es un enfoque estático en un sólo ensayo.

La matemática de patrones aleatorios es complicada. Una secuencia de longitud n es un elemento del espacio producto combinatorio, por ejemplo, el lanzamiento de una moneda seis veces con los resultados específicos CCCCCC o CCXXCX; la distribución de probabilidad en este espacio producto se obtiene mediante el concepto de independencia de ensayos simples (discutiremos las dificultades relacionadas con la independencia posteriormente). Si el lanzamiento de la moneda obedece la hipótesis de independencia, las dos secuencias anteriores son aleatorias y tienen la misma probabilidad, si esta hipótesis es dudosa, se aplica una prueba estadística.

La mayoría de las personas utilizan dos criterios para juzgar si una serie de lanzamientos de una moneda es aleatoria. Primero, asumiendo que la moneda está equilibrada se deben obtener aproximadamente el mismo número de caras que de cruces. Sin embargo, un simple cálculo probabilístico nos dice que hay sólo un 50% de posibilidades, aproximadamente, de obtener 9, 10 o 11 caras en una secuencia real de 20 lanzamientos de una moneda equilibrada. Por tanto, en 20 lanzamientos puede haber desde 0 hasta 20 caras y la probabilidad de obtener resultados a lo largo de ese rango de números es mayor de lo que se imaginan muchas personas. Los sujetos tienden a juzgar la probabilidad en relación a cómo se aproximan los resultados a los que ellos consideran ideales. Es el heurístico de representatividad. En el caso de la moneda, el ideal es 10 caras en 20 lanzamientos.

Segundo, es poco probable que se obtengan 10 caras seguidas de 10 cruces o, en el otro extremo, que se obtenga una secuencia alternada de caras y cruces del tipo CXCXCXCX...; el patrón obtenido debería estar entre esos dos extremos. La estadística proporciona un método para evaluar si tales patrones intermedios corresponden a secuencias alaetorias. La idea es definir una secuencia de los mismos resultados, por ejemplo «caras», como una racha y contar el número de rachas en la serie. La característica principal del número y tipo de rachas obtenidas en series generadas artificialmente por personas es que, comparadas a secuencias aleatorias, las rachas de las personas tienden a ser demasiado cortas, es decir, hay demasiadas rachas.

Falk (1983) encontró que los humanos somos unos jueces muy pobres cuando tenemos que reconocer y construir patrones aleatorios. Este autor mostró a estudiantes de secundaria secuencias de 21 cartas verdes y amarillas y les pidió decidir si la mezcla era aleatoria o no.Por ejemplo, les daba las dos secuencias siguientes:

*1: AAAVVAAVVAAAVVVVVVAAA*
*2: VAVAVAVAAVAVAAVAVVAVV*

Los estudiantes tendían a elegir las secuencias donde había más cambios entre los colores, por ejemplo elegían la secuencia 2 mejor que la 1. Sin embargo, de hecho las secuencias con rachas más largas de un color tienen más probabilidad de ser aleatorias. Falk encontró los mismos resultados cuando pidió a los alumnos generar su propias secuencias aleatorias de 21 cartas. Falk concluye que tendemos a ver patrones en sucesos aleatorios cuando no los hay y por contra, inferimos aleatoriedad cuando no está presente. En definitiva, dice que los seres humanos nunca deberían encargarse de la generación de secuencias aleatorias. Hablemos un poco más de las investigaciones de este autor.

## 2.4. Los trabajos de Falk sobre independencia y probabilidad condicionada

Las dificultades que tienen los estudiantes con probabilidades condicionadas y con el concepto de independencia de sucesos han sido estudiadas con profusión en el campo de la educación matemática: Bar-Hillel y Falk, 1982; Borovcnik, 1988; Borovcnik y Bentz, 1991; Cohen y Hansel, 1956; Falk, 1983, 1988, 1989; Falk y Bar-Hillel, 1983; Ojeda, 1995; Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987; Shaughnessy, 1992. Destacan los trabajos de Falk que es autor, entre otras, de la tarea 6 que analizamos a continuación y que se conoce como el Fenómeno de Falk.

El de independencia es uno de los conceptos claves de la teoría de probabilidad. Se dice que dos sucesos (por ejemplo, los resultados de sendos lanzamientos de un dado) son estadísticamente independientes si el conocimiento del resultado de uno no proporciona información concerniente al resultado del otro. Los sucesos aleatorios independientes no se limitan a juegos de azar tales como lanzamientos de monedas o dados, sino que muchos procesos de la vida cotidiana tienen esas características: el control de calidad en todos los procesos de producción (por ejemplo, la fabricación de tuercas) asume la independencia de las desviaciones de las medidas de las piezas fabricadas en relación a la medida estándar y admite desviaciones que caigan dentro de los límites de tolerancia.

La investigación muestra que las personas son poco hábiles para reconocer y operar con el concepto de independencia. Un fenómeno que ya hemos estudiado en la tarea 3 es «la falacia del jugador»: describe la conducta de muchas personas que, a pesar de saber que están operando con aparatos aleatorios con propiedades fijas y conocidas (por ejemplo, una ruleta) se comportan como si esas propiedades cambiasen (por ejemplo, la probabilidad de obtener un rojo en la siguiente tirada después de haber conseguido una serie de negros).

Algunos investigadores han buscado la explicación a esta clase de fenómenos en consideraciones de tipo evolutivo. Un trabajo de Cohen y Hansel (1956) pretendió explicar el modo en que niños de 6 a 15 años adquieren el concepto de independencia estadística. La tarea experimental pedía a los niños predecir cuál de dos resultados ocurriría en una secuencia de resultados generados aleatoriamente, es decir, era una tarea similar al experimento de lanzar una moneda. Los resultados indicaron que los niños más pequeños frecuentemente eligen con el criterio de equilibrar los resultados de las series. Según Cohen y Hansel, el concepto de independencia no empieza a formarse hasta que los niños alcanzan una edad comprendida entre 12 y 15 años.

A continuación estudiamos una tarea diseñada por Falk (1988) que trata sobre una de las concepciones erróneas de la probabilidad condicionada más importantes: surge cuando el suceso condicionante ocurre después que el suceso que condiciona. Es muy interesante también el análisis que Borovcnik y Bentz hacen de esta tarea.

**Nº 6: Urnas independientes**

*Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Agitamos la urna y a ciegas extraemos dos bolas, una después de otra, sin reemplazamiento.*

*a) ¿ Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraida sea blanca, sabiendo que la primera bola es blanca?*
*b) ¿ Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraida sea blanca, sabiendo que la segunda bola es blanca y no se conoce el color de la primera?*

*Resultados:*

Falk enfrentó a sus estudiantes en la universidad con este ítem; la mayoría de ellos no tuvo dificultad en calcular 1/3 para a) pero el 50% respondió con 1/2 para b).

*Interpretación:*

En notación matemática la primera cuestión nos pide calcular la probabilidad condicionada $P(B_2/B_1)$ y la segunda nos pide calcular $P(B_1/B_2)$. La primera cuestión no causa problemas porque hay una urna específica con tres bolas, dos de ellas negras y una blanca. La razón que dan los estudiantes que contestan 1/2 a la segunda cuestión es que la segunda extracción no afecta a la primera y por tanto la probabilidad requerida depende sólo de la composición inicial de la urna. El rechazo de los sujetos a considerar la evidencia que ocurre más tarde que el suceso juzgado refleja su razonamiento basado en la componente tiempo. Esto es congruente con ver la probabilidad como una medida de alguna característica de la situación de la urna, mientras que el núcleo del problema apunta a nuestro propio nivel de incertidumbre. Lo que se nos pide es revisar nuestro estado de conocimiento actual a la luz de nueva evidencia o información.

Borovcnik y Bentz (1991) analizan las estrategias potenciales:

1. Solución normativa: Se asume que la extracción en cada etapa del proceso es equiprobable. Utilizando la definición de probabilidad condicionada, la solución es 1/3 en ambas situaciones.
2. Sentido común: Algunos sujetos encuentran simplemente estúpido en el apartado b) del item, ocultar la primera bola y mirar el color de la segunda, antes de dar la probabilidad de la primera bola. Como esta situación entra en conflicto con su sentido común los alumnos se pueden mostrar perplejos y confundidos o usar pensamiento causal o ligado a la componente temporal del enunciado.
3. Pensamiento causal: Primero actúa la causa y como consecuencia sigue el efecto. Al comienzo hay una composición de la urna de 2:2, la segunda bola no puede influir en la primera extracción y por tanto la probabilidad es 1/2. El pensamiento que se desarrolla según un eje temporal está estrechamente relacionado con el pensamiento causal y justifica que los sujetos rehusen juzgar un suceso anterior por uno posterior porque esto invierte el curso real de acción. La percepción causal o el pensamiento basado en el tiempo pue-

de llevar a confusión porque los sujetos pueden no entender que se les de como información extra que la segunda bola extraida es blanca.

4. Simetría: De las tres bolas desconocidas dos son negras y una es blanca lo que da una probabilidad de 1/3 de que la primera bola sea blanca. No importa cual de las bolas blancas es la desconocida. Los sujetos muestran un gran rechazo a aplicar simetría dentro de este contexto dependiente de tiempo.

*Implicaciones educativas:*

Las urnas son un punto de referencia estándar para analizar problemas de azar pero pueden inducir a una interpretación causal de la probabilidad. Es útil tener una transformación apropiada de un problema a una tarea de urnas donde se pueden calcular con facilidad las probabilidades. Sin embargo, algunas veces, este proceso de conexión se generaliza incorrectamente y los alumnos pueden creer que las probabilidades no tienen sentido sin referirse a urnas. Así la probabilidad cambia su significado: una urna no causa el resultado específico directamente pero afecta el valor de la probabilidad. Las probabilidades condicionadas refuerzan esta interpretación causal porque generalmente se calculan en situaciones como la cuestión a) donde en cada etapa la nueva probabilidad condicionada se representa por una urna.

Los argumentos causales también se usan para motivar la regla de la multiplicación para sucesos independientes cuando se acentúa que se deben modelar las situaciones mediante la independencia estocástica si carecen de influencia causal. La tarea nº 6 es un contraejemplo muy iluminador porque el suceso 'blanco en la primera extracción' es causalmente independiente del suceso 'blanco en la segunda extracción' pero no es estocásticamente independiente (el pensamiento causal se enfrenta al pensamiento probabilístico).

Borovcnik y Bentz (1991) realizaron variaciones de este experimento y observaron que los pensamientos causal y probabilístico están ordenados jerárquicamente. Los sujetos parecen usar independencia causal y sólo cambian su estrategia cuando lo fuerzan razones lógicas. Enfrentaron a los estudiantes con la situación de que la segunda y la tercera bola extraídas (de una urna con 2 bolas blancas y 2 negras) eran blancas y les pidieron la probabilidad de que la primera bola extraída fuese también blanca; su respuesta inmediata fue 0. Sin embargo, en el caso de una urna con 4 bolas blancas y 4 negras muchos respondieron que 1/2 dando justificaciones causales. Sólo cuando se les planteaba la situación de que desde la segunda a la quinta bola extraída todas eran blancas ellos cambiaban a la respuesta 0; en esta situación es lógicamente necesario que una bola negra haya sido extraída la primera. Sólo reconocieron el valor de la información acerca de la segunda y subsiguientes bolas extraídas cuando los experimentadores cambiaron a una urna con 100 bolas negras y 100 blancas y presentaron el escenario de que todas las bolas extraidas desde la segunda hasta la cien, eran blancas. Entonces no era todavía lógicamente necesario que la primera bola fuese negra pero los sujetos reconocieron que los sucesos posteriores eran pertinentes para evaluar el suceso "bola blanca en la primera extracción".

Otro tipo de concepción errónea sobre las probabilidades condicionadas es la confusión entre una condicionada y su inversa. Por ejemplo, hay diferencia entre la probabilidad de que alguien tenga el sarampión dado que tiene una erupción y la probabilidad de tener una erupción dado que se tiene el sarampión. La segunda probabilidad es mayor que la primera. Hay bastante confusión en relación a esta cuestión entre las personas, principalmente cuando se trata de diagnósticos de enfermedades.

Las concepciones erróneas sobre probabilidad condicionada pueden estar estrechamente relacionadas con la comprensión del concepto de sucesos independientes. En efecto, algunas presentaciones matemáticas del concepto de sucesos independientes prefieren definir «A es independiente de B $\Leftrightarrow$ P(A/B) = P(A)» y otras optan por definir «A es independiente de B $\Leftrightarrow$ P(A$\cap$B) = P(A)·P(B)». Son definiciones formalmente equivalentes pero nosotros pensamos que es mejor, didácticamente, introducir el concepto de independencia vía la definición de probabilidad condicionada porque creemos que esta vía es más intuitiva para los estudiantes.

Falk menciona varias razones de por qué las situaciones que implican probabilidades condicionadas son difíciles para nuestros alumnos:

*1.* Los estudiantes pueden tener dificultades para determinar el suceso condicionante, como en el dilema de Monty que analizaremos a continuación.
*2.* Pueden confundir condicionalidad con causalidad y por tanto investigar p(A/B) cuando se les pide calcular p(B/A).
*3.* Pueden creer que la componente temporal impide a un suceso ser condicionante, como en el Fenómeno de Falk.
*4.* Pueden realizar una incorrecta representación del problema debido al enunciado o estructura del ítem, como en «el problema de los taxis» analizado en el apartado anterior.

Shaughnessy (1992) propone una tarea, el dilema de Monty, que además de iluminar las dificultades de los alumnos para determinar el suceso condicionante, ofrece una estrategia didáctica para generar una intuición secundaria del concepto de probabilidad condicionada. Su enunciado es el siguiente:

> *En un juego, se muestra a los participantes tres puertas cerradas. Una de las puertas tiene un premio importante detrás de ella y las otras dos tienen baratijas detrás de ellas.Se pide a cada uno de los participantes que elijan una puerta. Entonces aparece Monty que abre una de las puertas no elegidas y la muestra al participante y siempre le enseña una baratija. Se les da a los participantes la opción de seguir con la puerta inicialmente elegida o cambiar a la otra puerta no abierta ¿Qué deberían hacer?*

Shaughnessy ha utilizado con profusión este problema para analizar algunas de las dificultades con la información condicionada de estudiantes de nivel secundario y de profesores en formación y en activo con años de experiencia. La mayoría de los sujetos creen que tan pronto como Monty abre una puerta con baratija, la probabilidad de ganar el premio importante se incrementa automáticamente de 1/3 a 1/2. Lo razonan diciendo que «ahora sabemos que una de las puertas no es buena».

Para subrayar el enfoque matemático del dilema de Monty el investigador propone a los estudiantes el siguiente problema complementario: «Si fueses el participante en el juego qué estrategia elegirías y por qué:

*1.* Seguir con la puerta elegida originalmente
*2.* Lanzar una moneda, seguir con la puerta original si sale cara y cambiar a la otra puerta si sale cruz.
*3.* Cambiar a la otra puerta.

El objetivo es hacer ver a los estudiantes que si el participante en el juego no realiza ninguna acción para mejorar la probabilidad de ganar usando realmente la nueva información que le proporciona Monty, la probabilidad de ganar el premio importante sigue siendo 1/3. La estrategia 2) de lanzar una moneda se introduce para enfatizar la diferencia entre reelegir activamente una de las dos puertas cerradas y elegir pasivamente la puerta original. La estrategia 2) de lanzar la moneda incrementa la probabilidad de ganar a 1/2 mientras la estrategia 1) de seguir con la puerta original da una probabilidad de ganar de 1/3. Los estudiantes experimentan un cambio profundo de comprensión de este problema cuando tienen la posibilidad de hacer un ejercicio de simulación de cada una de las tres estrategias con una ruleta de tres sectores de igual área y una moneda. Descubren que es mejor para los participantes cambiar siempre ya que el único modo de perder siguiendo esta estrategia es haber seleccionado la primera vez la puerta con el premio importante, como esta probabilidad es 1/3 se deduce que hay una probabilidad de ganar de 2/3 siguiendo la estrategia 3), la estrategia del cambio.

Suponiendo que la puerta A contiene el premio importante y las puertas B y C las baratijas tenemos:

| El participante elige la puerta | Monty muestra la puerta | La estrategia ganadora es |
|---|---|---|
| A | B o C | 1 |
| B | C | 3 |
| C | B | 3 |

El éxito de una metodología de simulación con el dilema de Monty evidencia que las sugerencias de Borovcnik y Bentz (1991) y Shaughnessy (1992) de modelizar problemas de probabilidad vía simulaciones es una técnica prometedora para enfrentarse y superar las concepciones erróneas. Esta será una estrategia fundamental en nuestra propuesta didáctica.

Los problemas de probabilidades condicionadas proporcionan la oportunidad de trabajar con los diagramas de árbol que son una herramienta muy útil para modelizar situaciones aleatorias. Esta herramienta proporciona la respuesta con facilidad pero puede camuflar el problema en cuanto no hay respuesta a la pregunta de por qué son inadecuados el pensamiento causal profundamente establecido o el pensamiento dependiente del tiempo. Si un método matemático proporciona fácilmente la solución pero no permite ningún control sobre su mecanismo en un nivel intuitivo, entonces es probable que los estudiantes no internalicen el método y continúen confiando en sus intuiciones muchas veces inadecuadas. Una enseñanza tal está condenada a fracasar. Los métodos formales son herramientas muy poderosas y precisamente su ventaja inherente es no iluminar su mecanismo pero al menos en la fase inicial el alumno tiene que estar convencido de su efectividad en el nivel intuitivo.

Todos los investigadores de concepciones erróneas de la probabilidad condicionada aconsejan la utilización de ejemplos del mundo real para ayudar a los estudiantes a comprender este concepto. Por ejemplo, Falk (1988) hace notar que sucesos posteriores en el eje del tiempo se usan con frecuencia como sucesos condicionantes en otras ciencias, tales como arqueología y astronomía en donde se realizan inferencias de lo que sucedió hace mucho tiempo basándose en lo que está sucediendo ahora.

Aunque se ha escrito mucho acerca de las concepciones erróneas en probabilidad condicionada, apenas hay datos procedentes de investigación empírica sobre estas concepciones. Una excepción es el estudio de Pollatsek et al. (1987) que, sin embargo, tiene el inconveniente de usar una metodología de ítemes de elección forzada; aunque los investigadores animan a los estudiantes a escribir razones de sus elecciones, éstos no proporcionan información útil ya que escriben muy poco.

Tampoco, que nosotros sepamos, ha habido una investigación de la que exista informe que haya intentado cambiar las intuiciones erróneas de los estudiantes acerca de la noción de probabilidad condicionada; la literatura es abundante en sugerencias didácticas pero escasa en investigación de la eficacia de dichas sugerencias. Está claro que muchas de ellas se están utilizando realmente pero lo que se necesita es una investigación sistemática y extensa de las concepciones y creencias de los estudiantes acerca de probabilidades condicionadas con documentación de lo que sucede cuando se intenta aplicar algunas de las técnicas didácticas sugeridas en la literatura.

## 2.5. Los trabajos de Pollatsek y colaboradores sobre estadística inferencial

En el campo de la inferencia estadística confluyen la teoría de probabilidades y la estadística. La teoría de probabilidades se encarga de la modelización de los fenómenos aleatorios mientras la estadística regula la aplicación de la probabilidad al mundo real. Shaughnessy (1992) enumera las principales concepciones erróneas estadísticas que tienen las personas:

*1.* La idea de que cualquier diferencia en las medias de dos grupos es significativa.
*2.* La idea de que el mundo real es un mundo de causas determinísticas. Para mucha gente no existe la variabilidad porque no creen en el azar.

3. Se tiene confianza injustificada en las muestras pequeñas.
4. Se tiene insuficiente respeto por las pequeñas diferencias en muestras grandes.
5. Se cree que un tamaño apropiado para una muestra aleatoria es independiente del tamaño global de la población.
6. No se tiene conciencia del fenómeno de regresión a la media en la vida cotidiana.

Pollatsek, Lima y Well (1981) investigaron la comprensión que tienen los estudiantes de la relación entre la media muestral y la media poblacional, cuestión clave en estadística inferencial. Como ejemplo de sus investigaciones analicemos la siguiente tarea que consideramos muy clarificadora:

### ***Nº 7: La puntuación media***

*La puntuación media para todos los estudiantes de secundaria de un distrito escolar es 400. Se selecciona una muestra aleatoria de 10 estudiantes. Un estudiante de esa muestra tiene una puntuación de 250. ¿Cuál esperas que sea la puntuación media para la muestra entera de 10 estudiantes?*

*Resultados:*

Pollatsek, et al. (1981) propusieron a estudiantes de universidad novatos en estadística esta tarea y la mayoría contestó que la media muestral debía ser 400.

*Interpretación.*

Esos estudiantes pueden estar usando el heurístico de representatividad como guía porque creen que cualquier muestra aunque sea pequeña debe reflejar la población entera, creen en en una «ley de los pequeños números» (Kahneman et al., 1982). Por otro lado, pueden estar confundiendo la media poblacional con la media muestral. La media poblacional no cambia pero la media muestral esperada se ve afectada por el conocimiento de una puntuación. Una vez que conocemos una puntuación en nuestra muestra, el cálculo normativo para este problema consiste en revisar nuestras estimaciones para la media muestral pesando las 9 puntuaciones desconocidas por la media poblacional y añadiendo la puntuación conocida, es decir, la media revisada es: $(9 \times 400 + 250)/10 = 385$.

Pollatsek et al. (1981) analizan la confusión de los estudiantes sobre la media muestral en situaciones donde se debe calcular como una media ponderada. La comprensión de la mayoría de los estudiantes de la media consiste en un algoritmo que suma todos los resultados y luego divide esa suma por el número de resultados porque ese cálculo es todo lo que le enseñaron acerca de la media. Los estudiantes tienen sólo una comprensión instrumental de la media y además esa comprensión es parcial. Cuando los resultados no son igualmente probables o las puntuaciones necesitan ser ponderadas, las estimaciones del valor esperado suelen estar equivocadas. Esto es tanto una deficiencia matemática como un fenómeno psicológico.

Cuando se preguntó a los estudiantes cuál era la puntuación media esperada para las restantes 9 puntuaciones, los investigadores no encontraron evidencia de una estrategia de reequilibrado activo tal como esperaban. Esta estrategia llevaría a la predicción de que la media de las 9 puntuaciones restantes tendría que ser mayor de 400 para equilibrar la puntuación baja. En cambio, los estudiantes tienden a predecir o bien 400 o bien un número menor de 400 porque no creen que la media poblacional sea realmente 400 después de tener una puntuación concreta de 250. Pollatsek et al. concluyen que los estudiantes confían en la representatividad con mayor fuerza que en un mecanismo de reequilibrado activo. Uno de los hallazgos más sorprendentes de esta investigación es que incluso después de que se les mostró soluciones alternativas al problema en un escenario de entrevista, la mayoría no cambió sus predicciones. Con todo, los autores reconocen que la muestra de los sujetos entrevistados era pequeña.

*Implicaciones didácticas:*

Pollatsek y sus colegas declaran que sus sujetos se encuentran incómodos haciendo una estimación puntual para la media en problemas como el anterior. Esto sugiere que quizá se obtendrían resultados bastante diferentes si se cambian las tareas de estimación de valores puntuales a estimaciones de intervalos de confianza. Puede ser recomendable desde un punto de vista didáctico poner el énfasis en la estimación de intervalos de confianza mejor que en la estimación puntual porque el problema puede formar parte del bloqueo conceptual que caracteriza Konold como enfoque del resultado: cuando se pide a los estudiantes que den un simple número para la probabilidad de un suceso, algunos no comprenden que el resultado puede ocurrir repetidamente. Puede ser más fácil mostrar la replicabilidad de una situación aleatoria utilizando la vía de los intervalos de confianza; Shaughnessy (1992) propone modificar la tarea del siguiente modo:

*La puntuación media para todos los estudiantes de secundaria de un distrito escolar es 400. Se selecciona una muestra aleatoria de 10 estudiantes. Un estudiante de esa muestra tiene una puntuación media de 250.*

*a) ¿Qué intervalo es más probable que contenga la media de la muestra?:*

1. *250-375*
2. *375-425*
3. *425-550*
4. *un intervalo diferente, escríbelo:*

*b) ¿Qué intervalo es más probable que contenga la media de la muestra?:*

1. *200-300*
2. *300-400*
3. *400-500*
4. *un intervalo diferente, escríbelo:*

Naturalmente podrían suscitarse problemas con esos intervalos de confianza, por ejemplo, donde se establecen las fronteras de los intervalos o si hay varias posibles categorías de intervalos. Sería útil presentar tales ítemes en un contexto de entrevista para obtener y explorar el rango más amplio posible de respuestas de estudiantes.

Kahneman et al. (1982) encontraron que estudiantes de universidad novatos en probabilidades y estadística eran insensibles al tamaño muestral cuando hacían estimaciones de probabilidad. Esos resultados sugerían que esos estudiantes no tenían una comprensión operativa de la ley de los grandes números porque confiaban en el heurístico de representatividad. Sin embargo, Nisbett et al.(1983) afirmaron que incluso sujetos sin entrenamiento formal en estadística utilizan la ley de los grandes números cuando resuelven problemas de la vida cotidiana y, además, la habilidad para aplicar la ley de los grandes números en una amplia variedad de situaciones se puede mejorar mediante entrenamiento. En cursos de formación de directivos, León (1994) ha encontrado al plantear el problema de las maternidades de Kahneman y Tversky (enunciado al revisar las investigaciones de Shaughnessy) que aproximadamente el 80% de los directivos ignora el tamaño muestral.

En un intento de resolver algunos de los datos contradictorios acerca de la comprensión de los estudiantes de la ley de los grandes números, Well, Pollatsek y Boyce (1990) realizaron una serie de experimentos en donde se presentaba a los alumnos diferentes versiones de problemas similares matemáticamente. En una versión sólo se les pedía que dijeran qué se aproximaba más a la media poblacional, la media en una muestra grande o la media en una muestra pequeña; en otra versión se pedía a los estudiantes que estimasen la probabilidad de que la media muestral estuviese a cierta distancia de la media poblacional. Los estudiantes hicieron bastante bien la tarea en la primera versión pero bastante mal en la segunda.

Así el cuadro emergente de la comprensión intuitiva de la ley de los grandes números no es simple puesto que variables de tarea afectan mucho el razonamiento de los estudiantes. Well et al. (1990) realizaron un experimento de seguimiento en el que los estudiantes trabajaron con distribuciones muestrales mediante simulaciones por ordenador. Los estudiantes generaron y observaron gráficos de la distribución de 100 muestras de tamaño 10 y 100 de tamaño 100. Después de todo el entrenamiento se encontró que muchos estudiantes todavía creían que la variabilidad en las distribuciones muestrales de tamaño 10 y 100 era la misma. El sesgo de insensibilidad al tamaño muestral tiene raíces profundas.

La interpretación de Shaughnessy (1992) de los resultados del estudio es que no se mejora la comprensión de la ley de los grandes números sin enseñanza explícita del concepto de variabilidad en distribuciones muestrales y de cómo el tamaño muestral afecta a esta variabilidad, la mera exposición a gráficos de distribuciones muestrales no basta; se deben señalar explícitamente los patrones de variabilidad en las distribuciones muestrales y las relaciones cuantitativas que están implícitas. El hecho de que hay números implicados en la segunda versión del estudio de Well et al. la hace significativamente más difícil que la primera versión. La dificultad de los alumnos para tratar con la versión numérica de esta tarea refuerza la tesis de Paulos (1990) del anumerismo de las personas. Otro problema que los estudiantes tienen con cuestiones de distribuciones muestrales es su confusión continua entre puntuaciones individuales y medias de puntuaciones. Los estudiantes necesitan experiencias de cálculo directo de familias de medias y de creación de distribuciones de medias antes de pasar a las simulaciones de ordenador.

Todos estos resultados avalan la metodología de enseñanza propuesta en este libro (capítulo 4) que no sólo consiste en experimentos y simulaciones sino que incluye instrucción en la teoría de probabilidades y también apoyan nuestra secuenciación didáctica en tres fases: experiencias aleatorias con aparatos físicos, experimentos con tablas aleatorias y simulaciones con ordenador.

## 3. CONCLUSIÓN: NECESIDAD Y DIFICULTADES DE UN MODELO DE DESARROLLO CONCEPTUAL PROBABILÍSTICO

La revisión de la investigación empírica sobre razonamiento probabilístico que acabamos de realizar nos ha proporcionado dos tipos de datos o informaciones y nos ha abierto dos clases de interrogantes.

En primer lugar, nos suministró información sobre la naturaleza y el origen de las dificultades que tienen los estudiantes para comprender y aplicar los conceptos y leyes elementales de la teoría de la probabilidad (información conceptual). En segundo lugar, nos proporcionó un muestrario de tareas útiles para explorar el pensamiento de los estudiantes al tiempo que nos informó de las carencias y límites de la metodología de investigación utilizada (información metodológica).

En cuanto a los interrogantes, en primer lugar, nos planteó el problema de la naturaleza contingente del razonamiento probabilístico, es decir, la influencia en los juicios probabilísticos de variables de tarea y de sujeto (interrogante conceptual). En segundo lugar, nos suscitó el problema de medir o valorar la fuerza intuitiva de los conceptos y leyes normativas en relación a los heurísticos de razonamiento probabilístico y creencias acerca de sucesos inciertos (interrogante metodológico).

Digamos una palabra más sobre estos interrogantes. Los esfuerzos para comparar juicios de probabilidad intuitivos con las reglas estadísticas continúa siendo una cuestión importante de investigación en comprensión probabilística (Payne, Bettman y Johnson, 1993). Estos autores defienden la naturaleza constructiva y contingente de la conducta de decisión y de los juicios probabilísticos. Simon (1981) ya atribuyó este carácter constructivo a la limitación de la capacidad de procesamiento de la información. Este constructivismo va más allá de negar simplemente que los juicios observados resultan de una referencia a una lista maestra en la memoria. La noción de juicios de probabilidad constructivos significa también que los juicios y decisiones no son generados necesariamente por algún algoritmo consistente e invariable como el cálculo del valor esperado. Parece que el sujeto tiene un repertorio de métodos para identificar sus preferencias y desarrollar sus creencias. Esos múltiples métodos o estrategias se generan tanto con la experiencia como con el entrenamiento.

Estas ideas concuerdan con las razones de Penrose (1991) para defender la naturaleza no-algorítmica de ciertos aspectos del conocimiento humano. En efecto, si todo pudiera reducirse en nuestro funcionamiento mental a procesos algorítmicos, no podríamos aceptar, como aceptamos, determinadas verdades matemáticas que no son demostrables. En una línea semejante, Anderson (1990) defiende el carácter adaptativo del pensamiento. Su idea fundamental es: el hombre no es una mera construcción azarosa sino una construcción optimizada por el medio, mediante un proceso evolutivo. El sistema cognitivo actúa, sin cesar, con el objetivo de optimizar la adaptación del organismo al medio. Como dice Corral (1994), no es lo mismo el criterio de racionalidad normativa, donde la gente puede mostrarse no racional, que el de racionalidad adaptativa. Determinados heurísticos, irracionales desde un punto de vista normativo, pueden resultar adaptativos para el psico-organismo y, por tanto, desempeñar una función racional. La psicología podría convertirse en una ciencia irreal si sólo atendiera al enfoque algorítmico. No podemos desestimar las propiedades ecológicas de la cognición humana.

La investigación descriptiva en procesos de toma de decisiones ha mostrado que la información y las estrategias utilizadas para construir preferencias o creencias parecen altamente contingentes y predecibles en función de una variedad de factores de tarea, contexto y diferencias individuales (Payne et al., 1993). Factores de tarea son características generales de un problema de decisión, como el modo de respuesta (juicio o elección, por ejemplo), que no dependen de los valores particulares de las alternativas. Factores de contexto tales como similitud de alternativas, por otro lado, se asocian con los valores particulares de las alternativas. Factores de tarea y contexto hacen resaltar diferentes aspectos del problema y evocan diferentes procesos para combinar información. Las personas son sensibles a características que resultan con frecuencia, aunque no siempre, irrelevantes desde una perspectiva normativa. Por tanto una cuestión importante en la investigación actual es la identificación de las condiciones de tarea que determinan cuándo información normativamente importante (por ejemplo, las probabilidades previas) se utiliza y cuándo no se utiliza.

El modo de construir una solución a un problema de decisión también es función de factores de diferencias individuales tales como conocimiento previo, pericia o capacidades de procesamiento. Las concepciones estocásticas de la gente están determinadas, en parte, por sus propias experiencias (intuiciones primarias) y en parte por la enseñanza (intuiciones secundarias). Cuando los investigadores han pedido a los sujetos que estimasen probabilidades, predijesen resultados, realizasen juicios o tomasen decisiones bajo condiciones de incertidumbre, se han encontrado que los diferentes tipos de razonamiento exhibido por nuestros estudiantes indican varios niveles de sofisticación conceptual que van desde una total carencia de comprensión de los sucesos aleatorios a una capacidad para comparar varias versiones matemáticas de sucesos aleatorios. Para cubrir este amplio abanico de concepciones, Shaughnessy (1992) clasifica las ideas probabilísticas en cuatro tipos: no estadísticas, estadísticas ingenuas, estadísticas emergentes y estadísticas pragmáticas. Una cuestión que no aborda esta caracterización y que nos parece sustancial es la extensión en la que diferencias individuales en creencias se relacionan con cambios en tareas y contexto.

La naturaleza altamente contingente de la conducta de decisión y del razonamiento probabilístico presenta problemas para los investigadores en esos campos. En la teoría de la decisión conductual, Payne et al. (1993) afirman que, en principio, el hecho de que los procesos de decisión no sean invariantes en función de entornos de tarea, complica la búsqueda de un pequeño conjunto de principios subyacentes (modelos) que pueda describir la conducta de decisión. Además, la importancia y omnipresencia de factores de tarea y contexto puede crear una perspectiva de un campo de investigación caótico y fragmentado.

Sin embargo, cuando los investigadores plantean cuestiones acerca de las condiciones bajo las que diferentes tipos de información y diferentes procesos de decisión se usarán con mayor probabilidad, surgen generalizaciones acerca de la conducta de decisión. Están bien establecidos, por ejemplo, los efectos de la complejidad de la tarea en el uso de estrategias de decisión, la importancia de la distinción ganancias vs pérdidas en decisiones con riesgo y sin riesgo, y la importancia del proceso de anclaje y ajuste en juicio probabilístico; fenómenos como el de aversión al riesgo sugieren que se pueden descubrir principios generales de conducta. De este modo, terminan diciendo Payne y colaboradores, la perspectiva constructivista no implica la carencia de creencias subyacentes sistemáticas en el proceso de generación de un juicio o decisión.

Por parecidas razones hay muy pocos modelos formales de desarrollo conceptual en el campo de la probabilidad y estadística. La dificultad de construir modelos de investigación en este campo radica en que si un modelo intenta incorporar los resultados de los diferentes tipos de estudios que han realizado los psicólogos y los educadores matemáticos, ese modelo corre el riesgo de ser tan complicado que puede resultar en la práctica de poca o ninguna utilidad tanto para investigadores como para profesores. Por otro lado, si uno se centra en una pieza del rompecabezas de la investigación estocástica y construye un modelo simple, se corre el riesgo de sobresimplificar y dejar fuera del modelo importantes perspectivas. Shaughnessy (1992) afirma que la historia de la investigación en el campo parece haber sido la de simplificar primero y hacer ajustes después.

En nuestra investigación (Sáenz, 1995) intentamos seguir esa tradición y llegamos a establecer un modelo relativamente simple de pensamiento probabilístico de los adolescentes, esperando que sea de alguna utilidad para investigadores y profesores. Si tuvieramos que sintetizar en breves apartados los hallazgos de esa investigación diríamos:

*1.* Quedó clara la naturaleza altamente contingente del razonamiento probabilístico de manera que los juicios y razonamientos probabilísticos de nuestros adolescentes no son invariantes en función de factores de tarea.
*2.* De los factores de sujeto, el que más influye es la instrucción en probabilidades («para bien y para mal») y después el año escolar y el nivel

de aptitud en matemáticas. Con todo, en la mayoría de cuestiones estudiadas no aparecen diferencias significativas en función de ninguna de las variables de sujeto con las que hemos trabajado.

3. Encontramos diversos grados de aceptación intuitiva de las ideas formales probabilísticas de modo que conseguimos clasificarlas en tres categorías: intuitivas, contraintuitivas e internamente contradictorias.
4. Detectamos la presencia sistemática de un pequeño conjunto de principios intuitivos y/o normativos que permiten hablar de un sistema de ideas personales de los adolescentes sobre el azar y la probabilidad. Estas ideas no están aisladas sino que forman un sistema integrado de concepciones en torno a los siguientes elementos: naturaleza, lenguaje y métrica del azar y asignación de probabilidades. Estableciendo una analogía con la teoría de la decisión conductual, el sistema sería el enfoque descriptivo de la teoría de probabilidades frente al enfoque normativo o matemático

Describamos el sistema:

| Aspectos o elementos del azar | Teoría matemática de probabilidades | Sistema de ideas personales |
|---|---|---|
| creencias subyacentes sobre la naturaleza del azar | - naturaleza dual del mundo: los fenómenos determinísticos y los fenómenos aleatorios, en pie de igualdad, son las dos caras de la realidad<br>- naturaleza dual de la probabilidad: como grado de creencia (probabilidad subjetiva) y como límite de frecuencias relativas (probabilidad objetiva)<br>- naturaleza ordenable y jerarquizable del azar<br>- la probabilidad como incertidumbre (caso único) | -el pensamiento probabilístico subordinado al pensamiento determinístico: fenómenos de regresión a la media y de correlación explicados en términos de causa-efecto; la independencia estadística confundida con la independencia física; la convergencia funcional interfiere en la convergen-cia en probabilidad<br>-confusión entre los enfoques subjetivista y frecuencial<br>-sesgo de equiprobabilidad, debido a la naturaleza caótica del azar |
| lenguaje del azar | conceptos bien definidos de: suceso seguro, imposible, probable | identifica: suceso seguro y muy probable<br>suceso imposible y muy improbable |
| métrica del azar | axiomas de Kolmogorov | escala de probabilidad [0,1] |
| asignación de probabilidades | Mecanismos como:<br>- ley de Laplace<br>- ley de los grandes números: frecuencia relativa<br>- ley de la suma y la multiplicación de probabilidades<br>- distribuciones discretas y continuas<br>-teorema de Bayes<br>- aritmética de los pequeños números<br>Esquemas operatorios básicos:<br>- concepto de proporción<br>- teoría combinatoria<br>Las paradojas de la teoría de probabilidades | Mecanismos como:<br>- heurísticos: representatividad, accesibilidad, anclaje y ajuste, ley de los peque-ños números...<br>- versiones intuitivas y primitivas de las leyes normativas (ley de Laplace, ley de los grandes números, Regla de Bayes reducida al numerador, etc.)<br>- anumerismo: p.ej., la multiplicación de varios números siempre produce un número mayor<br>Esquemas operatorios básicos:<br>- coexistencia de estrategias proporcionales y aditivas en problemas de proporciones<br>- capacidad combinatoria limitada |

# CAPÍTULO 3
# ELEMENTOS BÁSICOS DE LA EDUCACIÓN PROBABILÍSTICA

**Tercer azar: De la buena suerte**

*Hace unos pocos años, un hombre ganó un premio muy cuantioso en la lotería de España. Los curiosos periodistas le preguntaron cómo lo había conseguido.El premiado dijo que había buscado deliberadamente el billete que acababa en 48 y explicó: «Soñé con el número 7 durante 7 noches seguidas y 7 por 7 es 48»*

*Hogarth (1987)*

Como educadores matemáticos nos interesa abordar el problema de las dificultades de aprendizaje que tienen los alumnos que emprenden el estudio de la teoría de probabilidades, como una parte del currículo de matemáticas de la enseñanza secundaria. Al revisar trabajos anteriores que abordan el mismo problema, hemos encontrado tres líneas de análisis:

1. El enfoque historicista: las concepciones de los alumnos participan de las falacias y paradojas epistemológicas que han surgido en el desarrollo histórico de la teoría matemática de las probabilidades.
2. El enfoque psicologicista: no existe una teoría de la probabilidad conductual como hay una teoría de la decisión conductual. En cuanto al aprendizaje, el problema es la falta de una teoría cognitiva del aprendizaje contrastada.
3. El enfoque didactista: el problema no es de aprendizaje sino de enseñanza; el profesor de matemáticas no necesita tener en cuenta las teorías cognitivas del aprendizaje. La lógica de la enseñanza es la lógica de la disciplina.

Nos llamó poderosamente la atención la falta de relación entre estos tres enfoques: las aportaciones de uno de ellos no se recogen ni influyen en los otros. Si los filósofos e historiadores de la matemática se centran en el carácter dual del concepto de probabilidad y en las paradojas de la teoría de probabilidades, los psicólogos se interesan, o bien por la génesis y evolución de la noción de probabilidad en el niño o bien por los sesgos en el razonamiento probabilístico de los adultos; a su vez, los didactas ensayan metodologías de enseñanza en las aulas (con o sin ordenadores, con o sin dados) que casi nunca toman en consideración las teorías cognitivas del aprendizaje o la epistemología de la matemática.

Ubicados dentro del campo de la investigación psicológica en razonamiento probabilístico, nos volvió a sorprender la escasa permeabilidad entre los distintos paradigmas de investigación. Haciendo dos grandes bloques, por un lado nos encontramos con los trabajos que versan sobre la adquisición y desarrollo de las nociones probabilísticas (teoría piagetiana, teoría de la intuición de Fischbein, análisis de reglas) y, por otro lado (con concepciones del sujeto y de la tarea experimental completamente distintas) nos encontramos con los trabajos sobre heurísticos y sesgos en el razonamiento probabilístico (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) emparentados con los estudios que se realizan dentro del marco de la teoría de la decisión conductual. También echamos en falta una conexión del paradigma de heurísticos y sesgos con el enfoque de las concepciones alternativas de los alumnos.

Pensamos que si bien estas desconexiones se pueden justificar en la investigación básica, donde cada paradigma tiende a ser cerrado en sí mismo y tiene vocación explicativa universal, sin embargo, dificultan la formulación de implicaciones didácticas, la extracción de consecuencias aplicables al proceso de enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades. Por eso, nuestra metodología de trabajo ha sido la de conectar e integrar, siempre que tuviese sentido, las distintas implicaciones didácticas que se deducen de las distintas perspectivas de análisis del problema. La investigación realizada (Sáenz, 1995) nos permitió identificar seis factores esenciales para una educación probabilística eficaz:

## 1. ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LA PROBABILIDAD

Existen características poco usuales en el desarrollo histórico de la probabilidad en comparación a otras teorías matemáticas tales como la geometría o aritmética. Un enfoque matemático de la probabilidad empezó a surgir hace poco más de tres siglos, mucho después que el hombre tuviera las primeras experiencias con el azar. Un gran número de paradojas acompañó el desarrollo conceptual indicando la disparidad entre intuiciones y enfoques formales. Un hito importante fue abandonar la tarea de formalizar una interpretación específica y concentrarse en estudiar la estructura de la probabilidad. Una fundamentación matemática sólida se estableció por Kolmogorov en 1933 pero no clarificó la naturaleza de la probabilidad. Todavía hoy existen distintos enfoques filosóficos que despiertan controversia.

¿Por qué no hubo teoría de probabilidad en Occidente antes de Pascal, en el siglo XVII, a pesar de que en todas las civilizaciones se utilizaban aparatos y juegos de azar? Hacking (1975) describe como «ausente familia de ideas» a este hecho y al analizar las razones de esta ausencia considera insuficientes o irrelevantes cada una de las explicaciones que se han dado, consideradas individualmente:

1. Se ha argumentado que una visión determinista del mundo excluye el pensamiento probabilístico; sin embargo, una conjetura alternativa pero mejor es que el pensamiento determinista, causal, es esencial para la formación de los conceptos de azar y probabilidad y por eso el modelo de causación mecánica y el modelo probabilístico emergen en el mismo período histórico, el siglo XVII.
2. Las loterías y los dados constituyen una buena forma de consultar a los dioses directamente, sin sacerdotes intermediarios, pero entonces resulta impío intentar computar lo que los dioses dicen, es decir, el papel de los dados en la adivinación podría excluir investigaciones críticas de las leyes de la aleatoriedad; sin embargo, mucha gente impía y culta era aficionada a los juegos de azar (Hacking pone como ejemplo a Marco Aurelio) y no por eso reflexionaron sobre la aritmética del azar.
3. Para concebir las leyes de la probabilidad necesitamos tecnología del azar, aparatos aleatorios que permitan generar ejemplos empíricos fácilmente comprensibles; las primeras experiencias aleatorias siempre emplean lo que Neyman (1950, citado en Hacking, 1975) llamó un Conjunto de Probabilidad Fundamental (CPF) de alternativas igualmente probables; sólo después de que el individuo comprenda esta idea puede progresar a conjuntos cuyas alternativas no son equiprobables. Se sugiere que en la edad antigua no existían CPF que nos diesen idea de equiprobabilidad: por ejemplo, los más antiguos de los dados cúbicos conocidos, hallados en tumbas egipcias datadas como anteriores al 2000 a. de C., no proporcionan un conjunto de 6 probabilidades iguales porque no son de tamaño uniforme, ni en el material ni en la forma de numerar sus caras (si bien en muchos de ellos los números de 1 a 6 están dispuestos de forma que las caras opuestas sumen 7, igual que en los dados modernos). Sin embargo, argumenta Hacking, aunque no mucho, sí que existía material aleatorio adecuado, por ejemplo, se conservan dados de marfil muy antiguos en el Museo de Antigüedades del Cairo que están muy bien equilibrados.
4. Hay dos motivos por los que una ciencia se desarrolla: en respuesta a problemas que ella misma crea y en respuesta a problemas que le son propuestos desde fuera, problemas derivados, sobre todo, de necesidades económicas. Pues bien, sólo muy recientemente la teoría de probabilidad ha sido capaz de crear sus propios problemas y generar sus propios programas de investigación; históricamente, el estímulo vino de otras disciplinas: en el S. XVII el establecimiento de los seguros y anualidades impulsaron a la estadística, en el S.XVIII la teoría de la medida se desarrollaba con fuerza sobre todo al servicio de la astronomía, en el S.XIX se creaba la biométrica para análisis de datos biológicos, en el S.XX las necesidades de la agricultura y medicina motivan el desarrollo de la teoría probabilística; con todo, esta explicación economicista no tiene en cuenta que algunas destrezas de cálculo de anualidades ya eran utilizadas en la época romana.

*5.* La matemática en Occidente no era suficientemente rica en ideas y capacidad de cálculo para generar una matemática del azar; faltaba, sobre todo, un algebra combinatoria porque hay que esperar a 1666 a que Leibniz publique su Ars Combinatoria. Por contra, los indios y árabes que tenían un buen sistema de numeración también desarrollaron antes terminología y cálculos probabilísticos (el término hazard es tan árabe como el término álgebra). Desde una perspectiva educativa, conviene subrayar el paralelismo psico-histórico que se desprende del dato de que si las técnicas combinatorias fueron necesarias para la aparición histórica de la probabilidad, Piaget e Inhelder (1951) establecen que es necesario que el niño posea el esquema combinatorio, que forma parte del pensamiento intelectual más avanzado, para que pueda comprender el concepto de probabilidad.

En definitiva y como corolario, Hacking establece que la conjunción de diversos factores tales como la impiedad (la independencia del hombre de la religión), la existencia de aritmética, un diferente concepto de causalidad y el desarrollo comercial, debería conducir a la formación de la matemática de la probabilidad. Como dato confirmatorio encuentra que hace 2000 años la India tenía un avanzado sistema de mercado, tenía un buen sistema de numeración, y tanto su piedad como sus teorías de las causalidad no seguían moldes europeos; pues bien, en esta sociedad se encuentran rastros de una teoría de la probabilidad desconocida en Occidente. Con todo y aunque los dados son uno de los más viejos pasatiempos humanos, el hecho histórico es que no se conocen matemáticas de la aleatoriedad hasta el Renacimiento y que ninguna de las explicaciones de este hecho es concluyente.

De acuerdo a la leyenda, la probabilidad comenzó en 1654 cuando el jansenista Pascal resolvió los dos célebres problemas que le propuso el mundano Caballero de Méré y envió su solución a Fermat (en realidad, los dos problemas llevaban ya algún tiempo en circulación entre los estudiosos de la época). Lo que sí es verdad es que la segunda mitad del S. XVII es el tiempo del nacimiento de la probabilidad: en 1657, Huygens escribió el primer libro de texto sobre la probabilidad que se ha publicado. Por esas fechas Pascal hizo la primera aplicación de razonamiento probabilístico a problemas distintos de los juegos de azar e «inventó» la teoría de la decisión: el pensador francés no duda en apostar por la existencia de Dios, ya que, por pequeña que sea la probabilidad de que ello ocurra, la ganancia es infinita si es que, en efecto, Él existe; por lo que tal juego tiene la propiedad de tener una esperanza positiva. Aunque Pascal estableció estas consideraciones con la intención de predicar la religión, muestran como subproducto algo interesantísimo desde la perspectiva de la matemática: establecen el modo en que la aritmética aleatoria puede ser parte de un arte de razonamiento general y hacen posible comprender que la estructura de pensamiento sobre juegos de azar se puede transferir a una teoría de la inferencia que no está basada en un escenario de azar. En el libro Logic de Port Royal se mencionan medidas numéricas de algo que hoy día se llama probabilidad. Simultánea pero independientemente, Leibniz pensaba en aplicar una métrica de las probabilidades a problemas legales y en desarrollar la combinatoria. John Graunt publicó en 1662 el primer conjunto extenso de inferencias estadísticas extraídas de los registros de mortalidad.

La probabilidad que se desarrolla en tiempos de Pascal es esencialmente dual: tiene que ver, a la vez, con frecuencias estables a largo plazo y con grados de creencia; es simultáneamente, estadística y epistemológica. La dualidad de la probabilidad está bien ilustrada por los fundadores de la teoría: el problema de Pascal de dividir el dinero de una apuesta cuando hay que interrumpir el juego, es de naturaleza aleatoria; su argumento de decisión sobre la existencia de Dios es de grado de creencia. Huygens escribió sobre todo de problemas aleatorios. El Logic finaliza con una discusión sobre el concepto de creencia razonable. ¿A qué necesidad histórica se debió que estas dos familias de ideas fácilmente distinguibles confluyeran en una sola? ¿Cómo se hizo posible este concepto dual de probabilidad?

Hacking (1975) afirma que los filósofos han analizado esta dualidad de la probabilidad desde hace tiempo: Carnap distinguía entre probabilidad inductiva y probabilística; Poisson aprovechaba las palabras chance y probabilité para hacer la misma distinción; Condorcet sugirió facilidad para el concepto aleatorio y motivo de creencia para el concepto epistemológico; Russell usó credibilidad para el último.

En el enfoque epistemológico de la probabilidad hay dos escuelas de pensamiento dominantes:

*1.* En las primeras décadas de este siglo, se prestó mucho interés a la teoría avanzada por Jeffreys (1933), según la cual la probabilidad conferida a una hipótesis por algún tipo de evidencia es una relación lógica entre dos proposiciones: la probabilidad de $h$ a la luz de $e$ es el grado en el que $e$ implica lógicamente a $h$.
*2.* Por otro lado está la teoría que De Finetti (1937) llamó probabilidad personal o subjetiva; en esta teoría la probabilidad que tú asignas a una proposición particular depende de tu propio juicio personal, pero el conjunto de todas tus asignaciones de probabilidad debe estar sometido a reglas rigurosas de coherencia interna. Independientemente de aceptar la teoría lógica o personal, ambas son plenamente epistemológicas, interesadas en la credibilidad de proposiciones a la luz de un juicio o evidencia.

En el enfoque aleatorio de la probabilidad hay una familia de teorías estadísticas que se centran en el estudio de la tendencia que muestran algunos fenómenos experimentales o naturales a producir frecuencias estables a largo plazo en ensayos repetidos. La probabilidad de salir «caras» es una propiedad de la moneda como lo es su masa, y la estabilidad de las frecuencias en ensayos repetidos es un hecho objetivo de naturaleza independiente del conocimiento de cualquier persona sobre ello.

Es interesante analizar el caso de Jacques Bernoulli (1654-1705) que es visto como subjetivista por unos, como logicista por otros y frecuencialista por otros. Se le ha llamado subjetivista porque introdujo la palabra ‘subjetivo’ al reflexionar sobre la probabilidad; otros dicen que anticipa la teoría de probabilidades logicista de Carnap y por fin, hay algunos que le consideran el precursor de la versión frecuencialista en virtud de su ley de los grandes números. Aunque se considera que estas tres concepciones de la probabilidad son virtualmente incompatibles, muchos investigadores afirman que se pueden encontrar los orígenes de todas ellas en el trabajo de Bernoulli. La verdad de la cuestión puede ser que se sintió atraído por todas y cada una de esas ideas aparentemente incompatibles pero que suponen, cada una de ellas, una interpretación específica de la probabilidad. En todo caso, conviene señalar el dato significativo de que las teorías de hoy ya se pueden distinguir en el nacimiento del concepto de probabilidad.

En el Renacimiento lo que se llamó entonces probabilidad era un atributo de opinión y se contraponía a conocimiento que se podía obtener sólo mediante demostración. Así, surgió una dualidad entre ciencia (conocimiento) y opinión (creencia); había «altas ciencias», como matemáticas, mecánica, astronomía y filosofía, que buscaban verdades absolutas y «bajas ciencias», como medicina, astrología y alquimia, que producían opiniones basadas en evidencia empírica (Hacking, 1975). Galilei (1632/1967) consideró la probabilidad como «ciencia baja», basada en la opinión. Una opinión, en principio, tenía tanto peso como cualquiera otra y sólo era más probable si estaba soportada por alguna autoridad; por ejemplo, en el caso de enfoques contrapuestos a un problema, la solución tenía que basarse en opiniones de las escrituras y en las enseñanzas de la Iglesia. Para que emergiese nuestra moderna versión matemática de la probabilidad, tenía que cambiar el concepto de lo que se consideraba evidencia aceptable. Antes del S.XVII se consideró la probabilidad como una materia de aprobación más que un cálculo matemático. Finalmente, la idea de evidencia experimental empezó a ganar respetabilidad en el S.XVII gracias a los trabajos de Pascal y Huygens. Mientras las ciencias clásicas intentaban deducir efectos a partir de Primeras Causas, la nueva ciencia intentaba inducir causas a partir de efectos observados. Aquí descansan las semillas de nuestra estadística.

Queremos señalar otra característica de la disciplina estadística que puede haber sido un obstáculo para el desarrollo temprano de conceptos formales de probabilidad. Ante una situación de incertidumbre, gobernada por los dados que interpretan el juicio divino, tiene para el hombre el mayor interés el siguiente resultado, el número que saldrá en el siguiente lanzamiento. El hombre no puede conseguir ninguna predicción definitiva y sólo puede especular a partir de patrones de resultados previos o confiar en la divina voluntad. Sin embargo para progresar en la formalización del concepto de probabilidad hay que considerar el siguiente resultado sólo como representativo de resultados futuros o hipotéticos. Sólo esta transformación del problema lo hace abordable pero no da una respuesta a la cuestión original. La probabilidad de 1/6 no dice nada acerca de que número se obtendrá realmente y si saldrá un «cinco» en la siguiente tirada de un dado. Sin embargo y sorprendentemente, la probabilidad de 1/6 constituye algún conocimiento indirecto para una tirada específica. Este aspecto de la probabilidad, todavía motivo de debate filosófico, es un obstáculo importante para la comprensión de los alumnos.

Con todo, no conviene sobreestimar la tardía conceptualización de la probabilidad porque esto también ocurre en otras disciplinas. El desarrollo científico basado en un enfoque físico causal enfrentado a un enfoque deístico estuvo marcado por grandes controversias incluso sobre las ideas que hoy nos parecen más naturales (no hay más que recordar los problemas de Galileo con la Iglesia Católica). La geometría euclidiana no supuso una temprana clausura conceptual ni de la geometría ni del pensamiento axiomático, tal como a veces se dice, en cuanto que sólo proporcionó reglas de construcción pero no conceptos formales; el problema del axioma de las paralelas no se clarificó hasta los trabajos de Gauss y Lobachevski en el S.XIX. En aritmética no se consiguió una axiomatixación de los números hasta Peano, apenas hace 100 años. También es verdad que un nivel de desarrollo conceptual similar en probabilidad se alcanzó todavía más tarde puesto que la axiomatización de la probabilidad data de 1933.

Piaget e Inhelder (1951) estudian la génesis psicológica de la idea de azar y llegan a la conclusión, paralela a la conclusión histórica, que el concepto de probabilidad emerge muy tarde en el desarrollo autónomo del niño, precisamente en el estadio de las operaciones formales que es el estadio superior de desarrollo intelectual. El niño necesita un pensamiento causal desarrollado y los esquemas operatorios de la proporcionalidad y de la combinatoria para comprender y aplicar las leyes formales de la probabilidad.

Si se detecta este paralelismo entre el desarrollo histórico y la génesis psicológica de los conceptos de azar y probabilidad, conviene no ignorarlo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades. En nuestra investigación (Sáenz, 1995) hemos encontrado que, al abordar problemas clásicos de la teoría de probabilidades, nuestros alumnos daban las mismas soluciones (incorrectas) que buenos matemáticos, como D'Alembert y el Caballero de Meré, que estudiaron esos mismos problemas en los albores de la ciencia estadística. Podemos decir, en un enfoque aproximativo, que sus problemas de entonces son los problemas de ahora de nuestros alumnos.

## 2. LA EXISTENCIA DE CONOCIMIENTO PREVIO DE CARÁCTER ESPECÍFICO

Ausubel, Novak y Hanesian (1978) afirman que sólo cuando existe en la estructura cognitiva del sujeto algún concepto (aunque sea rudimentario) relevante para la información nueva, el aprendizaje es significativo. Lo que se aprende es función, básicamente, de lo que ya se sabe. Y lo que se sabe son ideas, creencias, intuiciones, estrategias de razonamiento (heurísticos), procedimientos, conceptos formales, etc., y este conocimiento es: a veces erróneo, a veces incompleto, a veces acorde con la ciencia. En todo caso es adaptativo y funcional de modo que se construye en la experiencia diaria de los sujetos y permanece porque tiene utilidad y economía en el contexto de tareas cotidianas.

En el capítulo anterior hemos presentado el sistema de ideas probabilísticas de los estudiantes que engloba muchas intuiciones e ideas sobre el azar y la probabilidad, las menos, conformes con la teoría axiomática de probabilidades, las más, alternativas a dicha teoría. Hemos conseguido clasificar en tres categorías los conceptos probabilísticos: intuitivos, internamente contradictorios y contraintuitivos. Podemos suponer que los conceptos intuitivos no causarán dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje, que los internamente contradictorios sí causarán dificultades superables mediante una buena estrategia didáctica y que los alumnos tendrán las mayores dificultades de aprendizaje con los conceptos contraintuitivos.

Este conjunto de conocimientos de carácter específico, que dirige el razonamiento probabilístico de nuestros alumnos muchas veces es implícito, opaco. Nuestra estrategia instruccional dirigida al cambio conceptual (Driver, 1988; Pozo, 1989) facilita que este sistema de ideas personales se haga explícito, transparente, tanto al alumno que debe ser consciente de las ideas que constituyen su pensamiento y de las limitaciones del mismo, como al profesor que debe conocer los conocimientos intuitivos de sus alumnos y partir de ellos si quiere que el aprendizaje del modelo científico sea significativo.

## 3. HEURÍSTICOS DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO QUE AL ACTIVARSE EN SITUACIONES ENGAÑOSAS PUEDEN PRODUCIR SESGOS

Kahneman, Slovic y Tversky (1982) muestran que la gente se basa en un número limitado de principios heurísticos (como el de representatividad, accesibilidad, anclaje y ajuste, etc.) que convierten las tareas complejas de evaluar y predecir probabilidades en operaciones más simples. Generalmente estos heurísticos resultan de una gran utilidad pero en algunas ocasiones conducen a errores graves y sistemáticos produciendo sesgos cognitivos, ejemplos de los cuales hemos estudiado en el capítulo anterior. La confianza en los heurísticos y la persistencia de los sesgos no es algo que caracterice únicamente a los sujetos inexpertos, también los expertos estadísticos son propensos a esos mismos sesgos cuando piensan de un modo intuitivo. Estas observaciones tienen, al menos, dos implicaciones inmediatas para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades:

Es necesario conocer el equipamiento intuitivo probabilístico de nuestros estudiantes, construido a partir de su experiencia diaria prolongada, porque de ahí van a inferir los heurísticos, reglas o estrategias de razonamiento estadístico cotidiano.- Es necesario enseñar eficazmente las reglas estadísticas básicas (leyes de los grandes números, principio de regresión a la media, independencia estadística, etc.) porque estos conceptos o principios no se aprenden de la experiencia cotidiana a pesar de que todo el mundo está expuesto a lo largo de su vida a numerosos ejemplos de los que podrían inducirse esas reglas. La enseñanza ha de posibilitar el enfrentamiento de los alumnos con situaciones engañosas, es decir con tareas que eliciten sesgos del razonamiento probabilístico.

## 4. EL DESARROLLO DE LAS OPERACIONES LÓGICO-MATEMÁTICAS DEL CONOCIMIENTO

Numerosos estudios han relacionado la teoría piagetiana con la enseñanza de las matemáticas y algunos de ellos se han dirigido a comprobar que los sujetos con un nivel de desarrollo lógico-formal pleno tienen un rendimiento elevado en matemáticas (Corral y Tejero, 1986). Un problema distinto es que sólo un bajo porcentaje de adolescentes alcanzan el nivel formal completo. En nuestra investigación aparece una relación directa del desarrollo cognitivo con el rendimiento en probabilidades. Lo primero que cabría concluir de estos experimentos es la necesidad de fomentar el desarrollo de operaciones generales de procesamiento, si se quiere optimizar la asimilación de conceptos matemáticos. Ahora bien, esto no quiere decir que haya que enseñar el pensamiento formal directamente porque este pensamiento no consiste sólo en un conjunto de estrategias potentes para resolver problemas particulares sino que es también un modo distinto de enfrentarse con la realidad que permite posteriormente la construcción por parte del sujeto de esas estrategias.

Por tanto y tal como dice Corral (1994), lo que procede es facilitar al estudiante los estímulos suficientes para que pueda ir construyendo por sí mismo esas operaciones generales de procesamiento. En este sentido, el proceso de enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades puede ser ocasión para que se desarrollen plenamente varios de los esquemas básicos del pensamiento formal como son el esquema proporcional, el esquema combinatorio, la noción de probabilidad y el esquema correlacional, que a su vez son necesarios para la comprensión de las leyes del azar y la probabilidad.

## 5. DIFERENCIAS INDIVIDUALES

¿Por qué algunos alumnos rinden más que otros? Cuando pedimos a nuestros estudiantes que realicen una tarea matemática podemos observar muchas diferencias entre ellos. Algunos contextos de tarea serán atrayentes para unos alumnos y no lo serán para otros (por ejemplo, un problema combinatorio con equipos de fútbol seguramente motivará más a los chicos que a las chicas). Ciertos alumnos pese a considerar interesante el contexto no serán capaces de resolver el problema. Los que están capacitados para resolverlo podrán utilizar variados métodos de resolución. El hecho de que surja tal cantidad de escenarios distintos para una determinada tarea matemática es una característica que tiene que valorarse a la hora de considerar el proceso de aprendizaje.

Orton (1990) afirma que hay dos razones para que cualquier método enseñado para resolver un problema concreto no satisfaga a todos los alumnos. En primer lugar, en razón de su nivel de conocimientos previos; en segundo lugar, porque no compagine con su estilo cognitivo. La cuestión de que distintos alumnos prefieren distintos métodos de solución de un mismo problema es sólo una de la amplia gama de cuestiones relacionadas con las diferencias individuales. Las capacidades, preferencias, actitudes y motivación contribuyen a que unos alumnos rindan más que otros.

Hemos investigado la influencia de una amplia variedad de factores de sujeto (edad, sexo, desarrollo cognitivo, estilo cognitivo, rendimiento en matemáticas y conocimientos previos) en el razonamiento probabilístico y encontramos que la variable que más influye (para bien y para mal) es la existencia de instrucción en probabilidades.

## 6. EL DOMINIO AFECTIVO

Muchos profesores tenemos la percepción de que los factores afectivos juegan un importante papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta percepción se corresponde con investigaciones que muestran la influencia de esos factores en la resolución de problemas de matemáticas (McLeod y Adams, 1989). El papel del afecto parece ser particularmente importante en el desarrollo de destrezas de pensamiento de alto nivel, no rutinarias. Sin embargo, las teorías sobre educación matemática no han puesto mucho énfasis en el papel del afecto sobre todo aquellas teorías encuadradas dentro del paradigma del procesamiento de la información; con todo, Simon (1967) insistió en la importancia de incluir factores como motivación y emoción en tales teorías aunque reconoció las dificultades que implicaba la investigación en afectos, en comparación a la investigación en procesos cognitivos, que son mucho más fáciles de describir, diferenciar y clasificar.

Nuestra propuesta didáctica, que presentaremos en el siguiente capítulo, la hemos bautizado como cambio conceptual y actitudinal porque incluye una amalgama de aspectos cognitivos, metacognitivos y afectivos que deben estar presentes en diferentes momentos del proceso educativo:

*1.* Metacognición: estimular a los alumnos para que vuelvan sobre las ideas mantenidas por ellos o por otros y reflexionen y expresen una opinión sobre ellas.
*2.* Clima de clase: fomentar una actitud de respeto, tanto del profesor como de los alumnos, hacia las ideas de los demás, incluso cuando son erróneas.
*3.* Papel del profesor: proporcionar oportunidades para que los alumnos se expresen por sí mismos, sin temor al ridículo y asegurar que las ideas científicas se imponen en la clase, no en base a su autoridad sino en base a la toma de conciencia del alumno que las acepta, tras haber sido contrastadas.
*4.* Papel del alumno: asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje, de conocer otras ideas y de cambiar sus puntos de vista ante otros que sean más viables.

Por último, queremos resaltar un hecho que nos parece especialmente sugerente: Corral (1994) ha llegado a estos mismos seis aspectos esenciales de la comprensión y la adquisición del conocimiento matemático pero desde una perspectiva radicalmente diferente a la nuestra. La suya es una posición psicológica pura, de tal modo que propone una vinculación de cada uno de los seis factores con los operadores ocultos de la teoría de los operadores constructivos de Pascual-Leone (1980). El nuestro es un sistema transdisciplinar que integra enfoques histórico-epistemológicos, psicológicos y didácticos. El adopta una posición de observador del quehacer matemático de los sujetos, nosotros queremos intervenir directamente en la mejora de ese quehacer. Pero lo importante es que coincidimos en el diagnóstico de los aspectos implicados en el proceso. Consideramos un feliz resultado de nuestro trabajo el que pueda abrigarse en una teoría cognitiva como la de Pascual-Leone.

## CAPÍTULO 4
## LA ENSEÑANZA DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES DESDE UN ENFOQUE CUASI-EMPÍRICO Y PARA EL CAMBIO CONCEPTUAL

**Cuarto azar: De la enseñanza**

*La teoria de las probabilidades, en el fondo, no es otra cosa que el buen sentido reducido a cálculo*

*Pierre-Simon de Laplace (1814)*

### 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el diseño y construcción de un método de enseñanza de la teoría de probabilidades en el nivel educativo secundario, que ha de tener las siguientes características, según las conclusiones del capítulo anterior:

*1.* Ha de basarse en una rigurosa fundamentación epistemológica de la matemática.
*2.* Ha de contener estrategias de enseñanza dirigidas al cambio conceptual (según la tradición de las concepciones espontáneas) y al desarrollo del pensamiento intuitivo correcto.
*3.* Ha de incorporar un diagnóstico y tratamiento de los sesgos del razonamiento probabilístico.
*4.* Ha de proporcionar un entrenamiento específico en estrategias cognitivas y metacognitivas.
*5.* ha de tener en cuenta las diferencias individuales, tanto intelectuales como motivacionales, que se dan entre los alumnos.

El enfoque tradicional de la enseñanza de la teoría de probabilidades se basa epistemológicamente en el carácter hipotético-deductivo de la teoría; a partir de ahí propone una enseñanza que se ajuste a la estructura lógica de la materia, de una manera lineal, sin tener en cuenta los procesos cognitivos del aprendizaje. A pesar de los pobres resultados escolares que tal enfoque proporciona, no cabe duda que tiene dos virtudes esenciales que explican, a nuestro juicio, su permanencia :

*a)* Hay una coherencia profunda entre la concepción epistemológica de la probabilidad y los contenidos y métodos de enseñanza que se utilizan.
*b)* Los profesores se sienten identificados, por educación y tradición, con tal premisa epistemológica y por tanto encuentran naturales y sin posibles alternativas los contenidos y métodos de enseñanza que se deducen de tal premisa.

Muchas veces los enfoques didácticos que pretenden superar los bajos rendimientos escolares que obtienen un gran porcentaje de alumnos, se basan en una serie de innovaciones metodológicas (uso del ordenador, resolución de problemas, etc.) que tratan de tener en cuenta el proceso de aprendizaje del alumno. Sin embargo, estas innovaciones fracasan una y otra vez y la mayoría de profesores vuelven al enfoque tradicional de enseñanza. ¿Por qué?

Nosotros pensamos que la razón es que las nuevas propuestas didácticas se limitan a ser meras reformas puntuales de las actividades didácticas tradicionales pero no cuestionan la naturaleza hipotético-deductiva de la teoría y la supeditación del proceso de enseñanza-aprendizaje a la estructura interna del curriculo probabilístico. Las nuevas propuestas constituyen un conjunto de sugerentes pero subsidiarias actividades de aula de tal modo que al final lo importante sigue siendo hacer explícitas las conexiones matemáticas consistentes. Los profesores intuyen este desajuste epistemológico-didáctico y a la menor dificultad del proceso educativo vuelven a las actividades tradicionales donde se sienten más cómodos.

Nuestra propuesta didáctica pretende superar las deficiencias del enfoque tradicional pero quiere seguir conservando las dos virtudes primordiales de ese enfoque: la existencia de un marco epistemológico explícito y la coherencia de los contenidos y métodos de enseñanza con ese marco. Para ello, definimos nuestro modelo de instrucción según cuatro grandes descriptores que sintetizan todas las fases y aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje: base epistemológica, base psicopedagógica, contenidos y métodos y aplicación en el aula.

## 2. MARCO EPISTEMOLÓGICO: LA MATEMÁTICA ES CUASI-EMPÍRICA

Según la ortodoxia del empirismo lógico, mientras que la ciencia es a posteriori, sustantiva y falible, la matemática es a priori, tautológica e infalible. Sin embargo Lakatos (1981) defiende una asimilación radical de la matemática a la ciencia y muestra que el empirismo e inductivismo matemático, no sólo respecto al origen y método de la matemática sino también respecto a su justificación, están más vivos y extendidos de lo que se pudiera pensar. Apoya sus argumentos en la autoridad de expertos contemporáneos en filosofía de la matemática: «Russell fue, probablemente, el primer lógico moderno que afirmó que la naturaleza de la matemática y de la lógica pudiera ser inductiva. Russell, que en 1901 había proclamado que el edificio de las verdades matemáticas se mantenía incomovible e inexpugnable..., en 1924 pensaba que la lógica y la matemática eran exactamente iguales que las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell: ambas cosas son aceptadas debido a la verdad observada de algunas de sus consecuencias lógicas» (p.43). Gödel (1944) admitió que, bajo la influencia de la crítica moderna de sus fundamentos, la matemática había perdido ya gran parte de su «certeza absoluta» y que en el futuro, debido a la aparición de nuevos axiomas de la teoría de conjuntos, sería cada vez más falible. Según Mostowski (1953), la matemática sólo es una ciencia natural más y Kalmar (1967) afirma que:

> *«La consistencia de la mayor parte de nuestros sistemas formales es un hecho empírico... ¿ Por qué no confesar que la matemática, al igual que otras ciencias, se basa finalmente sobre, y ha de ser contrastada en, la práctica?» (citados en Lakatos, 1981, p.47).*

La epistemología clásica ha modelado durante dos mil años su ideal de teoría, científica o matemática, sobre la concepción de la geometría euclídea. La teoría ideal es un sistema deductivo con una inyección de verdad indudable en la cúspide (una conjunción finita de axiomas), de modo que esa verdad, fluyendo desde la cúspide hacia abajo, a través de canales de inferencias válidas, seguros y preservadores de la verdad, inunda todo el sistema.

El teorema de Gödel (1981) sobre la incompletitud de los sistemas formales acabó con la vieja utopía axiomática. Se admitía, de modo implícito, que todas las ramas de la matemática se organizaban a partir de un conjunto de axiomas susceptibles de desarrollar sistemáticamente la infinita totalidad de proposiciones verdaderas suscitadas. El trabajo de Gödel demostró que esta suposición es insostenible. El método axiomático tiene limitaciones intrínsecas. La aritmética ordinaria de los números enteros no puede ser plenamente axiomatizada. Aún más: es imposible establecer la consistencia lógica interna de una amplia clase de sistemas deductivos a menos que se adopten principios tan complejos de razonamiento que su consistencia interna quede tan sujeta a la duda como la de los propios sistemas. Penrose (1991) ha acertado al establecer como origen de la insatisfacción que provoca en amplios sectores científicos el vigente marco epistemólógico, las situaciones científicas inesperadas (como el teorema de Gödel) y las situaciones científicas anómalas (como las conjeturas en la teoría de números). Penrose sugiere que estas dos clases de situaciones deben llevarnos a una nueva reflexión sobre la naturaleza del pensamiento y sobre la conciencia.

Históricamente, el que la ciencia, a pesar de los ingentes esfuerzos que se hicieron, no pudiera organizarse en teorías euclídeas supuso un gran golpe para el racionalismo ultra-optimista. Resultó que las teorías científicas estaban organizadas en sistemas deductivos donde la inyección crucial del valor de verdad se encontraba en la base, en un conjunto especial de teoremas. Pero la verdad no fluye hacia arriba. El flujo lógico importante en tales teorías cuasi-empíricas no es la transmisión de la verdad, sino más bien la transmisión de la falsedad, desde los teoremas especiales ubicados en la base (enunciados básicos) hacia arriba, hasta el conjunto de axiomas (hipótesis). Hay que aclarar que una teoría que es cuasi-empírica según Lakatos puede ser empírica o no-empírica en el sentido usual: es empírica sólo si sus teoremas básicos son enunciados básicos espacio-temporales cuyos valores de verdad vienen determinados por el código vigente del científico experimental. De una teoría euclídea puede afirmarse que es verdadera; de una teoría cuasi-empírica, a lo sumo, que está bien corroborada, pero es siempre conjetural. Además, en una teoría euclídea los enunciados básicos verdaderos, que son los axiomas del sistema deductivo, prueban el resto del sistema; en una teoría cuasi-empírica los enunciados básicos verdaderos son explicados por el resto del sistema.

La metodología de una ciencia depende en gran medida de que dicha ciencia aspire a un ideal euclídeo o cuasi-empírico. La regla básica de una ciencia que adopte el primer objetivo es la búsqueda de axiomas autoevidentes, la metodología euclídea es antiespeculativa. La regla básica del segundo tipo de ciencia es la búsqueda de hipótesis imaginativas y audaces con una gran potencia explicativa y heurística; este tipo de ciencia invoca una proliferación de hipótesis alternativas para ser criticadas, la metodología cuasi-empírica es intrínsecamente especulativa (Lakatos, 1976).

El desarrollo de una teoría euclídea comprende tres fases:

*1.* Estado intuitivo precientífico, de ensayo y error, que constituye la prehistoria de la disciplina.
*2.* Periodo de fundamentación que reorganiza la disciplina y establece su estructura deductiva.
*3.* Todos los problemas son resueltos dentro del sistema establecido. El descubrimiento de falsadores lógicos (proposiciones de la forma p&-p) lleva al sistema a su destrucción.

El desarrollo de una teoría cuasi-empírica es muy diferente:

*1.* Se parte de problemas, a los que se dan soluciones arriesgadas que se someten a pruebas severas, a refutaciones.
*2.* Se establecen distintas teorías rivales para los hechos problemáticos.
*3.* Se someten las teorías a revisión continua.

Lakatos (1981) analiza el fracaso de los dos intentos más importantes de una reorganización euclídea perfecta de la matemática clásica, el logicismo y el formalismo, y afirma que los estudios fundamentales no consiguieron establecer de una vez por todas la certeza de los métodos matemáticos, fracasaron en su objetivo de constituir la matemática como el paradigma de certeza y verdad y condujeron inesperadamente a la conclusión de que tal vez fuese imposible una reorganización euclídea de la matemática; por tanto, concluye Lakatos, las teorías matemáticas son cuasi-empíricas, al igual que las teorías científicas.

La historia de las teorías cuasi-empíricas es una historia de arriesgadas especulaciones y de refutaciones dramáticas. Pero las nuevas teorías y las refutaciones espectaculares no se dan cada día en la vida de las teorías cuasi-empíricas. Existen períodos de estancamiento cuando una sola teoría domina la escena sin tener rivales o refutaciones reconocidas. Semejantes períodos hacen que muchos olviden la criticabilidad de los supuestos básicos. Teorías que parecían contraintuitivas o degeneradas al ser propuestas por primera vez, cobran autoridad. Se propagan ilusiones metodológicas extrañas: algunos imaginan que los axiomas mismos empiezan a resplandecer bajo la luz de la certeza euclídea, otros imaginan que los canales deductivos de la lógica elemental tienen el poder de retransmitir la verdad inductivamente desde los enunciados básicos hasta los axiomas existentes. El ejemplo clásico de período anormal en la vida de una teoría cuasi-empírica es el largo dominio de la mecánica y de la teoría de la gravedad newtonianas. El carácter paradójico e implausible de la teoría llegó a desesperar al mismo Newton, sin embargo, tiempo después, Kant pensaba que era autoevidente y otros filósofos de la ciencia creyeron que estaba probada inductivamente. El peligro principal de estos engaños radica en que ambos cambian el desafío y la aventura que supone trabajar en la atmósfera de la crítica permanente de las teorías cuasi-empíricas por el embotamiento y la pereza de una teoría euclídea o inductivista, en la que los axiomas están más o menos establecidos, y donde la crítica y las teorías rivales son reprimidas.

Habiendo resumido el pensamiento lakatosiano sobre el carácter cuasi-empírico de la matemática, vamos a utilizar este enfoque para analizar someramente la teoría de probabilidades y proponer una didáctica de dicha disciplina basada en el enfoque epistemológico de Lakatos.

El modelo probabilístico de Kolmogorov es una teoría euclídea cuyos axiomas son:

*1.* $0 \leq P(A) \leq 1$
*2.* $P(AUB) = P(A) + P(B)$, A y B son sucesos incompatibles.
*3.* $P(U) = 1$

De estos axiomas, siguiendo un método estrictamente deductivo, se infieren un gran número de teoremas. Este modelo teórico se justifica ante el alumno por las propiedades de las frecuencias que sólo actúan como evidencia intuitiva del modelo teórico formal que se define. En este proceso están reflejadas las tres fases de la teoría euclídea que antes señalamos:

*1.* Estado intuitivo precientífico que en el caso de la teoría de probabilidades puede ser el modelo de Laplace y el modelo frecuencial.
*2.* Período de fundamentación con la axiomática de Kolmogorov y los teoremas que de ella se deducen.
*3.* Asignación de probabilidades en un problema determinado siguiendo criterios de simetría (modelo de Laplace) o repitiendo el experimento, teniendo en cuenta la ley de estabilidad de las frecuencias relativas (modelo frecuencial).

En un enfoque cuasi-empírico del desarrollo de la ciencia probabilística diremos que, históricamente, se partió de problemas que se podían solucionar dentro de los modelos de Laplace o frecuencial y que se llegó al modelo de Kolmogorov después de pruebas severas y de refutaciones de los anteriores modelos que permitieron abordar nuevos problemas. Ahora coexisten junto al modelo formal de Kolmogorov, los modelos informales laplaciano y frecuencial donde se resuelven los problemas elementales de probabilidades. Sólo porque existen falsificadores lógicos de los modelos informales y problemas que no se pueden plantear fue necesario llegar al modelo de Kolmogorov. Este, a su vez, presenta falsadores de tipo lógico y de tipo heurístico, es decir problemas lógicos y problemas de asignación de probabilidades, por lo que parece surgir la necesidad de crear un nuevo modelo formal. En definitiva, hay una revisión continua de las teorías y no un embotamiento perezoso en una de ellas.

La caracterización teórica de la probabilidad en el aula que defiende Steinbring (1991) tiene muchos puntos en común con el enfoque cuasi-empírico de las matemáticas que defiende Lakatos, a pesar de los significados aparentemente opuestos de los términos «teórico» y «cuasi-empírico». En efecto, de ambos enfoques se deduce que el significado de los conceptos probabilísticos no queda completamente definido por la estructura axiomática inicial sino que ese significado depende del nivel de desarrollo de la teoría de probabilidades, es decir, se va enriqueciendo a medida que se despliega la teoría y las representaciones y medios de trabajar con los conceptos. A su vez, la teoría se desarrolla aplicando los conceptos disponibles a problemas reales. Ahora bien, ni las definiciones y reglas básicas ni las aplicaciones empíricas cubren por sí solas el concepto de probabilidad, es la relación de la componente teórica y la componente empírica quien da significado completo a la noción de probabilidad. Por ejemplo, si el azar está determinado por la equiprobabilidad de la definición de Laplace, debería haber un sólo conjunto de casos posibles y una probabilidad única en el problema de la cuerda de Bertrand; sin embargo, cada uno de los tres modelos de solución propuestos representa el fenómeno aleatorio y sus probabilidades asociadas; el concepto de azar no es significativo sin referencia a un generador real de sucesos.

La aceptación de la tesis de que la matemática en general y la teoría de probabilidades en particular, tienen un carácter cuasi-empírico y en este sentido son equiparables a las ciencias naturales, genera profundas implicaciones didácticas. Frente al enfoque formalista que tiende a identificar la matemática con su abstracción axiomática formal de tal manera que la matemática no tiene propiamente historia sino que es un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, el enfoque cuasi-empírico pone el acento en los contraejemplos, las refutaciones y la crítica como componentes esenciales y naturales del quehacer matemático. La deducción ya no es el único patrón heurístico de la matemática y se admite y se promueve el establecimiento de distintas teorías rivales para los hechos problemáticos.

Estas propuestas llevadas al proceso de enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidades implican, entre otras consecuencias, tomar en consideración las ideas y conjeturas de los alumnos sobre los fenómenos aleatorios como auténticas teorías alternativas a las teorías formales. No se puede ignorarlas a priori, sino que hay que considerarlas y someterlas a un proceso de pruebas y refutaciones y de evaluación del potencial heurístico que encierran. Los alumnos han de comprobar que las teorías matemáticas tienen historia, una historia de lucha y de aventura intelectual, y que esta historia puede volver a repetirse en su mente cuando ellos las reconstruyen para aprenderlas. ¿Por qué negar a los alumnos la condición de sujetos pensantes?

## 3. MARCO PSICOPEDAGÓGICO: EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA ENTENDIDO COMO UN PROCESO DE CAMBIO CONCEPTUAL

En el contexto de los abundantes estudios sobre la existencia en los alumnos de concepciones espontáneas erróneas con respecto a los fenómenos científicos, han comenzado a surgir diversas teorías del aprendizaje de conceptos científicos que conciben éste como un proceso de cambio conceptual o de transformación de esos conceptos espontáneos en conceptos científicos. Escogemos el enfoque de cambio conceptual como marco psicopedagógico de nuestra propuesta didáctica por dos motivos:

En primer lugar, porque el modelo que se ha tomado para el proceso de transformación de las concepciones alternativas en ideas científicamente aceptadas es la propia epistemología, que analiza los cambios conceptuales habidos en la historia de la ciencia. Ya sea a partir de las ideas de Kuhn (véase Posner, Strike, Hewson y Gertzog, 1982) o de Lakatos (véase Pozo, 1989), los modelos de cambio conceptual en la enseñanza de la ciencia suelen asumir la necesidad de activar las concepciones de los alumnos para someterlas a conflicto y posteriormente, sustituirlas o transformarlas en ideas científicamente correctas. Este origen epistemológico del enfoque de cambio conceptual se ajusta perfectamente a nuestra premisa de coherencia epistemológico-didáctica. En segundo lugar, estas teorías, aunque son teorías cognitivas del aprendizaje de conceptos científicos, tienen una perspectiva instruccional clara en cuanto que tratan de identificar estrategias didácticas que fomenten el cambio conceptual desde la ciencia intuitiva o natural de los alumnos a la ciencia formal (Driver, 1988; Pozo, 1989).

### 3.1. Planteamientos del aprendizaje como cambio conceptual

Los autores que se preocupan del aprendizaje como cambio conceptual asumen explícitamente el planteamiento constructivista del aprendizaje (por esta causa se suele conocer a este tipo de metodología como constructivismo) y se plantean el aprendizaje suponiendo que los individuos tienen la información disponible en forma de esquemas (conocimiento organizado). Desde esta perspectiva, el estudiante cuando se enfrenta con una situación problemática nueva, utiliza sus esquemas para intentar comprenderla, explicarla y resolverla. En este sentido, el proceso de aprendizaje es una interacción entre el medio (físico, social,...) y las características mentales del que aprende. Es así como las personas, desde muy pequeñas, nos hacemos nuestra propia visión del mundo, es decir, nuestros propios esquemas de conocimiento.

En definitiva, se aprende a partir de las ideas previamente existentes en la mente de los alumnos. Este conocimiento que el alumno ya posee y aplica a la interpretación de las situaciones planteadas durante el aprendizaje, ha recibido múltiples nombres: ideas previas, preconcepciones, ideas erróneas, teorías ingenuas, ideas espontáneas, concepciones alternativas, etc. En algunos casos el propio nombre que se usa implica planteamientos didácticos diferentes. En muchos casos estas ideas construidas espontáneamente y a través de las experiencias personales de interacción con el medio, no corresponden a las ideas científicas sobre los fenómenos o situaciones que las han originado. Por esta razón muy a menudo reciben el nombre de conceptos erróneos. Algo que se suele olvidar es que no todas las ideas espontáneas son erróneas, a pesar de que no coincidan totalmente con las ideas científicas sobre el fenómeno.

Una gran parte de los esfuerzos de investigación, sobre todo en la enseñanza de las ciencias experimentales, se ha dirigido a buscar cuales eran las concepciones erróneas de los alumnos sobre cada uno de los temas que se pretende enseñar, y existen grandes recopilaciones de estas ideas previas. No negamos que este trabajo sea importante, sino que afirmamos que solamente lo es en función de lo que se haga después sobre estas ideas previas; en este sentido, vamos a analizar algunas de sus características pero sobre todo nos interesa examinar en qué consiste un planteamiento teórico de cómo se puede plantear el cambio de estas concepciones alternativas por otras más científicas.

## 3.2. Características de las ideas previas

1. **Funcionales.** Son útiles para explicar las situaciones familiares; esto explica su carácter de permanentes, ya que sirven «para funcionar cotidianamente». Es interesante estudiar la actuación de los individuos al enfrentarse a una situación para la que su idea no sirve. Esta es una estrategia de nuestra propuesta didáctica.
2. **Espontáneas y personales.** Surgen de manera natural en la mente del alumno porque se producen en la interacción cotidiana con el mundo. Algunos autores añaden que surgen fuera de las situaciones de enseñanza-aprendizaje; en nuestra opinión, ésta es una idea restrictiva ya que las actividades del aula contribuyen también a crear «conocimiento» que se utiliza para enfrentarse a nuevas situaciones; en este sentido, no son distinguibles las ideas previas surgidas fuera del aula de las surgidas dentro.
3. **Compartidas por gran número de individuos.** Con el adjetivo compartidas no queremos significar que aparezcan por interacción entre individuos, queremos decir que, en muchos individuos, aisladamente, aparece la misma concepción del mundo ante la misma situación. Esto parece implicar que existe una cierta regularidad en la forma en que se construye el conocimiento.

Si además tenemos en cuenta que estas concepciones suelen, en muchos casos, reproducir las ideas por las que ha ido pasando la ciencia a lo largo de su historia (por ejemplo prenewtoniana, newtoniana..., en el caso de la física) no es extraño que algunos autores (Posner et al., 1982) hayan establecido un paralelismo entre la construcción de la ciencia y la construcción del conocimiento.

4. **Casi siempre, científicamente incorrectas.** Los descubrimientos espontáneos de los alumnos, cuando se realizan sin los conocimientos o condiciones adecuados suelen producir un conocimiento científicamente incorrecto.
5. **Implícitas.** Los individuos no son plenamente conscientes de estas ideas, de forma que son capaces de usarlas aunque no suelen ser capaces de verbalizarlas. Esta característica es esencial en el momento de intentar descubrir cuales son estas ideas ya que al ser implícitas no se les puede preguntar directamente sino que es preciso poner a los alumnos en situaciones en que tengan que aplicarlas.
6. **Coherentes/Incoherentes.** Son coherentes en cuanto que para el mismo fenómeno (idénticamente considerado) siempre se aplica la misma idea; pero son incoherentes porque para dos fenómenos que científicamente respondan a la misma ley teórica, aunque con distintas características externas, se aplican ideas diferentes.
7. **Resistentes al cambio.** Como surgen de la interacción espontánea del individuo con situaciones reales de su medio, no suelen ser afectadas por ideas recibidas en otros contextos diferentes, como el aula, en donde las situaciones (aun siendo científicamente iguales) se presentan con características externas tan diferentes a las situaciones de la vida normal que suelen aparecer como completamente diferentes para los alumnos. Esta resistencia al cambio genera dificultad para modificar estas concepciones espontáneas mediante la instrucción.
8. **¿Están organizadas?** ¿Se trata de ideas aisladas o forman parte de una estructura conceptual común? ¿En qué tipo de representación están basadas? Estas preguntas, cruciales no sólo desde un punto de vista psicológico sino también didáctico, encuentran respuestas muy variables y, en general, poco precisas. Algunos autores suponen que las concepciones alternativas están organizadas en forma de «teorías implícitas» o «teorías personales» (Pozo,1989) pero la investigación realizada tiende a tener un carácter fragmentario y descriptivo.

## 3.3. Cómo se enfrentan los alumnos al aprendizaje a partir de sus ideas previas. Cómo provocar cambios en estas ideas previas

En su artículo *Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change,* Posner, Strike, Hewson y Gertzog (1982), revisado en 1992 por Strike y Posner, construyen un modelo teórico de cómo se produce el proceso por el que un conjunto de conceptos cambian bajo el impacto de nuevas ideas y nueva información para transformarse en otro conjunto de conceptos, muchas veces incompatible con el primero. Establecen dos formas diferentes de adquisición del conocimiento. Algunas veces los estudiantes tienen conceptos para enfrentarse a la situación, en este caso el nuevo conocimiento se incluye en la estructura cognitiva existente y la forma de adquisición se llama **asimilación.** Pero en otras ocasiones los conceptos existentes son inadecuados para comprender satisfactoriamente el fenómeno que se presenta. En este caso los alumnos deben reorganizar sus conceptos, se produce así un cambio más radical que se llama acomodación. Un modelo de aprendizaje por cambio conceptual debe explicar cómo se produce la reorganización de los conceptos actuales del alumno, o dicho de otro modo como tiene lugar la acomodación.

El bagaje de conocimientos de un individuo es similar al «núcleo duro» de una ciencia, en terminología de Lakatos (1978). Este bagaje procede de las experiencias previas, imágenes o modelos que se han creado en la mente del individuo. Las personas tienden a aplicarlos a los nuevos fenómenos y no se discuten, solamente progresan o degeneran en función de que sirvan o no para explicar situaciones nuevas. Sólo cuando este «bagaje» no sirve se produce una acomodación.

Lo que Posner et al. (l982) llaman acomodación, o cambio a «gran escala», Gilbert y Watts (1983) lo llaman «cambio revolucionario» para indicar que este tipo de cambio implica reestructuraciones profundas en el conocimiento del estudiante. Al proceso de asimilación o «cambio a pequeña escala» lo definen como «cambio evolucionario» para indicar que este tipo de cambio implica un aumento en la precisión y la riqueza del pensamiento de los alumnos pero no rompe las estructuras existentes sino que crea puentes entre el nuevo conocimiento y el previo, modificando el conocimiento existente pero de forma más superficial.

Han de darse ciertas condiciones para que se produzca la acomodación:

1. Debe existir insatisfacción con las concepciones existentes. Siempre se tiende a no hacer grandes cambios; tienen que acumularse múltiples situaciones que no puedan resolverse con los conceptos que se tienen.
2. La nueva concepción debe ser inteligible. El individuo debe comprender los términos y los símbolos utilizados y ser capaz de construir una representación coherente del nuevo concepto.
3. La nueva concepción debe ser inicialmente plausible. Debe ser consistente con otros conocimientos y ha de resolver los problemas que genera la concepción anterior.
4. El nuevo concepto debe sugerir un nuevo «programa de investigación», dicho en términos de Lakatos (1978). Debe abrir nuevas áreas de problemas y de investigación.

Debe quedar claro que aunque se describe la acomodación de una concepción científica como un cambio radical en el sistema conceptual de una persona, no es un cambio abrupto sino que suele ser un proceso por pasos, de ajuste gradual de la concepción de la persona.

## 4. CONTENIDOS Y MÉTODOS

Del marco epistemológico y psicopedagógico que acabamos de establecer y de los resultados de las investigaciones sobre el pensamiento probabilístico de los adolescentes se deducen los dos principios operativos que conforman nuestra propuesta didáctica:

*1.* Los contenidos y métodos didácticos deben respetar la naturaleza cuasi-empírica de la teoría de probabilidades.
*2.* Los contenidos y métodos didácticos deben adecuarse a un enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje como un proceso de cambio conceptual.

### 4.1. Los contenidos y métodos didácticos deben respetar la naturaleza cuasi-empírica de la teoría de probabilidades

Nuestro modelo de instrucción incorpora las propuestas metodológicas de Freudhental (1983), Engel (1988) y Shaughnessy (1992) que aconsejan un enfoque experimental para la enseñanza de las probabilidades. Nuestra hipótesis, dentro del enfoque cuasi-empírico de Lakatos, es que si situamos el razonamiento y el cálculo probabilístico en un contexto de resolución de problemas (Mayer, 1986), significativo y atrayente para el alumno, con un contraste experimental de las soluciones y hacemos un entrenamiento específico para desarrollar el esquema combinatorio y las representaciones gráficas, mejorarán las destrezas de razonamiento y de cálculo. En este sentido y en línea con trabajos nuestros anteriores (Sáenz y García, 1980), los ejes sobre los que girará la instrucción son los siguientes:

*1.* El análisis epistemológico del conocimiento es muy útil para una mejor comprensión de la relación entre intuiciones subjetivas y situaciones aleatorias objetivas y sus modelos matemáticos (Beth y Piaget, 1966). Una perspectiva dinámica del conocimiento ayuda a suavizar la estricta alternativa entre la intuición subjetiva del alumno y la estructura objetiva de la teoría. Comenzando con juicios muy personales acerca de la situación aleatoria dada, comparando la situación empírica con sus modelos propuestos, esperamos dirigir a los alumnos hacia generalizaciones razonables, caracterizaciones más precisas e ideas más profundas. Los enfoques de enseñanza tienen que proporcionar orientaciones, principios y materiales para la estocástica escolar que sean consistentes en relación a las dificultades epistemológicas del conocimiento estocástico.
*2.* Las numerosas paradojas de la teoría de la probabilidad ilustran la difícil relación entre intuiciones subjetivas y estructuras objetivas de probabilidad. Las paradojas muestran con frecuencia una contradicción entre el modelo matemático y la situación aleatoria en relación al cálculo matemático y la representación intuitiva de la situación. Por eso, un principio educacional importante es el trabajo simultáneo en un nivel empírico-experimen-

tal y en un nivel teórico de modelización; ambos niveles deben estar relacionados el uno con el otro y se debe evitar la confianza indebida en uno sólo de ellos.

3. Es necesario un entrenamiento en reconocimiento de la estructura profunda de los problemas probabilísticos (Schoenfeld, 1989). Los alumnos hacen un reconocimiento superficial de la estructura de los problemas y se guían en sus procesos de razonamiento por sesgos que producen conductas erráticas en tareas que son estructuralmente isomorfas. La destreza en el descubrimiento de estos isomorfismos debe ser una de las herramientas intelectuales que el alumno posea. Por ejemplo, el alumno resuelve mejor la tarea de calcular la probabilidad de obtener «dobletes» al lanzar dos dados (es decir, conseguir el mismo número en los dos dados) que la tarea de calcular la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día, cuando son dos problemas isomorfos matemáticamente. En definitiva, hay que utilizar la analogía como un instrumento esencial de aprendizaje (Aparicio, 1992).
4. Es necesario entrenamiento en construcción de modelos diagramáticos de los problemas. Uno de los errores sistemáticos de los alumnos consiste en la incapacidad para hacer el inventario completo de los sucesos asociados a un fenómeno aleatorio cuando no está claro el espacio muestral, les falla el esquema combinatorio. Hay técnicas, como los diagramas en árbol, que son muy útiles para luchar contra este tipo de errores. Este principio didáctico tiene que ver con la importancia que Steinbring (1991) le concede a los medios de representación del conocimiento.
5. Hay que plantear la probabilidad como un concepto poliédrico, cuyo significado no se puede adquirir de una sola vez, de manera lineal, sino que exige una aproximación en espiral a medida que se desarrolla la teoría. En concreto, hay que insistir en las cuatro interpretaciones de la probabilidad: clásica o enfoque de la simetría, empírica o enfoque de las frecuencias, subjetiva o intuitiva, formal o normativa. La enseñanza tradicional se centra en las dos primeras interpretaciones y da un salto para llegar a la cuarta. Nuestro enfoque metodológico se propone utilizar, además de las dos interpretaciones tradicionales, la idea de probabilidad subjetiva.
6. Hay que plantear las situaciones aleatorias en forma de juegos y apuestas. Este planteamiento, que aconseja con viveza Freudhental (1983), permite crear un contexto de aprendizaje significativo y motivador, lo cual es muy conveniente para superar las posibles resistencias, cognitivas y emocionales, que presenten los alumnos a una nueva teoría matemáticas del azar de la que tienen ideas previas. En este sentido, las actividades de enseñanza-aprendizaje deben contener hasta donde sea posible una situación que requiera una decisión. La necesidad de decidir, de estar subjetivamente implicado en un problema, es una fuente de motivación para los alumnos.
7. Las actividades de clase también deben incluir experimentos concretos y simulaciones. Las actividades pueden dirigirse a alumnos individuales o a

grupos de alumnos. Una cuidadosa organización y coordinación de experimentos y simulaciones ayuda a orientar las tareas individuales de acuerdo a los objetivos comunes de enseñanza. Esta metodología se debe desarrollar en tres fases, en relación a los medios didácticos de representación de las tareas. En una primera fase se realizan los experimentos aleatorios con aparatos físicos, familiares a los alumnos como dados, monedas, urnas, ruletas, chinchetas, etc.; en una segunda fase se utilizan tablas para generar secuencias de números aleatorios; en una tercera fase, se utiliza la técnica de simulación por ordenador de situaciones aleatorias. El objetivo del desarrollo en fases es analizar y explorar la difícil relación entre situación aleatoria y su modelización probabilística, según niveles crecientes de abstracción. Esta dialéctica de aspectos empíricos específicos de contenido y aspectos matemáticos específicos de modelo, establece lo que Steinbring (1991) llama 'el carácter teórico del conocimiento estocástico', y encaja en un enfoque cuasi-empírico de la enseñanza de la probabilidad.

La simulación es un método esencial en probabilidades no sólo porque proporciona un método de solución sino que su ejecución real ya requiere un primer modelo. Extracciones concretas de una urna, lanzamientos de uno o varios dados, codificación de números aleatorios a partir de una tabla de números aleatorios, o simulaciones de ordenador son experimentos que pueden llevar a diagramas de árbol y modelos probabilisticos generales. Por tanto, el acceso fácil a una simulación factible de un problema no sólo proporciona un resultado numérico sino también una comprensión conceptual de la situación. Debemos usar y comparar diversos generadores de números aleatorios: desde dados hasta el tablero de Galton y tablas de números aleatorios; desde dados cargados a situaciones estocásticas reales. El requerimiento de comparar tales generadores de números aleatorios impulsa el estudio de propiedades comunes en forma de variaciones, o del análisis de diferencias en la forma de cambios fundamentales del modelo.

La tecnología informática ofrece nuevas oportunidades al aprendizaje: posibilidad de simular fenómenos aleatorios que son muy difíciles de experimentar en la práctica por su coste en dinero o tiempo, pensemos por ejemplo, en la ley de los grandes números o en una distribución como la binomial; las posibilidades gráficas y de construcción de modelos que ofrecen los ordenadores; la componente de motivación para el alumno que supone la utilización de esta tecnología; etc.

## 4.2. Los contenidos y métodos didácticos deben adecuarse a un enfoque de cambio conceptual

Una cosa es aceptar que los estudiantes mantienen concepciones diferentes que deberían cambiarse y otra cuestión muy distinta es concluir que compete a la responsabilidad del profesor el emprender una estrategia docente encaminada a facilitar el cambio conceptual. Mientras algunos didactas pueden defender la separación de responsabilidades (los profesores presentan el contenido y los estudiantes lo aprenden) nuestra posición es distinta. Creemos que es responsabilidad del profesor darse cuenta de las concepciones de los alumnos y enseñar de manera apropiada para facilitar el cambio conceptual. Hewson (1993) plantea una serie de aspectos de la enseñanza para el cambio conceptual que consideramos definitorios de este enfoque y que hemos incorporado a nuestra propuesta:

1. Diagnóstico o elicitación: ¿Usa el profesor alguna técnica diagnóstica para elicitar las concepciones previas de los alumnos y las razones por las que las mantienen?
2. Cambio de estatus: ¿Usa el profesor estrategias diseñadas para ayudar a los alumnos a rebajar el estatus del conocimiento previo problemático y elevar el estatus de otras ideas científicas? ¿Existen otros ámbitos de aplicación donde usar la nueva concepción? ¿Es necesario revisar las concepciones epistemológicas de los alumnos?
3. Evidencia de resultado: ¿Queda claro que los resultados del aprendizaje se basan, en parte, en una consideración explícita del conocimiento previo?
4. Metacognición: ¿Se sienten los alumnos dispuestos a volver sobre una o más ideas mantenidas por ellos o por otros, para reflexionar y opinar sobre ellas?
5. Clima de clase: ¿Existe una actitud de respeto, tanto por parte del profesor como de los alumnos, hacia las ideas de los demás, incluso cuando son contradictorias?
6. Papel del profesor: ¿El profesor da oportunidades para que los alumnos se expresen por sí mismos sin temor al ridículo y sin miedo a una evaluación inmediata de la corrección de sus ideas?
7. Papel del alumno: ¿Desean los alumnos asumir la responsabilidad de su propio aprendizaje, de conocer otras ideas y de cambiar sus puntos de vista ante otros que parezcan más viables? ¿Pueden encargarse los alumnos de su propio aprendizaje?

## 5. APLICACIÓN DE LA METODOLOGÍA EN EL AULA

Hasta aquí hemos hablado del marco y de los principios de nuestra propuesta didáctica. Queda por explicar el diseño de su aplicación en el aula. Hay que resolver dos problemas esenciales: la construcción del currículo (macronivel) y la organización de las actividades de enseñanza-aprendizaje de cada contenido disciplinar (micronivel).

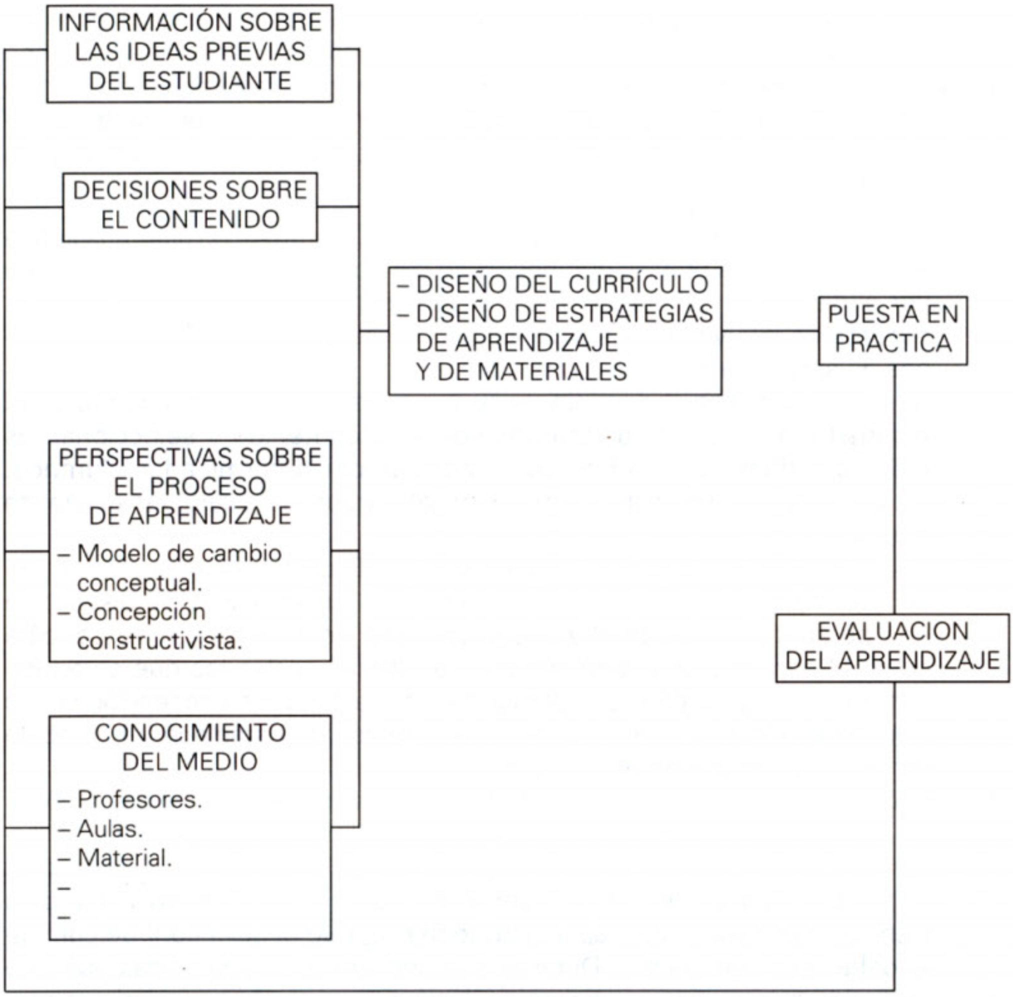
### 5.1. Construcción del currículo (macronivel)

Una perspectiva constructivista del currículo como propone Driver (1988) o Hewson (1993) se basa en una concepción de quien aprende como parte activa e interesada en el proceso de aprendizaje y que aporta sus conocimientos previos para construir conceptos en situaciones nuevas. Además, si no se concibe el conocimiento científico como objetivo sino como construcción social, como un producto del esfuerzo colectivo de la humanidad, entonces la socialización tiene que ser una parte importante del proceso de enseñanza-aprendizaje de la ciencia en la escuela (Fischer, 1988 y 1989). Desde esta perspectiva, el diseño del currículo, de las estrategias de aprendizaje y de los materiales debe sustentarse en cuatro fuentes de información:

*1.* Información sobre las ideas previas de los estudiantes. Los alumnos llegan a clase con ideas previas que necesitan ser conocidas y tenidas en cuenta por el diseñador del currículo, por el profesor y por los propios alumnos, puesto que influyen en los significados que se construyen en las situaciones de aprendizaje.
*2.* Información sobre el dominio de conocimientos, objeto del currículo. El diseñador debe tomar decisiones sobre su contenido y seleccionar las ideas científicas que deben ser conocidas por determinados alumnos, de entre las muchas que componen el corpus de cualquier disciplina científica.
*3.* Información sobre el proceso de aprendizaje. El diseñador del currículo tiene que tener siempre un marco teórico en el que enmarcar su diseño; en una perspectiva constructivista, el proceso de aprendizaje se concibe como el conjunto de experiencias mediante las cuales los que aprenden construyen una concepción del mundo más cercana a la concepción de los científicos. Nosotros como diseñadores hemos de establecer el currículo con un objetivo de cambio conceptual.
*4.* Información sobre el medio o entorno educativo. Existen variables como las directrices oficiales, el ambiente de aprendizaje en las escuelas, la disponibilidad de tiempo, los recursos materiales, y otros factores más sutiles como las expectativas del profesor y estudiante sobre el conocimiento, la ciencia, la escuela y sus papeles en todo ello, que el diseñador de currículo debe tener en cuenta. Durante una secuencia de aprendizaje los que aprenden deben recorrer un camino desde su estado de conocimiento presente a cierto estado de conocimiento futuro y eso han de realizarlo en un medio determinado que debe ser tenido en cuenta al diseñar un currículo. Por eso, el diseño ha de ser lo suficientemente abierto para que sean posibles las adaptaciones curriculares que exige un entorno educativo determinado (MEC, 1989).

En base a estos cuatro factores se construye el currículo, que debe incluir no sólo los contenidos científicos, sino también las tácticas y estrategias de aprendizaje y los materiales concretos de trabajo en el aula. Después de la puesta en práctica de este currículo se realiza la evaluación del proceso de aprendizaje. Esta evaluación servirá de feed-back para las adaptaciones y modificaciones curriculares que sean pertinentes, en una dinámica continua de mejora del proceso de enseñanza- aprendizaje.

En la figura siguiente se ilustra el proceso de diseño y desarrollo del currículo, según Driver (1988), que hemos adoptado como modelo.




En nuestra investigación (Sáenz, 1995), la fase de diseño y construcción del currículo la realizamos conjuntamente con los profesores de los grupos que iban a experimentar el modelo de instrucción por cambio conceptual y nos llevó un total de 100 horas. En ellas está incluido el tiempo de familiarización con la metodología puesto que ninguno de los profesores la conocía previamente y además, el papel del profesor se hace mucho más complejo que el de transmisor o comunicador del conocimiento, propio de un sistema de enseñanza tradicional. Como mediador entre el conocimiento de los científicos y las comprensiones de los alumnos, se requiere del profesor que actúe como diagnosticador (en este sentido, hemos utilizado muchas ideas de la propuesta de «enseñanza diagnóstica» de Bell, 1987) del pensamiento de los alumnos y al mismo tiempo que lleve en su cabeza un mapa del dominio conceptual que permita sugerir actividades apropiadas y negociar significados.

Llegamos a la siguiente secuenciación de contenidos:

| CONCEPTOS | PROCEDIMIENTOS | ACTITUDES |
|---|---|---|
| 1. Experimentos aleatorios y deterministas | 1. Utilización del vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar. | 1. Reconocimiento y valoración de las Matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas |
| 2. Espacio muestral | 2. Reconocimiento de fenómenos aleatorios | |
| 3. Distintos tipos de sucesos: suceso elemental, suceso compuesto, unión de sucesos, intersección de sucesos, suceso seguro, suceso imposible, sucesos compatibles, sucesos incompatibles, sucesos contrarios | | |
| 4. Frecuencia absoluta y relativa | 3. Confección de tablas de frecuencia para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios | 2. Curiosidad e interés por investigar situaciones de azar |
| 5. Propiedad de la frecuencias relativas | 4. Confección de gráficas para representar el comportamiento de los fenómenos aleatorios | 3. Cautela y sentido crítico ante las inforemaciones estadísticas en los medios de comunicación |
| 6. Leyes de los grandes números | 5. Utilización del vocabularios preciso para cuantificar situaciones relacionadas con el azar | 4. Corrección, precisión y pulcritud en la realización de los trabajos |
| 7. Concepto de probabilidad | 6. Detección de errores en la interpretación de las leyes de los grandes números | |

| CONCEPTOS | PROCEDIMIENTOS | ACTITUDES |
|---|---|---|
| 8. Popiedades de la probabilidad | 7. Utilización de informaciones diversas (frecuencias, simetrias, observaciones previas) para asignar probabilidades a los sucesos | |
| 9. Regla de Laplace | 8. Cálculo de probabilidades en casos sencillos con la ley de Laplace | 5. Sensibilidad, gusto y precisión en la observación y diseño de experiencias aleatorias |
| 10. Asignación de probabilidades a sucesos equiprobables | 9. Detección de errores en la asignación de probabilidades | |
| 11. Asignación de probabilidades a sucesos no equiparables | 10. Formulación y comprobación de conjeturas. Análisis y descripciones de juegos de azar | |
| 12. Experimentos compuestos | 11. Utilización de diversos procedimientos (diagramas de árbol, tables de contingencia y técnicas combinatorias) para el cálculo de la probabilidad de sucesos compuestos | 6. Cautela y sentido crítico ante las creencias populares sobre los fenómenos aleatorios |
| 13. Tablas de contingencia y diagramas de árbol | | |
| 14. Probabilidad compuesta | 12. Leyes de la suma y la multiplicación de probabilidades | |
| | 13. Probabilidad del suceso contrario | |

| CONCEPTOS | PROCEDIMIENTOS | ACTITUDES |
|---|---|---|
| 15. Experimentos aleatorios independientes vs dependientes | 14. Planificación de experiencias sencillas para llevar a cabo el estudio de la probabilidad condicionada | |
| 16. Probabilidad condicionada | 15. Aplicación de probabilidad condicionada en la resolución de problemas cotidianos sencillos | |
| | 16. Detección de errores relacionados con la probabilidad condicionada | |
| 17. Tablas de números aleatorios: generación de una tabla y pruebas de aleatoriedad | 17. Obtención de números aleatorios con técnicas diversas | |
| | 18. Utilización de técnicas de simulación para calcular probabilidades (método de Montecarlo) | |
| 18. Probabilidad geométrica | 19. Realización de experiencias sencillas para estudiar el comportamiento de fenómenos de azar geométricos | 7. Valoración y refuerzo de la autoestima |
| 19. Valoración aleatoria | 20. Interpretación práctica de la desigualdad de Tchebyshev | 8. Control de los propios sesgos de razonamiento probabilístico |
| 20. Valor esperado de una variable aleatoria | | |

| CONCEPTOS | PROCEDIMIENTOS | ACTITUDES |
|---|---|---|
| 21. Varianza de una variable aleatoria | | |
| 22. Distribución binomial | 21. Cálculo de probabilidades en una binomial | |
| 23. Valor esperado y varianza de una distribución binomial | | |
| 24. Distribuciones discretas y contínuas | 22. Técnicas simples de inferencia estadística | |
| 25. Distribución normal | 23. Cálculo de probabilidades en una normal | |
| 26. Parámetros de una normal | | |
| 27. Aproximación de la binomial mediante la normal | 24. Reconocimiento de principios estadísticos (regresión a la media, correlación) | |

Este listado de contenidos se puede estructurar y modelizar mediante un número reducido de situaciones y distribuciones aleatorias. El punto de partida es la distinción entre fenómenos aleatorios y fenómenos determinísticos y la diferente naturaleza de sus respectivas modelizaciones.

1. **Experiencias aleatorias vs deterministas:** La ciencia se puede entender como el proceso de observar fenómenos naturales y construir modelos abstractos de los que se espera, de acuerdo a sus propias reglas, que se comporten de manera similar a lo que se ha observado. Se utilizan los modelos para predecir nuevas propiedades de esos fenómenos y para realizar experimentos que contrasten la validez de las predicciones. Si es necesario, se refinan o modifican los modelos que de esta manera representan cada vez mejor a los fenómenos reales que modelizan. Esta descripción se aplica tanto a la modelización probabilística como a cualquier otra metodología científica. La característica diferenciadora de un modelo de probabilidad es que incorpora incertidumbre o error aleatorio de modo

formalizado. Esta aleatoriedad introduce la complicación de que la prueba de validez de modelos no es directa como lo es con modelos determinísticos; algunas veces los modelos probabilísticos sólo nos permiten predecir resultados específicos con una medida adicional de confianza (probabilidad) y otras veces se modeliza el comportamiento sin una predicción de resultados específicos.

Si no se cumple una predicción hay dos posibilidades: primera, el modelo realmente no se ajusta; segunda, el modelo se ajusta pero ha ocurrido un caso fuera de los límites de confianza. Esta aleatoriedad es naturalmente inherente a la probabilidad y es el riesgo de aplicar modelos probabilísticos. Además, aunque una predicción sea correcta en un determinado caso, puede surgir de un modelo inadecuado. Por otro lado, el modelo equidistribucional, que es un enfoque clásico en probabilidad, no permite una predicción específica en cuanto que cada resultado es tan probable como cualquier otro. ¿Cómo se puede comprobar la validez de este modelo si ocurre, por ejemplo jugando a la lotería primitiva, una racha de ciertos números en el último mes?

Así, los modelos probabilísticos son diferentes a los modelos deterministas con respecto a su evaluación en situaciones reales específicas. Eso no quiere decir que los modelos probabilísticos sean menos rigurosos y sí abren la posibilidad de aplicaciones en áreas tales como la medicina y las ciencias sociales donde los enfoques deterministas, muchas veces, no son apropiados.

*2.* **Representaciones de la incertidumbre:** la métrica para medir incertidumbre llamada probabilidad es la más familiar a los científicos hasta el punto de que muchas veces se ignora el hecho de que existen otras representaciones de incertidumbre alternativas. Consideramos que conviene analizar estas representaciones alternativas a la probabilidad como número entre 0 y 1 que cumple la propiedad de aditividad, porque pueden ayudar a una comprensión más profunda de los fenómenos aleatorios y del lenguaje del azar.

El competidor más familiar, cotidiano e importante de la probabilidad es la comunicación verbal sobre situaciones de incertidumbre: «parece probable que nieve esta noche», «estoy casi seguro que esta tesis requerirá al menos tres reescrituras». Las palabras son el medio más común de informar a otros acerca de nuestras opiniones y la mayoría de idiomas ofrecen bastantes palabras para expresar grados de incertidumbre. El problema que presentan es su ambigüedad. Cuentan von Winterfeldt y Edwards (1986) que S. Kent, el hombre decisivo de los servicios de inteligencia americanos en los años 60, estaba preocupado con el hecho de que casi todos los documentos de inteligencia contenían informes verbales con enunciados de incertidumbre ambiguos y por eso propuso un conjunto de reglas para transformar palabras en probabilidades; llegó a establecer rangos de probabilidades para cada frase que expresaba incertidumbre: por ejemplo, al enunciado «altamente improbable» le asignaba un rango de probabilidad (en %) entre 0 y 15, «dudamos» entre 15 y 45, «probablemente» entre 55 y 85, «altamente probable» entre 85 y 100, etc. Su propuesta no funcionó; los analistas de inteligencia no estaban acostumbrados a trabajar con probabilidades sino con etiquetas verbales y no llegaron a la precisión adicional que Kent les pedía.

¿Por qué son las palabras mucho más atractivas que los números? En primer lugar, porque son vagas, ambiguas. Las personas asocian números con precisión y eso les produce respeto y temor, es «el hombre anumérico» que describe Paulos (1990). Una segunda razón para utilizar palabras es que la precisión sobre la incertidumbre no es siempre necesaria; si no basamos ninguna decisión en esa evaluación, la comunicación de un grado de incertidumbre simplemente informa de un estado de la mente. Una tercera razón para evitar los números es que invitan a la recogida de datos y eso es siempre una tarea laboriosa.

Pensamos que es muy necesario ejercitar con los alumnos esa transferencia fluída entre números y palabras que representan incertidumbre. Preferimos ver las incertidumbres en forma numérica, incluso aunque no haya una decisión crucial que tomar que exija la precisión de los números. Hay que alfabetizar matemáticamente a nuestros alumnos y ponerlos sobreaviso de que muchos procedimientos estadísticos malos se pueden ocultar fácilmente detrás de enunciados verbales de incertidumbre (para encontrar ejemplos de esta afirmación basta leer, al azar, un periodico o ver un programa cualquiera de TV).

Vayamos ahora a las modelizaciones que proponemos para la enseñanza secundaria.

3. **Experiencias aleatorias de una prueba:** se trata de modelizar matemáticamente fenómenos de la vida real que se comportan como sucesos aleatorios del tipo lanzamiento de una moneda, de chinchetas, de dados, de extracción de bolas de urnas, etc. La probabilidad asociada al lanzamiento de la chincheta sólo puede obtenerse con la experimentación, sin embargo, en los otros juegos puede calcularse la probabilidad mediante argumentos de simetría. Las experiencias de Laplace son pruebas aleatorias donde la equidistribución es plausible en base a la existencia de una simetría física, por ejemplo, lanzamientos de dados o de monedas normales o ruletas con sectores iguales. En la enseñanza tales modelos son útiles para ilustrar probabilidades numéricas que calibran el peso de incertidumbre. Son un punto de referencia para comparar un fenómeno real a su modelo simétrico y además permiten una simulación de las consecuencias del fenómeno. La experiencia individual puede generar intuiciones incorrectas, por ejemplo al lanzar un dado en el juego del parchís, puede parecer intuitivamente menos probable un «cinco» que otras caras del dado porque el cinco es un resultado deseado y recordamos más las veces que lo hemos estado esperando que las veces que no ha salido cualquiera de los otros números. El análisis de experiencias aleatorias de una prueba nos conduce a las primeras leyes de los grandes números.

4. **Experiencias aleatorias de varias pruebas:** son sucesiones de experiencias aleatorias de una prueba. Se lanza la moneda o el dado varias veces o se lanzan varias monedas o varios dados a la vez. Estas experiencias permiten introducir las leyes de la suma y la multiplicación de probabilidades, la noción de probabilidad condicionada y el concepto de sucesos y pruebas independientes, entre otras ideas probabilísticas importantes. En particular, son interesantes las experiencias de Laplace repetidas. La distribución de la suma de dos dados fue históricamente un problema destacado. Para resolverlo formalmente fue necesario el desarrollo de métodos de conteo (técnicas combinatorias) y se discutió durante mucho tiempo si había que tomar en consideración el orden de resultados, es decir si (2,3) es resultado diferente que (3,2).

   El papel de la independencia en la asignación de probabilidades en experiencias aleatorias compuestas, especialmente experimentos repetidos, se representa muy bien mediante ruletas o urnas. Un muestreo aleatorio es la repetición independiente de la misma prueba. La diferencia conceptual entre la media de una muestra, la media de la población y la variable aleatoria que se asocia a las medias de las diferentes muestras se aclara mediante experiencias de Laplace repetidas. Su influencia en los teoremas límite se puede estudiar mediante simulación (método de Montecarlo); las frecuencias son válidas estadísticamente si nacen de ensayos independientes y su fiabilidad depende del tamaño muestral.

5. **Distribución Binomial:** sabemos que una variable aleatoria que se define como suma de pruebas de Bernoulli de parámetro constante p, sigue una distribución binomial. La distribución binomial es el ejemplo más representativo de distribución discreta. Históricamente está en el origen de los teoremas límite. La esperanza matemática y la varianza de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial, tienen una fuerte componente intuitiva por lo que sirven para la introducción de estos dos conceptos asociados a una variable aleatoria cualquiera. Históricamente el valor esperado de una variable aleatoria jugó un papel más fundamental que la probabilidad, en la resolución de algunos problemas famosos.

   Otro concepto interesante es el de tiempo de espera: cuando se realiza un experimento puede interesar el tiempo de espera para que ocurra un determinado resultado. En pruebas de Bernoulli con probabilidad p de conseguir un éxito, el tiempo de espera «esperado» para lograrlo es 1/p. Para evaluar probabilidades individuales, la evaluación del tiempo de espera almacenado en nuestra memoria es un ingrediente fundamental; desgraciadamente esta información puede provocar sesgos porque algunos resultados son relevantes para los sucesos que vienen a continuación y otros son de menor importancia. Además, el tiempo de espera para un suceso que no ha ocurrido es independiente del tiempo de espera ya transcurrido.

6. **Distribución Normal:** Un fenómeno aleatorio que sigue una ley normal se puede introducir como una sucesión de pruebas de Bernoulli en donde el

número de ensayos es alto y p tiene un valor intermedio. En estas condiciones la distribución normal es, por el teorema central del límite, una buena aproximación para calcular probabilidades binomiales. La hipótesis de errores elementales se formuló para explicar por qué el error de medidas repetidas se distribuye normalmente. Esta hipótesis se aplicó pronto a variables biométricas y durante largo tiempo se consideró que cualquier cantidad se distribuía normalmente. La distribución normal es muy importante tanto como una distribución que describe cantidades observadas como un requisito fundamental para procedimientos clásicos como la regresión o el análisis de varianza. Además, el teorema central del límite suministra una base sólida para aproximar la distribución de la media muestral por la normal y facilitar así el cálculo de los intervalos de confianza y los contrastes para la media de una distribución.

La distribución normal es el único ejemplo de distribución continua que se suele estudiar en la enseñanza secundaria y por eso conviene dedicar atención a ciertos aspectos que la difererencian de una distribución discreta. Las distribuciones continuas se presentan típicamente en dos formas. La más familiar es la función de densidad, representada, por ejemplo, para la distribución normal por la célebre campana de Gauss. El requerimiento clave para una función de densidad es que el area bajo la curva sea 1. Es útil recordar que las ordenadas en esta función no representan probabilidades, en particular pueden ser mayores que 1. Para una distribución normal, por ejemplo, el valor de la función de densidad en la media será igual a 1 si $r = \frac{1}{2\pi}$; si r es menor que esa cantidad, la densidad en la media será mayor que 1.

La función de distribución es simplemente la integral de la función de densidad. El valor y de cualquier función de distribución, correspondiente a un valor x=l de la variable aleatoria, representa la probabilidad de que el valor de la variable aleatoria sea menor o igual a l. Puesto que las probabilidades son mucho más comprensibles intuitivamente que las densidades, la mayoría de métodos para generar distribuciones de variables continuas piden cuestiones que buscan generar funciones de distribución. Esto plantea algún efecto negativo: puesto que las funciones de distribución son las integrales de funciones de densidad, es difícil detectar visualmente diferencias entre ellas que serían obvias en las correspondientes funciones de densidad. Por ejemplo, es muy fácil reconocer la asimetría inspeccionando una función de densidad pero es difícil reconocerla inspeccionando una función de distribución.

A partir de estas situaciones y modelos aleatorios el programa de enseñanza está estructurado en las siguientes unidades didácticas:

*0.* Planteamiento del problema: experiencias aleatorias vs deterministas
*1.* Lenguaje del azar: representaciones de la incertidumbre
*2.* Experiencias aleatorias de una prueba
*3.* Leyes de los grandes números
*4.* Experiencias aleatorias de varias pruebas
*5.* Razonamiento estadístico intuitivo

6. Variable aleatoria
7. Distribución binomial
8. Distribución normal
9. Replanteamiento del problema

### 5.2. Organización de las actividades de enseñanza-aprendizaje (micronivel)

Siguiendo la propuesta de Driver (1988) y de Hewson (1993), cada unidad didáctica está estructurada en torno a una secuencia de actividades que tienen como objetivo fomentar el cambio conceptual en el pensamiento de los estudiantes.

Hay una sesión inicial de **orientación**, de puesta en escena, destinada a despertar la atención de los estudiantes y su interés por el tema; el método seguido para ello es muy variado: puede ser la propuesta de una actividad práctica, o de problemas en contextos cotidianos, la lectura de una noticia de periódico, etc.

A continuación, se destina algún tiempo a que los alumnos revisen y discutan sus propias ideas o modelos acerca de algún problema concreto. Esta fase de **elicitación**, que tiene como objetivo el hacer explícitas las ideas previas de los alumnos, se inicia generalmente en pequeños grupos. Se pide a cada grupo que represente sus ideas en un cartel o por otros medios y que las presenten a toda la clase. Se identifican semejanzas y diferencias en las ideas de los estudiantes y se señalan aspectos para posterior consideración. Los carteles permanecen expuestos durante el resto de la unidad del trabajo y más tarde pueden ser corregidos o comentados.

La fase de **reestructuración**, que tiene como propósito la asimilación o la acomodación, es decir, modificar, extender o reemplazar las ideas previas por ideas científicas, supone el uso de un amplio rango de estrategias que incluyen:

1. Confrontar las ideas de los estudiantes con contraejemplos. Esto puede promover insatisfacción con las concepciones iniciales, pero por sí mismo no genera concepciones científicas.
2. Ampliar el rango de aplicación de una concepción. Las concepciones de los estudiantes son globales y vagas; experiencias particulares pueden ayudarles a clarificar sus nociones (por ejemplo, límite funcional y probabilidad como límite de frecuencias).
3. Construir una concepción alternativa. En algunos casos las ideas previas de los estudiantes no guardan relación con la concepción científica y se hace necesario construir un modelo alternativo.
4. Evaluar las nuevas ideas y comprobar que tienen un exceso de contenido empírico (en términos de Lakatos) en relación a las ideas previas. Eso supone comprobar que las nuevas ideas no sólo explican y predicen fenómenos que ya explicaban las ideas intuitivas de los estudiantes sino que

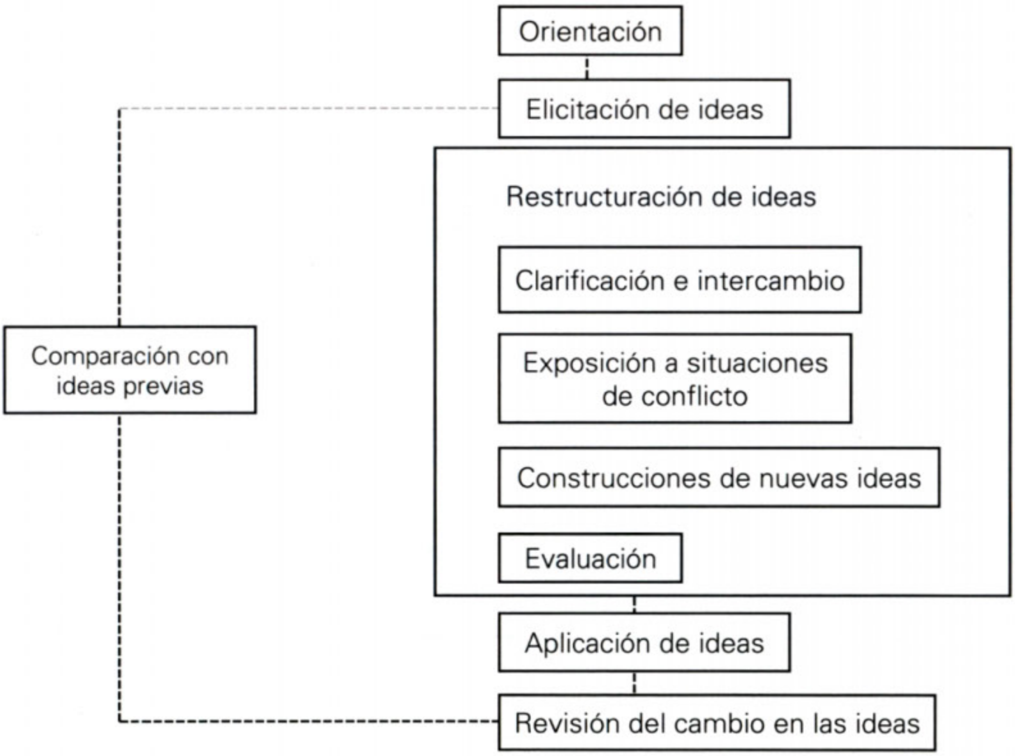
predicen fenómenos para los cuales las ideas informales eran contradictorias o no tenían explicación.

Los métodos didácticos a seguir en esta fase de reestructuración de ideas son muy variados: realización de experimentos estocásticos cuyos resultados vayan en contra de lo previsto por las ideas de los alumnos, explicaciones del profesor, etc.

La fase de **aplicación de las nuevas ideas** tiene como propósito reforzar la construcción de ideas científicas tanto en situaciones familiares como nuevas. Esto puede suponer actividades de diseño de nuevos experimentos aleatorios o de resolución de problemas, entre los que se incluyen los típicos ejercicios de fin de lección.

La fase de **revisión del cambio en las ideas** da a los alumnos la oportunidad de revisar la extensión y maneras en que ha cambiado su pensamiento. Sus ideas iniciales pueden haberse modificado o pueden haber construido nuevas ideas y es el momento de la comparación entre unas y otras. Un método muy útil para realizar esta revisión es pedir a los alumnos que lleven un diario personal donde vayan anotando estos cambios en su pensamiento probabilístico.

En el gráfico siguiente se esquematiza esta estructura general de la secuencia enseñanza, según Driver (1988).



En la segunda parte de este libro presentamos la secuencia de enseñanza y los materiales concretos de cada unidad didáctica. En la introducción de esta segunda parte figura un conjunto de prescripciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje que los profesores han de respetar si quieren abordar este proceso desde una perspectiva de cambio conceptual. Los profesores que trabajaron con nosotros analizaron, discutieron y aceptaron el marco de actuación que establecen estos principios educativos (Sáenz, 1995).

## SEGUNDA PARTE

# ACTIVIDADES DE ENSEÑANZA–APRENDIZAJE ACORDES CON EL MODELO

# I. INTRODUCCIÓN

## 1. GUÍA DE ACTUACIÓN PARA LOS PROFESORES

El marco psicopedagógico escogido que propugna una enseñanza dirigida al cambio conceptual nos marca la necesidad de cambiar la perspectiva tradicional en la enseñanza de la teoría de probabilidades y plantear nuevos enfoques en el proceso de enseñanza-aprendizaje, a saber:

### Nuevos contenidos de la enseñanza

1. Nuestra propuesta educativa aborda aquellos contenidos que presentan problemas epistemológicos; el desarrollo histórico de la teoría de probabilidades es una fuente de paradojas y sitauciones engañosas de alto valor didáctico. Hay que «convencer» a los alumnos de que las concepciones científicas tienen una validez relativa y pueden cambiar. Esto debe ayudar a que se den cuenta que también sus ideas personales generalmente son válidas sólo en contextos específicos y, por tanto, deben modificarse para extenderlas a otros contextos.
2. Nuestra propuesta aborda los contenidos y tareas en los que existan preconcepciones y/o elicitan sesgos en el razonamiento probabilístico de los sujetos, de tal modo que se ponga en evidencia la falta de capacidad explicativa y predictiva del modelo informal, intuitivo, del alumno.
3. Hay que enseñar estrategias metacognitivas, que capaciten a los alumnos para reflexionar sobre su propio conocimiento, para que confíen en él pero sean conscientes de sus límites.
4. La enseñanza debe incluir entre sus objetivos, el desarrollo de las operaciones lógico-matemáticas generales del conocimiento.

## Nuevas estrategias y actividades de enseñanza-aprendizaje

1. Se ha de reconocer el papel activo que juegan las concepciones de los alumnos en el aprendizaje y de ahí la importancia de hacerlas explícitas mediante actividades específicas para ello. Las concepciones de los alumnos no son conocimientos pasivos, que existen en su mente y pueden ser modificados o sustituidos, sino que juegan un papel activo en el aprendizaje. Aspectos parciales de este papel activo son:

   • Las concepciones guían las observaciones. Esto es importante sobre todo cuando centramos la enseñanza a partir de observaciones de la realidad o de experimentos. Las concepciones también guían la información que se recibe del profesor o del libro. Cuando se recibe una información, no se refleja exactamente igual, sino que queda «filtrada» por lo que piensa el que la recibe. Todos tenemos evidencia de asociación en términos; cuando oímos una palabra evocamos conocimientos relacionados, que son distintos para cada individuo.

   • No siempre es suficiente con la evidencia empírica para convencer a los alumnos de que sus concepciones no son las adecuadas. Este hecho también ha sucedido repetidamente en la historia de la ciencia: a pesar de evidencia en contra se mantuvieron durante largo tiempo algunas teorías (la teoría corpuscular de la luz, por ejemplo). Es necesario que existan varias evidencias de este tipo y además que afecten a la estructura conceptual del alumno, para que se produzca el conflicto cognitivo. Hay una tendencia a considerar solamente los aspectos de la realidad o de la experiencia que están de acuerdo con el punto de vista del observador, eludiendo los aspectos que no están de acuerdo.

   • Es necesario comparar explícitamente las ideas nuevas, proporcionadas por la ciencia escolar, con las concepciones alternativas que tienen los alumnos. Hay que introducir el modelo formal o normativo probabilístico con actividades que favorezcan la utilización de las nuevas ideas en una amplia variedad de situaciones aleatorias

2. Se han de cuidar los aspectos afectivos ya que existe resistencia emocional al cambio conceptual. Aspectos parciales de esta estrategia son:

   • Crear un contexto de aprendizaje significativo y motivador. Para ello, y en la medida de lo posible, se han elegido las actividades de aprendizaje para que llamen la atención (por ejemplo, juegos, apuestas) y se plantean en contextos que tengan sentido para los estudiantes (por ejemplo, tareas de toma de decisiones bajo incertidumbre en contextos cotidianos). Si se han de desarrollar esquemas conceptuales en el alumno, el contexto en el que se haga esto es importante para mantener la atención y facilitar la aplicabilidad de las concepciones.

   • Crear un ambiente de aprendizaje no amenazante. Un ambiente de aprendizaje que requiere que los estudiantes expliciten sus ideas y que prueben nuevos caminos de pensamiento podría ser muy frustrante si los esfuerzos de los estudiantes son evaluados demasiado pronto por el profesor o por otros estudiantes. En este caso, frente a un problema, los alumnos no investigarán por sí mismos sino que pedirán que se les explique la solución, cortocircuitando, de esta manera, el proceso de construcción del conocimiento. En muchos casos se requiere que los profesores cambien sus hábitos de dirección de la discusión en la clase, evitando preguntas cerradas, aceptando distintas sugerencias de la clase sin exigir una conclusión prematura sobre un punto.

• Fomentar el trabajo en pequeño grupo. Es preciso introducir fases «de negociación» en las que los alumnos discutan y contrasten sus concepciones probabilísticas; la importancia de la discusión para permitir que quienes aprenden expresen y compartan sus ideas, ha sido reconocida desde hace años; pequeños grupos de alrededor de cuatro estudiantes forman la unidad estructural en torno a la cual tiene lugar el esquema de actividades. Las actividades de grupos suponen discutir y expresar teorías o ideas sobre un tópico, diseñar experimentos para comprobar sus ideas, diseñar modelos más complejos para representar experiencias, acometer actividades de construcción práctica en las que se apliquen las concepciones.

• Tener en cuenta las diferencias individuales, tanto intelectuales como afectivas.

## Nueva concepción de la evaluación

La evaluación, como elemento esencial del proceso de enseñanza-aprendizaje, es uno de los aspectos que más debe evolucionar cuando pasamos de una enseñanza tradicional a un enfoque basado en el cambio conceptual. En la enseñanza tradicional se evalúan casi exclusivamente los contenidos factuales, conceptuales y procedimentales, que ha adquirido el alumno en el proceso de instrucción, suponiendo que parte de un nivel cero de ideas y concepciones acerca de la materia evaluada y utilizando la prueba escrita como exclusivo instrumento de evaluación. En un enfoque de cambio conceptual se abre de manera considerable el abanico de propósitos, objetos, tipos e instrumentos de evaluación.

*1.* Los propósitos de la evaluación son:

• Realizar un diagnóstico inicial de los conocimientos de los alumnos.

• Realizar una valoración del proceso de enseñanza-aprendizaje en cuanto al contenido y tratamiento de ese proceso, las actividades y recursos docentes, la atmósfera en el aula y los métodos de la propia evaluación.

• Realizar un diagnóstico de la adquisición de contenidos conceptuales, procedimentales, actitudinales, propios de la disciplina, así como de las estrategias cognitivas y metacognitivas que forman parte de una educación matemática integral.

• Realizar una valoración del cambio conceptual producido, desde el sistema de ideas intuitivas, previas, al sistema normativo.

*2.* El objeto de evaluación no sólo es el alumno por separado, sino que también son objetos de evaluación el profesor o profesores que imparten los mismos contenidos curriculares, el grupo clase y las unidades y actividades didácticas.

3. Los tipos de evaluación deben incluir tareas que requieran una integración del conocimiento, la aplicación de lo aprendido a contextos nuevos, de resolución de problemas y razonamiento. Esas tareas han de prestar atención preferente a los principios de «matemáticas para todos» y «atención a la diversidad y diferencias individuales» y, en este aspecto, han de estar en función del nivel y la madurez de los alumnos. También debe valorarse el trabajo en clase y fuera de ella y valores como el de la solidaridad, la participación y la responsabilidad en el trabajo.
4. La evaluación no debe apoyarse en un sólo instrumento o en una sola técnica y por tanto hay que utilizar técnicas de observación, preguntas y exposiciones orales, tareas escritas, autoevaluaciones y evaluaciones de compañeros, trabajos individuales y en grupo, protocolos de resolución de problemas, observación del cuaderno del alumno y cuestionarios sobre el grado de satisfacción personal, valoración del aprendizaje y actitudes de los alumnos hacia la materia y proceso de enseñanza que se está desarrollando.

## 2. ACERCA DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

Cada unidad didáctica consta de una guía del profesor y unas hojas de trabajo para los alumnos. Estos materiales fueron discutidos en un seminario de trabajo en el que participaron los profesores que después iban a experimentar el modelo. Como se puede comprobar, tienen el carácter de materiales semi-elaborados (por ejemplo, no se proporcionan las definiciones de los conceptos probabilísticos aunque sí la secuencia en que deben ser introducidos) porque pensamos que los problemas de comprensión de los alumnos requieren una intervención activa del profesor y ajustes constantes de los materiales de enseñanza. El profesor debe conformar, modificar y evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje y por eso no tiene sentido proporcionar un material perfectamente estructurado y finalizado que restrinja los grados de libertad del profesor en su aula.

Con la decisión de preparar materiales didácticos semi-elaborados también pretendemos alcanzar un objetivo de generalización: que muchos profesores se sientan motivados para experimentar la metodología que le proponemos. No queremos reducir al profesor a un mero transmisor de nuestros materiales, la propuesta didáctica le da libertad para atender a los requerimientos concretos de su grupo de alumnos pero no le exige que se convierta en un diseñador de currículo. Para la consecución de este objetivo, juega un papel muy importante la guía del profesor de cada unidad didáctica. No es, ni más ni menos, que una forma concreta de realizar un proceso de enseñanza-aprendizaje basado en el cambio conceptual; en este sentido, contiene el foco de atención para cada fase del proceso, las actividades del profesor y de los alumnos y los contenidos y medios propuestos.

A modo de ejemplo, presentamos a continuación la secuencia de enseñanza-aprendizaje de la unidad didáctica 4 (experiencias aleatorias de varias pruebas).

**Estructura didáctica de la unidad:** se adapta a la secuencia de enseñanza-aprendizaje recomendada por Driver desde una óptica de cambio conceptual. El foco de atención se centra en primer lugar en hacer explícitas las ideas de los alumnos (fase de elicitación), en segundo lugar, en realizar experimentos aleatorios para provocar el conflicto cognitivo y en explicar los contenidos normativos que explican los resultados conseguidos en los experimentos (fase de reestructuración), en tercer lugar, en aplicar las nuevas ideas a nuevos contextos (fase de aplicación) y en cuarto lugar, en revisar las ideas previas a la luz de los nuevos conocimientos (fase de revisión del cambio conceptual).

**Contenidos probabilísticos implicados:** figuran en la columna correspondiente de la unidad didáctica. Esta unidad introduce las experiencias aleatorias de varias pruebas que admiten como medios idóneos de representación los diagramas de árbol. Los árboles y caminos se utilizan con profusión para calcular probabilidades compuestas y para operativizar los conceptos de sucesos independientes y dependientes.

**Papel del profesor:** el profesor no es sólo el transmisor de una información sino que es el director-coordinador del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por eso, hay un amplio abanico de actividades del profesor que van mucho más allá de la explicación de los contenidos y corrección de los ejercicios: motiva, modera, resume, critica y supervisa la actividad de sus alumnos, con el objetivo principal de que éstos decidan si sus ideas previas son útiles para explicar ciertos fenómenos aleatorios o necesitan ser refinadas o sustituidas por otras ideas más competentes.

**Sugerencias metodológicas:** las ideas metodológicas que conforman esta unidad son las que describimos en el apartado 4 del capítulo 4 (contenidos y métodos): enfoque experimental y de resolución de problemas, utilización de juegos y apuestas, etc. Como ejemplo, podemos considerar el problema 9 de la hoja de trabajo 9: es una situación aleatoria muy engañosa donde la gran mayoría de alumnos acepta que se trata de una apuesta equitativa. Pues bien, si el profesor intenta resolver el problema formalmente (con ayuda de un diagrama de árbol, por ejemplo) se encontrará que sus alumnos no aceptan su explicación. Es necesario crear un entorno de juego de estrategia, para que los alumnos se convenzan de que hay una estrategia ganadora, precisamente la que le ofrece la teoría de probabilidades.

## UNIDAD 0

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor |
|---|---|---|
| Elicitar las ideas de los alumnos sobre la existencia de leyes que gobiernan el azar. | • Los alumnos en grupo debaten las preguntas.<br>• Cada grupo presenta sus conclusiones a la clase. | Dar ejemplos de fenómenos aleatorios y de fenómenos determinísticos.<br>Hacer ver que los fenómenos determinísticos están gobernados por leyes.<br>Plantear las preguntas:<br>• ¿Hay leyes del azar?.<br>• ¿Cuáles?.<br>• ¿Se pueden medir los fenómenos aleatorios?.<br>• ¿Cómo?. |

***Nota:***

*Trabajo para casa:* Cada alumno ha de redactar y entregar un escrito con sus respuestas a estas preguntas. No se evalúa la corrección o incorrección de las respuestas, lo importante es que sean las ideas propias de cada uno. Por tanto, no vale de nada copiar ideas de otros. Es obligatorio presentar el escrito, al día siguiente de ser propuesto.

## UNIDAD 1

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Material |
|---|---|---|---|
| Lenguaje del azar que tienen los alumnos | Los alumnos forman grupos de 4 para completar la hoja de trabajo 1.<br>- Confeccionan un cartel para la escala de probabilidad. | Presenta la hoja de trabajo 1.<br>Explica el método de trabajo. | |
| | Una persona de cada grupo informa a la clase, explicando la asignación de valores en la escala confeccionada por el grupo. | Preside la sesión de información.<br>Superpone en el encerado las diversas escalas. | |
| | Negociación en la clase, tratando de llegar a una escala unificada. | Modera la negociación. - Busca los puntos comunes en las escalas. | |

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Contenidos implícitos |
|---|---|---|---|
| Lenguaje científico del azar. | Los alumnos han de tomar apuntes que serán motivo de evaluación. | - Presenta la escala de probabilidad estándar.<br>- Explica los contenidos implícitos. | - Experimento y suceso aleatorio vs experimento determinístico.<br>- Probabilidad como grado de creencia.<br>- Suceso seguro e imposible.<br>- La probabilidad varía entre 0 y 1.<br>- Comparación de probabilidades.<br>- Asignación de probabilidades subjetivas. |
| Aplicación de las ideas nuevas. | Los alumnos de manera individual, contestan a la hoja de trabajo 2. | - Corrige la hoja de trabajo n.º 2 | |
| Revisión del cambio en las ideas. | Los alumnos han de escribir un texto indicando explícitamente los cambios producidos en sus ideas acerca del lenguaje del azar y la medida de probabilidades. | | |

# HOJA DE TRABAJO 1

## EL LENGUAJE DEL AZAR

*1.* Daniel y Ana son madrileños. Acuden al mismo instituto y su profesor les ha pedido que preparen una previsión del tiempo para el día 24 de junio, fecha en que comenzarán sus vacaciones.

Puesto que están aún en el mes de mayo, Daniel y Ana no pueden predecir exactamente lo que ocurrirá. Por ello, han buscado una lista de expresiones para utilizar en la descripción del pronóstico. He aquí algunas de ellas:

| | |
|---|---|
| *cierto* | *casi imposible* |
| *posible* | *se espera que* |
| *bastante probable* | *incierto* |
| *hay alguna posibilidad* | *hay alguna probabilidad* |
| *seguro* | *puede ser* |
| *es imposible* | *sin duda* |

En primer lugar, comienzan a clasificar las palabras según la confianza que expresan en que suceda algo. Este es el comienzo de su clasificación:

*imposible*
*casi imposible*
...
*seguro=sin duda*

¿Podrías acabar de clasificar estas palabras? Busca nuevas palabras o frases para referirte a hechos que pueden ocurrir y compáralas con las dadas anteriormente.

*2.* He aquí algunas de las cosas que podrían suceder en Madrid el 24 de junio:

*-lloverá,*
*-nevará y la nieve alcanzará un metro de altura,*
*-el día será claro y soleado,*
*-habrá un ligero viento,*
*-la temperatura máxima sobre pasará los 90 grados,*
*-la temperatura mínima será 10 grados bajo cero,*
*-el cielo estará despejado,*
*la temperatura oscilará entre 25 y 35 grados.*

Para realizar su informe,Ana y Daniel han comenzado de la siguiente manera:

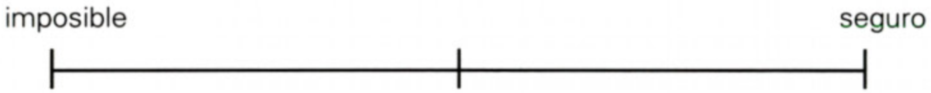
Previsión meteorológica para el 24 de junio en Madrid:

*-puede ser que llueva.*
*-es casi imposible que nieve y*
*se alcance un metro de altura de nieve.*

¿Podrías ayudar a completar el informe?Asigna a cada una de las frases una palabra que exprese la confianza que tienes en que ocurra.

*3.* La escala de la probabilidad.

Ana y Daniel han terminado su trabajo, pero no están satisfechos.Para completarlo, van a asignar un número a cada una de las palabras utilizadas en la actividad 1.Esta es la escala que utilizan:




¿Podrías asignar un valor en la escala de probabilidad a cada una de las palabras?.

# HOJA DE TRABAJO 2

## «CARTAS»

1. Asigna una expresión de las de la actividad 1 de la 1ª hoja de trabajo a cada uno de los siguientes resultados que se pueden obtener al sacar una carta de una baraja española.

*«Sacar As»*
*«Sacar una figura»*
*«Sacar el as de espadas»*
*«Sacar una carta que no sea copas»*
*«Sacar una carta mayor que 5»*

2. Ahora asigna un número a cada expresión y represéntalos en la escala acordada.

## «LA VIDA DE UNA PERSONA»

Observa las siguientes frases relativas a la vida de una persona:

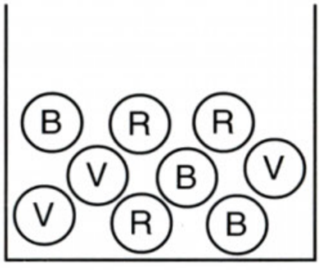
*«Vive sólo 3 años»*
*«Vive sólo 20 años»*
*«Vive sólo 50 años»*
*«Vive sólo 95 años»*
*«Vive sólo 70 años»*
*«Vive sólo 120 años»*

Asigna un número de la escala a cada una de ellas

## «BOLSA CON BOLAS»

Colocamos en una bolsa tres bolas rojas, tres blancas y tres verdes:

¿Cuántas bolas hemos de sacar de la bolsa para estar seguros de obtener los tres colores?.




## «JUEGOS VARIOS»

Indica las posibilidades que existen de ganar en los siguientes juegos:

*«Quinielas de fútbol»*
*«Obtener cara al lanzar una moneda de 100 pts»*
*«Ajedrez»*
*«Obtener un 6 al lanzar un dado»*
*«Lotería primitiva»*

## *UNIDAD 2*

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Material |
|---|---|---|---|
| Ideas de los alumnos sobre experiencias aleatorias de una prueba. | Completan la hoja de trabajo 3 en pequeños grupos. | Presenta la hoja de trabajo, n.º 3. | Hoja de trabajo. |
| Intercambio de las ideas de la clase. | Una persona de cada grupo informa a la clase de las soluciones dadas. | Resume y estructura y toma nota de las soluciones dadas pero no comenta su corrección. | Encerado. |
| Realizar experiencias aleatorias de una prueba. | Completan la hoja de trabajo nº 4. | Organiza la distribución de material. Promueve debate, observación e interpretación de los resultados. | Monedas, cajas de chinchetas, dados normales, dados blancos, dados lastrados. |
| Intercambio de los resultados experimentales. | Una persona de cada grupo informa a la clase de los resultados de los experimentos. | Resume de nuevo y toma nota de resultados y los compara con las primitivas soluciones. | |

| **Foco de atención** | **Actividades de los alumnos** | **Actividades del profesor** | **Contenidos** |
|---|---|---|---|
| El punto de vista formal. | Toman apuntes que serán evaluados. | Presenta explícitamente los contenidos probabilísticos que se están utilizando y los aplica a la interpretación de los problemas propuestos. | Espacio muestral<br>Frecuencia absoluta<br>Frecuencia relativa<br>Probabilidad y su relación con la frecuencia<br>Escala de probabilidad |
| Aplicación de los conceptos aprendidos. | Realizan en casa la hoja de trabajo nº 5. | Corrige y comenta en el encerado la hoja de trabajo nº 5. | Axiomas 1 y 2 de la probabilidad<br>Sucesos simples equiprobables y no equiprobables<br>Sucesos compuestos<br>Regla de Laplace para asignar probabilidades a sucesos equiprobables<br>Sesgo en los experimentos. |

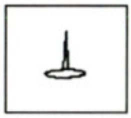
# HOJA DE TRABAJO Nº 3

*1.* Si lanzas al aire una moneda 100 veces. ¿Cuántas veces esperas que salga cara?. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda al aire?.

*2.* Si lanzas al aire una chincheta 100 veces. ¿Cuántas veces esperas que caiga de punta ?. ¿Cuántas veces esperas que caiga de cabeza?. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una chincheta caiga de punta?. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga de cabeza?.

*Nota: Caer de punta —>*

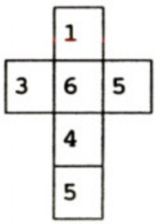
*Caer de cabeza —>*



*3.* Si lanzas al aire un dado 24 veces.

*¿Cuántas veces esperas que te salga un 3?*
*¿Y un 5?*
*¿Y un nº impar?*
*¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3?*
*¿Y de obtener un 5?*
*¿Y de obtener un nº impar?*

*4.* Imagínate un dado que tiene los siguientes números en sus caras:




Lo lanzas al aire 24 veces:

*¿Cuántas veces esperas que te salga un 3?*
*¿Y un 5?*
*¿Y un 2?*
*¿Y un nº impar?*
*¿Cuál es la probabilidad de obtener un 3?*
*¿Y de obtener un 5?*
*¿Y de obtener un 2?*
*¿Y de obtener un número impar?*

## HOJA DE TRABAJO Nº 4

*1.* Lanza una moneda 100 veces y anota los resultados en la columna «recuento» de la tabla:

| Resultado | Recuento | Nº esperado de veces | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|---|---|---|---|---|
| C | | | | |
| X | | | | |
| | 100 | 100 | 100 | 1 |

En la columna 'nº esperado de veces' escribe los números de caras y de cruces que suponías ibas a obtener, antes de realizar el experimento. (Recuerda tu contestación al ejercicio 1 de la hoja de trabajo 3)

El número de veces que sale cada cara de la moneda es su **frecuencia absoluta**.

Si dividimos dicho número por el número total de lanzamientos (en este caso 100) obtenemos la **frecuencia relativa** de este suceso.

Completa todas las columnas de la tabla.

*2.* Lanza al aire una chincheta 100 veces y completa la siguiente tabla como en el caso anterior:

| Resultado | Recuento | Nº esperado de veces | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|---|---|---|---|---|
|  | | | | |
|  | | | | |
| | 100 | 100 | 100 | 1 |

*3.* Vas a jugar al parchís con un amigo.Para poder comenzar a mover la ficha es preciso obtener un cinco, pero tu amigo prefiere que se le exija obtener un 3, porque piensa que de ese modo tiene ventaja. ¿Tú que opinas? ¿Puedes dejarle que comience a mover la ficha cuando le salga el tres, o es preciso que los dos juguéis a obtener el mismo número?

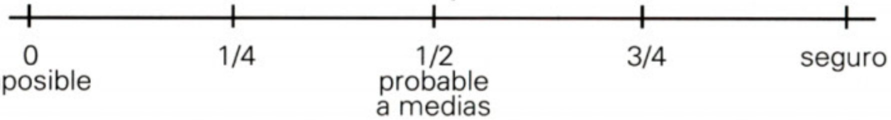
Fíjate en la tabla que te presentamos.Trata de adivinar cuantas veces, aproximadamente, saldrá el 3 y cuantas el 5 si lanzas un dado 24 veces.Escribe este número en la columna 'número esperado de veces'.

| Resultado | Recuento | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa | Nº esperado de veces |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| Total ...... | | 24 | 1 | 24 |

Lanza el dado 24 veces y anota los resultados en la tabla.

Calcula la frecuencia relativa de obtener 5 y la de obtener 3. ¿Cuál es mayor? Completa todas las columnas de la tabla.

Para medir la mayor o menor posibilidad de que ocurra un suceso en un experimento, le asignamos un número entre 0 y 1,llamado su **probabilidad**. Asignamos una probabilidad 0 a un suceso que nunca puede ocurrir,por ejemplo, que salga un 7 al lanzar el dado. Asignamos un 1 a un suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento;por ejemplo, al lanzar la moneda es seguro que saldrá cara o cruz. A cualquier otro suceso distinto del imposible y del seguro se le asigna un numero entre 0 y 1:




¿Cuál de las siguientes afirmaciones te parece verdadera cuando lanzamos un dado?:

*a) la probabilidad de obtener un 3 es mayor que la de obtener un 6.*
*b) la probabilidad de obtener un 6 es mayor que la de obtener un 3.*
*c) la probabilidad de obtener un 1 es mayor que la de obtener un 6.*
*d) la probabilidad de obtener un 6 es igual que la de obtener un 3.*
*e) la probabilidad de obtener un 1 es mayor que 1/2.*
*f) la probabilidad de obtener un 1 es menor que 1/2.*

*4.* a) En 24 tiradas de un dado,¿Cuántas veces piensas que ocurrirán los resultados «seis»,»impar».Anota estos números previstos en la columna «Núm. esperado de veces».

| Resultado | Recuento | Nº de veces obtenido | Frecuencia relativa | Nº esperado de veces |
|---|---|---|---|---|
| seis | | | | |
| impar | | | | |

b) Lanzar un dado 24 veces. Anotar los resultados de los sucesos «seis» e «impar».

c) Calcula la frecuencia relativa de cada uno de estos sucesos.¿Cuál es el mayor? ¿Cuál es menor? Si repites este experimento,¿Puedes cambiar estos números?

d) Ordenar de mayor a menor los números:

*0,1,Probabilidad de obtener un seis,Probabilidad de obtener impar.*

*5.* Lanza el dado que te proporciona el profesor 24 veces (es el dado del ejercicio 4 de la hoja de trabajo 3).

Completa la tabla:

| Resultado | Recuento | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa | Nº esperado de veces |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| Total ...... | | 24 | 1 | 24 |

Enumera el conjunto de todos los resultados posibles. Compara entre sí las probabilidades de obtener un 5, un 3 y un 2.

*6.* Lanza el dado que te proporciona el profesor 24 veces (dado lastrado).

Completa la tabla:

| Resultado | Recuento | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa | Nº esperado de veces |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| Total ...... | | 24 | 1 | 24 |

Enumera el conjunto de todos los resultados posible. ¿Notas algo especial en este dado?.

# HOJA DE TRABAJO 5

*1.* Una urna contiene 100 bolas numeradas 00, 01, 02, 03,..., 99. Se saca una bola al azar. Sea X la primera e Y la segunda cifra de su número. Determinar las probabilidades de los siguientes sucesos compuestos.

a) $X = 3$ b) $Y \neq 4$ c) $X \neq Y$ d) $X > Y$
e) $X \leq Y$ f) $X + Y = 9$ g) $X * Y > 49$.

*2.* Un club cuenta con 100 socios. A través de un cuestionario se conocen los datos recogidos en la tabla:

| | HOMBRES | MUJERES |
|---|---|---|
| Practican deporte | 48 | 12 |
| No practican deporte | 16 | 24 |

Se selecciona una persona al azar.

*a) ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un hombre, una mujer, un practicante de deportes, un no practicante de deportes y un hombre practicante de deportes?.*

*b) Supuesto que la persona elegida es una mujer. ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte?.*

# *UNIDAD 3*

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor |
|---|---|---|
| Ideas de los alumnos sobre las dos leyes de los grandes números. | En grupos, resuelven los problemas de la hoja de trabajo nº 6. | Presenta la hoja de trabajo n.º 6. Fomenta las respuestas de los alumnos pero sin comentar su corrección. |
| Intercambio de las ideas de la clase. | Una persona de cada grupo informa a la clase. | Resume las respuestas en el encerado. |
| Realización de experimentos. | Realizar los experimentos propuestos en la hoja de trabajo nº 7. | Explica el concepto de diagrama de barras y de líneas. Construye las hojas de registro 3 y 10 de la hoja de trabajo 7 en el encerado. |
| Ideas de los alumnos sobre las leyes de los grandes números después de realizar los experimentos. | Los alumnos por grupos, han de formular por escrito las leyes que rigen el comportamiento del azar en los ejercicios presentados en las hojas de trabajo 6 y 7. Se discuten en la clase. | Presenta la pregunta: ¿Qué leyes pueden explicar el comportamiento del azar en los ejercicios realizados? |

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Contenidos |
|---|---|---|---|
| El punto de vista formal de las leyes de los grandes números. | Toman apuntes. | Explica los contenidos implícitos. Repasa los ejercicios de la hoja 6 y 7.<br>Explícita y se enfrenta al sesgo de representatividad y a la falacia de jugador. | Estabilidad de las frecuencias relativas.<br>Formulación de la 1ª ley de los grandes números.<br>Diferencia entre los conceptos de probabilidad y limite funcional.<br>Comportamiento «raro» de las frecuencias absolutas: 2ª ley de los grandes números. |
| Aplicación de los conceptos estudiados | Ejercicio para casa: Hoja de trabajo nº 8. | Comenta el ejercicio para casa, una vez realizado por los alumnos | |

## HOJA DE TRABAJO Nº 6

*1.* En cada ronda de un juego, 20 bolas son distribuidas aleatoriamente entre 5 niños: Elena, Pepe, Pedro, Ana y Juan. Consideremos dos de las distribuciones posibles:

| | I | II |
|---|---|---|
| Elena | 4 | 4 |
| Pepe | 4 | 4 |
| Pedro | 5 | 4 |
| Ana | 4 | 4 |
| Juan | 3 | 4 |

Si se realiza muchas veces el juego ¿Habrá más resultados del tipo I o del tipo II?

*2.* La diferencia entre el número de caras y el de cruces de una sucesión de tiradas de una moneda, a medida que aumenta el número de éstas:

*a) tiende a 0*
*b) no tiende a ningún número*
*c) tiende a infinito*

*3.* El cociente entre el número de caras y el de cruces de una sucesión de tiradas de una moneda, a medida que aumenta el número de éstas:

*a) tiende a 1*
*b) no tiende a ningún número*
*c) tiende a infinito*

*4.* Estoy lanzando un dado al aire y anotando las veces que me sale un «3». Teóricamente, si el dado no está trucado, tengo probabilidad 1/6 de obtener un «3». Los datos de mi experimento son:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Numero de lanzamientos* | *120* | *240* | *1200* | *4800* | *48000* |
| *Número de «3» esperados* | *20* | *40* | *200* | *800* | *8000* |
| *frecuencia real del «3»* | *29* | *49* | *177* | *766* | *7894* |
| ***DIFERENCIA EN VALOR ABS.*** | ***9*** | ***9*** | ***23*** | ***34*** | ***106*** |

Es decir que las diferencias entre el número de veces que ha salido el «3» y el número de veces que «esperábamos» que saliera tiende a aumentar. Esto es porque:

*a) el dado está trucado*
*b) el dado está bien y lo que ocurre se puede explicar por una de las leyes del azar.*

*(Si calculo la frecuencia relativa veo que tiende a 1/6)*

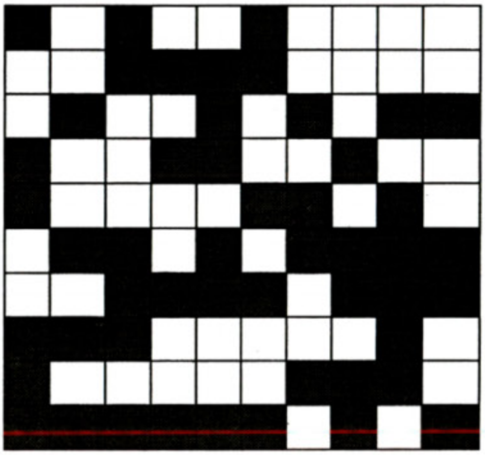
5. Si estamos lanzando una moneda al aire y han salido 3 caras seguidas, en la próxima tirada:

*a) es más probable que salga cara*
*b) es más probable que salga cruz*
*c) es igual de probable que salga cara o cruz*

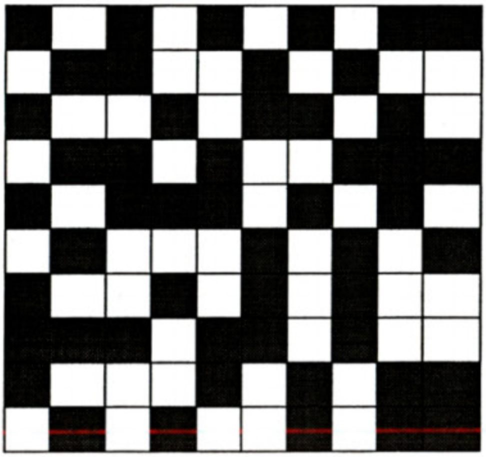
6. Tenemos una máquina que llena una urna de bolas blancas y negras. La máquina lanza con igual probabilidad una bola blanca que una negra dentro de la urna. Cuando la máquina lleva funcionando un rato, contamos las bolas que hay en la urna. ¿ Necesariamente hay el mismo número de bolas blancas que de negras en la urna?

7. Le entregamos a dos niñas, Xiana y Violeta, una cuadrícula 10x10 a cada una y les pedimos que decidan lanzando una moneda a cara o cruz si cada casillero lo dejan de blanco o lo pintan de negro.

**La cuadrícula de Xiana queda así:**



**La cuadrícula de Violeta queda así:**



A la vista de ellas, ¿qué opinas?

*a) las dos niñas fueron obedientes y las cuadrículas están confeccionadas según las normas dadas*
*b) Xiana no tiró la moneda sino que pintó los casilleros para que pareciera una trama aleatoria sin serlo*
*c) Es Violeta la que hizo trampa*
*d) Las dos hicieron trampa, pintando la cuadrícula sin tirar la moneda*
*e) no puedo saber si hicieron trampa o no.*

8. Un borracho está abrazado a una farola y decide volver a casa, pero no se acuerda de dónde está su casa ni sabe dónde pone el pie. Decide confiar su

camino al azar. Para ello lanza una moneda de peseta y otra de duro al aire. Cada lanzamiento de las dos monedas la indica el paso a dar:

| Peseta | Duro | Paso a dar |
|---|---|---|
| cara | cara | hacia delante y hacia la izquierda. |
| cara | cruz | hacia delante y hacia la derecha. |
| cruz | cara | hacia atrás y hacia la izquierda. |
| cruz | cruz | hacia atrás y hacia la derecha. |

*¿Qué sucederá al cabo de un rato: el borracho estará dando vueltas a la farola o se alejará de ella?*

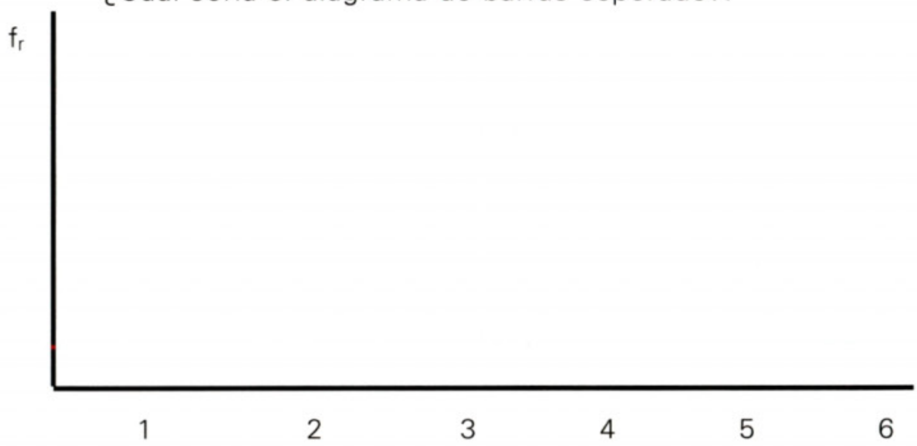
# HOJA DE TRABAJO Nº 7

*1.* Por parejas, lanzar un dado 120 veces. Completar la siguiente tabla.

| X | f | $f_r$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| | 120 | 1 |

*f es la frecuencia absoluta y $f_r$ la frecuencia relativa.*

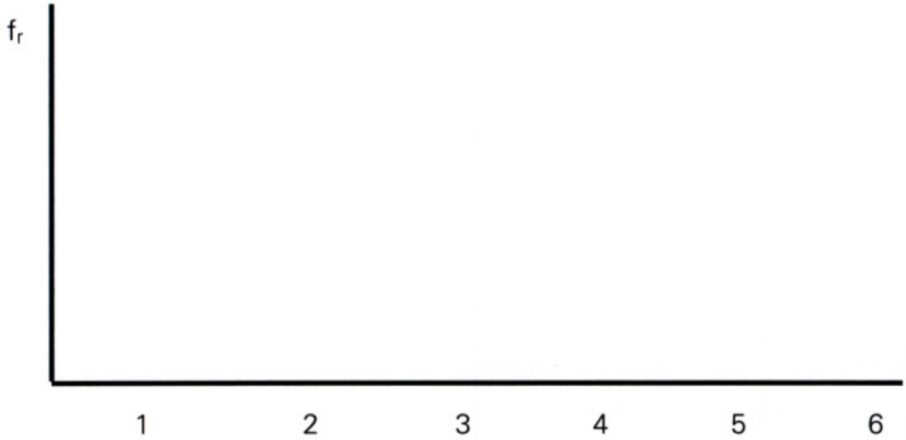
Construir el diagrama de barras correspondiente
¿Cuál sería el diagrama de barras esperado?.




*2.* Cada pareja que reuna los resultados con otra pareja y completar la tabla.

| X | f | $f_r$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| | 240 | 1 |

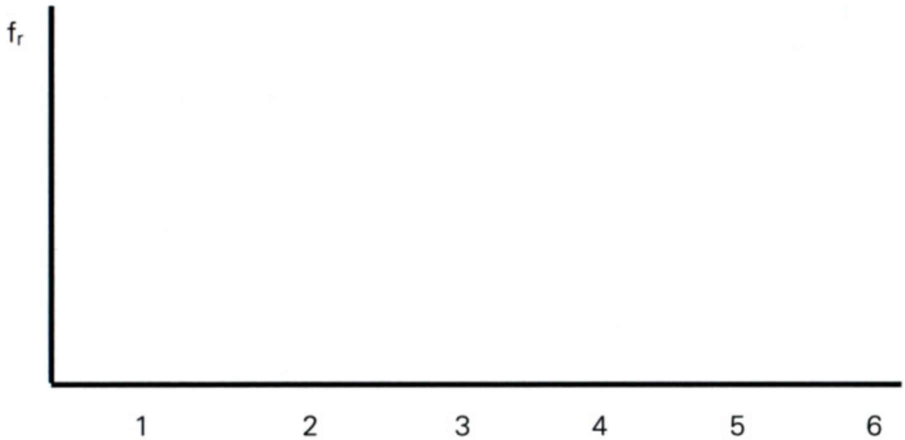
Construir el diagrama de barras correspondiente.




3. Reunir los resultados de todas las parejas en una sola tabla

| X | f | $f_r$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| | | 1 |

Construir el diagrama de barras.



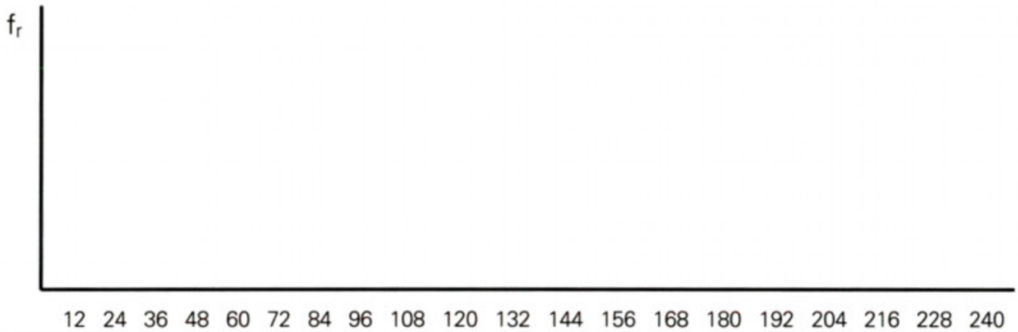

*¿Que observas en este diagrama que los diferencia de los anteriores?*

*4.* Antes de lanzar el dado ¿Cuál es la probabilidad teórica de conseguir un «3»?

*5.* Completar la siguiente tabla:

| Núm. de lanzamientos. | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Núm. de veces que salió el 3 | | | | | | | | | | |
| Frecuencia relativa del 3 | | | | | | | | | | |

*6.* A partir de la tabla anterior construir un gráfico de líneas:




*7.* Traza en el anterior gráfico la línea que representa la probabilidad teórica de conseguir un 3 al lanzar un dado.

*8.* ¿Observas alguna tendencia en la línea que representa la frecuencia relativa del 3?.

*9.* ¿Crees que lo que pasa con la frecuencia relativa del 3, pasaría con la frecuencia relativa de obtener el 4?

1*0.* Completar la siguiente tabla:

| Núm. de lanzamientos | 120 | 240 | 480 | 1200 | 2400 | 4800 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia esperada del 3 | | | | | | |
| Frecuencia absoluta del 3 | | | | | | |
| \| Fr. esperada - Fr. absoluta \| | | | | | | |
| Frecuencia relativa del 3 | | | | | | |
| \| Fr. relativa - probabilidad del 3 \| | | | | | | |

*¿Observas algo raro en esta tabla?*

## HOJA DE TRABAJO Nº 8

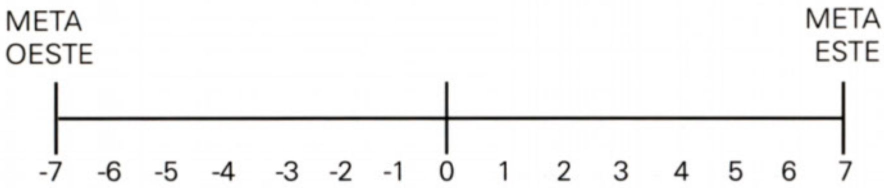
*1*. Simular el paseo del borracho. Para ello por parejas, completar la siguiente tabla:

| **N** | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **D** | | | | | | | | | | |

Donde N es el número de movimientos y D es la distancia en mm. del «borracho medio» a la farola.

*¿Se acerca o se aleja el borracho de la farola?. ¿Por qué sucede esto?.*

*2*. Carrera con una moneda:




Se coloca una ficha en punto de salida 0. Se lanza una moneda. Si sale cara, la ficha avanza un lugar hacia la derecha. Si sale cruz, la ficha avanza un lugar hacia la izquierda.

Se repite el lanzamiento de la moneda, hasta que la ficha llegue a la meta ESTE o a la meta OESTE, que acaba el juego:

*Juega varias veces y completa el siguiente cuadro:*

| LLEGA A | Nº tiradas | Caras | Cruces | $f_r$ caras | $f_r$ cruces |
|---|---|---|---|---|---|
| Meta ... | | | | | |
| Meta ... | | | | | |
| Meta ... | | | | | |
| Meta ... | | | | | |

Compara con los resultados de tus compañeros.

¿Qué observas en las frecuencias relativas?
¿Qué pasaría si las metas estuvieran más lejos?.

Relaciona los resultados con las leyes de los grandes números que has estudiado.

# UNIDAD 4

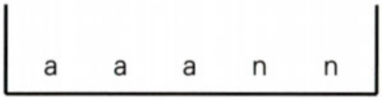
| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Material |
|---|---|---|---|
| Hacer explícitos los supuestos de los que parten los alumnos en las experiencias aleatorias de varias pruebas. | Los alumnos en grupos discuten los problemas de la hoja de trabajo nº 9, confección del cartel. | Presenta la hoja de trabajo N.º 9. Recorre los grupos fomentando el trabajo ordenado. | |
| | Una persona de cada grupo informa a la clase sobre las soluciones. | Modera la sesión. No critica las soluciones dadas. | |
| | Discusión en la clase. Se recogen las soluciones dominantes. | Modera la sesión. Trata de resumir o esquematizar las soluciones dominantes y las razones dadas. | |
| Realizar experimentos aleatorios. | Se dividen en grupos: unos realizan el experimento 7; otros realizan el experimento 8; el experimento 9 se realiza con toda la clase. | Organiza los grupos y el material. Ayuda a los grupos cuando se lo pidan. Promueve debate, observación e interpretación de los resultados. | Cartas o cartulinas. Monedas. Dados sin marcar caras. |
| Describir el resultado de los experimentos. | Cada grupo elabora un cartel para informar a la clase de su experimento. | Estimula el debate sobre posibles modos de mejorar el experimento. Por ejemplo: en el problema 7, ¿influye que el 2º jugador conozca el resultado obtenido por el 1º?. | |
| Revisión de las ideas originales. | Discusión con toda la clase. | Promueve la discusión problema por problema. | |

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Contenidos |
|---|---|---|---|
| Utilización de recursos y heurísticos estadísticos. Arboles y caminos. | Toman notas. | Presenta los diagramas en árbol de los problemas de la hoja de trabajo nº 9. | Experiencias aleatorias de una sola prueba vs de varias pruebas.<br>Diagramas en árbol. Caminos. |
| Verificación de la validez de las técnicas estadísticas. | Toman notas. | Relaciona los resultados obtenidos de esta manera con los resultados de los experimentos. Explica contenidos. | Sucesos independientes.<br>Sucesos dependientes.<br>Intersección de sucesos.<br>Probabilidad de la intersección |
| Aplicación de las nuevas ideas. | Resuelven la hoja de trabajo 10, individualmente. | Manda resolver los ejercicios de la hoja de trabajo 10 en el encerado. | Unión de sucesos.<br>Probabilidad de la unión.<br>Sucesos incompatibles.<br>Sucesos compatibles. |
| Revisión del cambio en las ideas. | Los alumnos individualmente deben escribir sobre las diferencias en su comprensión de los problemas antes y después de la instrucción. | | Sucesos contrarios.<br>Suma de probabilidades de sucesos contrarios. |

## HOJA DE TRABAJO 9

*1.* De la urna de abajo se extrae al azar una letra, se toma nota y se devuelve a la urna. Después se repite el proceso dos veces más.

*¿Qué probabilidad hay de obtener la palabra ANA?*

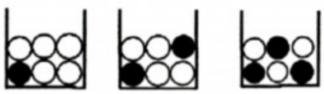



*2.* De la urna anterior se extrae al azar una letra, se toma nota y no se devuelve a la urna. Después se repite el proceso dos veces más.

*¿Qué probabilidad hay de obtener la palabra ANA?*

*3.* Los condenados a muerte en Celofania tienen una última posibilidad de librarse de la pena. Con los ojos vendados, deben elegir al azar una de las tres urnas de abajo y sacar una bola. En el caso de que esta sea blanca, salvan su vida.

*¿Cuál es la probabilidad de que se salven?*



1 2 3

*4.* Hay 9 viajeros en la aduana, de los que 5 son honrados y 4 defraudadores. Un aduanero elige a 3 personas para pasar el control. Descubre que los 3 son defraudadores.

*¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado tan bueno?*

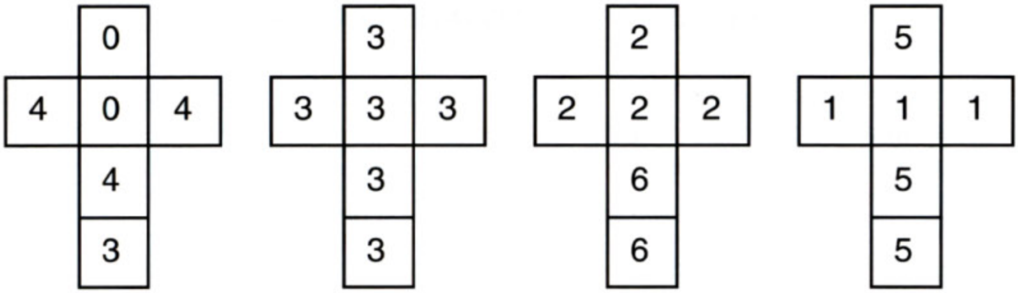
*5.* Cada vez que el profesor Freud ve a 7 personas juntas apuesta 100 contra 1 a que por la menos 2 de ellas han nacido el mismo día de la semana.

*¿Cuál es la probabilidad de que pierda su apuesta?*

*6.* Cain y Abel tiran al mismo tiempo sobre un blanco. Sus probabilidades de acertar son respectivamente 4/5 y 7/10.

*¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos se alcance el blanco una vez?*

*7.* Se consideran los dados a, b, c, d, cuyas caras aparecen a continuación:




a b c d

El primer jugador escoge un dado y el segundo otro (de los tres que quedan). Los lanzan y gana el que más puntuación obtenga.

*¿Qué prefieres ser el 1º o el 2º jugador?. ¿Por qué?*

*8.* Dos jugadores ponen 20.000 pts cada uno y se las juegan del siguiente modo: se las llevará el primero que gane 6 veces al juego de lanzar una moneda al aire.Cuando uno de ellos va ganando 5 a 3, se tiene que interrumpir el juego.

*¿Cómo se deben repartir las 40.000 pts?*

*9.* Disponemos de 3 cartas: una de ellas es negra por ambas caras, otra roja por ambas caras y la tercera tiene una cara roja y la otra negra. Se meten las cartas en un sombrero y una mano inocente extrae una de ellas de la que se puede ver sólo una de las caras.Supongamos que es roja. Un jugador te ofrece apostar cierta suma de dinero contra la misma cantidad de su parte, apostando él a favor de la carta roja-roja.

*¿Te parece una apuesta equitativa?*

*10. ¿Cuántas personas se necesitan en un grupo para estar seguros que al menos dos de ellas tienen el mismo día de cumpleaños?.*

*11. ¿Cuál es la probabilidad de que en una clase de 23 personas, haya al menos 2 con el mismo día de cumpleaños?*

## *PROPUESTA DE EXPERIMENTOS ALEATORIOS*

*EXPERIMENTO 7 (Hace referencia al problema 7 de la hoja de trabajo 9)*

Se constituyen 3 parejas, cada una de ellas con 4 dados transitivos. Se las permite jugar un rato, el juego. Cada pareja ha de contestar a la pregunta formulada y justificarla.

Luego ha de informar a la clase. Posteriormente, el profesor puede desafiar a cualquier alumno a jugar y demostrar que hay una estrategia ganadora. Ha de plantear la pregunta:

> *¿Influye que el 2º jugador conozca el resultado obtenido por el 1º, o sólo el dado que ha escogido el 1º?*

*EXPERIMENTO 8 (Hace referencia al problema 8 de la hoja de trabajo 9)*

Se constituyen 10 o más parejas, que parten de la hipótesis de que uno de los miembros de la pareja está ganando por 5 a 3. Juegan el juego 16 veces cada pareja. Se trata de ver cuantas partidas gana un jugador y cuantas el otro.

Posteriormente se recogen en una sola tabla los resultados de las 10 parejas.

| Partidas realizadas | 16 | 160 |
|---|---|---|
| Partidas ganadas por A | | |
| Partidas ganadas por B | | |
| Probabilidad de ganar A | | |
| Probabilidad de ganar B | | |

*EXPERIMENTO 9 (Hace referencia al problema 9 de la hoja de trabajo 9)*

El profesor extrae 30 veces, cada vez una de las 3 cartas de una bolsa, mostrando una de las caras. Los alumnos han de adivinar el color de la otra cara. Un alumno, al lado del profesor va anotando el color de la cara oculta y al final muestra a la clase el resultado.

Se invita a los alumnos que escojan una estrategia para jugar de nuevo el juego (si no se les ocurre, se les proporciona).

> *a) Escoger al azar el color de la cara oculta.*
> *b) Escoger para la cara oculta el mismo color de la cara visible.*
> *c) Escoger el color contrario.*

De nuevo se repite el juego y se ve cuál estrategia es la ganadora.

# HOJA DE TRABAJO 10

*1.* En un cajón hay 4 calcetines negros, 6 rojos y 2 blancos. Se extraen dos al azar.

*¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?*

*2.* Se extraen sucesivamente y al azar las 10 letras contenidas en la urna.

| a | a | a | a | b | b | b | a | a | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

El resultado de la extracción son palabras que contienen 6 letras a y 4 letras b.

*¿Cuál es la probabilidad de obtener la palabra «abbaabaaab»?*

*3.* Se lanza un dado 6 veces. *¿Cuál es la probabilidad de:*

*a) Obtener cada vez un número diferente.*
*b) Obtener sólo números impares.*
*c) Obtener sólo cincos o seises.*
*d) Obtener al menos un cuatro.*

*4.* Sean X e Y el primer y el segundo resultado de lanzar un dado dos veces. Calcular las probabilidades de los sucesos siguientes:

*a)* $X = 2$ *b)* $Y < 4$ *c)* $(X = 2) \cup (Y = 1)$
*d)* $(X < 3) \cup (Y > 2)$ *e)* $X + Y = K$
*f)* $X * Y \geq 18$ *g)* $X * Y = 1$

*5.* Sacamos 2 cartas de una baraja. Probabilidad de obtener:

*a) Dos bastos.*
*b) Un basto.*
*c) Ningún basto.*
*d) Algún basto.*

*6. ¿Qué es más probable: obtener al menos « un seis» al tirar un dado 4 veces, u obtener al menos « un doble seis», al tirar 2 dados 24 veces?*

*7.* Se lanzan cuatro dados. Si sale « 6 « en alguno de ellos gano; sino, pierdo.

*¿Tengo ventaja?*

# UNIDAD 5

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Material |
|---|---|---|---|
| Razonamiento estadístico intuitivo de los alumnos. | Los alumnos en grupos discuten los problemas de la hoja de trabajo nº 11, confección del cartel. | Presenta la hoja de trabajo. Recorre los grupos fomentando el trabajo ordenado. | |
| | Una persona de cada grupo informa a la clase sobre las soluciones. | Modera la sesión. No critica las soluciones dadas. | |
| | Discusión en la clase. Se recogen las soluciones dominantes. | Modera la sesión. Trata de resumir o esquematizar las soluciones dominantes y las razones dadas. | |
| Realización de simulaciones por los alumnos. | Los alumnos han de reflexionar sobre cómo simular el problema, proponer una simulación y realizarla. | Propone que se simulen los ejercicios 7, 8, 9, 11, por parejas o por trios. | Dados normales. Tarjetas. Monedas. Bolas en urnas. |
| Describir el proceso y el resultado de la simulación. | Cada grupo informa a la clase de cómo simuló el problema respectivo y el resultado. | Estimula el debate sobre cómo ampliar o realizar de otro modo la simulación. | |

| **Foco de atención** | **Actividades de los alumnos** | **Actividades del profesor** | **Contenidos** |
|---|---|---|---|
| Analisis teórico de los problemas propuestos. | Toman notas. | Resuelve los problemas de la hoja 11. Comenta la utilidad de las simulaciones. | Tamaño de la muestra.<br>Distribución binomial.<br>Regresión a la media.<br>Independencia estocástica. |
| Verificación de la validez de las técnicas estadísticas. | Toman notas. | Relaciona los resultados teóricos con los experimentales. | Heurísticos y sesgos del razonamiento probabilístico.<br>Números aleatorios.<br>Simulación. |
| Aplicación de las nuevas ideas. | En grupos, los alumnos resuelven la hoja 12. - Discusión en la clase. | Modera la sesión.<br>Reflexiona sobre los problemas de la hoja 12. | Método de Montecarlo. |

# HOJA DE TRABAJO 11

*1.* El número máximo de cabellos que tiene una persona es 500000; el número de habitantes de Madrid es 3000000, *¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 habitantes de Madrid tengan el mismo número de cabellos?*

*2.* Consideremos la letra r. *¿Es más probable que r aparezca en la primera posición de una palabra o en la tercera posición?* Verifica una. Tu estimación para la proporción de esos dos valores es...

3. Considera los siguientes cuadros

| *A* | *B* |
|---|---|
| *xxxxxxxxxx* | *xx* |
| *xxxxxxxxxx* | *xx* |
| *xxxxxxxxxx* | *xx* |
| | *xx* |
| | *xx* |
| | *xx* |

¿En cuál de los cuadros hay más formas posibles para pasar de la primera fila a la última, sabiendo que desde una x cualquiera de una fila puedes saltar a cualquier x de la fila inmediatamente inferior?

*-En A*
*-En B*
*-El mismo número*

*4.* En una cierta ciudad hay dos maternidades. En la mayor nacen aproximadamente 45 bebés por día y en la menor 15. Como sabes, más o menos el 50% de los recién nacidos son niños aunque el porcentaje exacto de niños varía de un día a otro. Durante un año entero cada maternidad registró los días en los que más del 60% de los recién nacidos fueron niños. *¿Qué maternidad registró más días de éstos?:*

*-La mayor*
*-La menor*
*-Las dos maternidades registraron aproximadamente el mismo número de días*

*5.* Si se extrae una muestra de 100 personas ¿Qué es más probable?

*a) Que esté constituida por 53 hombres y 47 mujeres*
*b) Que esté constituida por 50 hombres y 50 mujeres*

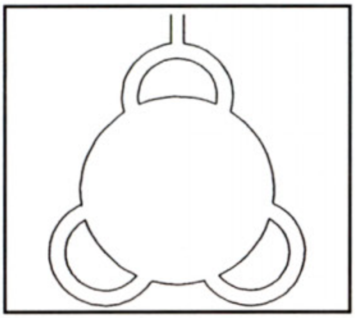
*6.* Hemos lanzado 1000 veces la moneda al aire y han salido 550 caras y 450 cruces. Si tiramos la misma moneda otras 1000 veces, lo más probable es que

*a) salgan menos de 550 caras*

*b) salgan 550 caras o más*

*c) es igual de probable el suceso a) que el b)*

*7.* 3 cazadores muy hábiles hacen blanco a cada tiro. Se da suelta simultáneamente a seis pichones; cada cazador dispara una vez. *¿Cuántos pichones quedan vivos por término medio?*



*8.* 27 exploradores están perdidos en una cueva de la que parten 3 caminos. Uno de ellos lleva al exterior en una hora. Los dos restantes no tienen salida: si entran por uno de ellos, vuelven a la cueva en dos días; si lo hacen por otro, vuelven en tres días. Como no llevan ninguna luz y la cueva está oscura y llena de obstáculos, eligen, cada vez que hacen un intento de salir, uno de los tres caminos al azar.

Si sólo tienen comida y agua para sobrevivir durante menos de seis días, *¿cuántos de los 27 exploradores crees que lograrán salir de la cueva?*

*¿Cuántos se salvarían si hubiese 54 exploradores?¿Y si hubiese 18?*

Si hubiera un número cualquiera de exploradores, *¿qué proporción de ellos crees que se salvaría?*

Si tuvieran alimentos para subsistir indefinidamente, *¿crees que se salvarían todos los exploradores?*

*9.* Tenemos 4 tarjetas, cada una de las cuales tiene una letra por el anverso y un número por el reverso. Se colocan encima de una mesa de la siguiente manera:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 5 | B | 2 |

Se puede asegurar que si en el anverso hay una vocal entonces en el reverso hay un número par. Admitiendo esto:

*¿Cuál es la probabilidad de que detrás de A haya un impar?*

*¿Cuál es la probabilidad de que detrás de 5 haya una consonante?*

*¿Cuál es la probabilidad de que detrás de B haya un par?*

*¿Cuál es la probabilidad de que detrás de 2 haya una vocal?*

*10.* La posibilidad de no morir en un accidente de coche es del 99%, la de no morir en un accidente doméstico es del 98%, la de librarnos de una enfermedad pulmonar es del 95%, la de librarnos de la locura es del 90%, la de librarnos de un cáncer es del 80% y la de librarnos de una enfermedad del corazón es del 75%. Estima la posibilidad de que una persona no padezca ninguna de estas desgracias.

11. *¿Cuál es la probabilidad de que entre 6 nacimientos 3 sean mujeres:*

- *3/6*
- *20/64*
- *1/8*

12. *a)* Hay quién dice que, generalmente, los hombres tienen mas hermanas que las mujeres y que las mujeres tienen mas hermanos varones que los hombres tienen. Es decir que una chica, si tiene hermanos, generalmente tiene mas hermanos varones que hermanos mujeres; en cambio, un chico, si tiene hermanos, suele tener mas hermanos mujeres que hermanos varones *¿Crees que esto es cierto?*

*b)* Alguien ha lanzado al aire una moneda varias veces y ha ido anotando el número de caras y el de cruces. Tú sólo has visto que una de las veces salió «cara» *¿Puedes afirmar que en el resto de los lanzamientos hay más «cruces» que «caras»?*

13. En la prensa apareció el siguiente anuncio del que suprimimos el nombre del producto: « Presentamos la solución a su problema de obesidad: de todos los compradores del producto XXXX sólo el 3% quedó insatisfecho y pidió la devolución de su importe. Decídase Ud. a probarlo. No se arrepentirá». Suponiendo que esta información es cierta *¿podemos afirmar con seguridad que este producto es eficaz?*

*¿Qué porcentaje de los compradores quedó satisfecho de su compra?*
*¿Que probabilidad tienes de que si compras el producto quedes satisfecho?*

14. La puntuación media global en matemáticas en un distrito escolar grande era 400. Si 5 estudiantes fueron aleatoriamente seleccionados del distrito y las puntuaciones respectivas en matemáticas de 4 de ellos fueron 380, 420, 400 y 600 *¿Cual sería la puntuación esperada para el 5º estudiante?*

## HOJA DE TRABAJO 12

*1.* Imagina que eres un explorador que ha llegado a una isla desconocida en el Pacífico Sur. Encuentras varios animales, personas y objetos que te resultan desconocidos. Observas las propiedades de tus «muestras» y haces conjeturas acerca de si esas propiedades serían iguales en otros animales, personas y objetos del mismo tipo.

Suponte que encuentras un pájaro nuevo, el piorrón. Es azul de color. *¿Qué porcentaje de piorrones esperas que sean azules? ¿Porqué?*

Suponte que el piorrón que encuentras anida en un eucaliptus, una clase de árboles que es muy común en la isla. *¿Qué porcentaje de todos los piorrones en la isla crees tú que anida en los eucaliptus? ¿Porqué?*

Suponte que encuentras un nativo que es miembro de una tribu que él llama los Barratos. Es gordo. *¿Qué porcentaje de todos los hombres Barratos crees que serán gordos? ¿Porqué?*

Suponte que el hombre es de color marrón. *¿Qué porcentaje de los hombres Barratos esperas que sean marrones (como opuestos a negros, blancos, rojos o amarillos)? ¿Porqué?*

Suponte que el científico de la expedición descubre un elemento muy raro llamado floridium. Este elemento calentado a muy alta temperatura arde con una llama verde. *¿Qué porcentaje de todas las muestras de floridium encontradas en la isla esperas que ardan con una llama verde?*

Suponte que la muestra de floridium conduce la electricidad. *¿Qué porcentaje de todas las muestras de floridium encontradas en la isla esperas que conduzcan la electricidad?*

*2.* Resuelve el problema anterior pero suponiendo que encuentras tres ejemplares de piorrones, que son azules y anidan en eucaliptus los tres; encuentras tres hombres nativos que son gordos y de color marrón, los tres; y encuentras tres muestras de floridium que arden con llama verde y conducen la electricidad, las tres muestras.

*3.* Resuelve el mismo ejercicio pero ahora suponiendo que encuentras 20 ejemplares de cada ( piorrones, nativos y floridium).

*4.* Juan es un hombre de 33 años, muy reservado e introvertido, siempre servicial pero con poco interés por la gente o por el mundo real. Con un carácter tranquilo y ordenado, necesita el orden y la estructura y es muy meticuloso.

Ordena las siguientes ocupaciones de más probable a menos probable, como profesión de Juan: agricultor, vendedor, piloto de líneas aéreas, bibliotecario, médico.

*¿Qué criterio sigues, o en qué te basas para hacer la clasificación?*

*5.* Durante las vacaciones, Luis decidió viajar hasta Vigo para visitar a algunos de sus parientes y amigos. Poco después de Benavente, paró en una gasolinera y entró en la tienda para comprar un mapa de carreteras. Allí, en una esquina, había dos máquinas tragaperras. Luis las había visto muchas veces, pero nunca había jugado con ninguna. Fué hacia ellas, y estuvo examinándolas, tratando de imaginar cómo funcionaban. Un anciano que estaba sentado cerca de las máquinas le habló. «No hay ningún sistema para ganar con estas máquinas. Es cuestión de suerte. Usted ponga una moneda, tire de la palanca y tenga esperanzas de ganar. Pero déjeme decirle algo: en algunas máquinas, es más fácil perder que en otras. Esto es porque los dueños pueden cambiarles el mecanismo de manera que se pierde más fácilmente. ¿Ve esas dos máquinas? La de la izquierda le da a usted alguna oportunidad de ganar, pero en la de la derecha perderá mucho más frecuentemente. Hágame caso, he estado jugando con ellas durante años». El anciano se levantó y salió de la gasolinera.

Luis estaba muy intrigado después de esta conversación por las dos máquinas tragaperras, así que jugó con la máquina de la izquierda un par de minutos. Perdió aproximadamente el doble de veces de las que ganó. «Humm...»-se dijo-»El hombre dijo que había posibilidades de ganar en la máquina de la izquierda. Debía de estar equivocado». Entonces probó a jugar otro par de minutos con la máquina de la derecha y terminó ganando más veces que perdió. Luis concluyó que el hombre estaba equivocado sobre las probabilidades de ganar en las máquinas y que verdaderamente, la máquina de la derecha daba más premios que la de la izquierda.

Comenta las conclusiones de Luis y su razonamiento. *¿Estás de acuerdo con él? Explica tu respuesta.*

6. La familia Suarez había decidido hace mucho tiempo que a la hora de cambiar su coche se comprarían lo que ellos llamaban «uno de esos coches suecos sólidos, seguros y construidos para durar», un Volvo o un Saab. Se les acaba de estropear definitivamente el viejo coche y necesitan con urgencia uno nuevo. Así que rápidamente consiguieron la revista *Informe del consumidor* donde encontraron que los expertos consideraban ambos coches como muy buenos, aunque el Volvo quizá destacaba en algunos aspectos. Además los lectores de *Informe del consumidor* que poseían un Volvo se quejaban en menos cartas de problemas mecánicos que los dueños de un Saab. Estaban a punto de ir a comprar un Volvo cuando recordaron que dos amigos suyos tenían un Saab y otro tenía un Volvo. El señor Suarez los llamó, y los dos poseedores de un Saab le comentaron que habían tenido pequeños problemas mecánicos pero nada serio. El dueño del Volvo explotó cuando le preguntó sobre su coche: «Primero el... inyector informatizado de gasoil se estropeó: fueron 25000 pts. Después fue la caja de cambios. Hubo que cambiarla. Después la transmisión y el embrague. Al final, lo vendí con tres años.»

   Dado que los Suarez van a comprarse hoy un Volvo o un Saab, *¿qué coche crees que deberían elegir? ¿Por qué?*

7. David es un estudiante de COU que está planificando su ingreso en la Universidad. Tiene un expediente académico excelente en el Bachillerato, y ha sido admitido en los dos centros de estudio que solicitó: un pequeño Instituto

Superior de Artes y una Universidad. Ambos centros estan bastante igualados en cuanto al prestigio y al costo de los estudios y estan situados en atractivas ciudades de la costa, a distancias similares de su casa. David tiene amigos mayores que él en ambos sitios, todos estudiantes brillantes como David y con intereses similares. Los amigos del instituto de artes le comentaron que a ellos les gustaba mucho el sitio, y que lo encontraban muy interesante. Los amigos en la Universidad le dijeron que tenían muchas quejas tanto a nivel personal como con respecto a la educación. David pensó inicialmente en ir a la Escuela de Artes liberales pero después decidió que visitaría ambos sitios antes. No le gustó lo que vió en la Escuela de Artes: algunas de las personas que conoció le parecieron frías y desagradables; un profesor con el que coincidió brevemente le pareció áspero y poco competente; y no le gustó el ambiente del campus. Pero sí le gustó lo que vió en la Universidad: algunas personas que conoció parecían vitales, entusiastas, agradables; conoció a dos profesores que pusieron un interés personal en él; y volvió a casa con una agradable impresión del campus.

*¿Qué escuela debería escoger David, y por qué?* Intenta analizar los argumentos de ambos lados, y explica cuáles de ellos son más fuertes.

# UNIDAD 6

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Material |
| --- | --- | --- | --- |
| Ideas intuitivas de los alumnos sobre el concepto de esperanza matemática y la toma de decisiones con riesgo. | En grupos, resuelven la hoja de trabajo 13. | Presenta la hoja de trabajo 13. Fomenta las respuestas de los alumnos sin comentar su corrección. | Urna con 2 bolas blancas y 3 negras. |
| Intercambio de las ideas de los alumnos. | Una persona de cada grupo informa a la clase y luego hay discusión general. | Resume las respuestas y sintetiza las ideas compartidas por los alumnos. | |
| Realización de simulaciones y experiencias. | En grupos, resuelven la hoja de trabajo 14. | Presenta la hoja de trabajo n.º 14. Reparte el material. | |
| Revisión de las ideas de los alumnos. | Discuten y exponen sus cambios de ideas, debido al resultado de las simulaciones. | Fomenta la discusión y la explicación de los cambios en las ideas. | |

| **Foco de atención** | **Actividades de los alumnos** | **Actividades del profesor** | **Contenidos** |
|---|---|---|---|
| Los conceptos formales de variable aleatoria, esperanza matemática, varianza. | Toman apuntes. | Explica los contenidos, repasando los ejercicios de las hojas de trabajo 13 y 14. Comenta el concepto de juego equitativo y la aversión por el riesgo, como conducta sistemática de los sujetos. | Variable aleatoria.<br>Distribución de probabilidad.<br>Esperanza matemática.<br>Criterio de decisión Bayes.<br>Juegos equitativos.<br><br>La esperanza matemática es un operador lineal E(X+Y)=E(X)+E(Y) siempre. - E(X*Y)=E(X)*E(Y) cuando X e Y son independientes. |
| Aplicación de los conceptos estudiados. | Ejercicios para casa: la hoja de trabajo 15, resuelta individualmente. | Resuelve los ejercicios para casa, una vez realizados por los alumnos. | La varianza, la desviación típica.<br><br>$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$ |

# HOJA DE TRABAJO 13

*1.* Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas: Lanzan dos dados consecutivamente y calculan la diferencias de puntos entre el mayor y el menor:

- *Si resulta una diferencia de 0,1,o 2, entonces Carmen gana una ficha.*
- *Si resulta 3,4,o 5, es Daniel quien gana una ficha.*

El juego comienza con un total de 20 fichas y termina cuando no quedan más *¿Te parece que este juego es equitativo? Si tuvieras que jugar ¿Cuál jugador preferirías ser?*

*2.* Se cambian las reglas del juego anterior del siguiente modo:

- *Si resulta una diferencia de 0,1,ó 2 entonces Carmen gana una ficha.*
- *Si resulta una diferencia de 3,4,ó 5 entonces Daniel gana dos fichas.*

*¿Te parece que este juego es equitativo? Si tuvieras que jugar ¿Cuál jugador preferirías ser?*

*3.* Abel posee un capital de 1000.000 pts, mientras que Caín de 100.000.000 pts.Éste propone el siguiente juego: Se lanza una moneda, si se obtiene cara, Abel pierde 1.000.000, y si sale cruz, gana 10.000.000. *¿Crees que Abel debe jugar?*

*4.* Caín que es agente de seguros, propone a Abel que asegure su capital, que es de 1.000.000 pts, con una póliza anual que sólo cuesta 1.000 pts. La probabilidad de que el capital de Abel se destruya (por robo, o por pérdida, o cualquier otra causa) es de 0,0005 *¿Crees que Abel debe asegurar su capital?*

*5.* Consideremos una clínica que analiza sangre en busca de una enfermedad que se sabe afecta a una persona de cada 100. Los pacientes acuden a la clínica en grupos de 50 y el director se pregunta si en vez de analizar de cada uno por separado, no le saldría más a cuenta mezclar las 50 muestras y analizarlas en conjunto. Si la muestra total da negativo, podría declarar sanos a los 50, y en caso contrario habría de analizar la sangre de cada miembro del grupo por separado. *¿Cuál es el número esperado de análisis que habría que realizar en caso que se decidiera adoptar este procedimiento?*

*6.* Una urna contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Se extraen las bolas una tras otra sin reposición, por cada bola blanca el jugador recibe 1 pts; por cada bola negra paga 1 pts. El juego es, evidentemente, perjudicial, pues el jugador pierde en cada partida 1 pts.Supongamos que el jugador puede detener el juego cuando quiera. *¿Cuál es entonces, la mejor estrategia y cual es el valor esperado de la ganancia?*

## HOJA DE TRABAJO 14

*1.* Practica con un compañero 5 veces el juego 1) de la hoja de trabajo anterior y anota los resultados en una tabla como la siguiente:

| Diferencia de puntos | | Recuento | Núm. de veces | Frecuencia relativa |
|---|---|---|---|---|
| gana C | 0 | | | |
| | 1 | | | |
| | 2 | | | |
| gana D | 3 | | | |
| | 4 | | | |
| | 5 | | | |
| Total de lanzamientos | | | 100 | |

A la vista de estos resultados, *¿confirmas tu primera opinión sobre si tu juego es justo o no?*

*2.* Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Enumera todos los resultados posibles que puedes obtener al lanzar dos dados.

b) Los sucesos simples que componen el suceso

*A= «La diferencia de puntos es 5»* son los siguientes:
A={(1,6),(6,1)}

Enumera todos los elementos de los siguientes sucesos:

*B=»La diferencia es 4 puntos»*
*C=»La diferencia es 3 puntos»*
*D=»La diferencia es 2 puntos»*
*E=»La diferencia es 1 punto»*
*F=»La diferencia es 0 puntos»*

c) Enumera los elementos que componen los siguientes sucesos:

$B \cup C$; $B \cup F$; $E \cup D$.

d) Expresa el suceso «gana Carmen»como unión de alguno de los sucesos A, B, C, E, F.

e) Expresa el suceso «gana Daniel» como unión de alguno de los sucesos citados.

f) Asignar una probabilidad a los sucesos siguientes:

*«La diferencia de puntos es 0»*
*«La diferencia de puntos es 1»*
*«La diferencia de puntos es 2»*

g) *¿Cual es la probabilidad de que Carmen gane el juego?*

h) *¿Cuál es la probabilidad de que Daniel gane el juego?*

*3. ¿Que relación hay entre las probabilidades que se calculan en f) y en g) ¿Por qué hay esa relación?*

*4.* Con la modificación de las reglas que se propone en el ejercicio 2 de la hoja de trabajo anterior, el juego se convierte en equitativo, *¿Por qué?*

*5.* Te proponen practicar un juego con las siguientes reglas:

- *Lanzar 3 monedas;*
- *Si salen 2 caras o 2 cruces entonces gana A una ficha;*
- *Si salen 3 caras o 3 cruces entonces gana B una ficha;*
- *Repetir hasta agotar las 20 fichas con que se comienza el juego;*
- *Gana el jugador que consigue más fichas.*

*¿Prefieres ser el jugador A o el B?* Razona la respuesta. Si no estás seguro practica este juego con un compañero 5 veces.

Enumera todos los resultados elementales distintos que han ocurrido. *¿Son todos los posibles o existe alguno más?.*

Cuenta el número de veces que ha ocurrido cada suceso y construye un diagrama de barras para representar los resultados.

*6.* Comprobar la estrategia de cada uno, simulando el ejercicio 6 de la hoja de trabajo anterior.

# HOJA DE TRABAJO 15

*1.* Se lanza 3 veces una moneda. El resultado C supone ganar. Define la distribución de probabilidad de la variable aleatoria ganancia y represéntala en un histograma.

*2.* Calcula el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria anterior.

*3.* Se lanza dos veces un dado normal. Sobre esa experiencia aleatoria se pueden definir diferentes variables por ejemplo:

*X: número obtenido en el 1$^{er}$ lanzamiento.*

*Y: suma de los números obtenidos en el 1$^{er}$ lanzamiento y en el 2º lanzamiento.*

Define tú, otras 5 variables aleatorias diferentes a X e Y.

*4.* Calcula el espacio muestral, la distribución de probabilidad, el histograma y el valor esperado de la variable Y.

## UNIDAD 7

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Contenidos |
| --- | --- | --- | --- |
| Introducción a la distribución binomial con una actividad probabilística estándar: el lanzamiento de monedas. | Realizan individualmente la hoja de trabajo 16. | Anima a que los alumnos hagan predicciones. | |
| | Realizan en grupo el experimento para tener masa de datos pero luego cada uno trabaja por su cuenta. Cada alumno debe llegar hasta donde pueda en la realización del trabajo. | Controla la realización del experimento. | |
| | Debaten y comparan los resultados conseguidos. | Modera el debate. Presenta la distribución binomial como el modelo teórico. | |
| Presentación de la distribución binomial. | Toman apuntes. | Basándose en la hoja de trabajo 16, explica los contenidos correspondientes. | Distribución de probabilidad discreta. Distribución de probabilidad binomial. |
| Aplicación de los nuevos conceptos a una tarea donde P(éxito) ≠ 0,5. | Realizan individualmente la hoja de trabajo 17. | Controla la puesta en común de los resultados y marca las semejanzas y diferencias de la tarea con chinchetas y de la tarea con monedas. | Media de la binomial. Varianza de la binomial. |

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Material |
|---|---|---|---|
| Utilización de la distribución binomial en situaciones cotidianas de toma de decisiones. | Realizan en grupos la hoja de trabajo 18. | Presenta los dispositivos o aparatos de simulación:<br>- Dados.<br>- Tablas de $n^{os}$ aleatorios.<br>- Ordenador. | Dados Icosaédricos.<br>Tabla de números aleatorios.<br>Ordenador con un programa de hoja de cálculo. |
| | | Explica las técnicas de simulación. | |
| Utilidad y metodología de las simulaciones. | Puesta en común de los resultados conseguidos. | Interpreta los resultados. - Los relaciona con la distribución binomial. | |

# HOJA DE TRABAJO Nº 16

*1.* Escribe tu conjetura o predicción de los siguientes sucesos:

Si lanzas 6 monedas, *¿Cuál es la probabilidad de que consigas:*

*a) Seis caras.*
*b) Cinco caras.*
*c) Cuatro caras.*
*d) Tres caras.*

*2.* Realiza el siguiente experimento en grupos de seis alumnos:

Lanzad 6 monedas. Registrad el número de caras. Repetid el lanzamiento de las seis monedas, 50 veces. Usad los datos conseguidos para responder cada una de las siguientes cuestiones:

*a) ¿Cuál es la probabilidad de conseguir seis caras?. ¿Cinco caras?. ¿Cuatro caras?. ¿Tres caras?. ¿Dos caras?. ¿Una cara?. ¿Cero caras?.*
*b) ¿Cuál es la probabilidad de conseguir al menos una cara?. ¿Al menos dos caras?.*

*3.* Desarrolla un modelo matemático para encontrar la probabilidad teórica de los resultados de lanzar 6 monedas al aire: Primero haz una lista de todos los resultados posibles al lanzar 6 monedas; Segundo, determina una manera de asignar una probabilidad a cada resultado.

- *¿Cuál es la probabilidad teórica para conseguir al menos una cara?. ¿Al menos dos caras?.*
- *¿Cuáles son las ideas de las que partes para establecer tu modelo matemático?.*

*4.* Compara las probabilidades empíricas o experimentales del ejercicio 2) con las probabilidades teóricas del ejercicio 3). ¿Coinciden: mucho o poco?.

Haz un gráfico para comparar las probabilidades experimentales (observadas) de cero caras, una cara,..., seis caras, en 50 tandas de lanzamientos de 6 monedas, con las probabilidades teóricas.

*5. ¿Cuáles fueron las ideas de las que partiste al realizar el experimento de lanzar 6 monedas al aire?. ¿Cambias tus predicciones hechas en el ejercicio 1)?. ¿Por qué?.*

*6.* Comenta cualquier observación o reacción que se te ocurra en relación a esta actividad que acabas de realizar.

*7.* Compara tus resultados con los conseguidos por tus compañeros.

## HOJA DE TRABAJO Nº 17

*1.* a) Escribe tu conjetura o predicción para la probabilidad de que una chincheta caiga de cabeza, cuando la lanzas al aire.

b) Lanza una chincheta al aire 75 veces y anota las veces que cae de cabeza y las veces que cae de punta.

c) En base a los datos experimentales, calcula la probabilidad de que una chincheta caiga de cabeza y la probabilidad de que caiga de punta.

*2.* Haz esta parte de la actividad en grupo de 3 personas: cada alumno del grupo ha de tener una chincheta de diferente color. Usa las probabilidades calculadas en el ejercicio 1) para determinar las probabilidades de que:

*i) La chincheta roja caiga de cabeza.*
*ii) La chincheta azul caiga de cabeza.*
*iii) La chincheta dorada caiga de cabeza.*

Lanzad las 3 chinchetas juntas y registrad resultados. Antes de realizar este experimento, escribe tu predicción para cada una de las siguientes probabilidades:

*a) Todas las chinchetas caen de cabeza.*
*b) Ninguna chincheta cae de cabeza*
*(¿hay otro modo de expresar este mismo suceso?)*
*c) Al menos una chincheta cae de cabeza.*
*(¿hay otro modo de expresar este mismo suceso?)*
*d) La chincheta roja cae de cabeza.*
*e) Dos chinchetas caen de cabeza y una cae de punta.*

Lanzad ahora las 3 chinchetas juntas, 60 veces. Registrad los datos como ternas, por ejemplo C P P significa chincheta roja cae de cabeza, chincheta azul y chincheta dorada caen de punta.

Usa los datos que habéis reunido para calcular las probabilidades experimentales a), b), c), d), e), de este ejercicio. Compara estos cálculos a tus predicciones anteriores. *¿Alguna sorpresa? ¿Que ideas tenías al hacer el experimento?, ¿Que ideas tienes para mejorar este experimento?*

*3.* a) Desarrolla un modelo matemático para asignar probabilidades teóricas a los resultados de este experimento: primero lista todos los posibles resultados del experimento; después, diseña un modo de asignar una probabilidad a cada resultado.

b) Usa tus datos obtenidos en el ejercicio 2) para determinar las probabilidades experimentales de cada uno de los resultados que acabas de listar en 3a). Compara esas probabilidades empíricas con las probabilidades teóricas dadas por tu modelo matemático. Haz un gráfico para comparar tus probabilidades experimentales con las probabilidades teóricas. ¿Se parecen los 2 gráficos?

c) *¿De que ideas o hipótesis has partido para diseñar el modelo matemático?. ¿El modelo para el experimento con chinchetas difiere del modelo para el experimento con monedas?. ¿En que sentido difiere, si es que difiere?. ¿Hay algún parecido entre ambos experimentos?*

4. Comenta cualquier observación, reacción o cuestión que tengas en relación a esta actividad.

5. Compara tus resultados con los conseguidos por tus compañeros.

## HOJA DE TRABAJO Nº 18

1. Suponte que estás siguiendo un curso de estadística y tienes un examen cada semana de 10 preguntas. Tu media, durante los meses que llevas siguiendo el curso, es de 6 contestaciones correctas. La última semana, tú has estudiado con un amigo y conseguiste 9 contestaciones correctas. *¿Te ayudó el estudiar con un amigo?*

2. Suponte que Ana, una amiga tuya jugadora de baloncesto, te dice que con su viejo método de tirar tiros libres, tiene un porcentaje de acierto de 60%. Le acaban de enseñar un método nuevo de tirar y con él ha conseguido 9 canastas en sus 10 primeros lanzamientos. *¿Debería aceptar que el método nuevo realmente es mejor que el viejo?*

3. Diseña un experimento con dados que te permitan simular el ejercicio 2).

4. Usa una tabla de números aleatorios, para realizar la misma simulación.

5. Desarrolla y usa un programa de ordenador con un generador de números aleatorios para realizar el experimento 1000 veces y calcular el porcentaje de ensayos con éxitos.

6. *¿Hay alguna distribución de probabilidad teórica que se puede usar para calcular el porcentaje de ensayos con éxito, sin necesidad de experimentación?. ¿Cómo se haría?*

7. A la vista de los resultados que has obtenido. *¿Podrías aconsejar a Ana?*

## UNIDAD 8

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor | Contenidos |
|---|---|---|---|
| Presentar la distribución normal como una aproximación de la binomial que agiliza el cálculo de probabilidades. | Realizan la hoja de trabajo 19 en grupos.<br>- Hay una puesta en común para discutir resultados. | Modera la puesta en común. | Distribución de probabilidad continua. Ecuación de la función de densidad normal aprovechando los ejercicios 7 y 8. Propiedades de la curva normal. N(0,1) y N($\mu$,$\sigma$). Tipificación de variables aleatorias. |
| Definición formal de la distribución normal. | Toman apuntes. | Presenta la normal, aprovechando los ejercicios 5 y 6, como una distribución continua que permite aproximar una distribución binomial con n grande. Usa la aproximación normal para resolver los ejercicios 1,2,3,4. | Interpretación de las probabilidades de los sucesos:<br>$Z \leq z$<br>$Z \geq z$<br>$\lvert Z \rvert \leq z$<br>$\lvert Z \rvert \geq z$<br>en términos de áreas, donde Z está tipificada:<br>$P(\lvert Z \rvert \leq 1) = 0.6827$<br>$P(\lvert Z \rvert \leq 2) = 0.9515$<br>$P(\lvert Z \rvert \leq 3) = 0.9973$<br>- Distribución normal.<br>- Ejemplos reales de distribuciones normales. |

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor |
| --- | --- | --- |
| Cálculo de probabilidades en la Normal (0,1) y en la Normal ($\mu,\sigma$). Manejo de tablas. Aplicación del teorema central del límite. | Resuelven individualmente la hoja de trabajo 20. Hay una puesta en común. Corrigen la hoja de trabajo 20 | Actúa de coordinador y moderador. Corrige los ejercicios en la pizarra. Insiste en el interés de la distribución normal por 3 motivos: a) La gran variedad de fenómenos que se ajustan, al menos aproximadamente, a una distribución normal. b) El teorema central del límite, que permite utilizar la distribución normal para estimar la media de una población, sea cual sea la distribución de partida, con tal de tomar una muestra del tamaño suficiente. c) Su utilidad en la inferencia estadística. |
| Introducción a la inferencia estadística. | Resuelven en grupo la hoja de trabajo 21. Hay una puesta en común. Toman apuntes | Modera. Presenta intuitivamente 3 conceptos claves de la inferencia estadística: - tamaño de la muestra. - intervalo de confianza. - test de hipótesis. Resolviendo los problemas de la hoja 21. |

## HOJA DE TRABAJO 19

*1.* Se lanza 20 veces una moneda. Con 9, 10 u 11 éxitos se gana un premio. Calcula la probabilidad de ganar el premio.

*2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el «6» al menos 1100 veces, cuando se lanza 6000 veces un dado?.*

*3. ¿Cuál es la probabilidad de que, al tirar 6000 veces un dado, el número de «seises» se desvie al menos 50 de su esperanza matemática 1000?.*

*4.* Se lanza 10000 veces una moneda. *¿Cuál es la probabilidad de que el número de éxitos se desvie más de un 1% de su esperanza matemática 5000?.*

*5.* Construye el histograma de la distribución binomial B(10,0.6) y representa sobre esa misma figura, una campana de Gauss, que se ajuste lo más posible al histograma.

*6.* Haz lo mismo para la binomial B(12, 1/3). Te doy calculadas las probabilidades:

| | | |
|---|---|---|
| P(0) = 0.008 | P(4) = 0.238 | P(8) = 0.015 |
| P(1) = 0.046 | P(5) = 0.191 | P(9) = 0.003 |
| P(2) = 0.127 | P(6) = 0.111 | P(10) = 0.000 |
| P(3) = 0.212 | P(7) = 0.048 | P(11) = P(12) = 0.000 |

*7.* Dibuja la función

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Indica sus propiedades que te parezcan más relevantes.

*8. ¿Que relación hay entre las gráficas de las funciones*

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad ; \quad y=e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-6}{2.4}\right)^2} \quad ?$$

# HOJA DE TRABAJO 20

*1.* En la distribución N(0,1) calcular las siguientes probabilidades:

*a)* $P(Z > 2.1)$
*b)* $P(Z > -1.23)$
*c)* $P(-1 < Z < 1)$

*2.* En una distribución normal N(100,5), calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 97 y 100.

*3.* Los errores aleatorios de una cierta medición obedecen a una ley normal con una desviación típica de 1 mm. y esperanza matemática de 0. Hallar la probabilidad de que de dos observaciones independientes el error, por lo menos en una de ellas, no supere el valor absoluto de 1.28 mm.

*4.* La vida en horas de un cierto tubo electrónico es una variable aleatoria que sigue una distribución N(280, s). *¿Cuánto debe valer s, si se sabe que la probabilidad de que uno de tales tubos tenga una duración comprendida entre 240 y 320 horas es 0.8?.*

*5.* En un estanque de una piscifactoria se ha tomado una muestra de 3000 truchas y se ha medido en cm, la longitud de las mismas, resultando que se distribuyen según la N(26,7),

Calcula los valores

$$\bar{x} - 3\sigma, \quad \bar{x} - 2\sigma, \quad \bar{x} - \sigma, \quad \bar{x} + \sigma, \quad \bar{x} + 2\sigma, \quad \bar{x} + 3\sigma$$

y reparte las 3000 truchas en esos intervalos.

*6.* Una determinada empresa produce pilas para juguetes. Como no tiene un proceso de fabricación muy depurado, resulta que el 70% de las pilas producidas tienen una duración aproximada de unas 1000 horas pero hay un 30% de pilas que se agotan en 5 minutos aproximadamente. Sin someterlas a ningún control de calidad, y sin separar unas de otras se empaquetan en cajas de 36 pilas. *¿Cuál será la vida media de las pilas de una caja?. ¿Qué tipo de distribución de probabilidad seguirá esta variable?*

## HOJA DE TRABAJO 21

*1.* Se quiere estimar la proporción de madrileños que tienen el grupo sanguíneo O, con una precisión de 2 centésimas. *¿Cuál es el tamaño de la muestra que se debe utilizar, si queremos una certeza en nuestra estimación del 95%?.*

*2.* Para estimar la proporción p de madrileños con el grupo sanguíneo O, se examina a 200 individuos, con 80 éxitos. La mejor estimación de p es $\hat{p} = 80/200 = 0.4$. Se desea determinar para p un intervalo de confianza con una certeza del 95.45%. Es decir, se trata de buscar dos números $p_1$ y $p_2$, tales que $p_1 < p < p_2$ sea verdadero con una probabilidad del 95.45%.

*3.* Se necesitan 400 tornillos. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es 0.1. *¿Cuántos se deben pedir para recibir suficientes tornillos no defectuosos, con una certeza del 99%?.*

*4.* Parece lógico suponer que el cumpleaños de las personas no guarda ninguna relación con el día de su muerte. En este sentido parece razonable establecer la hipótesis de que aproximadamente el 25% de las muertes que se producen en una comunidad determinada tienen lugar en el trimestre siguiente al cumpleaños del difunto y el otro 75% en los tres trimestres restantes.

Una muestra al azar de 747 reseñas cronológicas aparecidas en los periódicos de una cierta ciudad durante el año 1977, indicaba que el 46% de las defunciones consideradas se produjeron en los tres meses siguientes al cumpleaños. *¿Podemos rechazar la hipótesis establecida?*

## UNIDAD 9

| Foco de atención | Actividades de los alumnos | Actividades del profesor |
|---|---|---|
| Revisar el cambio de ideas sobre el azar, en los alumnos. | - Cada alumno ha de redactar un escrito respondiendo a las preguntas:<br>*¿Hay leyes del azar?*<br>*¿Cuáles?*<br>*¿Se pueden medir los fenómenos aleatorios?*<br>*¿Cómo?* | Plantea las preguntas. |
| | - Cada alumno ha de redactar un escrito, indicando explícitamente:<br>- Ideas que sean iguales en los dos escritos.<br>- Ideas que hayan cambiado de un escrito a otro.<br>- Ideas que hayan aparecido en el segundo escritoque no estaban en el primero.<br>- Ideas que estaban en el primer escrito y que no están en el segundo. | Entrega a cada alumno su ejercicio del primer día del curso con las respuestas a las mismas preguntas. |

## *REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS*

Ahlgren, A. y Garfield, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. En R.K. Kapadia y M.Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education,* (pp. 107-134). Amsterdam: Kluwer.

Aiken, L.R. (1976). Update on attitudes and other affective variables in learning Mathematics. *Review of Educational Research, 46*(2), 293-311.

Anderson, J.R. (1990). *The adaptative character of thought*. Hillsdale, NJ: LEA

Aparicio, J.J. (1992). La psicología del aprendizaje y los modelos de diseño de la enseñanza: la teoría de la elaboración. *Tarbiya, 1-2*, 19-44.

Austin, J.D. (1974). An experimental study of effects od three instructional methods in basic probability and statistics. *Journal for Research in Mathematics Education, 5*, 146-154.

Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1978). *Educational psychology. A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart y Winston. Versión castellana: *Psicología educativa*. México: Trillas, 1983.

Bar-Hillell, M. (1983). The base-rate fallacy controversy. En R.W. Scholz (Ed), *Decisions Making under Uncertainty*. Amsterdam: Elsevier.

Bar-Hillell, M. y Falk, R. (1982). Some teasers concerning conditional probabilities. *Cognition, 11*, 109-122.

Batanero, C. (1995). Probabilidad y Estadística. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 5.*

Bell, A. (1987). Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas. En A. Alvarez (Ed.), *Psicología y educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica*. Madrid: VISOR-MEC.

Beth, E.W. y Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*, Dordrecht: Reidel.

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. En R.Kapadia y M.Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 169-212). Amsterdam: Kluwer.

Borovcnik, M. (1988). Revising probabilities according to new information: A fundamental stochastics intuition. En R.Davison y J.Swift (Eds.), *The Proceeding of the second international conference on teaching statistics*. Victoria, B.C.: University of Victoria.

Borovcnik, M. y Bentz, H.J. (1991). Empirical research in understanding probability. En R.Kapadia y M.Borovnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 73-105). Amsterdam: Kluwer.

Borrás, E. y Morata, M. (1989). El azar y su aprendizaje. *Suma, 3*, 21-27.

Cohen, J., Hansel, M. (1956). *Risk and Gambling*, New York: Philosophical Library Inc.

Condorcet, J.A.C. (1974). *Mathématique et societé*. París: Hermann.

Corral, A. (1994). *Capacidad mental y desarrollo*. Madrid: Visor.

Corral, A. y Tejero, L. (1986). Del pensamiento formal a la comprensión de la formalización matemática de la combinatoria, según dos organizaciones formales diferentes. *Revista de Psicología general y aplicada, 41*(6), 1149-1161.

Driver, R. (1988). Un enfoque constructivista para el desarrollo del currículo en ciencias. *Enseñanza de las Ciencias, 6*(2), 109-120.

Engel, A. (1971). Teaching probability in intermediate grades. *International Journal of Mathematical Educational*, 2(3), 15-25.

Engel, A. (1988). *Probabilidad y estadística*. Vol. I y II. Valencia: Mestral.

Estepa, A. (1995). Consideraciones sobre la enseñanza de la asociación estadística. *UNO, 5*, 69-79.

Falk, R. (1983). Experimental models for resolving probabilistics ambiguities. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 319-325) Tel-Aviv, Israel.

Falk, R. (1986). Misconceptions of statistical significance. *Journal of Structural Learning, 9*, 83-96.

Falk, R. (1988). Conditional probabilities: Insights and difficulties. En R. Davison y J. Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference in Teaching Statistics*. Victoria B.C.: University of Victoria.

Falk, R. (1989). The judgements of coincidences: Mine versus yours. *American Journal of Psychology, 102*, 447-493.

Falk, R. y Bar-Hillel, M. (1983). Probabilistic dependence between events. *Two-Year-College Mathematics Journal, 14*, 240-247.

Falk, R. y C. Konold (1991). The psychology of learning probability. En F.S. Gordon y S.P. Gordon, *Statistisc for the twenty-first century*, Mathematics Association of America.

Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. México: Limusa-Wiley.

Finetti, B. de (1974). The true subjective probability problem. En C.A. Stael Von Holstein (Ed.), *The concept of probability in psychological experiments*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 11-24.

Fischbein, E., Nello, M.S. y Marino, M.S. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in chidren and adolescents. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 523-549.

Fischer, R. (1988). Didactics, mathematics, and communication. *For the Learning of Mathematics 8*(2), 20-30.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel. Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Gairín, J. (1987). *Las actitudes en educación*. Barcelona: PPU.

Garfield J.B. y Ahlgren A. (1988a). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*, 44-63.

Garfield J.B. y Ahlgren A. (1988b). Difficulties in learning probability and statistics. En R. Davison y J.Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria B.C.: University of Victoria.

Garofalo, J. y Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive, monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 163-179.

Glaymann, M. y Varga, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela.* Barcelona: Teide.

Gödel, K. (1944). Russell's Mathematical Logic. En P.A. Schilpp (Ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell.* Northwestern University Press.

Gödel, K. (1981). Sobre sentencias formalmente indecidibles de "Principia Mathematica" y sistemas afines. *Obras Completas*. Madrid: Alianza. (Original de 1931).

Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, Ma. J.(1987). *Azar y probabilidad, Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis, S.A.

Green, D.R. (1982). *Probability concepts in 11-16 year old pupils*. Report Loughborough University of Technology.

Green, D.R. (1987). Probability concepts. Putting research into practice. *Teaching Statistics, 9*(1), 8-14.

Green, D.R. (1988), Children's understarding of radomness. Report of a survey of 1600 children aged 7-11 years. En R.Davison y J.Swift (Eds.), *The Proceeding of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria B.C. University of Victoria.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability.* New York: Cambridge University Press.

Hacking, I. (1990). *The taming of chance*. New York: Cambridge University Press.

Hawkins, A.S. y Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability: a psychological and pedagogical review. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 349-377.

'Hewson, P.W. (1993). El cambio conceptual en la enseñanza de las ciencias y la formación de profesores. En C. Palacios, D. Ansoleaga y A. Ajo (Eds.), *Diez años de investigación e innovación en enseñanza* (pp. 331-351). Madrid: CIDE.

Hogarth, R.M. (1987). *Judgement and choice: the psychology of decision.* Chichester: Wiley.

Kahneman, D. Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases.* Nueva York: Cambridge University Press.

Kapadia, R. (1988). Didactical phenomenology of probability. En R. Davison y J.Swift (Eds.), *The Proceedings of The Second International Conference on Teaching Statistics.* Victoria, B.C.: University of Victoria.

Kapadia, R. y Borovcnik, M. (1991). The Educational perspective. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.). *Chance encounters: probability in education,* (pp. 1-26). Amsterdam: Kluwer.

Kline, M. (1960). *Mathematics: the loss of certainty.* Nueva York: Oxford University Press. Trad castellana de Ruiz Merino; *Matemáticas: la perdida de la certidumbre.* Madrid: Alianza, 1985.

Kolmogorov, A. N. (1976). La teoria de probabilidades. En A. D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov y M.A. Laurentiev (Eds.), *La matemática: su contenido, métodos y significado.* (pp. 269-309). Madrid: Alianza Editorial.

Konold, C. (1991). Understanding students'beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Eds.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Amsterdam: Kluwer.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*, Cambridge: Cambridge University Press.Lakatos, I. (1978). *The methodology of scientific research programmes: philosophical papers. Vol 1.* Cambridge: Cambridge University Press. Trad. castellana de J.C. Zapatero: La metodología de los programas de investigación científica. Madrid: Alianza, 1983.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza Universidad.

Laplace, P.S. de (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades.* Madrid: Alianza Editorial. (Original de 1814).

Lecoutre, M. y Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Etude d'une situation aleatorie. *Educational Studies in Mathematics,* 19(3), 357-368.

León, O.G. (1994). *Análisis de decisiones. Técnicas y situaciones aplicables a directivos y profesionales.* Madrid: McGraw-Hill.

Mayer, R.E. (1986). *Thinking, problem-solving and cognition.* Nueva York: W.H. Freeman and Company. Trad. castellana de G. Baravalle: *Pensamiento, solución de problemas y cognición.* Barcelona: Paidós.

McLeod, D.B. y Adams, V.M. (1989). *Affect and mathematical problem solving. A new perspective.* New York: Springer-Verlag.

MEC (Ministerio de Educación y Ciencia) (1989). *Diseño curricular base.* Madrid: MEC

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1989). *Curriculum and evaluation standars for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Newell, A. y Simon, H.A. (1972). *Human problem-solving.* Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice Hall.

Nisbett,R., Krantz, D.H., Jepson, C. y Kunda, Z. (1983). The use of statistical heuristic in everyday inductive reasoning. *Psychological Review, 90*, 339-363.

Ojeda, A.M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO, 5*, 37-44.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: MORATA/MEC.

Pascual-Leone,J. (1980). Constructive problems for constructive theories the current relevance of Piaget's work and a critique of information-processing simulation psychology. En R. Kluwe y H. Spada (Eds.), *Developmental models of thinking.* Nueva York: Academic Press. Trad castellana de J.I. Pozo: Problemas constructivos para teorías constructivas: la relevancia actual de la obra de Piaget y una crítica a la psicología basada en la simulación del procesamiento de información. En M. Carretero y J.A. Garcia Madruga (Eds.), *Lecturas de psicología del pensamiento.* Madrid: Alianza Psicología, 1984.

Paulos, J.A. (1990). *El hombre anumérico.* Barcelona: Tusquets.

Payne, J.W.; Bettman, J.R. y Johnson, E.J. (1992). Behavioral decision research: A constructive processing perspective. *Annual Review of Psychology, 43*, 87-131.

Payne, J.W.; Bettman, J.R. y Johnson, E.J. (1993). *The adaptive decision maker.* New York: Cambridge University Press.

Penrose, R. (1991). *La nueva mente del emperador.* Madrid: Mondadori.

Perez Echeverria, M.P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico.* Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Madrid: Siglo XXI.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant.* Paris: P.U.F.

Poincaré, H. (1979). El azar. En J.R. Newman (Ed.), *Sigma. El mundo de las matemáticas,* (pp. 68-82). Barcelona: Grijalbo.

Pólya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics,* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery.* Nueva York: Wiley.

Pollatsek, A., Lima S., y Well, A.D. (1981). Concepts or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 191-204.

Pollatsek, A., Well, A.D., Konold, C. y Hardiman P.(1987). Understanding conditional probabilities. *Organizational behavior and Human Decision Processes, 40*, 255-269.

Posner, G.J., Strike, K.A., Hewson, P.W. y Gertzog, W.A. (1982). Accommodation of a scientific conception: toward a theory of conceptual change. *Science Education, 66*(2), 211-227.

Pozo, J.I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid: Morata.

Pozo, J.I., Gómez Crespo, M.A., Limón, M. y Sanz Serrano, A. (1991). *Procesos cognitivos en la comprensión de la ciencia: las ideas de los adolescentes sobre la química.* Madrid: CIDE.

Sáenz, C. (1992). La probabilidad. En Grupo Logo (Eds.), *Hoja de cálculo en la enseñanza de las matemáticas en secundaria* (pp. 115-124). Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Sáenz, C. (1995). *Intuición y matemática en el razonamiento y aprendizaje probabilístico.* Madrid: Servicio de Publicaciones de la UAM (tesis doctoral en microfichas).

Sáenz, C. (1998). Teaching Probability for Conceptual Change. *Educational Studies in Mathematics, 35, 3,* 233-254.

Sáenz, C. y García, X. (1980). Un enfoque quasi-empírico da teoría de probabilidades. En Actes VII Jornades Matemàtiques hispano-lusitanes. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Schoenfeld, A.H. (1989). Problem solving in context(s). En R.Charles y E.Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 82-95). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Scholz, R.W. (1991). Psychological research in probabilistic understanding. En R.Kapadia y M.Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education,* (pp. 213-254). Amsterdam: Kluwer.

Shaughnessy, J. M. (1981). Misconceptions of probability: from systematic errors to systematic experiments and decisions. En NTCM (Ed.), *Teaching Statistics and Probability* (pp. 90-99). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M. (1985). Problem solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. En E.Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem-solving. Multiple research perspectives* (pp. 199-214). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: McMillan Publishing.

Simon, H.A. (1967). Motivational and emotional controls of cognition. *Psychological Review, 74,* 29-39.

Simon, H.A. (1981). *The Sciences of the Artificial.* Cambridge, MA: MIT Press, 2nd ed.

Steinbring, H. (1991). The theoretical nature of probability in the classroom. En R.Kapadia y M.Borovcnick (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp.135-167). Amsterdam: Kluwer.

Strike, K.A. y Posner, G.J. (1992). A revisionist theory of conceptual change. En R.A. Duschl y R.J. Hamilton (Eds.), *Philosophy of science, cognitive psychology and educational theory and practice.* New York: State University of New York Press.

Von Winterfeldt, D. y Edwards, W. (1986). *Decision analysis and behavioral research.* Cambridge: Cambridge University Press.

Well, A.D., Pollatsek, A. y Boyce, S. (1990). Understanding the effects of sample size on the mean. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 47,* 289-312.

ISBN 84-7477-739-9
9 788474 777390

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID



EDICIONES DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID