Apuntes de Microeconomía Bidimensional

Richard Watt
Ignacio Moreno

DOCUMENTOS DE TRABAJO
52
UAM EDICIONES

DOCUMENTOS DE TRABAJO

52

Apuntes de Microeconomía Bidimensional

Richard Watt e Ignacio Moreno

UAM EDICIONES

EDICIONES DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

28049 Madrid

Teléfono 91 397 42 33

Fax 91 397 51 69

servicio.publicaciones@uam.es

www.uam.es/servicios/otros/spublicaciones

I.S.B.N.: 84-7477-875-1
Depósito Legal: MU-1835-2003
Diseño de la colección: Francisco Requena de la Riva.
Impresión: Compobell, S.L.

Índice General

Prefacio

Este libro presenta un curso de microeconomía intermedia que pretende proporcionar un puente entre el análisis puramente gráfico y descriptivo de las asignaturas introductorias y el análisis más matemático de las asignaturas avanzadas. Con este fin, el libro presenta la teoría microeconómica utilizando las principales herramientas de las asignaturas introductorias y de las asignaturas avanzadas, esto es, un espacio puramente bidimensional y un enfoque matemático. Se espera que, utilizando esta mezcla de herramientas el alumno consiga, por un lado, una comprensión más profunda de los conceptos básicos, y por otro, que empieze a reconocer (y aceptar plenamente) el poder de las matemáticas en el análisis de los conceptos y problemas microeconómicos.

La materia discutida se divide en dos partes principales; el equilibrio parcial por un lado y equilibrio general por otro. Todos los capítulos de la primera parte se dedican a explicar diferentes maneras de aplicar un modelo de elección restringida donde solamente hay un agente activo. Por el contrario, los capítulos dentro de la segunda parte son aplicaciones del mismo modelo pero con dos agentes (o tipos de agente) activos, y problemas de elección interdependientes.

El libro ofrece un repaso de algunos de los temas más actuales en la teoría microeconómica moderna. En este sentido, no pretende proporcionar información sobre todos y cada uno de los posibles temas que se podrían incluir en un curso de microeconomía intermedia, su contenido es más bien un reflejo de las preferencias particulares de los autores en la materia. No se incluyen referencias a las fuentes originales en las revistas académicas, principalmente porque puede ser hasta contraproducente que un estudiante de microeconomía intermedia acuda a esta literatura directamente. No obstante, el lector interesado en ampliar sus conocimientos sobre la materia aquí expuesta (bien sea, demostraciones más formales, una visión en más de dos dimensiones, o referencias de las fuentes originales de ciertos teoremas fundamentales) podría aprovecharse de libros de texto tales como *Análisis Microeconómico* de Hal Varian (publicado por Antoni Bosch en 1992), *Curso de Teoría Microeconómica* de David Kreps (publicado por McGraw Hill en 1995), o la "biblia" de microeconomía superior *Microeconomic Theory* de Andreu Más Colell, Michael Whinston y Jerry Green (publicado por Oxford University Press en 1995).

A través de la presentación de la materia, también se ofrecen una serie de ejercicios. Se recomienda fuertemente al lector intentar resolverlos sobre la marcha, puesto que ponen directamente en práctica los conceptos del libro, según vayan saliendo. En el libro no se ofrecen soluciones a dichos ejercicios, cosa que justificamos con una cita de Descartes en su famoso libro sobre geometría: *"No me detengo en la explicación detallada de esto, porque os privaría del placer de aprender por vosotros mismos y de la utilidad de cultivar vuestro espíritu al cultivarse en estas cuestiones, que es, según mi opinión, el principal resultado que se puede obtener de esta ciencia..."*[1].

[1] Véase el libro "Descartes; Geometría y Método" (pg. 70), de Ángel Chica Blas (editorial Nivola, 2001).

La estructura general de la microeconomía

En la figura 1, se representa un esquema muy sencillo que intenta dejar claros los pasos que generalmente se toman en cualquier problema de teoría económica. En primer lugar, se especifican los supuestos generales que definen el entorno en el que se desarrolla el modelo en cuestión. Estos supuestos vienen a consolidarse mediante ciertas reglas que guían el comportamiento de los agentes económicos activos (los que toman las decisiones) en el modelo (por ejemplo, el supuesto de racionalidad individual), la manera en que los agentes interactúan mutuamente, y los valores de los parámetros (que también definen las características de los agentes participantes).

En el segundo recuadro de la figura 1, se muestra el aspecto de la asignación de recursos escasos entre fines alternativos, estando presente tal aspecto, en mayor o menor medida, en casi todos los modelos de teoría económica. La idea de equilibrio implica que ningún agente desea variar su comportamiento unilateralmente, dadas las reglas de juego y el comportamiento de los demás agentes activos, es decir, que todos los agentes activos se encuentran simultáneamente en una posición óptima. Esto se observa mediante la solución de un conjunto de problemas de maximización restringida, en donde es posible que el modelo implique ciertas interrelaciones entre los distintos problemas de los agentes. Es importante reconocer que todo equilibrio se debe definir en función de los valores de las variables de decisión de los agentes activos.

En el tercer recuadro se refleja la estática comparativa, que como ya reconoció Paul Samuelson en su obra ahora clásica *Foundations of Economic Analysis* (Princeton University Press, 1948), es un aspecto crucial en los modelos de teoría económica. La estática comparativa es el estudio formal de aspectos como la estabilidad del equilibrio y la predicción de los efectos de posibles variaciones en los parámetros del sistema. Uno de los resultados más comunes de estática comparativa en las asignaturas de microeconomía son las curvas de demanda y las curvas de contratos, aunque estas últimas provienen claramente de un análisis de interacción del tipo de equilibrio general. El recuadro referido a la estática comparativa está unido con el recuadro de la definición general del entorno, puesto que la estática comparativa implica la consideración del efecto que ejerce sobre el equilibrio un nuevo conjunto de parámetros, o una nueva definición del entorno.

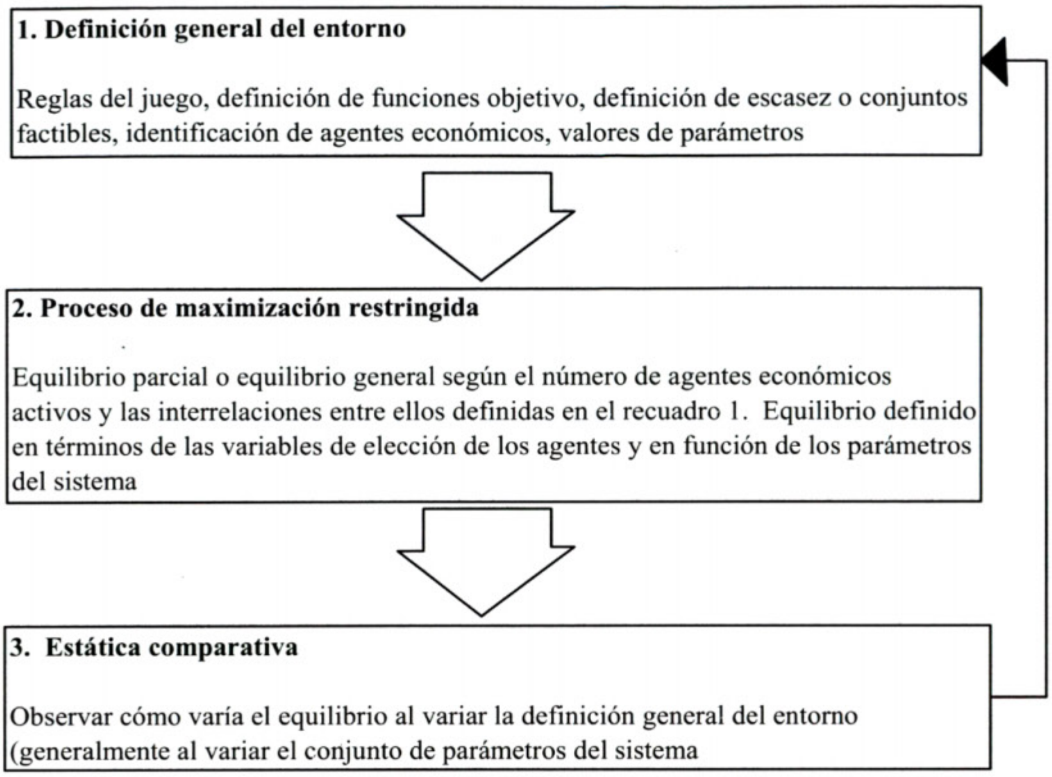
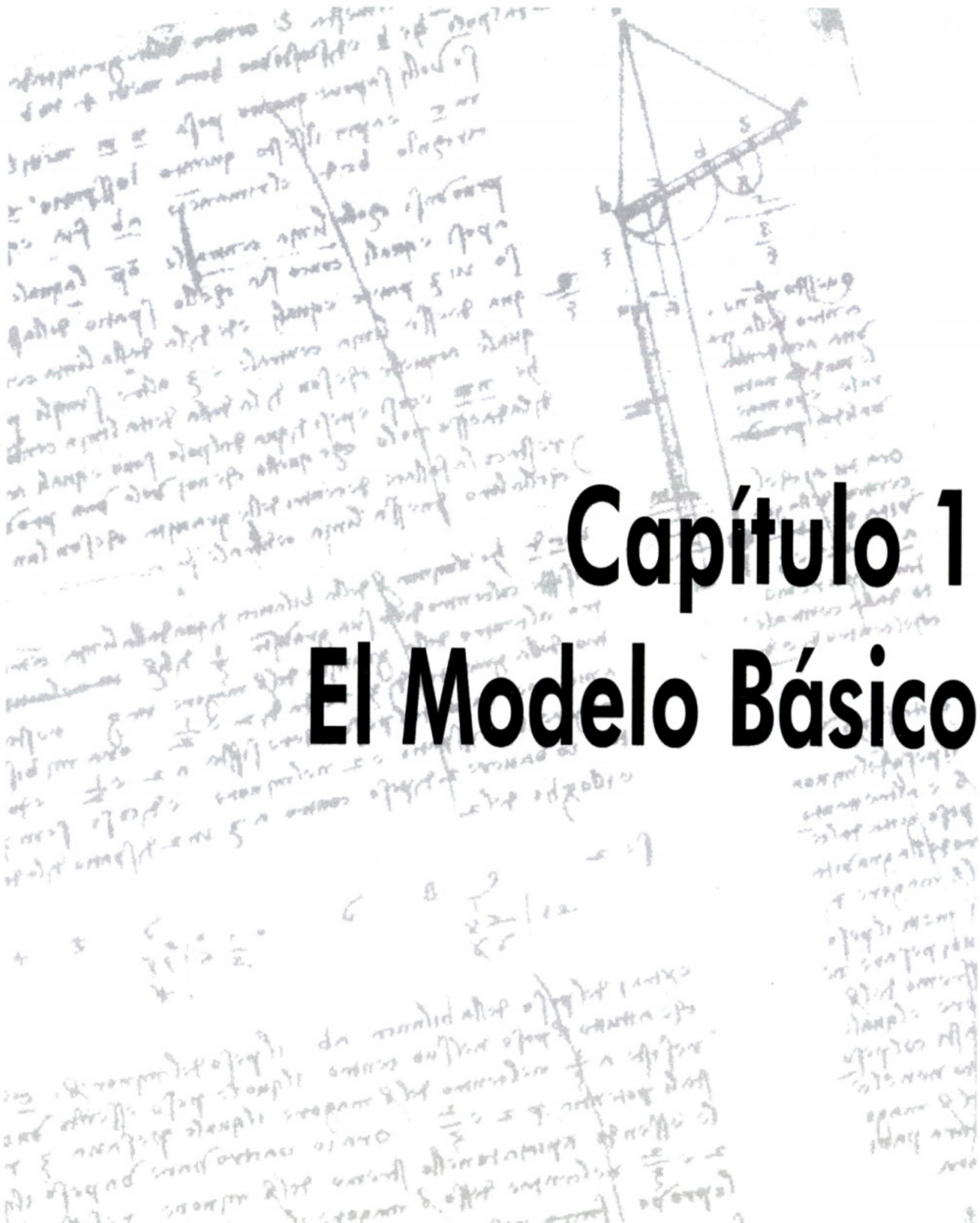

1. Definición general del entorno
Reglas del juego, definición de funciones objetivo, definición de escasez o conjuntos factibles, identificación de agentes económicos, valores de parámetros
2. Proceso de maximización restringida
Equilibrio parcial o equilibrio general según el número de agentes económicos activos y las interrelaciones entre ellos definidas en el recuadro 1. Equilibrio definido en términos de las variables de elección de los agentes y en función de los parámetros del sistema
3. Estática comparativa
Observar cómo varía el equilibrio al variar la definición general del entorno (generalmente al variar el conjunto de parámetros del sistema

Figura 1.

Parte I
Equilibrio Parcial



Capítulo 1
El Modelo Básico

Capítulo 1

El Modelo Básico

Desde hace alrededor de 80 años se ha entendido la ciencia económica como el estudio de la toma de decisiones en un ambiente de escasez. Lionel Robbins publicó en 1932 su conocido *Ensayo Sobre la Naturaleza y Significado de la Ciencia Económica*, en el que define la ciencia económica como la lógica de la elección humana. Más concretamente, Robbins define la ciencia económica como el estudio del comportamiento humano en una relación entre medios escasos con usos alternativos. Esta definición, que capta el espíritu del trabajo académico de la época, sigue estando vigente hoy en día. Por tanto, la ciencia económica no estudia solamente los mercados, sino que más en general, estudia las preferencias humanas y el proceso mediante el que se toman las decisiones.

El principal modelo para el análisis de las elecciones de los agentes económicos en un ambiente de escasez consiste en un problema matemático de maximización restrigida. Así, para poder seguir un curso moderno de teoría microeconómica, es absolutamente necesario el dominio completo del modelo matemático básico de maximización restringida. En este primer capítulo analizamos la aplicación de la solución de un problema de maximización restringida según el metodo de Lagrange.

1.1 La maximización restringida bidimensional

En esta primera sección vamos a dar un primer enfoque a los problemas de elección restringida en general. El contenido de la sección es muy resumido, y se pasan por alto ciertos aspectos que podrían acarrear complicaciones. Asimismo, tampoco se presentan aquí argumentos formales para demostrar todo el argumento. El lector interesado en profundizar más sobre los problemas de maximización restringida puede dirigirse a libros de texto especializados[1].

1.1.1 Las variables de elección

Como ya hemos indicado, en todo este libro se mantiene el análisis a un nivel bidimensional. Por tanto, el plano Cartesiano es de fundamental importancia. Vamos a indicar por x un vector cualquiera en el plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$ (el conjunto de todos los vectores bidimensionales). Puesto que x es bidimensional, tiene dos componentes que indicaremos con

[1] Por ejemplo, Pemberton, M. y N. Rau, *Mathematics for Economists: An Introductory Textbook*, Manchester University Press (2001), Sydsaeter, K. y P. Hammond, *Matemáticas para el Análisis Económico*, Prentice Hall (1996), o Madden, P., *Concavidad y Optimización en Microeconomía*, Alianza Universidad (1986).

subíndices, $x = [x_1, x_2]$. Los vectores diferentes se denotan con superíndices, por ejemplo x^i, en donde $x^i = \left[x_1^i, x_2^i\right]$. Finalmente, un conjunto de vectores x se representa con letras mayúsculas, X. En general, usaremos x para representar la variable de elección.

En un problema de maximización condicionada por ciertas restricciones, el problema se puede describir, matemáticamente, como *de entre todos los vectores que sean factibles, escojer el vector x que más favorece en la consecución de un objetivo predeterminado.* Correspondientemente, los aspectos que se suponen que están restringiendo el problema y también la descripción del objetivo, deben ser expresados como función de x.

Aparte de las variables de elección, para que cualquier problema de optimización restringida quede bien definido, será necesario también explicitar un conjunto de parámetros. Un parámetro es un dato exógeno, es decir con un valor preestablecido no alterable por el individuo cuya decisión se analiza, que tiene importancia para la solución final. Los parámetros pueden estar presentes en la descripción de las restricciones y también en la descripción del objetivo a perseguir. En general, representaremos los parámetros del problema con un vector $b = [b_1, b_2, ..., b_m]$. Aunque la variable de decisión es bidimensional, el vector de parámetros puede tener un número general de elementos.

La solución a un problema de optimización restringida es un vector de variables de elección determinado a partir del conjunto de parámetros del problema. Usando la notación introducida arriba, con un vector de elección bi-dimensional, $x = [x_1, x_2]$, y con un vector de parámetros $b = [b_1, b_2, ..., b_m]$, la solución al problema se escribirá $x^*(b) = [x_1^*(b), x_2^*(b)]$. De esta forma, se debe entender que los valores óptimos para las variables del sistema vienen a ser funciones de los parámetros. Uno de los ejercicios más importantes dentro de la microeconomía teórica es considerar exactamente cómo varían los componentes del vector óptimo ante variaciones en el vector de parámetros - un proceso conocido como la estática comparativa.

Como ejemplo, considere un individuo que debe repartir su tiempo entre dos actividades distintas, trabajo y ocio. Sea x_1 el tiempo que dedica al trabajo y x_2 el tiempo dedicado al ocio, y supongamos que el período de elección corresponde a un día (24 horas). Claramente, ambas variables son continuas, así que un número como $x_1 = 9,25$ indicaría que se dedican 9 horas y 15 minutos (es decir, nueve horas más la cuarta parte de una hora adicional) al trabajo. Es muy fácil imaginar el tipo de restricción que debe imponerse sobre el problema. En primer lugar no es posible dedicar una cantidad de tiempo negativa a ninguna actividad, así que tenemos $x_i \geq 0$ $i = 1, 2$. También podría ser que se deba respetar un horario mínimo contratado de trabajo, por ejemplo de unas 8 horas diarias, en cuyo caso debemos añadir la restricción $x_1 \geq 8$, que reemplazaría a la restricción de que x_1 no puede ser negativo. En segundo lugar, por nuestro supuesto de entrada, el individuo debe repartir 24 horas enteras entre las dos actividades, así que tenemos que $x_1 + x_2 = 24$.

En cuanto al objetivo a conseguir, las definiciones posibles son infinitas, correspondientes a cualquier tipo de preferencias entre las dos actividades. A modo de ejemplo, podremos suponer que por cada hora trabajada el individuo recibe un salario monetario de w, y que cada hora dedicada al ocio le proporciona un bienestar medido por un salario implícito z. Entonces un objetivo razonable podría ser la función $wx_1 + zx_2$. Se invita al lector aventurar otros posibles objetivos. Para este ejemplo, claramente el vector de elección es x (el tiempo a dedicar a cada tipo de actividad) y los parámetros más evidentes son el número 24 (total de horas disponibles), los dos salarios w y z, y el valor mínimo que las variables x_i pueden tomar (0, o quizás en el caso del trabajo, 8).

1.1.2 El conjunto factible

Cuando un problema de elección está restringido, la búsqueda de la solución del mismo se concentra en los puntos de un subconjunto del plano cartesiano denominado *conjunto factible,* $X \subset \mathbb{R}^2$. El conjunto factible, X, viene definido por las restricciones que se imponen sobre el problema de elección en cuestión. Por ejemplo, si se desea que solamente sean factibles los puntos x con ambos elementos no negativos, el conjunto factible se define de la siguiente manera: $X = \{x : \ x_i \geq 0 \ \ i = 1, 2\}$.

Más en general, un *contorno o curva de nivel* de cualquier función entre x_1 y x_2 divide el espacio $\mathbb{R}^2$ en dos partes mutuamente excluyentes. Es decir, una ecuación como $g(x_1, x_2) = b$, donde $g(\cdot)$ es una función monótona, y b es una constante, define dos conjuntos de puntos mutuamente excluyentes, $X_1 \equiv \{x : g(x) \leq b\}$ y $X_2 \equiv \{x : g(x) > b\}$, con $X_1 \cup X_2 = \mathbb{R}^2$ y $X_1 \cap X_2 = \phi$, siendo ϕ el conjunto vacío (el conjunto sin elementos). De esta forma, es posible definir cualquier subconjunto acotado y cerrado de $\mathbb{R}^2$ utilizando una serie de ecuaciones $g_i(x) \leq b_i \ \ i = 1, 2, ..., m$. El ejemplo anterior, referido al conjunto de vectores con ambas componentes no negativas, se define con $g_i(x) = -x_i$, $b_i = 0 \ \ i = 1, 2$. Otro ejemplo sencillo es el caso de la recta presupuestaria en problema de un consumidor con renta de w y precios de los dos bienes $p_i \ \ i = 1, 2$. El conjunto presupuestario se define por $X(p, w) \equiv \{x : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w\}$, que claramente equivale a $g(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2$ y $b = w$. Finalmente, una restricción del tipo $h(x) = d$ tiene que representarse mediante dos restricciones: $g_1(x) \equiv h(x) \leq b_1 \equiv d$ y $g_2(x) \equiv -h(x) \leq b_2 \equiv -d$. Obviamente la segunda de estas dos restricciones es igual a $h(x) \geq d$, que, junto con la primera restricción define el conjunto de puntos señalado.

En general, el conjunto factible en un problema de maximización restringida viene definido por:

$$X(g, b) = \{x : g_i(x) \leq b_i \ \ i = 1, 2, ..., m\}$$

siendo b el vector de los escalares $b_i \ \ i = 1, 2, ..., m$ y g es el vector de las funciones $g_i(x) \ \ i = 1, 2, ..., m$. El hecho de que se incluya, explícitamente, la posibilidad de que cada una de las restricciones se sature (es decir, se cumple con estricta igualdad) es importante, puesto que implica que el conjunto factible tiene frontera (el conjunto es *acotado*), y además esta frontera está contenida en el propio conjunto (el conjunto es *cerrado*). Esto se sigue directamente del hecho de que, el conjunto definido por la ecuación $g_i(x) \leq b$ es compacto (acotado y cerrado), y que el conjunto factible X no es sino la unión de una serie finita de tales conjuntos. Puesto que la unión finita de una serie de conjuntos compactos es a su vez compacto, resulta que X es un conjunto compacto.

La existencia de restricciones que supongan una frontera superior al conjunto factible (la exclusión de valores infinitos positivos) es la manifestación pura de la escasez de los recursos valiosos. En términos de las restricciones anteriores, los recursos valiosos se refieren a las componentes del vector b. En muchas de las aplicaciones que se contemplan en el presente libro, bastará con tres restricciones, dos de ellas son las restricciones de no negatividad, $g_i(x) = -x_i \leq 0 \ \ i = 1, 2$, mientras que la tercera delimita el conjunto factible por arriba (es decir, $g_3(x) = b_3$ es una frontera superior al conjunto factible).

Para que un problema de elección tenga sentido, debemos eliminar directamente la posibilidad de que $X = \phi$. Por tanto, si usamos la notación $N(X)$ para indicar el número de elementos en un conjunto X, el primer requisito es $N(X) \geq 1$. No obstante, para que el problema tenga interés, también debe ser que el número de elementos en el conjunto factible sea estrictamente mayor que 1, $N(X) \geq 2$, pues en caso contrario, la elección es trivial. Más en concreto, típicamente en los problemas de optimización restringida, se requiere que el conjunto factible sea un *conjunto convexo*. La definición matemática de conjunto convexo es:

$$\forall x^i, x^j \in X \;\; y\, \forall \lambda : 0 \leq \lambda \leq 1, \;\; si\; x^k(\lambda) \in X \;\; \Rightarrow \;\; X \; es\; convexo$$

en donde $x^k(\lambda) \equiv \lambda x^i + (1-\lambda)x^j$. Se conoce $x^k(\lambda)$ como una *combinación convexa* de los dos puntos x^i y x^j, y define todos los puntos sobre la linea recta que une los dos puntos[2]. Correspondientemente, en el plano bidimensional, si la línea recta que une dos puntos *cualesquiera* pertenicientes al conjunto también pertenece enteramente al mismo conjunto, entonces el conjunto es convexo. Nótese, de paso, que si un conjunto convexo tiene más de un punto, entonces tiene infinitos, por lo tanto, el requisito de que el conjunto factible sea convexo junto con el requisito de que $N(X) \geq 2$ implica directamente que $N(X) = \infty$.

Puesto que el conjunto factible se define a partir de las restricciones del problema, el requisito de que el conjunto factible es convexo implica, a su vez, ciertas condiciones sobre las formas funcionales de las restricciones $g_i(x)$. Llegado a este punto, las siguientes tres definiciones matemáticas serán de utilidad:

1. Una función $h(x)$ es *cóncava* (*convexa*) si, para todo par de vectores x^i, x^j, y para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene que $h(x^k(\lambda)) \geq (\leq) \lambda h(x^i) + (1-\lambda)h(x^j)$. Esta definición se conoce como la *desigualdad de Jensen.*

2. Una función $h(x)$ es *cuasi-cóncava* si, para todo c, el conjunto $X(c) \equiv \{x : h(x) \geq c\}$ es un conjunto convexo.

3. Una función $h(x)$ es *cuasi-convexa* si, para todo c, el conjunto $X(c) \equiv \{x : h(x) \leq c\}$ es un conjunto convexo.

De la definición de cuasi-concavidad, resulta que para todo par de vectores x^i, x^j, y para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, si $h(x)$ es cuasi-cóncava se tiene que $\min\left\{h(x^i), h(x^j)\right\} \leq h(x^k(\lambda))$. De la misma forma, si $h(x)$ es cuasi-convexa, resulta que para todo par de vectores x^i, x^j, y para todo $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene $\max\left\{h(x^i), h(x^j)\right\} \geq h(x^k(\lambda))$. Para ver esto, nótese que para todo x^i y x^j, podemos definir $\min\{h(x^i), h(x^j)\} \equiv c$. Entonces, ambos x^i y x^j pertenecen al conjunto $X(c) \equiv \{x : h(x) \geq c\}$. Pero si $h(x)$ es cuasi-concava, entonces $X(c)$ es un conjunto convexo, y entonces $x^k(\lambda)$ tambien pertenece a $X(c)$, es decir, $\min\left\{h(x^i), h(x^j)\right\} = c \leq h(x^k(\lambda))$. El caso de las funciones cuasi-convexas se demuestra de manera semejante.

Es fácil comprobar que una función lineal es cóncava y convexa al mismo tiempo, que cualquier función cóncava es también cuasi-cóncava (ya que $\min\left\{h(x^i), h(x^j)\right\} \leq \lambda h(x^i) + (1-\lambda)h(x^j)$), y que cualquier función convexa es también cuasi-convexa (ya que $\max\left\{h(x^i), h(x^j)\right\} \geq \lambda h(x^i) + (1-\lambda)h(x^j)$). Cuando se exige la estricta desigualdad en cualquiera de las definiciones, la correspondiente característica es estricta (por ejemplo, $h(x^k(\lambda)) > \lambda h(x^i) + (1-\lambda)h(x^j)$ entonces $h(x)$ es estrictamente cóncava).

En particular, supóngase ahora que la función $g(x)$ es cuasi-convexa. Para cualesquiera dos puntos x^i y x^j podemos definir $\max\{g(x^i), g(x^j)\} \equiv b$. A continuación se define el conjunto de puntos $X(g, b) \equiv \{x : g(x) \leq b\}$. De esta forma, ambos x^i y x^j pertenecen al conjunto $X(g, b)$. Ahora, puesto que $g(x)$ es cuasi-convexa, $X(g, b)$ es un conjunto convexo. En resumen, *si una función es cuasi-convexa, entonces el conjunto de puntos* $X(g, b) \equiv \{x : g(x) \leq b\}$ *es un conjunto convexo.*

[2] Se invita al lector demostrar esta afirmación formalmente.

Siendo x un vector bidimensional, una función cualquiera, $h(x)$, define una relación entre tres diferentes variables, x_1, x_2, y el valor de la función en sí, $h(x)$. Para representar esta función gráficamente, puesto que el espacio gráfico (una hoja de papel) solamente tiene 2 dimensiones, es necesario mantener una de estas tres variables constante. Lo habitual es mantener constante el valor de la función y considerar la relación como una función entre x_1 y x_2. La gráfica resultante se conoce como *un contorno*, o *curva de nivel*, de la función $h(x)$ en el espacio x. La ecuación exácta de la relación implícita entre x_1 y x_2 requiere evaluar la inversa de $h(x)$, pero en realidad hacer esto no es muy útil en problemas de microeconomía. A cambio, sí es útil saber la pendiente de la relación implícita (el contorno) en un punto en concreto, y podemos saber esta pendiente utilizando un teorema conocido como *el teorema de la función implícita (de aquí en adelante, TFI), que afirma que si $h(x)$ es una función, y sí $\frac{\partial h(x)}{\partial x_2} \neq 0$, entonces*

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dh(x)=0} = -\frac{\left(\frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial h(x)}{\partial x_2}\right)}$$

Para demostrar el TFI, basta tomar el diferencial total de $h(x)$ y obligarlo a ser 0

$$dh(x) = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x_2}\right) dx_2 = 0$$

Reordenando esta ecuación nos da directamente el TFI.

Si además de cuasi-convexa, la función $g(x)$ es creciente en ambos argumentos, entonces por el TFI cualquiera de sus contornos sería una función decreciente en el espacio x. Por otro lado, el conjunto $X(g,b) \equiv \{x : g(x) \leq b\}$ corresponde al conjunto sobre y por debajo de un contorno (curva de nivel) en concreto. Pero puesto que este conjunto tiene que ser convexa, la gráfica de $g(x) = b$ tiene que ser una función decreciente y cóncava en el espacio de x. Un ejemplo de un contorno de una función creciente y cuasi-convexa está representado gráficamente en la Figura 1.1.

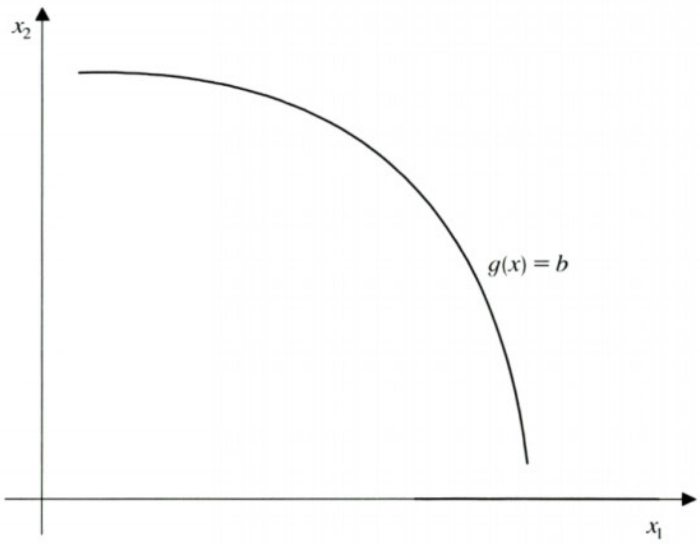


Figura 1.1.

EJERCICIO 1.1: *Pruebe que si una función es creciente y cuasi-cóncava, entonces el conjunto de puntos definido sobre y por encima de cualquiera de sus contornos es un conjunto convexo.*

EJERCICIO 1.2: *Represente gráficamente el contorno* $g(x) = b$ *y el conjunto* $X(g,b) \equiv \{x : g(x) \leq b\}$*, para los casos en los cuales* $g(x)$ *es cuasi-convexa y:*

1. *decreciente en ambos argumentos,*
2. *creciente en* x_1 *y decreciente en* x_2*,*
3. *decreciente en* x_1 *y creciente en* x_2*.*

Por este argumento, podemos concluir que si solamente existe una restricción a un problema de optimización restringida, espresado de la forma $g(x) \leq b$, entonces para que el conjunto factible sea convexo es suficiente que la función $g(x)$ sea convexa. Tampoco es mucho más difícil ver lo se requiere cuando hay más de una restricción. Si representamos sendas curvas de nivel de dos funciones cuasi-convexas diferentes, entonces podemos considerar el conjunto de puntos definido por $X(g,b) \equiv \{x : g_i(x) \leq b_i \ i = 1,2\}$. Sean $g_i(x)$ $i = 1,2$ dos funciones cuasi-convexas, y definimos los dos conjuntos de puntos $X_i(g_i,b_i) \equiv \{x : g_i(x) \leq b_i\}$ $i = 1,2$. Sabemos que ambos conjuntos $X_i(g_i,b_i)$ son convexos. Finalmente, podemos definir la intersección de estos dos conjuntos como $X(g,b) \equiv X_1(g_1,b_1) \cap X_2(g_2,b_2)$. Puesto que la intersección de dos conjuntos convexos cualesquiera también es un conjunto convexo, resulta que $X(g,b)$ es un conjunto convexo (véase la Figura 1.2 para el caso de dos funciones crecientes y cuasi-convexas). Naturalmente, podríamos seguir añadiendo nuevas funciones sin alterar el resultado final de que, siempre que cada función sea cuasi-convexa, la intersección de todos los conjuntos $X_i(g_i,b_i) \equiv \{x : g_i(x) \leq b_i\}$ es un conjunto convexo.

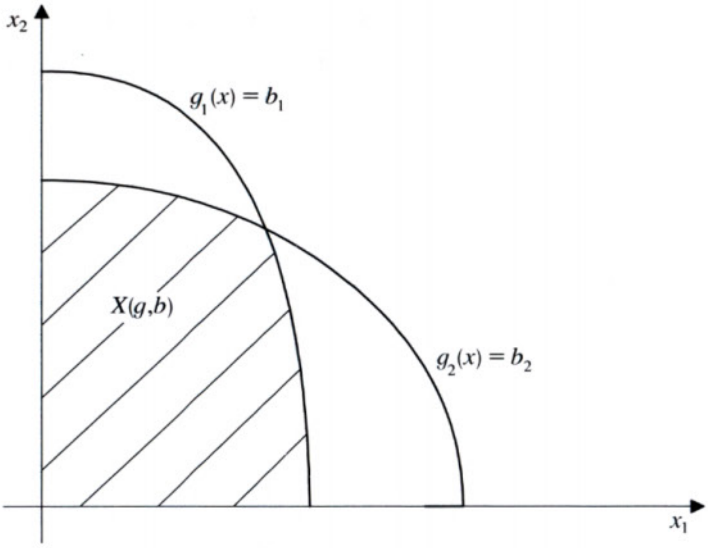


Figura 1.2.

EJERCICIO 1.3: *Represente el conjunto* $X(g,b) \equiv \{x : g_i(x) \leq b_i \ i = 1,2\}$*, suponiendo que no es vacío, cuando* $g_1(x)$ *es creciente en ambos argumentos y* $g_2(x)$ *es decreciente en ambos argumentos. Repite el ejercicio para los 4 posibles casos en los cuales cada función es creciente en un argumento y decreciente en el otro.*

En resumen, destacamos que si las funciones que representan las restricciones $g_i(x)$ son todas convexas, entonces el conjunto factible del problema $X(g,b) = \{x : g_i(x) \leq b_i \ \ i = 1,2,...,m\}$, es un conjunto convexo. A partir de ahora, salvo cuando se indique expresamente lo contrario, se supondrá siempre que todas las funciones que definen las restricciones son convexas, definiendo así un conjunto factible compacto y convexo.

1.1.3 La función objetivo

Una vez definido de manera adecuada el conjunto factible, debemos considerar ahora el objetivo que ha de satisfacerse. Es decir, nuestro problema consiste en selecionar del conjunto factible X, aquel (o aquellos) vector(es) que más favorece(n) el logro de un objetivo en concreto. Sea lo que sea en realidad ese objetivo, para que esté bien definido es necesario suponer que existe una *relación de preferencias* que lo representa[3]. Si un vector x^i favorece más el objetivo subyacente que otro vector x^j, entonces se dice que x^i es preferido a x^j, una relación que normalmente queda expresado como $x^i \succ x^j$. Como ahora veremos, para garantizar que el problema de maximizar el objetivo condicionado a una elección del conjunto factible tenga solución única, debemos hacer una serie de supuestos sobre la relación de preferencias. Finalmente, para poder localizar con facilidad el óptimo, será necesario poder representar las preferencias por una función del tipo $f(x)$, que denominamos la *función objetivo.*

Obviamente, las preferencias deben ser lo suficientemente ordenadas y lógicas como para que el problema admita una solución. En particular, es habitual suponer que la relación de preferencias es capaz de comparar dos vectores cualesquiera x^i y x^j del plano Cartesiano, y de ordenarlos de acuerdo con sus preferencias. Por consiguiente, tiene que ser cierto que, o bien x^i es estrictamente preferido a x^j ($x^i \succ x^j$) o bien x^j es estrictamente preferido a x^i ($x^j \succ x^i$), o los dos vectores son igualmente preferidos (el individuo es indiferente entre ellos, o sea $x^i \sim x^j$). Este hecho, que todas las asignaciones de consumo sean comparables las unas con las otras, se suele denominar *preferencias completas*, y se puede formular como:

$$\forall\, x^i, x^j : o\ bien\ x^i \succsim x^j,\ o\ bien\ x^j \succsim x^i,\ o\ ambos$$

donde el simbolo $\succsim$ indica o bien $\succ$ o bien $\sim$ (en otras palabras, $\succsim$ representa la relación de preferencia "por lo menos tan preferida como").

Por otro lado, las preferencias son *transitivas* si cumplen un requisito muy lógico; para tres vectores x^i, x^j y x^k cualesquiera, tales que $x^i \succsim x^j$ y $x^j \succsim x^k$, debe satisfacerse que $x^i \succsim x^k$. Si las preferencias son completas y también transitivas, entonces se dice de ellas que son *preferencias racionales.*

Una implicación lógica de las preferenicas racionales es que, si se limitan las comparaciones a un conjunto cerrado de vectores X, entonces tiene que existir un subconjunto de vectores de X, indiferentes entre sí y que son todos preferidos a todos las demás vectores de X, esto es, cuando X es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$:

$$\forall X \subset \mathbb{R}^2 \quad \exists X^* \subset X,\ X^* \neq \phi : si\ x^i \in X^* \Rightarrow x^i \succsim x\ \forall x \in X$$

Si X es un conjunto finito (es decir, contiene finitos elementos)[4], el conjunto X^* puede obtenerse mediante un proceso iterativo; para ver esto simplemente notar que, en principio, se puede comienzar por un punto cualquiera x^1 de X, al que denominamos "candidato al óptimo" y, a continuación, se compara con los demás. Se va haciendo una lista de todos los vectores que cumplan $x \sim x^1$ y se van descartando los vectores que cumplan $x^1 \succ x$. En el momento en que se encuentra un vector que cumpla $x \succ x^1$, este nuevo vector sustituye a x^1 como el candidato al óptimo, el vector x^1 y todos los que eran

[3] Para algunos casos, el objetivo puede ser muy obvio. Por ejemplo, una empresa puede desear utilizar como objetivo el beneficio monetario. En otros casos, como por ejemplo el de un consumidor, el objetivo estará ligado a ciertas características (gustos) personales.

[4] Si no es así, basta utilizar un resultado topológico conocido como el Lemma de Zorn.

indiferentes a él se descartan, y el proceso continúa (sin necesidad de volver a considerar los vectores ya eliminados o indiferentes a x^1 por preferencias transitivas). En cuanto se hayan terminado de considerar todos los vectores de X, el vector que en ese momento ocupe el lugar de candidato al óptimo, más todos los vectores en la lista de vectores indiferentes a él, consituyen X^*. Por supuesto, cuando X no es finito esto es un proceso sin final pero en seguida veremos como la existencia de una función objetivo puede aliviar el proceso enormemente.

El supuesto de racionalidad de las preferencias no es suficiente para garantizar que el problema de elección tiene una solución única, es decir, que el conjunto X^* consta de un solo elemento. Para ello es necesario hacer dos supuestos más sobre las preferencias:

1. Preferencias estrictamente monótonas: $\forall x^i \neq x^j : x^i_h \geq x^j_h \;\; h = 1, 2 \;\Rightarrow\; x^i \succ x^j$.
2. Preferencias estrictamente convexas: $\forall x^i, x^j : x^i \succsim x^j \;\Rightarrow\; x^k \equiv \lambda x^i + (1-\lambda)x^j \succ x^j$ con $0 < \lambda < 1$.

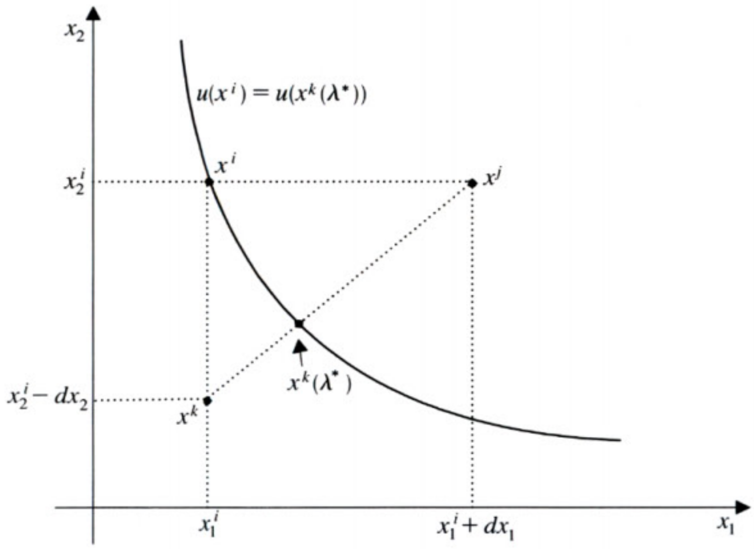


Figura 1.3.

Si las preferencias son racionales y estrictamente monótonas, el conjunto de los puntos indiferentes a un vector en concreto tiene que ser una función con pendiente estrictamente negativa (tal función se suele llamar una curva de indiferencia). Podemos razonar esto utilizando la Figura 1.3. En ella vemos que, si definimos dos cantidades $x_i > 0 \;\; i = 1, 2$, empezando con cualquier vector $x^i = (x^i_1, x^i_2)$, un movimiento directamente hacia la derecha en el plano Cartesiano se puede representar con $x^j = (x^i_1 + dx_1, x^i_2)$ con $d > 0$. Por preferencias monótonas, tenemos $x^j \succ x^i$. Por otro lado, un movimiento desde x^i directamente hacia abajo en el plano Cartesiano se puede representar con $x^h = (x^i_1, x^i_2 - dx_2)$ con $d > 0$. Otra vez, por preferencias monótonas, tenemos $x^i \succ x^h$, y por preferencias transitivas, $x^j \succ x^h$. Ahora bien, considérese una combinación lineal convexa de x^j y x^h; $x^k(\lambda) = \lambda x^j + (1-\lambda)x^h$. El primer elemento del punto general de esta combinación convexa es $x^k_1(\lambda) = x^i_1 + \lambda dx_1$, y el segundo elemento es $x^k_2(\lambda) = x^i_2 - (1-\lambda)dx_2$. Por tanto, tenemos que $\frac{\partial x^k_i(\lambda)}{\partial \lambda} > 0 \;\; i = 1, 2$. Dado esto, por prefenencias monótonas, es cierto que $x^k(\lambda) \succ x^k(\widehat{\lambda}) \;\; \forall \lambda > \widehat{\lambda}$. Ahora bien, puesto que $x^k(1) = x^j \succ x^h = x^k(0)$, el hecho de que las preferencias son completas implica que tiene que existir un λ^* que es estrictamente mayor que 0 y menor que 1, tal que $x^k(\lambda^*) \sim x^i$ (esto es una sencilla aplicación del teorema del valor intermedio). Finalmente, puesto que $x_1^k(\lambda^*) = x_1^i + \lambda^* dx_1 > x_1^i$ y $x_2^k(\lambda^*) = x_2^i - (1-\lambda^*)dx_2 < x_2^i$, resulta que $x^k(\lambda^*)$ tiene que localizarse hacia abajo y a la derecha de x^i. Por lo tanto, una línea que une $x^k(\lambda^*)$ y x^i tiene que tener pendiente estrictamente negativa. Este argumento puede repetirse con cualquier número $d > 0$, e implica que existen infinitos puntos indiferentes a x^i, y que su unión es una función con pendiente negativa (una curva de indiferencia).

EJERCICIO 1.4: *Proporcione un argumento lo más formal que pueda para demostrar que, cuando las preferenicas son racionales y estrictamente monótonas, por cada punto x pasa una, y solamente una, curva de indiferencia.*

Las preferencias monótonas también aseguran que, cuando las restricciones $g_i(x)$ son crecientes (el caso más usual), todos los vectores en X^* tienen que saturar por lo menos una restricción, es decir, hallarse sobre la frontera del conjunto factible. Para ver esto simplemente se prueba, por reducción al absurdo, que lo opuesto es imposible. Supongamos que hay un vector x^i que satisface $x^i \succsim x$ para todos los vectores x de X, y que $g_i(x^i) < b_i \;\; i = 1, ..., m$. Puesto que todas las restricciones son crecientes, podemos siempre encontrar otro vector, $x^i + \epsilon$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, tal que $x^i + \epsilon$ también está dentro del conjunto factible. Sin embargo, el que las preferencias sean monótonas implica que $x^i + \epsilon \succ x^i$, lo que desmiente el hecho de que x^i fuera por lo menos tan preferida como todos los demás vectores factibles.

EJERCICIO 1.5: *Proporcione un argumento lo más formal posible que demuestre que, si las preferencias son racionales y monótonas, cualquier optimo local es también global.*

Si las preferencias son racionales, estrictamente monótonas y además estrictamente convexas, y si el conjunto factible es compacto y convexo (como ya hemos supuesto), entonces se puede asegurar que hay solamente un vector en el conjunto X^* (y que este vector se encuentra sobre la frontera de X). La adición del supuesto de preferencias estrictamente convexas al problema es, por tanto, importante, puesto que nos garantiza que la solución al problema no solamente existe sino que es única. La razón por la que las preferencias convexas implican un solo vector en X^* es también fácil de ver. Suponga que hubiera dos vectores en X^*, x^i y x^j. Puesto que ambos vectores son por lo menos tan preferidos como todos los vectores factibles, tiene que ser $x^i \sim x^j$. Considérese ahora una combinación lineal convexa de estos dos vectores $x^k(\lambda) = \lambda x^i + (1-\lambda)x^j$. Puesto que el conjunto factible, X, es convexo, resulta que $x^k(\lambda) \in X$. Si las preferencias son estrictamente convexas, se sigue que $x^k(\lambda) \succ x^i \sim x^j$. Por tanto, hemos encontrado un vector que es factible, y que es mejor que los dos iniciales. En definitiva, si las preferencias son estrictamente convexas nunca puede haber más de un vector en X^*, vector que denotaremos por x^*.

EJERCICIO 1.6: *Razone que los argumentos que conducen a que existe un único vector óptimo se pueden reformular para el caso en el que las preferencias son convexas (aunque no necesariamente estrictamente) con un conjunto factible estrictamente convexo.*

Una *función objetivo* es una manera cómoda de representar las preferencias del individuo y, sobre todo, de encontrar el vector x^*. Una función $f(x)$ representa una relación de preferencias si se cumple que:

$$\forall x^i, x^j \quad x^i \succsim x^j \quad \Leftrightarrow \quad f(x^i) \geq f(x^j)$$

Denotamos por $f(x)$ la función objetivo del individuo. Claramente, una función objetivo actúa como un agregador, ya que acepta como variable independiente un vector bidimensional (es decir, dos componentes o escalares), y devuelve como variable dependiente un solo escalar. Una función objetivo es una herramienta muy útil de representar las preferencias puesto que asocia a cada vector bidimensional un escalar, estableciendo así una ordenación obvia de los vectores. En este sentido, y en general, si existe una función objetivo que represente unas preferencias, existirán entonces infinitas puesto que cualquier transformación de la función que no varíe la ordenación cumplirá como función objetivo.

No obstante, el hecho de que exista una función objetivo no es tan obvio. Si existiese, entonces claramente las curvas de indiferencia obtenidas arriba a partir del supuesto de que las preferencias sean racionales y monótonas, son los contornos de la función objetivo. Para demostrar que exista una función objetivo, es necesario añadir un supuesto más, el de que las preferencias sean *contínuas*. Formalmente, las preferencias son contínuas si los dos conjuntos $\{x : x \succsim \widehat{x}\}$ y $\{x : \widehat{x} \succsim x\}$ son ambos cerrados para cualquier vector $\widehat{x}$. Resulta que, si las preferencias son contínuas, entonces también son completas, pero más importantemente, si las preferencias son contínuas y transitivas, entonces siempre existe una función objetivo contínua que las represente[5].

No obstante, para ver que existe una función objetivo, basta con encontrar dicha función, pero dado que, como ya hemos visto, las preferencias racionales y monótonas impliquan la existencia de curvas de indiferencia con pendiente negativa, una linea recta que parta del origen con pendiente constante y positiva cortará a cada curva de indiferencia en un solo punto. Además, la longitud de la recta será mayor cuanto más lejos esté la curva de indiferencia del origen. Como estas curvas de indiferencia (por preferencias monótonas) indican una preferencia mayor, es cierto que existe una correspondencia única entre la longitud de la recta y el nivel de preferencia de una curva de indiferencia. Por tanto, esta longitud sirve como función objetivo.

A partir de ahora, supondremos que la relación de preferencias que se desea estudiar está representada por una función objetivo $f(x)$ definida en todo el plano Cartesiano. Aunque no es estrictamente necesario, es muy conveniente que se suponga que la función objetivo es continuamente diferenciable en todos sus puntos. Para poder representar correctamente preferencias racionales (completas y transitivas), se requiere que $f(x)$ sea definido en todo su dominio y continua, y que $f(x)$ produce escalares a partir de vectores x, es decir, $f(x)$ es una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^1$. Ya hemos visto antes que si el conjunto factible es compacto (acotado y cerrado) y las preferencias son racionales, entonces existe un conjunto de vectores que son por lo menos tan preferidos como los demás, este conjunto lo hemos denotado por X^*. En términos de una función objetivo, se trata de una sencilla aplicación del *teorema de Weierstrass*, que asegura que si $f(x)$ es continua y definida sobre un conjunto acotado y cerrado X, entonces existen puntos máximos y mínimos de $f(x)$ en X.

Por otro lado, suponiendo que las preferencias del individuo son estrictamente monótonas, la función objetivo tiene que ser creciente en sus dos argumentos. Si además (por comodidad) suponemos que $f(x)$ es contínuamente derivable, entonces es creciente si se cumple que $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \;\; i = 1, 2$. Este hecho nos garantiza que las curvas de indiferencia (contornos de $f(x)$) más alejadas del origen implican un valor mayor de $f(x)$. Por tanto, cualquier punto que maximiza $f(x)$ sobre X tiene que hallarse en la frontera de X, es decir, por lo menos una restricción ha de saturarse.

De manera análoga a cuando analizamos el conjunto factible, para representar las

[5] Una demostración formal de este hecho es demasiado complicado para este curso, pero el lector interesado puede consultar las referencias mencionadas en la introducción.

preferencias estrictamente convexas necesitamos que las curvas de nivel de la función objetivo (las curvas de indiferencia) sean convexas, es decir, que $f(x)$ sea una función cuasi-cóncava. De esta forma, el conjunto definido por $X(f, z) \equiv \{x : f(x) \geq z\}$ es un conjunto convexo. No obstante, puesto que cualquier función cóncava es también cuasi-cóncava, el supuesto usual será que $f(x)$ es estrictamente cóncava.

En resumen, a partir de ahora y salvo cuando expresamente se diga otra cosa, supondremos que las preferencias vienen representadas por una función objetivo $f(x)$, que es continua, continuamente derivable, estrictamente creciente en ambos argumentos $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \;\; i = 1, 2$, y estrictamente cóncava.

Aunque la ecuación vectoral de concavidad (la desigualdad de Jensen) será utilizada a menudo en el desarrollo del resto del libro, es también muy útil describir la concavidad de $f(x)$ en términos de sus derivadas. Para empezar, considérese la pendiente de una curva de indiferencia en un punto genérico x. Puesto que una curva de indiferencia es una curva de nivel de $f(x)$, mediante el teorema de la función implícita, tenemos:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{df(x)=0} = -\frac{\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)} \tag{1.1}$$

La ecuación (1.1) suele llamarse la *relación marginal de sustitución* (RMS), y es estrictamente negativa puesto que hemos supuesto que la función objetivo es estrictamente creciente en ambos argumentos.

Antes, hemos mencionado que puesto que una función objetivo es una herramienta ordenal, en el sentido de que lo único importante es que el orden de los vectores x es el mismo que el orden de los números $f(x)$, y los valores de los números $f(x)$ no son importantes en si mismo. Dado esto, y el hecho de que una transformación monótona de una serie de números no les varía el orden, podemos afirmar que, si $f(x)$ representa las preferencias $\succsim$, entonces también representa las mismas preferencias $h(f(x))$, para cualquier función $h(\cdot)$ tal que $h'(\cdot) > 0$. Para ver esto de una manera más formal, está claro que dos funciones representan las mismas preferencias si el conjunto de curvas de indiferencia que corresponde a una función es exáctamente la misma que el conjunto que corresponde a la otra. Pero esto será cierto siempre que ambas funciones tienen la misma relación marginal de sustitución para cualquier punto x. Ahora, la relación marginal de sustitución que corresponde con $h(f(x))$ es:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dh(x)=0} = -\frac{h'(f(x))\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)}{h'(f(x))\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)} = -\frac{\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{df(x)=0}$$

así que $h(f(x))$ y $f(x)$ representan las mismas preferencias. El requisito de que $h'(\cdot) > 0$ es para que la utilidad marginal de cada bien sigue siendo positiva.

Nótese que la RMS es, a su vez, una función de x. Ahora bien, dado que hemos supuesto que $f(x)$ es estrictamente cóncava, sus contornos son convexos, es decir, la derivada de la

RMS con respecto a x_1 tiene que ser estrictamente positiva. Esta derivada es:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x_2}{d(x_1)^2} &= -\left[\frac{\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial(x_1)^2}+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}\right)\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}-\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1}+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial(x_2)^2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)^2}\right] \\
&= -\left[\frac{\frac{\partial^2 f(x)}{\partial(x_1)^2}+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{dx_2}{dx_1}\cdot\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1}+\frac{\partial^2 f(x)}{\partial(x_2)^2}\cdot\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}}\right]
\end{aligned}$$

Puesto que el denominador del término entre corchetes es positivo, solamente tenemos que considerar el signo del numerador. Simplificando términos comunes, introduciendo el -1, y recordando que, por el Teorema de Young $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1}$, el numerador es:

$$-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial(x_1)^2}-2\cdot\frac{dx_2}{dx_1}\cdot\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial(x_2)^2}\cdot\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2$$

Así, para que la curva de nivel de $f(x)$ sea convexa es suficiente (aunque no necesario), que las segundas derivadas sean negativas y la segunda derivada cruzada sea no negativa (mayor o igual a cero). Que las segundas derivadas sean negativas equivale a que el valor marginal de la función objetivo es decreciente, mientras que el supuesto de que la segunda derivada cruzada es mayor o igual a cero implica que el valor marginal de uno de las argumentos no decrece con aumentos en el otro. En resumen, el supuesto de que $f(x)$ sea cóncava en el vector x no es lo mismo que sea cóncava en las dos variables $x_i \;\; i=1,2$; pero si resulta que es cóncava en ambas variables $x_i \;\; i=1,2$, entonces será cóncava en el vector x cuando la segunda derivada cruzada no sea negativa. A partir de ahora, a menos que expresamente se haga otro supuesto, supondremos que la función objetivo $f(x)$ es estrictamente cóncava en el vector x, es decir, $\forall x^i, x^j,\;\; f(x^k(\lambda)) > \lambda f(x^i)+(1-\lambda)f(x^j)$, y que además está caracterizada por:

1. Derivadas primeras parciales continuas y positivas; $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \;\; i=1,2.$
2. Derivadas segundas parciales negativas; $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial(x_i)^2} < 0 \;\; i=1,2.$
3. Derivada segunda cruzada no-negativa;$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2} \geq 0.$

1.1.4 El método de Lagrange

Podemos estudiar ahora la localización de la solución matemática a un problema del tipo:

$$\max_x \; f(x) \;\; s.a. \;\; g_i(x) \leq b_i \;\; i=1,...,m$$

en donde $f(x)$ es creciente y cóncava y cada $g_i(x)$ es creciente y convexa. Antes de considerar una solución general, es conveniente considerar el caso sencillo de $m=1$, es decir, el caso de una sola restricción. En este caso, el problema es:

$$\max_x \; f(x) \;\; s.a. \;\; g(x) \leq b$$

Puesto que estamos suponiendo que la función $f(x)$ es continua, estrictamente creciente y estrictamente cóncava, y que $g(x)$ es creciente y convexa (para que el conjunto factible sea compacto y convexo), sabemos que existe un vector óptimo único, x^*. Además, sabemos que la restricción debe saturarse en la solución (recuérdese que por lo menos una restricción ha de saturarse, y aquí solamente hay una). Por lo tanto, sabemos que x^* satisface la ecuación $g(x^*) = b$. Por el teorema de la función implícita, la pendiente del contorno $g(x) = b$ en el punto x^* es:

$$\left.\frac{dx_2^*}{dx_1^*}\right|_{dg(x)=0} = -\frac{\left(\frac{\partial g(x^*)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial g(x^*)}{\partial x_2}\right)}$$

Considere ahora el valor de la RMS (la pendiente de un contorno de indiferencia) en el punto x^*:

$$\left.\frac{dx_2^*}{dx_1^*}\right|_{df(x)=0} = -\frac{\left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}\right)}$$

Nótese que es imposible que en el punto x^*, la pendiente del contorno $g(x) = b$ no sea igual a la RMS en el mismo punto. Para verlo, basta darse cuenta de que si las dos pendientes fueran desiguales la curva de indiferencia correspondiente a x^*tendría que cortar al contorno $g(x) = b$. Pero entonces esta curva de indiferencia necesariamente pasaría por algún punto estrictamente interior del conjunto factible, digamos el punto $\widetilde{x}$. Es decir, tendríamos $x^* \sim \widetilde{x}$ con $g(\widetilde{x}) < b$. Pero entonces existe otro punto, $\widehat{x}$, tal que $\widehat{x} \succ \widetilde{x}$ con $g(\widehat{x}) \leq b$. Finalmente, por preferencias transitivas, tenemos $\widehat{x} \succ x^*$, lo que desmiente el hecho de que x^* fuera el punto óptimo ya que $\widehat{x}$ es factible y además es preferida a x^*. Correspondientemente, tiene que ser cierto que, en la solución al problema, la pendiente del contorno $g(x) = b$ debe ser igual a la RMS:

$$-\frac{\left(\frac{\partial g(x^*)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial g(x^*)}{\partial x_2}\right)} = -\frac{\left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}\right)} \tag{1.2}$$

Juntas, la ecuación (1.2) y la ecuación del contorno $g(x^*) = b$ son dos ecuaciones con dos incógnitas, x_1^* y x_2^*, cuya solución simultánea es la solución al problema de optimización restringida inicial.

Para resolver el problema general con un número general de restricciones, no podemos simplemente recurrir a un análisis gráfico como en el caso de $m = 1$. La razón es sencillamente porque, aunque por nuestros supuestos de entrada, sabemos que por lo menos una restricción se satura, no podemos saber de antemano ni cuántos ni cuáles serán las que se saturan. Por tanto, es imposible saber qué ecuaciones del tipo $g_i(x) = b_i$ son válidas para obtener la solución. Para resolver el problema general, es conveniente transformar el problema de optimización restringida inicial en otro alternativo sin restricciones.

El matemático Francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) demostró que la solución del problema general es la misma que la solución del problema:

$$\max_x \; L(x, \delta) \equiv f(x) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \left[b_i - g_i(x)\right]$$

donde el vector $\delta = (\delta_1, ..., \delta_m)$ contiene números no negativos conocidos como *multiplicadores de Lagrange*, cada uno de los cuales viene definido por:

$$\delta_i \left[b_i - g_i(x^*)\right] = 0 \quad i = 1, ..., m \tag{1.3}$$

siendo x^* el vector que maximiza la función *Lagrangiana*, $L(x, \delta)$. Puesto que el programa de Lagrange es un problema de maximización sin restricciones, resulta más fácil de resolver, aunque eso sí, se ha aumentado el número de variables endógenas con la adición de los m multiplicadores.

Para ver la lógica subyacente al método de Lagrange, nótese que al ser $f(x)$ cóncava, y cada $g_i(x)$ convexa (y por tanto, $-g_i(x)$ es cóncava), resulta que $L(x, \delta)$ es cóncava en x. Así, dado que los multiplicadores no son negativos, el máximo global de $L(x, \delta)$ se alcanza allí donde sus primeras derivadas se anulan. Llamemos a este punto x^*. Por la definición de máximo global, es cierto que:

$$f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \left[b_i - g_i(x^*)\right] \geq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \left[b_i - g_i(x)\right] \quad \forall x$$

En segundo lugar, puesto que los multiplicadores están definidos de forma que se satsiface $\sum_{i=1}^{m} \delta_i \left[b_i - g_i(x^*)\right] = 0$, tenemos:

$$f(x^*) \geq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \left[b_i - g_i(x)\right] \quad \forall x$$

Finalmente, como los multiplicadores no son negativos, resulta que $\delta_i \left[b_i - g_i(x)\right] \geq 0$ siempre que $b_i - g_i(x) \geq 0$. Por lo tanto, podemos concluir que:

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x : g_i(x) \leq b_i \quad i = 1, ..., m$$

que es exactamente lo que requiere la solución al problema de maximización restringida original.

La solución del problema puede ser calculada con las dos ecuaciones que garantizan que x^* es un punto crítico de $L(x, \delta)$, y las m ecuaciones que determinan los multiplicadores:

$$\frac{\partial L(x, \delta)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \delta_i \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2 \tag{1.4}$$

$$\delta_i \left[b_i - g_i(x^*)\right] = 0 \quad i = 1, ..., m \tag{1.5}$$

Es habitual refererse a las ecuaciones (1.4) como las *condiciones de primer orden*, y a las ecuaciones (1.5) como las *condiciones complementarias de holgura*. Juntas, forman un conjunto de $m + 2$ ecuaciones con $m + 2$ incógnitas (las dos variables dentro del vector x y los m multiplicadores de Lagrange).

EJERCICIO 1.7: *Compruebe que, cuando* $m = 1$*, las ecuaciones (1.4) y (1.5) constituyen exactamente el mismo sistema de ecuaciones simultáneas que hemos usado para resolver gráficamente el caso de una sola restricción.*

En general, podemos escribir la solución del problema como:

$$x_i^* = x_i^*(b, g) \quad i = 1, 2$$

en donde b es el vector de elementos $b_i \;\; i = 1, ...m$, y g es el vector de las restricciones $g_i \;\; i = 1, ..., m$, que normalmente quedarán descritas por una serie de parámetros. Dado esto, el valor de la función objetivo en la solución se puede denominar $f(x^*) \equiv v(b, g)$. La función $v(\cdot)$ suele llamarse *función objetivo indirecta*. Puesto que en la solución al problema se tienen que satisfacer las condiciones complementarias de holgura (1.5), tenemos que $v(b, g) = L(x^*, \delta)$.

Por último, vamos a considerar el significado económico de los multiplicadores. Para ello, diferenciamos la función de Lagrange en el vector óptimo, con respecto a uno de los parámetros b_k que definen una restricción. Por supuesto esto es equivalente a diferenciar la función indirecta de utilidad con respecto a b_k.

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial b_k} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial b_k} - \sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{j=1}^{m} \delta_j \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial b_k}\right] + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \delta_j}{\partial b_k}\left[b_j - g_j(x^*)\right] + \delta_k$$

Juntando los dos primeros términos, se obtiene:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial b_k} = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{m} \delta_j \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_i}\right]\frac{\partial x_i}{\partial b_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \delta_j}{\partial b_k}\left[b_j - g_j(x^*)\right] + \delta_k$$

Pero, por las condiciones de primer orden (1.4), el primer término vale exactamente 0, lo que nos deja con:

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \delta_j}{\partial b_k}\left[b_j - g_j(x^*)\right] + \delta_k$$

Ahora bien, usando la condición complementaria de holgura (1.5), para que

$$\delta_j\left[b_j - g_j(x^*)\right] = 0$$

tiene que ser cierto que o bien

$$\left[b_j - g_j(x^*)\right] = 0 y \delta_j \geq 0$$

en cuyo caso $\frac{\partial \delta_j}{\partial b_k}\left[b_j - g_j(x^*)\right] = 0$ o bien $\delta_j\left[b_j - g_j(x^*)\right] > 0$ y $\delta_j = 0$ (en cuyo caso de nuevo $\frac{\partial \delta_j}{\partial b_k}\left[b_j - g_j(x^*)\right] = 0$). Consecuentemente, resulta que:

$$\frac{\partial L(x^*, \delta)}{\partial b_k} = \delta_k$$

Finalmente, puesto que las condiciones complementarias de holgura implican que $L(x^*, \delta) = f(x^*)$, resulta que el multiplicador de Lagrange mide el aumento del valor de la función objetivo en el óptimo cuando se relaja una de las restricciones marginalmente. Nótese que, si la restricción en cuestión se saturaba en el vector óptimo, entonces $\delta_k > 0$, y al relajar la restricción podemos esperar que aumente el valor de la función objetivo en el nuevo óptimo. La lógica de esto es que, al relajar una restricción saturada, se puede cambiar el vector óptimo, aunque el vector óptimo inicial todavía ha de ser factible. Por tanto, el nuevo vector óptimo nunca puede resultar en un valor inferior de la función objetivo. Por otra parte, si la restricción en cuestión no se satura en el óptimo, entonces $\delta_k = 0$, y relajar más esta restricción no afecta ni a la solución ni al valor de la función objetivo.

Que los multiplicadores de Lagrange midan el aumento que se obtendría en el valor de la función objetivo al relajar una restricción conduce a que los economistas se refieran a ellos como *el precio sombra* de un resurso escaso. Recuerde que los valores de b miden resursos escasos, puesto que estos valores son los que restringen el valor que pueden tomar las funciones $g_i(x)$. Si preguntamos a un individuo cuánto estaría dispuesto a sacrificar *en unidades de su función objetivo* para obtener un incremento marginal en el valor de un recurso escaso (uno de los b_k), la respuesta será que estaría dispuesto a sacrificar como mucho δ_k unidades de su función objetivo, puesto que esto es el aumento que espera obtener a cambio.

1.2 Resumen

1. Un problema de optimización restringida es la selección del vector entre un conjunto de vectores factibles, que más favorece un objetivo concreto. Un vector que resuelve un problema de optimización restringida se denomina un vector óptimo.

2. El conjunto factible se define mediante una serie de desigualdades de la forma $g_i(x) \leq b_i$.

3. Si cada función $g_i(x)$ es creciente y convexa, entonces el conjunto factible es acotado, cerrado y convexo.

4. El objetivo a alcanzar se manifiesta mediante una relación ordenada de preferencias.

5. Si las preferencias son racionales, entonces existe un subconjunto del conjunto factible cuyos miembros son óptimos.

6. Si las preferencias son racionales y estrictamente monótonas, entonces cualquier vector óptimo tiene que hallarse sobre la frontera del conjunto factible (es decir, por lo menos una restricción debe saturarse).

7. Si las preferencias son racionales, estrictamente monótonas y estrictamente convexas entonces únicamente hay un vector óptimo.

8. Para localizar el vector óptimo, es conveniente representar las preferencias por una función objetivo derivable.

9. La función objetivo debe ser continua (preferencias racionales) y creciente (preferencias estrictamente monótonas). Si además es estrictamente cóncava entonces representa adecuadamente unas preferencias estrictamente convexas.

10. La solución al problema se puede encontrar resolviendo, simultáneamente, las condiciones de primer orden y las condiciones complementarias de holgura del problema de Lagrange.

11. Los multiplicadores de Lagrange miden el incremento en el valor de la función objetivo en la solución cuando se relaja la correspondiente restricción.

Capítulo 2
El modelo tradicional del consumidor

Capítulo 2

El modelo tradicional del consumidor

En este capítulo, analizamos el problema de la elección de un consumidor con una renta (riqueza) fija, w, y dos bienes x_i $i = 1, 2$, con precios p_i $i = 1, 2$ también fijos. El problema del consumidor consiste en asignar su renta a la compra de cantidades no negativas de los dos bienes de acuerdo con un objetivo preestablecido.

2.1 Maximización de utilidad

En esta sección, vamos a analizar el problema del consumidor de acuerdo con el supuesto de que su objetivo es maximizar su satisfacción, o utilidad. Para ello, suponemos que el individuo tiene unas preferencias sobre el espacio bidimensional que representa todos los posibles vectores de diferentes cantidades de los dos bienes (estamos suponiendo que los bienes son perfectamente divisibles, para que se pueda contemplar cualquier cantidad, entera o no, de cualquiera de ellos) como las que hemos descrito en el capítulo anterior. De acuerdo con esto, supondremos que maximiza una función objetivo, llamada función de utilidad y que denotamos con $u(x)$, que representa las preferencias. Supondremos que u es estrictamente creciente y cóncava, con utilidad marginal decreciente en ambos bienes, y derivada cruzada no negativa.

Puesto que la compra de una cantidad x_i del bien i supone una cantidad de dinero $p_i x_i$, el problema del individuo se puede describir como:

$$\max_{x} \; u(x) \text{ s.a } \; p_1x_1 + p_2x_2 \leq w \text{ y } x_i \geq 0 \; i = 1, 2.$$

Las tres restricciones son funciones lineales, por tanto, cada una define un subconjunto compacto y convexo del plano cartesiano, por lo que la intersección de las tres define un conjunto factible compacto y convexo. Por consiguiente, se puede aplicar el método de Lagrange para hallar la solución.

En términos del método de Lagrange, tenemos que definir las condiciones de no negatividad como $-x_i \leq 0$ $i = 1, 2$, y entonces la función de Lagrange es:

$$L(x, \delta) = u(x) + \delta_1 [0 + x_1] + \delta_2 [0 + x_2] + \delta_3 [w - p_1x_1 - p_2x_2]$$

Si x^* es el vector que resuelve el problema, las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} + \delta_i - \delta_3 p_i = 0 \;\; i = 1, 2 \tag{2.1}$$

y las condiciones complementarias de holgura son:

$$\delta_i x_i^* = 0 \ , \ i = 1,2 \ ; \ \ \delta_3 \left[w - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* \right] = 0 \tag{2.2}$$

Primero, nótese que en la solución al problema, tiene que ser cierto que la restricción presupuestaria se satura, $w = p_1 x_1^* + p_2 x_2^*$. Para verlo, a partir de la tercera condición complementaria de holgura, si podemos demostrar que $\delta_3 > 0$ en cualquier solución, entonces tiene que seguirse que $w = p_1 x_1^* + p_2 x_2^*$. Escribimos las condiciones de primer orden como:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} + \delta_i = \delta_3 p_i \ \ i = 1,2$$

y multiplicamos esta ecuación por x_i^*, para que, por las condicines complementarias de holgura, desaparezca en cualquier solución el término $\delta_i x_i^*$:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} x_i^* = \delta_3 p_i x_i^* \ \ i = 1,2$$

Ahora, sumemos estas últimas dos ecuaciones para obtener:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} x_i^* = \delta_3 \left(p_1 x_1^* + p_2 x_2^* \right) \leq \delta_3 w$$

Por lo tanto, tenemos que, en cualquier solución:

$$\delta_3 \geq \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} x_i^* \tag{2.3}$$

El lado de la derecha de esta ecuación es necesariamente positivo, puesto que por lo menos uno de los dos bienes x_i^* ha de ser estrictamente positivo (como la utilidad marginal es positiva por hipótesis, cualquier vector con por lo menos una compontente positiva da mayor utilidad que el punto $x_i = 0 \ \ i = 1,2$). En consecuencia, tiene que ser cierto que en cualquier solución al problema con renta w estrictamente positiva, $\delta_3 > 0$ y la tercera restricción se satura.

A su vez, esto implica que la desigualdad de la ecuación (2.3) se puede eliminar (ya que $p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = w$), dejándonos con una ecuación que determina el valor exacto del multiplicador de Lagrange que corresponde a la restricción presupuestaria:

$$\delta_3 = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} x_i^* \tag{2.4}$$

El argumento anterior indica que, con el objeto de calcular el vector óptimo, podemos sustituir la condición complementaria de holgura referida a la restricción presupuestaria, $\delta_3 \left[w - p_1 x_1^* - p_2 x_2^* \right] = 0$, por la ecuación $w = p_1 x_1^* + p_2 x_2^*$. Nótese que esta última ecuación, conocida como la restricción presupuestaria, es una línea recta en el plano de (x_2, x_1), con pendiente igual a $-\frac{p_1}{p_2}$.

Ahora, puesto que $\delta_i \geq 0 \ i = 1,2$, si resulta que en la solución se satisface $x_i^* > 0 \ i = 1,2$, las condiciones complementarias de holgura indican que tenemos que tener

$\delta_i = 0,\ i = 1, 2$. En este caso, las condiciones de primer orden implican que la solución se describe por:

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} = \delta_3 p_i; \quad i = 1, 2 \tag{2.5}$$

Si se divide la primera ecuación de (2.5) por la segunda, se obtiene la condición de que:

$$\frac{\left(\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_2}\right)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{2.6}$$

Es decir, utilizando el hecho de que, por la ecuación (1.1) el lado de la izquierda de (2.6) es (el valor absoluto de) la relación marginal de sustitución, y el lado de la derecha es la pendiente de la restricción, tenemos que la solución es un punto de tangencia entre una curva de indiferencia y la restricción presupuestaria (véase la figura 2.1).

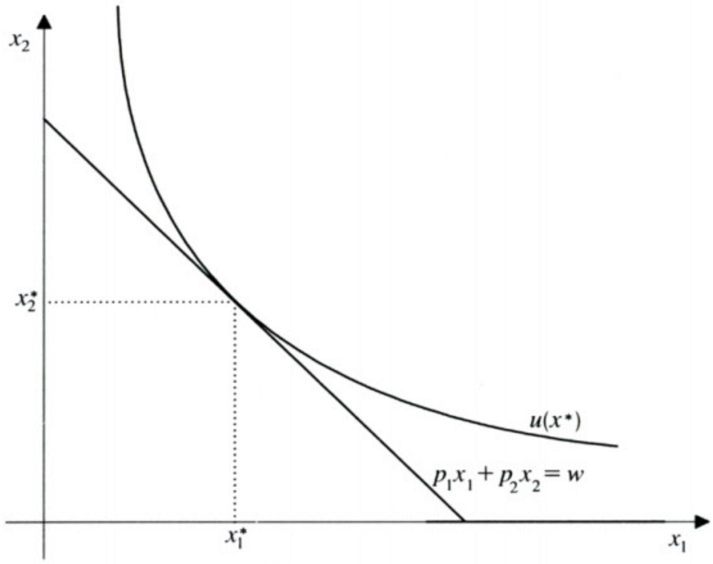


Figura 2.1.

Para el caso de una solución interior, juntas las ecuaciones (2.6) y la restricción presupuestaria, $p_1x_1^* + p_2x_2^* = w$, forman un sistema de dos ecuaciones con dos incognitas (x_1^*, x_2^*), cuya solución simultánea es el vector óptimo para el problema.

Por supuesto, cuando la solución no es interior, es decir, alguno de los dos valores x_1^* o x_2^* es igual a cero (nótese que ambos no pueden ser simultáneamente iguales a cero cuando $w > 0$ puesto que, como ya hemos indicado, la solución tiene que estar sobre la restricción presupuestaria), la solución no vendrá en general definida por una condición de tangencia. En este caso, concocido como solución de esquina, la solución es inmediata en cuanto se decide cuál de las dos coordenadas del vector x^* es igual a cero, ya que, por la restricción presupuestaria, la otra coordenada tiene que ser igual a la renta dividida por el precio del bien en cuestión. En efecto, si denotamos por $\widetilde{x}$ el punto que satisface la ecuación (2.6), podemos describir el óptimo (el punto x^* que satisface simultaneamente las ecuaciones (7.4) y (2.2)) como sigue:

$$x^* = \begin{cases} \widetilde{x} \ \ si \ \widetilde{x}_i \geq 0; \ \ i = 1, 2 \\ (x_i = 0, \ x_j = \frac{w}{p_j}) \ \ si \ \ \widetilde{x}_i < 0; \ i, j = 1, 2; \ \ i \neq j \end{cases}$$

En todo lo que sigue de este capítulo, haremos el supuesto de que la solución del problema del consumidor es estrictamente interior, y por tanto, viene determinada por la satisfacción simultánea de la restricción presupuestaria y la condición de tangencia, (2.6).

Por supuesto, podemos escribir el vector óptimo como una función del vector de precios, $p = (p_1, p_2)$, y la renta, w, es decir, $x^* = (x_1^*(p,w), x_2^*(p,w))$, en donde $x_i^*(p,w)$ es la *curva de demanda Marshalliana* del bien i, y, del mismo modo, tenemos que la función de utilidad indirecta es $u(x^*) = v(p,w)$.

EJERCICIO 2.1: *Demuestre que, con la excepción del caso óbvio de $p^b = \alpha p^a$ y $w^b = \alpha w^a$, es imposible que dos vectores distintos (p^a, w^a) y (p^b, w^b) ambos dan la misma demanda Marshalliana (es decir, $x^*(p^a, w^a) \neq x^*(p^b, w^b)$).*

Como estamos suponiendo una solución estrictamente interior, tenemos $\delta_i = 0 \;\; i = 1,2$, y, por tanto, definimos $\delta_3 \equiv \delta$. Las tres ecuaciones que determinan las tres incógnitas, x^* y δ, son:

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = w \; ; \qquad \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} = \delta p_i; \;\; i = 1,2 \tag{2.7}$$

Considerérese el efecto sobre la utilidad en el óptimo de un aumento en la renta. La derivada de $v(p,w) = u(x^*)$ con respecto de w es:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial w} = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial w}$$

Utilizando las condiciones de primer orden de (2.7), tenemos:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial w} = \delta\left(p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial w}\right)$$

Pero, puesto que en cualquier óptimo (es decir, tanto antes como después del aumento en w) se tiene que verificar la restricción presupuestaria, primera ecuación en (2.7), podemos derivar esta restricción con respecto de w, lo que nos revela que:

$$p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial w} + p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial w} = 1$$

y que, cuando se sustituye en la ecuación anterior, nos indica:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial w} = \delta > 0$$

tal y como ya se demostró al final del capítulo anterior. En este sentido, nos podemos referir a δ como la *utilidad marginal de la renta*. Puesto que esta es estrictamente positiva, un aumento en la renta siempre aumenta la utilidad.

Por otro lado, considérese el efecto de un aumento en alguno de los precios p_i. Derivando la función de utilidad indirecta, tenemos:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_i} = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial p_i} \quad i = 1,2$$

Otra vez, utilizando las condiciones de primer orden de (2.7), tenemos:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_i} = \delta\left(p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial p_i} + p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial p_i}\right) \quad i = 1,2$$

Ahora, si diferenciamos la restricción presupuestaria con respecto de p_i, se obtiene que:

$$x_i^* + p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_i} = 0 \;\; i = 1, 2$$

con lo que:

$$\frac{\partial v(p, w)}{\partial p_i} = -\delta x_i^* < 0 \;\; i = 1, 2$$

Es decir, dentro del supuesto de que la solución es estrictamente interior, un aumento en uno de los precios necesariamente reduce la utilidad del individuo.

Podemos juntar los dos resultados anteriores, para escribir:

$$\frac{\partial v(p, w)}{\partial p_i} = -\frac{\partial v(p, w)}{\partial w} x_i^* \quad \Rightarrow \quad x_i^* = -\frac{\left(\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_i}\right)}{\left(\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}\right)} \;;\; i = 1, 2$$

que es una ecuación conocida como *la identidad de Roy.* La identidad de Roy proporciona una manera muy útil de escribir las funciones de demanda Marshallianas.

Finalmente, también es cierto que $v(p, w)$ es una función cuasi-convexa. Sea x^{*i} la solución con precios (p_1^i, p_2^i) y renta w_i para $i = 1, 2$. Por otro lado, sea x^{*3} la solución cuando los precios son $(\lambda p_1^1 + (1-\lambda)p_1^2, \lambda p_2^1 + (1-\lambda)p_2^2) = (p_1^3, p_2^3)$ y renta $\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 = w_3$, en donde $0 \leq \lambda \leq 1$. Ahora, es imposible que $p_1^i x_1^{*3} + p_2^i x_2^{*3} > w_i$ para $i = 1, 2$ simultáneamente (en palabras, no es posible que el vector x^{*3} sea factible con ambos vectores iniciales de parámetros). Pues si fuera posible, tendríamos $\lambda p_1^1 x_1^{*3} + \lambda p_2^1 x_2^{*3} > \lambda w_1$ y $(1-\lambda)p_1^2 x_1^{*3} + (1-\lambda)p_2^2 x_2^{*3} > (1-\lambda)w_2$, que sumados dan

$$(\lambda p_1^1 + (1-\lambda)p_1^2)x_1^{*3} + (\lambda p_2^1 + (1-\lambda)p_2^2 x_2^{*3} > \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2$$

es decir $p_1^3 x_1^{*3} + p_2^3 x_2^{*3} > w_3$, que desde luego es imposible puesto que x^{*3} es el vector óptimo con p_1^3, p_2^3 y w_3 (así necesariamente es factible). Por tanto, tiene que cumplirse o bien $p_1^1 x_1^{*3} + p_2^1 x_2^{*3} < w_1$, o bien $p_1^2 x_1^{*3} + p_2^2 x_2^{*3} < w_2$, o ambos (es decir, x^{*3} es factible con por lo menos un conjunto de parámetros iniciales). Pero esto implica directamente que $x^{*i} \succsim x^{*3}$ para por lo menos un i, o

$$u(x^{*3}) \leq \max\{u(x^{*1}), u(x^{*2})\}$$

Luego, por la definición de la función indirecta de utilidad, tenemos

$$v(p^3, w_3) \leq \{v(p^1, w_1), v(p^2, w_2)\}$$

con lo cual es una función cuasi-convexa.

Quizá conviene considerar una representación gráfica de la función indirecta de utilidad, junto con la identidad de Roy. Si se mantiene fijo el valor de uno de los precios, digamos p_j, podemos representar los contornos de $v(p, w)$ en el espacio definido por la renta y el precio del otro bien (digamos p_i). Puesto que es creciente en w, decreciente en p_i, y cuasi-convexa, la representación implicada es como la de la figura 2.2. Por otro lado, directamente del teorema de la función implícita, la pendiente del contorno es

$$\left.\frac{dw}{dp_i}\right|_{dv=0} = -\frac{\left(\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_i}\right)}{\left(\frac{\partial v(p,w)}{\partial w}\right)}$$

Pero a su vez, de la identidad de Roy, esto es igual a x_i^*.

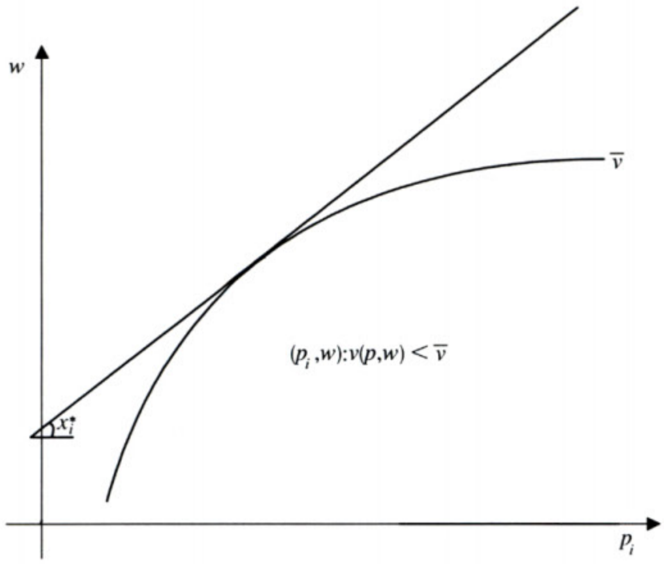


Figura 2.2.

2.2 La minimización del gasto

Como resulta obvio de la sección anterior, además de maximizar la utilidad cuando la renta es w, el vector x^* también minimiza el gasto en bienes condicionado a que la utilidad sea $u(x) = u(x^*) = v(p, w)$. Este hecho se suele denominar como el *aspecto dual* del problema del consumidor. En efecto, considere el problema siguiente:

$$\min_{x} \; g(p, x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \;\; s.a. \;\; x_i \geq 0 \;\; i = 1, 2 \;\; y \;\; u(x) \geq k$$

en donde k es una constante. Dejemos de lado las condiciones de no negatividad y notemos, que la función objetivo es lineal y que el conjunto de soluciones factibles es compacto y estrictamente convexo (es el área sobre o por encima de una curva de indiferencia). Puesto que el problema de minimización de $g(p, x)$ es equivalente a la maximización de $-g(p, x)$, que también es una función lineal (y por tanto, cóncava), sabemos, por el capítulo anterior, que existe un óptimo único, y que la restricción $u(x) \geq k$ debe saturarse. Sea x^0 la solución. Las curvas de demanda correspondientes, $x^0(p, k)$, se llaman las *curvas de demanda compensada o Hicksiana* (por el famoso economista John Hicks).

Formalmente entonces, el problema de maximización restringida es el de maximizar $-g(p, x) = -(p_1 x_1 + p_2 x_2)$ sujeto a la restricción de que la utilidad sea mayor o igual a una determinada constante, $u(x) \geq k$, lo cual escribimos como $-u(x) \leq -k$ (estamos suponiendo directamente que la solución es interior. Recuerda que siempre se puede saber si la solución es de esquina si, al resolver el problema general, se encuentra que una de las coordinadas es negativa). Pero minimizar $g(p, x)$ es exactamente igual a maximizar $-g(p, x)$, así que nuestro problema puede facilmente estudiarse de acuerdo con un problema de maximización. En este caso, notar que la función objetivo $(-g(p, x))$ es lineal en x, y por tanto es cóncava, mientras que la función correspondiente a la restricción $(-u(x))$ es el negativo de una función cóncava, y por tanto es convexa. En resumen, se satisfacen las condiciones para que el método de Lagrange nos proporciona la (única) solución.

La función de Lagrange es

$$L(x, \delta) = -(p_1 x_1 + p_2 x_2) + \delta(-k + u(x))$$

Siendo la solución al problema el vector x^0, las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -p_i + \delta \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} = 0 \;\; i = 1, 2$$

y la condición complementaria de holgura es

$$\delta(-k + u(x^0)) = 0$$

Ahora, las condiciones de primer orden se pueden escribir como

$$\delta \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} = p_i \;\; i = 1, 2$$

de donde, puesto que $p_i > 0$ y $\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} > 0$ para ambos $i = 1, 2$, sabemos que $\delta > 0$, es decir (de la condición complementaria de holgura) la restricción tiene que saturarse en la solución, $u(x^0) = k$. Por otra parte, dividiendo la primera condición de primer orden por la segunda, se obtiene la ecuación

$$\frac{\left(\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_2}\right)} = \frac{p_1}{p_2}$$

que junto con la ecuación $u(x^0) = k$ nos proporciona la solución al problema.

Por supuesto, es evidente que si fijamos $k = v(p, w)$, entonces es necesariamente cierto que $x^0 = x^*$, y que $g(p, x^0) = w$. Es decir, en este caso los problemas de maximización de utilidad y de minimización de gasto coinciden en la misma solución. Gráficamente, es inmediato concluir que un aumento en la razón de precios $\frac{p_1}{p_2}$ conlleva un desplazamiento de x^0 hacia arriba (y a la izquierda) alrededor de la curva de indiferencia $u(x) = k$. Así, se tiene el resultado de que:

$$\frac{\partial x_i^0}{\partial p_i} < 0 \quad \frac{\partial x_i^0}{\partial p_j} > 0 \quad i, j = 1, 2 \;\; i \neq j \tag{2.8}$$

También, véase el siguiente resultado, conocido como el *Lema de Shephard.* Definimos la función indirecta de gasto como $G(p, k) = g(p, x^0)$, y entonces

$$\frac{\partial G(p, k)}{\partial p_i} = x_i^0 \;\; i = 1, 2 \tag{2.9}$$

Para demostrar (2.9), derivamos la función de gasto indirecto

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(p, k)}{\partial p_i} &= \frac{\partial g(p, x^0)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^0}{\partial p_i} + \frac{\partial g(p, x^0)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^0}{\partial p_i} + x_i^0 \\ &= p_1 \frac{\partial x_1^0}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial x_1^0}{\partial p_i} + x_i^0 \end{aligned}$$

Pero, las condiciones de primer orden del problema de minimizacion restringida tratado arriba son (suponiendo una solución interior)

$$p_i = \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_i} \;\; \text{para} \;\; i = 1, 2$$

así que tenemos

$$\frac{\partial G(p,k)}{\partial p_i} = \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^0}{\partial p_i} + \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^0}{\partial p_i} + x_i^0$$

Finalmente, como sabemos que en la solución se tiene siempre $u(x^0) = k$, derivando resulta que

$$\frac{\partial u(x^0)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^0}{\partial p_i} + \frac{\partial u(x^0)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^0}{\partial p_i} = 0$$

lo que nos da el resultado buscado.

Directamente de la lemma de Shephard y la primera de las desigualdades en (2.8), resulta que la funcion de gasto indirecto es cóncava en cada uno de los dos precios, $\frac{\partial^2 G(p,k)}{\partial p_i^2} < 0 \ i = 1, 2$. Es más, resulta que la función de gasto indirecto es cóncava en el vector de precios. Para ver esto, sea x^{0i} la solución al problema de minimización de gasto con el parámetro k y con dos vectores de precios diferentes p^i con $i = 1, 2$. Luego sea x^{03} la solución con el mismo k y con $p^3 = \lambda p^1 + (1-\lambda)p^2$, en donde por supuesto $0 \leq \lambda \leq 1$. Por definición entonces, resulta que

$$G(p^3, k) = (\lambda p_1^1 + (1-\lambda)p_1^2)x_1^{03} + (\lambda p_2^1 + (1-\lambda)p_2^2)x_2^{03}$$

Pero puesto que $u(x^{03}) = k$, sabemos que con cualquier vector de precios x^{03} es una manera factible de obtener una utilidad de k, aunque no es necesariamente la manera que minimiza el coste. Por tanto, resulta que

$$G(p^1, k) \leq p_1^1 x_1^{03} + p_2^1 x_2^{03} \ \text{ y } \ G(p^2, k) \leq p_1^2 x_1^{03} + p_2^2 x_2^{03}$$

Tomando una combinación convexa, tenemos

$$\begin{aligned}
\lambda G(p^1, k) + (1-\lambda)G(p^2, k) &\leq \lambda(p_1^1 x_1^{03} + p_2^1 x_2^{03}) + (1-\lambda)(p_1^2 x_1^{03} + p_2^2 x_2^{03}) \\
&= (\lambda p_1^1 + (1-\lambda)p_1^2)x_1^{03} + (\lambda p_2^1 + (1-\lambda)p_2^2)x_2^{03} \\
&= G(p^3, k)
\end{aligned}$$

que es la desigualdad de Jensen para funciones cóncavas.

De manera semejante que lo que hicimos para la identidad de Roy, podemos representar la lemma de Shephard gráficamente. Incluso es ahora aun más facil. Sabemos que $G(p, k)$ es una función creciente y cóncava en p_i para cualquiera de $i = 1, 2$, y que su pendiente es exáctamente x_i^0. Todo esto se representa en la figura 2.3

Por último, si derivamos el lema de Shephard con respecto del precio p_j, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 g(p, x^0)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial x_i^0}{\partial p_j} \quad i, j = 1, 2$$

Pero, del teorema de Young, resulta que:

$$\frac{\partial^2 g(p, x^0)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 g(p, x^0)}{\partial p_j \partial p_i}$$

y entonces, tenemos el resultado de que las derivadas cruzadas primeras de las funciones de demanda compensada son iguales:

$$\frac{\partial x_j^0}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^0}{\partial p_j} \quad i, j = 1, 2$$

EJERCICIO 2.2: *¿Cuál es el valor de $G(p, v(p, w))$? Utilice su respuesta para demostrar que el multiplicador del problema de minimización del gasto es igual a la inversa del multiplicador del problema de maximización de utilidad.*

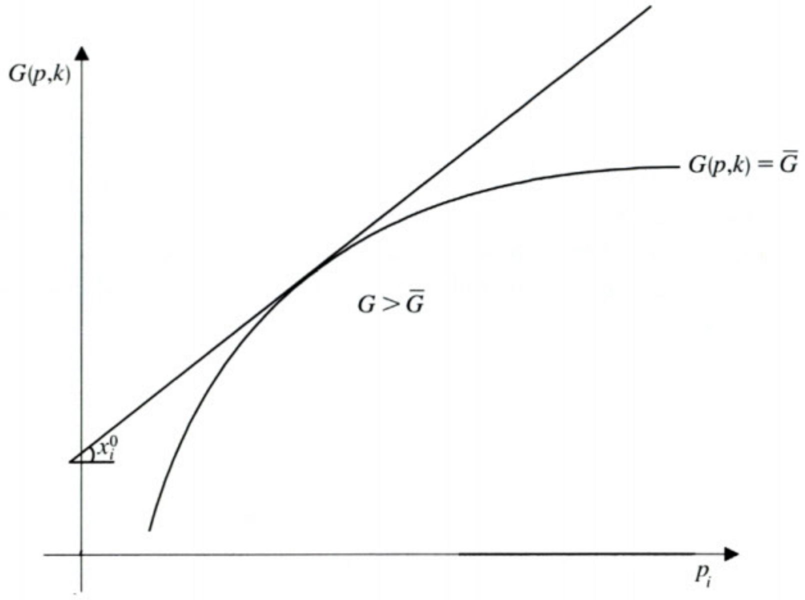


Figura 2.3.

2.3 Estática comparativa de la demanda Marshalliana

Dados el vector de precios y la renta del consumidor, la solución del problema de maximización de utilidad es un vector de demandas, $x^* = (x_1^*(p,w), x_2^*(p,w))$. En esta sección, nos preguntamos sobre cómo varía el vector de demandas al variar cualquiera de sus argumentos (precios o renta). En todo momento, supondremos que la solución es interior, es decir, $x_i^* > 0; \quad i = 1,2$. En este caso, x^* es la solución simultanea de la restricción presupuestaria y la condición de tangencia:

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = w \ ; \qquad \frac{\left(\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_2}\right)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{2.10}$$

En primer lugar, nótese que si multiplicamos cada precio y la renta por una constante positiva m, ninguna de las dos ecuaciones en (2.10) se ve afectada. Por tanto, el vector x^* no varía cuando todos los precios y la renta cambian en la misma proporción:

$$x^*(p,w) = x^*(mp, mw) \ \ \forall m > 0$$

En términos matemáticos, este hecho indica que las funciones de demanda son homogéneas de grado 0, y implica que lo que realmente importante para el problema no es el valor absoluto de los precios sino el valor del precio relativo, $\frac{p_1}{p_2}$. Por supuesto, esto también implica que la función indirecta de utilidad también es homogénea de grado 0.

Dada la homogeneidad de las funciones de demanda, podemos aplicar el Teorema de Euler sobre funciones homogéneas:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial x_i^*}{\partial p_2} p_2 + \frac{\partial x_i^*}{\partial w} w = 0; \ \ i = 1,2 \tag{2.11}$$

Si se divide (2.11) por x_i^*, se obtiene directamente que la suma de las elasticidades es cero en el óptimo. También, si resulta que la demanda de cada bien es independiente del precio del otro (por ejemplo, el caso de utilidad Cobb-Douglas), entonces (2.11) indica que necesariamente $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ y $\frac{\partial x_i^*}{\partial w}$ tienen signos opuestos.

Para estudiar con mayor detalle los efectos de variaciones en los precios y la renta, es habitual hacer uso de la *ecuación de Slutsky*, que divide el efecto de un aumento en un precio sobre la demanda de los bienes en dos efectos distintos. Por un lado, el *efecto sustitución* identifica la variación en la demanda bajo el supuesto de que el consumidor es compensado por el aumento en precio con una renta adicional suficiente como para obtener la misma utilidad (con los nuevos precios) que disfrutaba antes del aumento del precio, y por otro lado, el *efecto renta*, que efectivamente es el efecto de la retirada de la renta compensatoria hipotética:

$$\frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^0(p,k)}{\partial p_j} - x_j^* \frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial w}; \quad i,j = 1,2$$

en donde $k = v(p,w)$.

Para demostrar la ecuación de Slutsky, basta con derivar $x_i^0(p,k)$ con respecto a p_j, condicionada a que $w = G(p,k)$. Considerando que $x_i^0(p,k) = x_i^*(p, G(p,k))$:

$$\frac{\partial x_i^0(p,k)}{\partial p_j} = \left.\frac{\partial x_i^*(p,G(p,k))}{\partial p_j}\right|_{dg=0} + \frac{\partial x_i^*(p,G(p,k))}{\partial g}\frac{\partial G(p,k)}{\partial p_j}$$

Recordando que, por el lema de Shephard y el aspecto dual del problema, $\frac{\partial G(p,k)}{\partial p_j} = x_j^0 = x_j^*$ tenemos:

$$\frac{\partial x_i^0(p,k)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial p_j} + x_j^* \frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial w} \quad i,j = 1,2 \tag{2.12}$$

Simplemente reordenando (2.12) se obtiene la ecuación de Slutsky.

Haciendo uso de las ecuaciones (2.8), de (2.12) podemos concluir que:

$$\frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial p_i} + x_i^* \frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial w} < 0; \quad \frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial p_j} + x_j^* \frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial w} > 0; \quad i,j = 1,2; \quad i \neq j$$

es decir:

$$-\left(\frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial p_j}\right)\left(\frac{1}{x_j^*}\right) < \frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial w} < -\left(\frac{\partial x_i^*(p,w)}{\partial p_i}\right)\left(\frac{1}{x_i^*}\right) \quad i,j = 1,2 \;\; i \neq j$$

Nótese que aunque esto no establece los signos de los efectos de las variaciones de los parámetros sobre la demanda, sí nos permite decir que:

1. Si el bien es normal, entonces es ordinario, $\frac{\partial x_i^*}{\partial w} > 0 \implies \frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$.
2. Si la demanda de un bien es decreciente en el precio del otro bien, entonces el bien es normal, $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} < 0 \Rightarrow \frac{\partial x_i^*}{\partial w} > 0$.

Para decir más, es necesario hacer nuevos supuestos sobre el problema. Por ejemplo, en la sección anterior, hemos visto que:

$$\frac{\partial v(p,w)}{\partial p_i} = -\delta x_i^* < 0 \;\; i = 1,2$$

derivando esta expresión con respecto de w, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 v(p,w)}{\partial p_i \partial w} = -\left[\frac{\partial \delta}{\partial w}x_i^* + \delta\frac{\partial x_i^*}{\partial w}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 v(p,w)}{\partial w \partial p_i} = -\left[\frac{\partial \delta}{\partial w}x_i^* + \delta\frac{\partial x_i^*}{\partial w}\right] \quad i = 1,2$$

en donde se ha utilizado el Teorema de Young.

Ahora, puesto que, como ya hemos establecido $\frac{\partial v(p,w)}{\partial w} = \delta$ resulta que $\frac{\partial^2 v(p,w)}{\partial w \partial p_i} = \frac{\partial \delta}{\partial p_i}$, y entonces reordenando se obtiene:

$$\delta\frac{\partial x_i^*}{\partial w} = -\left[\frac{\partial \delta}{\partial p_i} + x_i^*\frac{\partial \delta}{\partial w}\right] \quad i = 1,2 \tag{2.13}$$

Por lo tanto, si resulta que la utilidad marginal de la renta es decreciente en los precios, $\frac{\partial \delta}{\partial p_i} < 0$, y que la función de utilidad indirecta es cóncava en la renta, $\frac{\partial \delta}{\partial w} < 0$, como es bastante razonable (véase la figura 2.4), entonces $\frac{\partial x_i^*}{\partial w} > 0$.

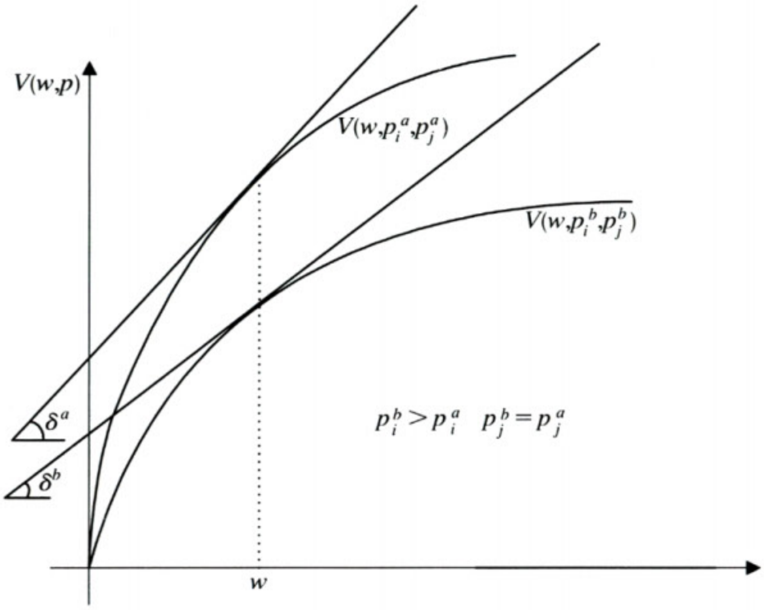


Figura 2.4.

En la figura 2.4, se representa la función de utilidad indirecta como función de la renta. El supuesto de $\frac{\partial \delta}{\partial w} < 0$ queda de manifiesto en que se ha representado la función mediante curvas cóncavas. En segundo lugar, al aumentar un precio, puesto que la utilidad indirecta es decreciente en precios, la curva se baja. El supuesto de $\frac{\partial \delta}{\partial p_i} < 0$ queda de manifiesto en que, a un nivel de renta en concreto w, la pendiente de la función con p_i^a es mayor que con p_i^b, siendo $p_i^b > p_i^a$, es decir, $\delta^a > \delta^b$.

EJERCICIO 2.3: *Demuestre que la ecuación (2.13) también se puede encontrar diferenciando la identidad de Roy con respecto de cualquiera de los dos precios.*

EJERCICIO 2.4: *Considere un problema de elección de consumidor con una función de utilidad estrictamente creciente y cóncava en dos bienes, x_i $i = 1,2$. Suponga sin más que las dos variables toman solamente valores no negativos.*

a) Explique el sentido económico del multiplicador de Lagrange considerándo un aumento de la renta de una unidad.

b) Demuestre matemáticamente que si la función de utilidad es separable, es decir,

$u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$, *entonces:*

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w} = \left(\frac{\eta_1(x_1^*)}{\eta_2(x_2^*)}\right)\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial w}\right)$$

en donde $\eta_i(x_i)$ *es definido por* $\eta_i(x_i) = -\frac{u_i''(x_i)}{u_i'(x_i)}$

c) *Explique el sentido económico de este resultado para los signos de los efectos de la renta sobre la demanda de los dos bienes.*

2.4 Resumen

1. Un problema típico de elección de un consumidor consiste en maximizar una función de utilidad sujeta a restricciones de no-negatividad sobre los bienes y una restricción de renta.

2. En una solución interior, el valor óptimo de ambos bienes es estrictamente positivo, es decir, las restricciones de no-negatividad no se saturan.

3. A partir de la solución del problema, se puede definir la demanda Marshalliana de los bienes (demanda en función de los precios y la renta).

4. Sustituyendo las demandas Marshallianas en la función de utilidad se obtiene la función de utilidad indirecta. Esta función es cuasi-convexa, creciente y la renta, y decreciente en los precios.

5. Las demandas Marshallianas son homogéneas de grado 0.

6. La identidad de Roy establece que la demanda Marshalliana de un bien es el negativo de la razón entre el efecto de una variación en el precio del bien en cuestión sobre la utilidad en el óptimo y el efecto de una variación en la renta sobre la utilidad en el óptimo.

7. El problema dual estudia la minimización del gasto en bienes sujeto a una restricción que garantiza un nivel mínimo de utilidad. La solución se conoce como las funciones de demanda Hicksianas.

8. Sustituyendo las demandas Hicksianas en la función de gasto se obtiene la función de gasto indirecto, que es creciente y cóncava en ambos precios, creciente en el valor que restringe la utilidad, y cóncava en el vector de precios.

9. El lema de Shephard establece que el efecto de un aumento en el precio de un bien sobre el gasto mínimo en el problema dual es igual a la cantidad óptima del bien en cuestión.

10. La ecuación de Slutsky establece que el efecto total de una variación en un precio siempre se puede descomponer en un efecto sustitución y un efecto renta.

11. Si la demanda de un bien es decreciente en el precio del otro bien, entonces el bien es normal. También, es suficiente para que un bien sea normal que la utilidad marginal de la renta sea decreciente en los precios y que la función de utilidad indirecta sea cóncava en la renta.

12. Si un bien es normal, entonces es ordinario.

Capítulo 3
Decisiones intertemporales

Capítulo 3

Decisiones intertemporales

Una de las aplicaciones más importantes del modelo básico de elección es el estudio de las decisiones intertemporales. Para mantener el aspecto puramente bidimensional del modelo, en principio vamos a considerar únicamente decisiones con dos períodos de tiempo - "el presente" que indicamos por el período 1, y "el futuro" que indicamos por el período 2. No obstante, veremos más adelante como el mismo modelo puede ser aplicado con facilidad a un entorno con tres períodos.

Asimismo, se ha de que reducir el espacio de los bienes a una única variable de elección en cada período. En realidad, esto no es demasiado preocupante por el siguiente motivo. Sea $x_i = p_1^i c_1^i + p_2^i c_2^i$ la cantidad de dinero necesaria para realizar un consumo de c_1^i unidades del primer bien y c_2^i del segundo en el período i cuando los precios son p_1^i y p_2^i respectivamente. Dado esto, el modelo se puede interpretar simplemente como la elección de la manera más correcta de distribuir una riqueza inicial entre dos períodos de consumo. Una vez que se haya establecido el reparto óptimo $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, siempre será posible rehacer, para cada período, el modelo de elección básico con más de un bien con la correspondiente sustitución de x_i^* por la riqueza constante del período. En realidad, para que el proceso así indicado funcione, debemos entender que la función de utilidad que se utiliza en el primer paso (la elección del reparto óptimo de dinero entre períodos) sea la función indirecta de utilidad, mientras que para el segundo paso (la elección del reparto óptimo de dinero entre bienes en un período cualquiera) se debe utilizar la función de utilidad tradicional. Esta será la interpretación que se usará aquí.

3.1 Supuestos y descripción del problema

Supondremos que un individuo posee inicialmente un vector de riquezas que indicaremos por $w = (w_1, w_2)$, que debe entenderse como un ingreso de una cantidad de dinero de w_1 al principio del período 1 y un ingreso de w_2 al principio del período 2. Por supuesto, cualquiera de las dos cantidades w_i puede ser nula, aunque el problema sería trivial si ambas dotaciones fueran iquales a 0. El objetivo del individuo consiste en repartir su vector de riquezas inicial entre los dos períodos de tal modo que se maximice una función de utilidad bien definida.

Para empezar, supondremos que el individuo dispone de un sistema financiero que le permite ahorrar y pedir prestado dinero a un tipo de interés constante, $r \geq 0$. Si el individuo decide ahorrar una cantidad de dinero a del primer período hacia el segundo, entonces tendrá $x_1 = w_1 - a$ para gastar en el primer período, mientras que su gasto del segundo período debe satisfacer $x_2 \leq w_2 + a + ra = w_2 + (1+r)a$. Como caso especial, si $r = 0$ el ahorro de a es simplemente una transferencia de dinero del período 1 hacia el periodo 2. Como es lógico, se restringirá el ahorro hasta un máximo de w_1, es decir, como mucho se puede ahorrar toda la riqueza del primer período, $a \leq w_1$. Por otro lado, si el individuo decide pedir prestado, entonces debe pagar un montante de intereses junto con la devolución del préstamo en el segundo período. Si pide un préstamo de b, entonces en el primer período dispondrá de $x_1 = w_1 + b$ para gastar, mientras que en el segundo período, su gasto debe satisfacer la desigualdad $x_2 \leq w_2 - b - rb = w_2 - (1+r)b$. Por razones lógicas, el individuo solamente podrá pedir prestado lo que es capaz de devolver (junto con los intereses), es decir, el valor máximo de b se puede encontrar haciendo que el valor máximo de x_2 sea 0, un cálculo que indica inmediatamente que el préstamo máximo es $\frac{w_2}{1+r}$, es decir, $b \leq \frac{w_2}{1+r}$. Otra vez, para el caso especial de $r = 0$ un préstamo es simplemente una transferencia de dinero del período 2 al 1.

Para el caso sencillo descrito arriba, el tipo de interés es independiente del tipo (y cantidad) de operación; ahorro o préstamo. Este hecho simplifica el modelo considerablemente, y se invita al lector a que extienda el análisis con un tipo de interés mayor para los préstamos que para los ahorros. Para el modelo sencillo, es fácil establecer la restricción presupuestaria financiera como:

$$x_2 \leq w_2 + (1+r)(w_1 - x_1) \tag{3.1}$$

Para ver esto, nótese que si el individuo decide ahorrar, entonces, como acabamos de ver, tendrá $x_1 = w_1 - a$, es decir, $a = w_1 - x_1 > 0$. Al sustituir esto dentro de la ecuación para el gasto máximo en el período 2 se obtiene:

$$x_2 \leq w_2 + (1+r)a = w_2 + (1+r)(w_1 - x_1)$$

tal y como se indica en (3.1).

En segundo lugar, si decide por un préstamo, tenemos $x_1 = w_1 + b$, es decir, $b = x_1 - w_1 > 0$. Al sustituir esto dentro de la ecuación para el gasto máximo del segundo período tenemos:

$$x_2 \leq w_2 - (1+r)b = w_2 - (1+r)(x_1 - w_1) = w_2 + (1+r)(w_1 - x_1)$$

Otra vez, hemos llegado a (3.1).

Como siempre, nos vamos a referir a la frontera de la restricción de la riqueza intertemporal como la recta de equilibrio o recta presupuestaria intertemporal, y se define cuando la ecuación (3.1) se satura, $x_2 = w_2 + (1+r)(w_1 - x_1)$. Nótese, que si definimos $g(x) \equiv x_2 - [w_2 + (1+r)(w_1 - x_1)]$, la recta de equilibrio intertemporal es simplemente el contorno $g(x) = 0$. En particular, la pendiente de la recta de presupuestaria intertemporal es:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dg(x)=0} = -(1+r) \tag{3.2}$$

La restricción presupuestaria para este problema se representa gráficamente en la figura 3.1. Sobre todo, nótese la semejanza entre el conjunto presupuestario para el problema de elección intertemporal y el que corresponde con el modelo básico de consumo visto en el capítulo 2.

En segundo lugar, supondremos la existencia de una función de utilidad indirecta, que depende de las dos variables de riqueza que el consumidor decide para cada período y del

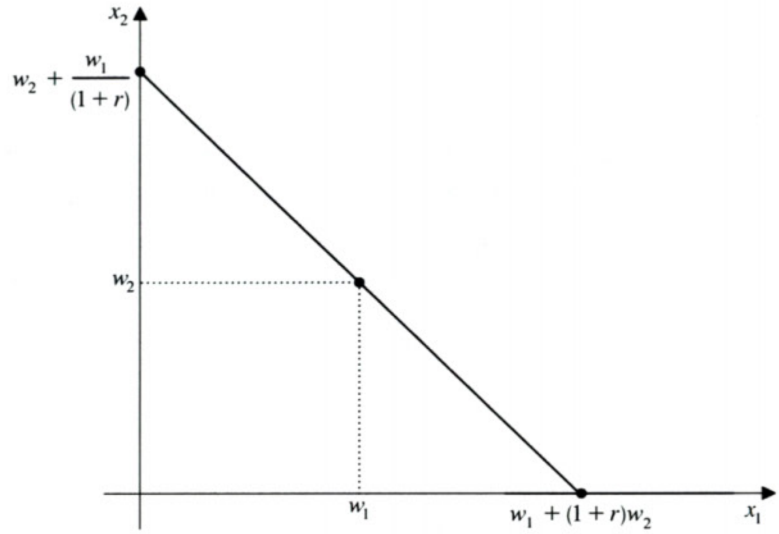


Figura 3.1.

vector de precios, $v(x_1, x_2, p)$. No obstante, como estamos suponiendo que los precios no varían, podemos escribir la función de utilidad indirecta más cómodamente como $v(x)$, en donde obviamente $x = (x_1, x_2)$. Como es lógico, supondremos que esta función es creciente (en realidad, ya en el capítulo 2 hemos demostrado que es creciente) en ambos argumentos y estrictamente cóncava (aunque, por supuesto, nos bastaría con cuasi-concavidad) para representar preferencias racionales y convexas. Por consiguiente, las curvas de indiferencia son decrecientes y convexas hacía el origen, y una curva más alejada del origen implica un nivel de preferencia mayor.

Más concretamente, la relación marginal de sustitución intertemporal es:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dv(x)=0} = -\frac{\left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\right)} \tag{3.3}$$

3.2 Solución y estática comparativa

El problema intertemporal puede ahora ser expuesto como:

$$\max_x v(x) \quad s.a. \quad g(x) \leq 0, \; x_i \geq 0$$

en donde se recuerda al lector que tenemos $g(x) \equiv x_2 - [w_2 + (1+r)(w_1 - x_1)]$. Como siempre, en aras de la simplificación, y para concentrarnos en las soluciones más interesantes, supondremos, sin más, que se satisfacen las restricciones de no-negatividad, y, por tanto, en lo que sigue las ignoramos[1]. Aplicando directamente lo que ya hemos visto en los dos primeros capítulos de estos apuntes, sabemos que el vector x que maximiza $v(x)$ sujeto a la restricción (3.1) es aquel donde una curva de indiferencia es tangente a la frontera del conjunto presupuestario. Dependiendo de exactamente dónde este punto

[1] No obstante, se recuerda al lector que si, para un problema particular, la solución así encontrada implicaba un número negativo para alguna de las variables x_i, entonces la solución real se corresponde con la esquina más cercana al dato que resultó ser negativo. Por este motivo, ignorar las restricciones de no-negatividad no es preocupante.

óptimo se sitúe con respecto del punto de dotación inicial, sabremos que el individuo es prestamista (ahorra en el primer período; es el caso de que el punto óptimo se encuentre por encima de la dotación) o prestatario (presta en el primer período; es el caso de que el punto óptimo se encuentre por debajo de la dotación).

Así, sabemos que la curva de indiferencia inicial pasa por el punto de dotación $w = [w_1, w_2]$, y siempre se puede calcular el valor de la relación marginal de sustitución intertemporal en este punto:

$$RMS(w) = -\frac{\left(\frac{\partial v(w)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial v(w)}{\partial x_2}\right)}$$

Por tanto se puede comparar $RMS(w)$ con la pendiente de la recta presupuestaria intertemporal. Si resulta que la curva de indiferencia inicial que pasa por w es menos inclinada que la recta presupuestaria intertemporal[2], $RMS(w) > -(1+r)$, entonces sabemos que el individuo debe encontrar su óptimo en un punto que se encuentra por encima de w sobre la recta $g(x) = 0$, es decir, es un prestamista. Por el contrario, si resulta que la curva de indiferencia inicial que pasa por w es más inclinada que la recta presupuestaria intertemporal, $RMS(w) < -(1+r)$, entonces el óptimo debe encontrarse en un punto por debajo de w sobre la recta $g(x) = 0$.

De acuerdo con nuestra notación anterior, y manteniendo los precios de consumo constante, podemos escribir el vector óptimo de riquezas como $x^*(w,r) = [x_1^*(w,r), x_2^*(w,r)]$. Nos refererimos a la solución como las *demandas de dinero* del agente en cada período. Lo que nos interesa en esta sección es cómo queda afectada esta solución al variar alguno de los parámetros que la definen. Para el análisis gráfico que estamos usando, solamente podemos estudiar con facilidad los cambios en la dotación y el tipo de interés. Para considerar una varación en el último parámetro, el vector de precios, es necesario establecer cómo afecta tal variación a las curvas de indiferencia, algo que no es nada trivial para el caso general.

3.2.1 Variación en la dotación

El punto de dotación para el problema, $w = (w_1, w_2)$, puede ser variado en cualquiera de sus elementos, o ambos a la vez. No obstante, puesto que cualquier variación en w nunca puede afectar a la pendiente de la frontera del conjunto presupuestario, dicha variación solamente puede implicar un movimiento paralelo (o, posiblemente, ningún movimiento si la variación en w es solamente un deslizamiento del punto por la recta presupuestaria inicial). En este sentido, podemos anunciar directamente que, si el dinero en cada período es un bien normal con respecto a la riqueza inicial, entonces cualquier expansión (contracción) del conjunto presupuestario ocasionado por una variación en w tendrá el efecto de aumentar (disminuir) la demanda de dinero en ambos períodos.

EJERCICIO 3.1: *Suponga que incialmente el óptimo fuera $x^* = w$, y que ambos x_i son bienes normales. ¿Cómo afecta a la descripción general (prestamista o prestatario) de la solución un aumento en w_i? Repita el ejercicio para un aumento en w_2.*

Independientemente de si el dinero es un bien normal o no, el hecho de que un aumento (disminución) en cualquiera de los valores w_i implique que la recta presupuestaria se desplaza hacía afuera (adentro) implica directamente que tal variación resulta en un aumento (disminución) en el valor de la función objetivo.

[2] Recuerde que ambos son números negativos.

3.2.2 Variación en tipo de interés

Claramente, una variación en el tipo de interés cambia la pendiente de la recta presupuestaria intertemporal, y en este sentido tiene efectos semejantes a una variación en precios en el modelo de consumo básico. Por tanto, existirán un efecto sustitución y un efecto renta. Considere el efecto de un aumento en r sobre la recta presupuestaria (y por tanto, sobre el conjunto presupuestario). En primer lugar, obviamente el valor de $-(1+r)$ disminuye, es decir, la recta presupuestaria se volverá más inclinada. En segundo lugar, cuando $x_1 = w_1$, la recta presupuestaria indica sencillamente que $x_2 = w_2$, independientemente del valor de r. Por tanto, independientemente del valor de r, la recta presupuestaria debe pasar por el punto w. En resumen, un aumento en r corresponde con un giro en sentido de las agujas del reloj de la recta presupuestaria alrededor del punto w (véase la figura 3.2).

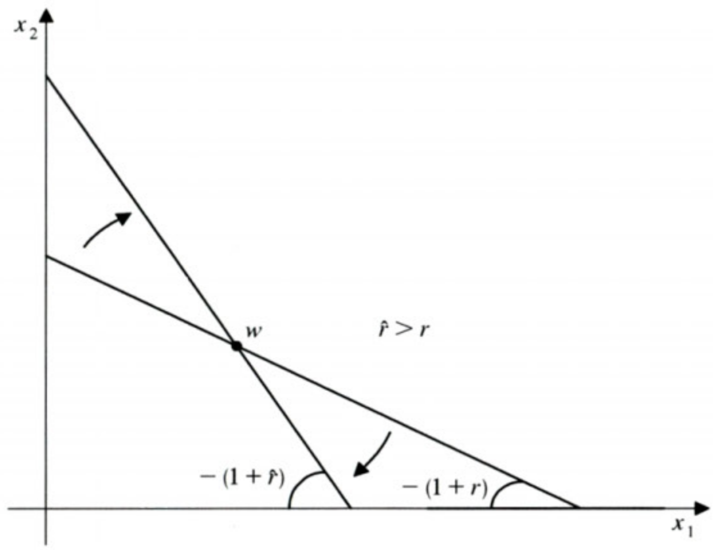


Figura 3.2.

Claramente, un aumento en el tipo de interés implica mayores posibilidades de consumo para los prestamistas y menores posibilidades de consumo para los prestatarios. En lo que sigue, vamos a suponer que el tipo de interés inicial es r y el posterior es $\widehat{r} > r$. Vamos a empezar analizando la situación de un individuo que inicialmente es prestamista, es decir, inicialmente tenemos $x_1^*(r) < w_1$, utilizando la figura 3.3. Nótese que, al girar la recta presupuestaria alrededor del punto w la nueva recta cortará a la curva de indiferencia inicial en un punto $\widetilde{x}$ que tiene que localizarse por encima de w sobre la nueva recta presupuestaria, es decir, $\widetilde{x}_1 < w_1$. Directamente resulta ser cierto que el nuevo óptimo debe localizarse sobre la nueva recta presupuestaria en un punto como $x^*(\widehat{r})$, localizado por encima de $\widetilde{x}$ sobre la nueva recta presupuestaria. En conclusión, es cierto que $x_1^*(\widehat{r}) < w_1$. En otras palabras, si el individuo es, inicialmente, prestamista, después de un aumento en r, sigue siendo prestamista. También es inmediato que un aumento en el tipo de interés acaba aumentando el valor de la utilidad de un individuo que inicialmente fuera prestamista.

Lo que es imposible saber, para el caso general, es cómo se comparan $x_1^*(r)$ y $x_1^*(\widehat{r})$, es decir, si un aumento en el tipo de interés aumentará o disminuirá la cantidad de ahorro en el óptimo para un prestamista. La razón de esto ya la hemos anunciado - el aumento en r implica un efecto sustitución que tiende a disminuir x_1 (es relativamente más caro

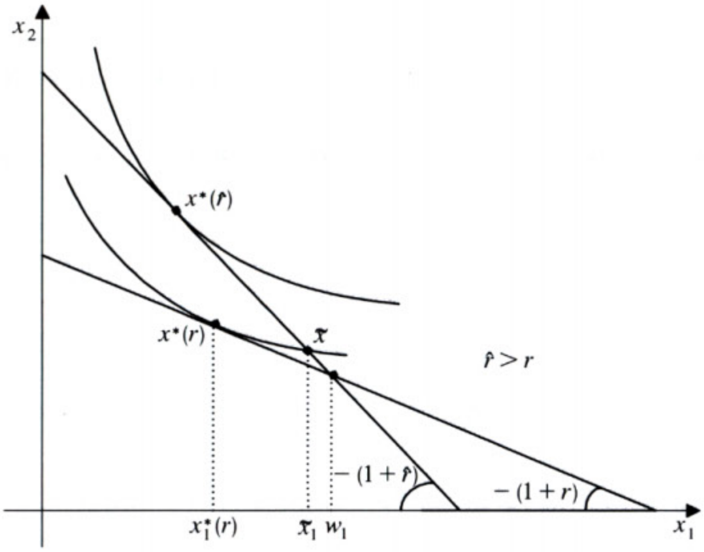


Figura 3.3.

consumir en el presente que en el futuro) y un efecto renta que, suponiendo que ambos x_i son bienes normales, tiende a aumentar x_1 (siendo prestamista, el aumento en r implica un mayor ingreso por el concepto de intereses, que el individuo querrá repartir entre aumentos de consumo en ambos períodos).

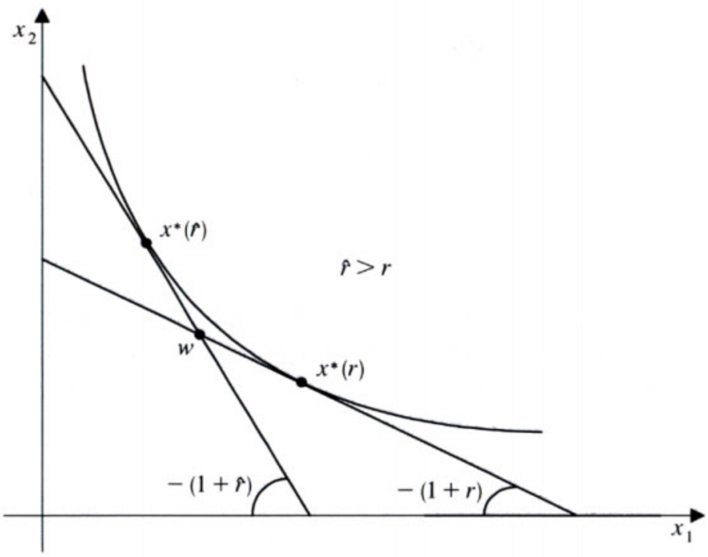


Figura 3.4.

Considérese ahora el caso de un individuo que inicialmente es prestatario, $x_1^*(r) > w_1$. Puesto que, inicialmente, el punto w se encuentra por debajo de la curva de indiferencia que pasa por el punto óptimo, al girar la recta presupuestaria hay tres posibilidades que podemos argumentar de acuerdo con la figura 3.4. En la figura 3.4 se muestra el caso en el que, al girar la recta presupuestaria, ésta vuelve a alcanzar un punto de tangencia con la curva de indiferencia del óptimo inicial. Claramente, el caso representado se corresponde con el de un individuo que, después del incremento en r se vuelve prestamista, y cuya utilidad en el óptimo no varía. Ahora, si el giro en la recta presupuestaria hubiera sido aún más exagerado, llegaremos a la conclusión de que el individuo se vuelve prestamista y su utilidad aumenta. En el otro caso, si el giro hubiera sido algo menos pronunciado, solamente podemos concluir que su utilidad en el óptimo disminuye, pero no podemos saber si se vuelve prestamista o no. De todas formas, si resulta que, después de un incremento en el tipo de interés, un prestatario sigue como tal, entonces su utilidad tiene que disminuir.

Si suponemos, como siempre, que ambos x_i son bienes normales, entonces resulta que al aumentar el tipo de interés, un prestatario siempre fijará un nuevo óptimo con $x_1^*(\widehat{r}) < x_1^*(r)$, es decir, pedirá un prestamo menor (y, como acabamos de ver, incluso se puede volver prestamista). Para verlo, simplemente nótese que para un prestatario, un aumento en r implica un efecto sustitución en el mismo sentido que el efecto renta. Efectivamente, el efecto sustitución implica un movimiento alrededor de la curva de indiferencia inicial hacia un punto en el que es más inclinada, y que, con una curva estrictamente convexa, implica un movimiento hacia arriba y a la izquierda. Es decir, por el efecto sustitución, el valor óptimo de x_1 disminuirá. Por otro lado, puesto que el individuo es (inicialmente) prestatario, un aumento en el tipo de interés implica un mayor gasto en intereses, y, por tanto, implicitamente menos renta para dedicar al consumo. Entonces el efecto renta de un individuo que inicialmente es prestatario tambien implica una disminución en x_1.

3.2.3 Un análisis más formal

Para concluir esta sección, vamos a considerar el problema en términos matemáticos. En primer lugar, ignorando las restricciones de no-negatividad, la función de Lagrange para el problema es:

$$L(x,\delta) = v(x) + \delta\,[0 - g(x)] = v(x) - \delta\,[x_2 - w_2 - (1+r)(w_1 - x_1)]$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x^*)}{\partial x_1} &= \delta(1+r) \\ \frac{\partial v(x^*)}{\partial x_2} &= \delta \end{aligned}$$

y la condición complementaria de holgura es:

$$\delta\,[x_2^* - w_2 - (1+r)(w_1 - x_1^*)] = 0$$

Puesto que estamos suponiendo que la función de utilidad indirecta $v(x)$ es estrictamente creciente en ambos argumentos, cualquiera de las dos condiciones de primer orden indica que $\delta > 0$ y, por tanto, la condición complementaria de holgura se reduce al requisito de que, en la solución, la restricción se satura:

$$x_2^* = w_2 + (1+r)(w_1 - x_1^*) \tag{3.4}$$

Es útil ver que, el valor futuro de la dotación se define por $y \equiv w_2 + (1+r)w_1$, de donde (3.4) se puede escribir como:

$$(1+r)x_1^* + x_2^* = y \tag{3.5}$$

Por otro lado, dividiendo la primera condición de primer orden por la segunda, se obtiene la condición de tangencia:

$$\frac{\left(\frac{\partial v(x^*)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial v(x^*)}{\partial x_2}\right)} = 1 + r \tag{3.6}$$

La solución simultánea de (3.5) y (3.6) es la solución al problema inicial, y lo denotamos por $x^*(y,r) = [x_1^*(y,r), x_2^*(y,r)]$.

Para estudiar la estática comparativa del problema, denotaremos la utilidad en el óptimo por $z(y,r) = v(x^*)$. Considere, en primer lugar, el efecto de una variación en y. Tenemos:

$$\frac{\partial z(y,r)}{\partial y} = \frac{\partial v(x^*)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial y} + \frac{\partial v(x^*)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial y}$$

que usando las condiciones de primer orden, se puede escribir como:

$$\frac{\partial z(y,r)}{\partial y} = \delta\left[(1+r)\frac{\partial x_1^*}{\partial y} + \frac{\partial x_2^*}{\partial y}\right]$$

Pero, puesto que diferenciando (3.5) con respecto de y, resulta que:

$$(1+r)\frac{\partial x_1^*}{\partial y} + \frac{\partial x_2^*}{\partial y} = 1$$

tenemos el resultado esperado de que:

$$\frac{\partial z(y,r)}{\partial y} = \delta > 0$$

Es decir, tal y como hemos visto antes, un aumento en cualquiera de las variables de la dotación (que implique un aumento en y) tiene el efecto de incrementar la utilidad en el óptimo.

Por otro lado, considérese el efecto de una variación en el tipo de interés. Tenemos:

$$\frac{\partial z(y,r)}{\partial r} = \frac{\partial v(x^*)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial r} + \frac{\partial v(x^*)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial r} = \delta\left[(1+r)\frac{\partial x_1^*}{\partial r} + \frac{\partial x_2^*}{\partial r}\right]$$

en donde se han usado las condiciones de primer orden. Ahora, diferenciando la recta presupuestaria (3.5) con respecto de r, obtenemos:

$$(1+r)\frac{\partial x_1^*}{\partial r} + x_1^* + \frac{\partial x_2^*}{\partial r} = \frac{\partial y}{\partial r} = w_1$$

Por tanto, resulta que:

$$(1+r)\frac{\partial x_1^*}{\partial r} + \frac{\partial x_2^*}{\partial r} = w_1 - x_1^*$$

Finalmente, por substitución se obtiene:

$$\frac{\partial z(y,r)}{\partial r} = \delta(w_1 - x_1^*) \tag{3.7}$$

Tal y como ya hemos visto arriba, la ecuación (3.7) indica que, si el individuo inicialmente es prestamista ($w_1 - x_1^* > 0$) entonces un aumento en el tipo de interés resulta en un incremento en su utilidad en el óptimo. En segundo lugar, si el individuo es inicialmente prestatario, $w_1 - x_1^* < 0$, y después del cambio en r se mantiene como prestatario, entonces un aumento en el tipo de interés resulta en una disminución en su utilidad en el óptimo.

EJERCICIO 3.2: *¿Porqué la ecuación (3.7) no capta la situación en la que un aumento en el tipo de interés hace que un prestatario se vuelva prestamista?*

3.3 La economía medioambiental

Aparte del caso muy obvio de la decisión de un consumidor sobre la cantidad de dinero que debe adjudicar a cada uno de los dos períodos de consumo, el modelo expuesto con anterioridad tiene otra aplicación que ha cobrado mucho interés para los economistas; el del estudio de la economía medioambiental. En esta sección vamos a dar un primer enfoque a este tipo de problemas, concentrándonos en dejar clara la manera en que el modelo básico debe interpretarse en este caso, y resaltando las conclusiones más pertinentes.

Los problemas medioambientales se han divido, a groso modo, en dos tipos. Por un lado, existe un interés en estudiar los efectos sociales de la emisión de polución por parte de los sectores productivos, y por el otro, el interés estriba en el estudio de la extracción de los recursos naturales. No obstante, ambos problemas realmente se reducen al mismo, y pueden ser estudiados muy fácilmente en el ambito del modelo de elección intertemporal que acabamos de formular. Para ver esto, nótese primero que el problema de la extracción óptima de un recurso natural a lo largo de más de un período se corresponde con la evaluación de la mejor manera de adjudicar un recurso escaso en el tiempo; pues para el problema de la emisión de polución, por ejemplo de la contaminación del aire, podemos simplemente definir nuestro rescurso escaso como "aire limpio". En este caso, una extracción es simplemente una cantidad de contaminación emitida.

Para aplicar el modelo básico de elección intertemporal, debemos primero dejar claro cómo deben interpretarse los distintos elementos del mismo. En primer lugar, las dos variables x_i tienen que representar las cantidades de recurso extraídas en cada uno de los dos períodos. Así, el punto de dotación indicará cuanto del recurso se tiene al iniciar el primer período y cuanto se recibe de nuevo al iniciar el segundo. Claramente, para la enorme mayoría de los problemas medioambientales, se tendría $w_2 = 0$, es decir, la dotación consiste únicamente en lo que existe al principio del primer período.

¿Cómo debe interpretarse el tipo de interés? Algunos recursos naturales tienen una tecnología natural (biológica) de reproducción, y otros no la tienen (o, el proceso es tan lento que es despreciable). El caso de recursos naturales vivos es muy claro, se reproducen de acuerdo con la diferencia de la tasa de nacimiento y la de mortalidad natural. Para recursos como el carbón, la tasa de reproducción es despreciable en un período de tiempo razonable. Por tanto, de igual modo que el tipo de interés monetario indica cuanto el dinero se reproduce cuando se deja en un banco, para los problemas medioambientales el tipo de interés se debe sustituir por la tasa de reproducción natural[3]. Para el caso de las emisiones de polución, la tasa de reproducción se corresponde con la tasa con que el recurso se regenera naturalmente. Por ejemplo, al vertir agentes contaminantes en un río, las sustancias biodegradables desaparecen con el tiempo, mientras que las otras tardan más en desaparecer e incluso pueden permanecer para siempre.

Las preferencias que se deben utilizar tendrían que, de algún modo, representar los gustos sociales sobre los dos bienes. Esto constituye, normalmente, el punto más complicado de un modelo de gestión medioambiental. En una economía, en cuanto no todo el mundo tiene preferencias idénticas sobre los dos bienes x_i (por ejemplo, los productores de jabón pueden desear que se sacrifiquen ballenas cuanto antes, mientras que asociaciones de protección de las especies pueden desear que no se sacrifique ninguna) es necesario hacer juicios de valor sobre cómo las preferencias de cada individuo quedan representadas en la función de utilidad social. Volveremos sobre este tipo de problema en la segunda parte

[3] Claramente, el supuesto de que esta tasa es constante (independiente de cuanto se haya extraído y de cuanto queda) puede ser aún más discutible para muchos recursos naturales.

del presente libro, pero por ahora señalemos que, si las preferencias sociales acaban siendo crecientes y convexas, entonces el análisis resulta idéntico al de la sección anterior, sin embargo cabe la posibilidad de que no sea así, incluso de que haya una solución estrictamente interior al conjunto factible.

Alternativamente, y así se ha hecho en muchos países, puede ser que cierta cantidad del recurso natural sea adjudicada con fines de no extracción (es decir, se trata recursos protegidos). En este caso, si la cantidad total del recurso al principio es w y se declara una parte, m, protegida, entonces la recta presupuestaria para el problema debe referirse únicamente a partir del punto de dotación factible, $w - m$. No obstante, en este caso las preferencias de los individuos que desean protección deben también quedar excluídas de la representación de las preferencias sociales. De hecho, la función de utilidad se corresponderá, en este caso, con la función de beneficios del extractor (suponiendo que solamente hay uno). De cualquier modo, incluso en esta situación no podemos garantizar que la solución no sea interior.

En todos los casos, notemos que, bajo el supuesto lógico de que $w_2 = 0$, es imposible que haya soluciones de prestatario. Por tanto, todos los efectos de estática comparativa son los que corresponden al caso de prestamistas. Entonces, podemos concluir que un aumento en el tipo de reproducción tendrá un efecto ambíguo sobre el ritmo de extracción, pero aumentará la utilidad social. Por otro lado, si las preferencias son crecientes, entonces sabemos que, a lo largo de los períodos disponibles, siempre se agotará todo el recurso. Por último, normalmente se hará una extracción positiva en cada período (es decir, habitualmente las soluciones no son de esquina).

3.4 Dos extensiones interesantes

El modelo general de elección intertemporal tiene varias posibles extensiones. En esta sección discutiremos dos, e invitamos a que el lector postule otras.

3.4.1 Inversiones capitales

Muchas veces existe la posibilidad de dedicar algo de dinero en el presente para fines de inversión en vez de solamente dedicarlo al consumo. La razón de tales inversiones es básicamente la de generar mayores cantidades para el consumo futuro. Hasta ahora, hemos supuesto únicamente un sistema financiero, que aunque retribuía con un tipo de interés, se utilizaba únicamente como una manera de transferir dinero de un período a otro. Ahora podemos suponer que existe la posibilidad de generar dinero en el segundo período mediante una tecnología de inversiones que representamos por $q_2 = I(q_1)$, en donde q_1 es la cantidad de dinero en el período 1 que se invierte, y q_2 es la cantidad de dinero que la inversión paga en el segundo período. Supondremos que la función $I(q_1)$ es estrictamente creciente y cóncava y que $I(0) = 0$[4].

En términos gráficos, la opción de la tecnología de inversión implica que, a partir del punto de dotación inicial, el conjunto factible queda alterado. Por un lado, moviendo hacia la derecha, se puede prestar al tipo de interés de mercado, igual que antes. Pero moviendo hacia la izquierda, hay ahora dos posibilidades; por un lado, se puede ahorrar al tipo de interés de mercado (como antes) o se puede invertir en la inversión. Para que el problema tenga interés, es decir, que no quede exactamente como antes, necesitamos

[4] A fin de cuentas, no es sino una especie de función de producción de dinero.

que la inversión (por lo menos inicialmente) domine a los ahorros como mecanismo de pasar dinero del primer período al segundo. Gráficamente, se requiere que la adición de la inversión implique un conjunto factible más grande. En términos matemáticos esto se puede garantizar con la condición $I'(0) > 1 + r$. La nueva gráfica está representada en la figura 3.5.

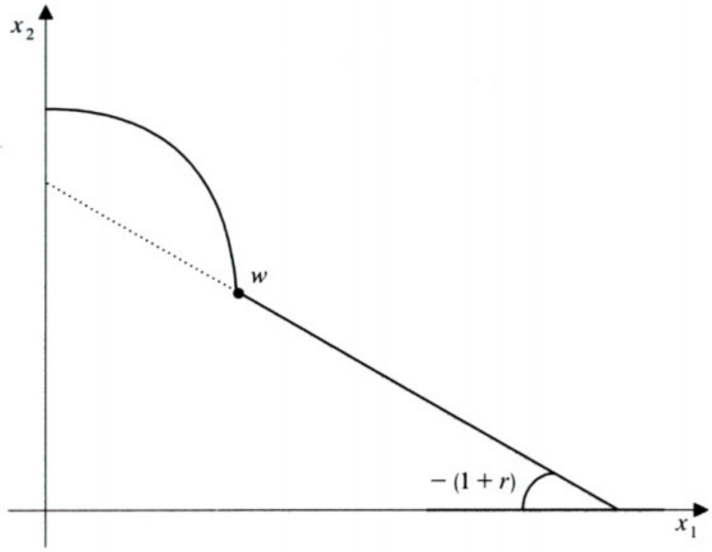


Figura 3.5.

Nótese que, si hacemos el supuesto de que no existe un sistema financiero relacionado con ahorros y préstamos, el optimo intertemporal puede ser un punto de tangencia entre una curva de indiferencia y la frontera eficiente de la tecnología de inversión. En este caso, está claro que tanto la demanda de dinero en el primer período (x_1^*) como la inversión óptima ($q_1^* = w_1 - x_1^*$) dependen de las preferencias. Ahora bien, con la adición del sistema financiero que gestiona ahorros y préstamos a un tipo de interés constante, el punto óptimo se obtiene primeramente alcanzando la recta presupuestaria más alta posible mediante la inversión, y en segundo lugar maximizando la utilidad del individuo sujeta a dicha recta. En este caso (figura 3.6) es evidente que, mientras que la localización exacta de la demanda de dinero en el primer período depende de las preferencias, la inversión óptima es independiente de las preferencias. Este resultado se conoce en la literatura como el *teorema de la separación.*

3.4.2 Tres períodos

El hecho de que, con un tipo de interés constante, la ecuación para la recta presupuestaria no dependa de que el sujeto ahorre o pida un préstamo no es, por supuesto, una casualidad. De hecho, cuando el tipo de interés es una constante, un préstamo es exactamente equivalente a un ahorro negativo. Por tanto, existe una manera fácil de simplificar el modelo de dos períodos, eliminando una dimensión del problema.

En vez de intentar averiguar los valores de las demandas de dinero, x_1^* y x_2^*, podemos simplemente averiguar los valores de ahorro óptimo en cada período, a_1^* y a_2^*, dejando que los valores de a sean, posiblemente, negativos. En primer lugar, nótese de inmediato que, con solamente dos períodos de consumo, necesariamente tenemos $a_2^* = 0$. La razón es obvia, por un lado, cualquier valor de a_2 positivo es una disminución de dinero en el período 2 (lo que implica una reducción en posibilidades de consumo en este período) a cambio de

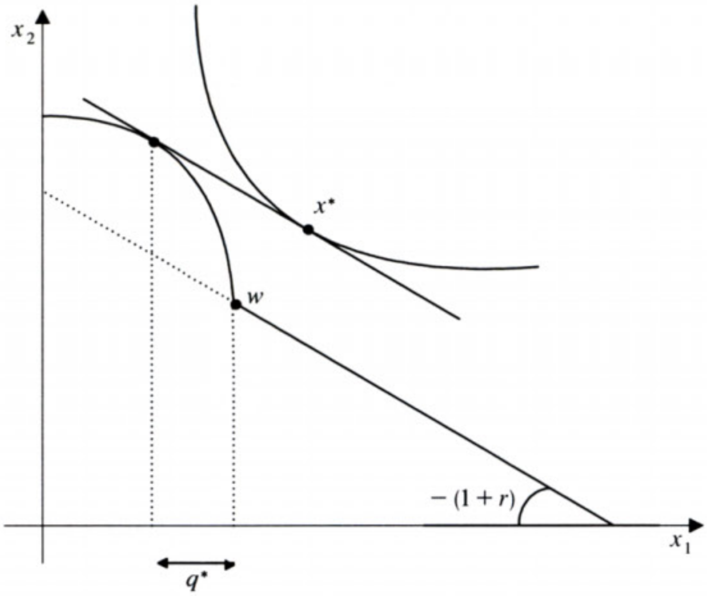


Figura 3.6.

nada (puesto que no existen más períodos en donde aprovecharse de dichos ahorros). Por otro lado, no es factible (aunque sí deseable) fijar un valor de a_2 negativo, puesto que no existe un futuro en el que devolver dicho préstamo. Por consiguiente, tenemos $a_2 = 0$. A su vez, todo el problema queda expresado en términos de una única variable, a_1. Ya que no es necesario mantener el subíndice, denotamos $a_1 \equiv a$. Lo que sí debemos de respetar son las restricciones sobre los valores factibles de a. Estas restricciones se pueden describir con la siguiente ecuación:

$$-\frac{w_2}{1+r} \leq a \leq w_1$$

Formalmente, puesto que por definición $a = w_1 - x_1$, tenemos $x_1 = w_1 - a$. Sustituyendo esto en la ecuación para la restricción presupuestaria, tenemos $x_2 \leq w_2 + (1+r)a$. Puesto que, como ya hemos demostrado, esta restricción se satura en la solución, sabemos que el vector óptimo queda descrito por $[x_1^*(a^*), x_2^*(a^*)] = [w_1 - a^*, w_2 + (1+r)a^*]$. Es importante notar que, con esta sustitución tendremos $v(x^*(a))$ como función de la variable a, no es cierto que es una función estrictamente creciente en a. Sin más, véase que un incremento en a sí incrementa x_2 y por este medio, también incrementa la utilidad, pero un aumento en a disminuye x_1, lo que implica un efecto negativo sobre la utilidad.

No obstante, sigue siendo cierto que la función de utilidad es cóncava en a. Para verlo, puesto que $v(a)$ es ahora función de una sola variable, basta comprobar que su segunda derivada es negativa. La primera derivada es:

$$v\'(a) = \frac{\partial v(x)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial v(x)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a} = -\frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial v(x)}{\partial x_2}(1+r)$$

Dado esto, la segunda derivada es:

$$\begin{aligned}
v''(a) &= -\frac{\partial^2 v(x)}{\partial (x_1)^2}\frac{\partial x_1}{\partial a} - \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a} + (1+r)\left[\frac{\partial^2 v(x)}{\partial (x_2)^2}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_2 \partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a}\right] \\
&= \frac{\partial^2 v(x)}{\partial (x_1)^2} - (1+r)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + (1+r)\left[\frac{\partial^2 v(x)}{\partial (x_2)^2}(1+r) - \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_2 \partial x_1}\right] \\
&= \frac{\partial^2 v(x)}{\partial (x_1)^2} - 2(1+r)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + (1+r)^2\frac{\partial^2 v(x)}{\partial (x_2)^2} < 0
\end{aligned}$$

en donde se ha usado el teorema de Young, y los supuestos de que la función $v(x)$ tiene segundas derivadas negativas, y segunda derivada cruzada no-negativa.

Dada la concavidad de $v(a)$, la solución del problema es sencillamente $v'(a^*) = 0$, que por la ecuación de $v'(a)$ arriba, es claramente la misma solución alcanzada en el espacio de las x.

Ahora, el hecho de que el problema de dos períodos se pueda estudiar en un ambiente unidimensional implica directamente que en un ambiente bidimensional se puede estudiar el caso de tres períodos de consumo. Para este caso, el vector de elección será $[a_1, a_2, a_3]$, pero por los mismos argumentos que antes, tenemos $a_3^* = 0$. Por tanto, el problema se puede plantear en una gráfica con a_1 y a_2 en los ejes. Otra vez, no será cierto que la función objetivo sea estrictamente creciente en las variables a_1 y a_2, y entonces la solución puede ser estrictamente interior. El cambio de variable relevante será ahora:

$$\begin{aligned}
x_1 &= w_1 - a_1 \\
x_2 &= w_2 + (1+r)a_1 - a_2 \\
x_3 &= w_3 + (1+r)a_2
\end{aligned}$$

Nótese que el supuesto es que los préstamos o ahorros de un período se liquidan siempre en el período siguiente. Es decir, no se plantea una operación financiera de más de 1 período. Si el individuo desea hacer una operación que abarque dos períodos, debe hacerlo un dos operaciones seguidas.

Considérense primero las restricciones sobre el valor de a_1. Por un lado, el ahorro máximo que se puede hacer queda delimitado por la dotación de renta en el primer período, es decir, $a_1 \leq w_1$. Por otro lado, el ahorro mínimo (es decir, el préstamo máximo) queda delimitado por el negativo del valor presente de los flujos de renta futuras, es decir, $a_1 \geq -\left(\frac{w_2}{1+r} + \frac{w_3}{(1+r)^2}\right)$. Por supuesto, cualquier valor de a_1 por debajo de $-\frac{w_2}{1+r}$ implica que, para devolverlo en el segundo período, será necesario sacar un nuevo préstamo a cuenta de los ingresos del tercer período. En resumen, tenemos:

$$-\left(\frac{w_2}{1+r} + \frac{w_3}{(1+r)^2}\right) \leq a_1 \leq w_1$$

Por otro lado, el ahorro máximo que se puede alcanzar en el segundo período es el valor de la renta de ese período más el resultado de la operación del período anterior, es decir $a_2 \leq w_2 + (1+r)a_1$. Si a_1 ha sido positivo, entonces se aumentan las posibilidades de ahorro en el segundo período, mientras que si a_1 ha sido negativo, se disminuyen las posibilidades de ahorro en el segundo período. Finalmente, el préstamo máximo que se puede permitir en el segundo período es el negativo del valor presente de la renta futura, $a_2 \geq -\frac{w_3}{1+r}$. En resumen:

$$-\frac{w_3}{1+r} \leq a_2 \leq w_2 + (1+r)a_1$$

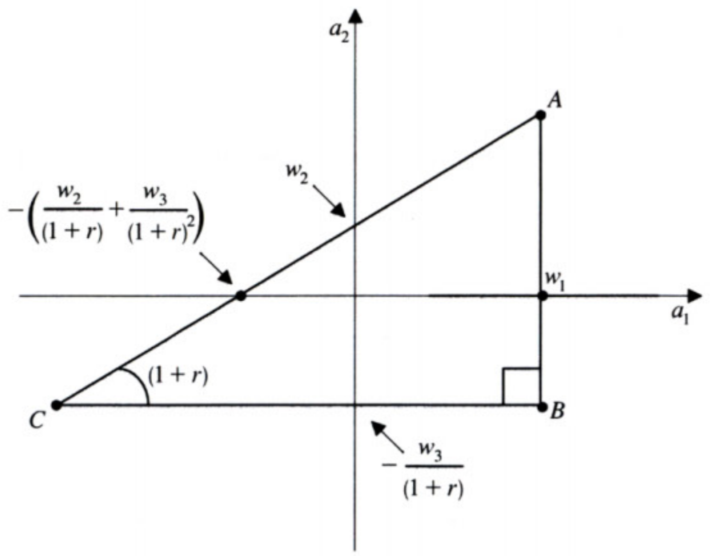


Figura 3.7.

En el espacio definido por las variables a_1 y a_2, el conjunto factible es un triángulo, tal y como se representa en la figura 3.7. Vale la pena resaltar los puntos críticos del conjunto factible. En primer lugar, un punto localizado en alguno de los lados del triángulo (incluída la hipotenusa) implica que la demanda de dinero en un período es cero. En concreto, el lado vertical del triángulo es aquel en donde el ahorro del primer período es máximo, con lo que $x_1 = 0$. En segundo lugar, el lado horizontal es aquel en donde el ahorro del segundo período es mínimo, es decir, se pide el préstamo máximo, que implica que toda la renta del tercer período se destinará a devolver el préstamo, es decir $x_3 = 0$. Por último, la hipotenusa del triángulo es aquella en donde el ahorro del segundo período es máximo, dado el ahorro del primer período. Por consiguiente, sobre la hipotenusa tenemos $x_2 = 0$.

Finalmente, los tres vértices del triángulo implican que la demanda de dinero en dos períodos será cero, puesto que cada vértice se encuentra simultáneamente sobre dos lados del triángulo. En concreto, el vértice A implica que el único período con demanda de dinero positiva es el tercero, el vértice B implica que el único período con demanda de dinero positiva es el segundo, y el vértice C implica que el único período con demanda de dinero positiva es el primero.

Notamos de paso que, puesto que el conjunto factible se describe por un triángulo, éste se corresponde con un conjunto factible compacto y convexo. Por tanto, sabemos que siempre que la función objetivo, $v(a_1, a_2)$ es continua, existe un óptimo sobre este conjunto. Lo que, como ya hemos reiterado, no se puede asegurar, es que el óptimo se localice en una frontera. De hecho, puesto que una solución de frontera implica que en por lo menos en un período no hay demanda de dinero (y por tanto, tampoco puede haber consumo) lo más razonable parece ser que el óptimo sea estrictamente interior.

EJERCICIO 3.3: *Sea la función de utilidad:*

$$v(x) = \sum_{i=1}^{3} \lambda^{i-1} Ln(x_i)$$

con $0 < \lambda < 1$. Suponga que las dotaciones de riqueza son $w_i = w$ para $i = 1, 2, 3$. Encuentre las ecuaciones que determinan el vector óptimo como función de los parámetros del problema, y demuestre que necesariamente la solución es estrictamente interior.

Encuentre las condiciones para que los ahorros en cada uno de los dos primeros períodos sean negativos, positivos o cero.

3.5 Resumen

1. En un problema de elección intertemporal, se debe entender que la función objetivo es la función indirecta de utilidad.

2. Condicionado a que el tipo de interés para los ahorros y para los préstamos es lo mismo, el problema en dos períodos es, formalmente, idéntico al problema de consumo entre dos bienes.

3. Un aumento (disminución) en cualquiera de las dotaciones monetarios implica un aumento (disminución) en la utilidad en el óptimo.

4. Si el individuo es inicialmente prestamista, entonces un aumento en el tipo de interés incrementará su utilidad en el óptimo, pero tendrá un efecto ambiguo sobre la cantidad de dinero ahorrado cuando el dinero en cada período es un bien normal. Un incremento en el tipo de interés nunca puede hacer que un prestamista se vuelva prestatario.

5. Si el individuo es inicialmente prestatario, entonces un aumento en el tipo de interés tiene un efecto ambiguo sobre su utilidad en el óptimo, pero tendrá el efecto de reducir su préstamo óptimo (y puede hacer que se vuelva prestamista). No obstante, si un prestatario sigue como tal después de un aumento en el tipo de interés, entonces su utilidad en el óptimo disminuirá.

6. Una importante aplicación del modelo básico de elección intertemporal es el caso de la gestión intertemporal de los recursos medioambientales.

7. Una importante extensión del modelo básico de elección intertemporal es la inclusión de una tecnología de inversiones. En este modelo, si existe un sistema financiero que aplica el mismo tipo de interés tanto para ahorros como para préstamos, entonces la decisión sobre la inversión óptima es independiente de las preferencias.

8. El modelo de elección intertemporal puede ser extendido a una situación de tres períodos sin salirse del marco bidimensional.

Capítulo 4
El riesgo y la incertidumbre

Capítulo 4

El riesgo y la incertidumbre

Es indiscutible que la vida real está repleta de situaciones con incertidumbre, es decir, cuando es necesario tomar una decisión en un ambiente en el que algunos de los parámetros relevantes son variables estocásticas, o en términos de la estadística, variables aleatorias. Este aspecto de la toma de decisiones está ausente en lo que hasta ahora hemos considerado en el libro; hasta ahora, todas las decisiones se han estudiado en un entorno de absoluta certidumbre. Por ejemplo, no cabe duda de que es más razonable suponer que un consumidor que se plantea la compra de dos bienes (independientemente de cuantos períodos se desea analizar) debe tomar su decisión sin saber con exactitud el valor que adquiere algunos de los parámetros importantes, tales como un precio o quizá su riqueza. En este capítulo vamos a introducir situaciones de riesgo y incertidumbre en el modelo de elección estudiado anteriormente.

En primer lugar, es necesario aclarar exactamente lo que se entiende por "riesgo" e "incertidumbre". Aquí, como es habitual en los libros de texto, usaremos las definiciones que fueron sugeridos por Frank Knight en su tesis doctoral[1]. El riesgo y la incertidumbre se refieren a situaciones en los que por lo menos un parámetro importante para la toma de una decisión es una variable aleatoria. Cuando las probabilidades con las que esta variable toma cada uno de sus posibles valores son probabilidades objetivas conocidas, entonces se dice que la decisión se está tomando en ambiente de riesgo, mientras que si no hay probabilidades objetivas entonces se dice que la decisión se está tomando en ambiente de incertidumbre.

Como ejemplo, considérese el caso de un individuo con un billete de lotería que se juega hoy, y que debe tomar una decisión con respecto de su consumo futuro (es decir, una decisión sobre su ahorro) sin saber todavía el premio que le ha tocado en la lotería. Si, por la manera en que los números ganadores de la lotería se determinan, resulta que existe una probabilidad calculable para cada posible premio que le puede tocar al individuo, entonces su decisión se toma en un ambiente de riesgo[2]. Por otro lado, considere un individuo que debe tomar una decisión sobre qué medio de transporte utilizar para trasladarse entre dos puntos geográficos en un día en concreto. Supongamos que únicamente está interesado en la seguridad de su viaje y el tiempo que pierde viajando, y que las únicas dos opciones son el avión y el coche. Los dos parámetros de interés son variables aleatorias. El tiempo del viaje depende de aspectos tales como las decisiones de los demás viajeros en coche (ocurrencia o no de atascos si se desplaza en coche) y fenómenos aleatorios en

[1] Véase el libro de Frank Knight *Risk, Uncertainty and Profit*, publicado por Century Press (New York) en 1964 (original en el año 1921).

[2] Un ejemplo claro son los billetes de lotería de navidad.

los aeropuertos que pueden provocar retrasos. Asimismo, la seguridad del viaje en ambos medios de transporte también depende de aspectos prácticamente impredecibles. Puesto que no existen probabilidades objetivos para cada posible eventualidad, la decisión se tiene que realizar en condiciones de incertidumbre.

4.1 Análisis de la probabilidad

Los matemáticos han discutido muy vivamente la interpretación que debe darse al concepto de la probabilidad, sobre todo en el caso de la incertidumbre (por ejemplo, una estimación de una frequencia relativa, o simplemente el grado de fe que alguien tiene en la veracidad de una afirmación). Para el caso de probabilidades objetivas, existe ya muy poca (si alguna) discrepancia sobre como se deben entender las probabilidades numéricas. Por ejemplo, si se tira un dado justo, todo el mundo entiende que existe la misma probabilidad de que acabe marcando cada uno de las 6 posibles caras, que la probabilidad de un número par es igual a la de uno impar, y que esta probabilidad es igual a la de tener un número menor o igual a 3. En estos casos, es fácil adjudicar probabilidades numéricas (una *medición de probabilidad*), y las características de estas probabilidades son también bien conocidas. No obstante, no está nada claro que lo mismo ocurre con situaciones de incertidumbre.

Durante los años entre 1920 y 1950, algunos estadísticos (en particular, Bruno di Finetti y Leonard Savage) se dedicaron al estudio de la toma de decisiones en ambientes de incertidumbre, principalmente al problema de cuándo es factible adjudicar probabilidades numéricas, generalmente conocidas como probabilidades sujetivas. Para resumir esta literatura[3], podemos destacar el resultado de que, si el conjunto de posibles acontecimientos se puede dividir en un número de sucesos independientes suficientemente grande, entonces existirá una medición de probabilidad única que la represente en el sentido de que, si el individuo considera que cualquier suceso A no es menos probable que otro B, entonces la medición (númerica) de probabilidad correspondiente indicaría que $p(A) \geq p(B)$. No obstante, para nuestros propósitos, este resultado no es muy útil, puesto que en todos los casos estaremos tratando situaciones con un conjunto muy reducido de posibles eventualidades (dos, o como mucho, tres), que no pueden ser sub-divididas. Sin embargo, para nuestros propósitos, una definición adecuada de probabilidad será suficieinte.

Sea x una variable, y sea X el conjunto de todas las posibles valores que x puede tomar. Por supuesto el conjunto X no puede ser vacio, $X \neq \emptyset$. Vamos a llamar un elemento general de X como x_i, y supondremos que existen z elementos en total en X, es decir, X es un vector de z componentes; $X = (x_1, x_2, ..., x_z)$. Si $z = 1$, es decir, solamente hay un elemento en X, entonces digamos que x es una variable determinista. A cambio, si $z > 1$, entonces digamos que x es una variable aleatoria. Vamos a usar el término *lotería* para describir el mecanismo mediante el cual se asigna un valor de entre los elementos de X a x.

Cuando una lotería se repite muchas veces independientes, se obtiene una lista de los valores que la lotería ha asignado a x en cada repetición. Denotamos por $n_i(m)$ el número de veces en las cuales a x se le asigna el valor x_i cuando se repite la lotería m veces. Así tenemos un vector $n(m) = (n_1(m), n_2(m), ..., n_z(m))$, en donde $\sum_{i=1}^{z} n_i(m) = m$. Por otro lado, también tenemos las "frequencias relativas" de cada x_i definidas en el vector $r(m) = (\frac{n_1(m)}{m}, \frac{n_2(m)}{m}, ..., \frac{n_z(m)}{m})$. Por supuesto las frequencias relativas son números, y

[3] Véase, por ejemplo, el libro *The Foundations of Statistics*, por Leonard Savage, publicado orignialmente por J. Wiley & Sons en 1954.

resulta que para cualquier m tenemos $0 \leq \frac{n_i(m)}{m} \leq 1$ para todo i, y además claramente $\sum_{i=1}^{z} \frac{n_i(m)}{m} = 1$. Es importante notar que las frequencias relativas de los elementos de X se refieren al pasado, mientras que el concepto de probabilidad que buscamos se debe referir al futuro.

Ahora, podemos utilizar la siguiente definición de probabilidad; *la probabilidad de x_i, denotado por p_i, es la creencia que un individuo mantiene sobre la frequencia relativa de x_i que se obtendría si la lotería se repetiera m veces independientes, en donde $m \to \infty$.* En términos matemáticos, si denotamos por $n_i^e(m)$ el número de veces que el individuo estime que el dato x_i saldría en n repeticiones independientes de la lotería, entonces:

$$p_i = \lim_{m \to \infty} \frac{n_i^e(m)}{m}$$

Es importante subrayar que una probabilidad es una creencia, es decir, en todos los casos es personal o *sujetiva*. No obstante, si existe una unanimidad sobre p_i, es decir, si todo el mundo esta de acuerdo con el valor de una probabilidad, entonces diremos que la probabilidad en cuestión es *objetiva* (como por ejemplo la probabilidad de obtener un 6 cuando se tira un dado). De todas formas, con esta definición de probabilidad, que cubre adecuadamente nuestras necesidades, tenemos siempre una medición numérica para las probabilidades, que es lo que se requiere en cualquier análisis formal de elección.

Por lo anterior, queda claro que el caso de probabilidades objetivas (decisiones en ambiente de riesgo) no deja de ser un caso especial de incertidumbre, en donde el individuo utiliza como probabilidades sujetivas las probabilidades objetivas, y por este motivo, hablaremos en general de elección en condiciones de incertidumbre sin más. En este sentido, a partir de ahora supondremos siempre que existen probabilidades numéricas para describir la aleatoriedad de los valores de los parámetros estocásticos. Dado esto, normalmente describiremos situaciones de riesgo y/o incertidumbre como elecciones entre diferentes loterías, y ante todo estamos interesados en estudiar las preferencias entre loterias.

4.2 Antecedentes históricos

El estudio de la toma de decisiones en un entorno de loterías es ya muy antiguo. Los primeros avances en este sentido se hicieron por matemáticos aficcionados, con el objeto de analizar los juegos de azar[4]. No obstante, los primeros pasos fueron puramente estadísticos, analizando sobre todo el valor esperado de loterías monetarias. De hecho, fue generalmente aceptado que el valor de una lotería para una persona era simplemente el valor esperado de los posibles premios. Esta visión dió lugar a lo que hoy se conoce como la "Paradoja de San Petersburgo", que ahora pasamos a analizar.

Considérese un juego en el que se tira una moneda (no trucada) al aire repetidas veces hasta que salga cara, momento en que el juego acaba. El apostante recibe un premio que depende del número de tiradas que se hacen hasta que sale cara. En concreto, si la cara sale en la tirada n, de entonces el premio que recibe es 2^{n-1}, de modo que la lista de premios es 1 (sale cara a la primera), 2 (sale a la segunda), 4, 8, 16, y así sucesivamente. La pregunta es, ¿cuánto vale esta loteria?

Si se admite, como aconsejaron los matemáticos alrededor de 1730 cuando esta parado-

[4]Para un excelente recuento de esta historia, véase el libro *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*, por Peter Bernstein, publicado por John Wiley & Sons (New York) en 1996.

ja fue sujerida[5], que se valora la lotería según su valor esperado, entonces esta lotería vale infinitas unidades monetarias (el lector debe comprobar esta afirmación). Sin embargo, nadie en su sano juicio valoraría la lotería en algo muy alto, puesto que es muy probable que el premio que se reciba sea relativamente baja (quizá 1, 2, o en algún caso fortuito, 4 unidades monetarias). ¿Cómo se resuelve este dilema?

Fue el famoso matemático suizo Daniel Bernoulli[6] quien propuso una solución. Bernoulli postuló que lo importante en una situación de riesgo era el valor "moral" de los premios, y no los premios en sí. Su analisis descansa en el reconocimiento de que la pérdida de una cantidad de dinero x implica una variación en felicidad que es, en valor absoluto, mayor que la variación obtenida por la ganancia de la misma cantidad. Hoy día, conocemos el valor moral de los premios por la frase "utilidad de los premios". En términos matemáticos sencillos, en donde $u(\cdot)$ es una función de utilidad y w es la riqueza inicial, Bernoulli reconoce que para cualquier x será cierto que $u(w) - u(w - x) > u(w + x) - u(w)$.

EJERCICIO 4.1: *Demuestre que la ecuación anterior es un caso especial de la desigualdad de Jensen cuando la función de utilidad es cóncava.*

De acuerdo con una intuición clara y lógica, Bernoulli concluye que el apostante en la lotería de la paradoja de San Petersburgo actuaría de acuerdo con la búsqueda de un máximo del valor esperado de una función cóncava de los premios (la utilidad de los premios), y no el valor esperado de los premios en sí. De hecho, la conjetura de Bernoulli fue que la función oportuna sería la del logoritmo neperiano. En este caso, se demuestra con facilidad que un apostante valoraría la lotería en la modesta cantidad de $Ln(2)$ unidades de utilidad. Es decir, es indiferente entre la lotería y un premio seguro de 2 unidades monetarias.

EJERCICIO 4.2: *Demuestre que, para un apostante cuya función de utilidad de los premios es $Ln(x)$, en donde x es el premio que le corresponde, el valor (utilidad) de la lotería de la paradoja de San Petersburgo es $Ln(2)$.*

La conjetura de Daniel Bernoulli fue aceptada entre sus colegas, por lo general, como resolución de la paradoja, y luego, al parecer, olvidado. Probablemente el hecho que contribuyó al olvido de las ideas de Bernoulli era que su artículo se había publicado en una revista muy especializada en latín, idioma que la mayoría de los economistas ingleses que posteriormente trabajaron en temas de utilidad (Jevons etc.) probablemente no dominaban. No obstante, en la década de los 1920, la publicación de la tesis de Frank Knight y la invención de la teoría matemática de los juegos (principalmente por John von Neumann) contribuyeron a un renovado interés en la conjetura de Bernoulli. Fue el propio von Neumann, junto con su colega el economista Oskar Morgenstern, quien proporcionó la primera demostración formal convincente de la conjetura de Bernoulli, convirtiendo así la conjetura en teorema. Puesto que el teorema asegura que las preferencias entre las loterías se debe medir por el valor esperado de la utilidad de los premios, se ha pasado a la historia con el nombre de la *teoría de la utilidad esperada.*

[5] Y no estamos hablando de matemáticos cualesquiera. Los dos nombres más celebres asociados con esta idea son Blaise Pascal y Pierre de Fermat.

[6] La familia de los Bernoulli estaba repleta de matemáticos famosos. Fue un primo de Daniel, llamado Nicolás, quien sugirió la paradoja de San Petersburgo. Aunque la historia reconoce a Daniel Bernoulli como autor de la conjetura que aquí se analiza, él mismo reconoce a Gabriel Cramer como su predecesor en la idea.

4.3 La teoría de la utilidad esperada

En esta sección, vamos a dar un primer enfoque a las preferencias entre loterías discretas (es decir, cuyo conjunto de premios es discreto). El supuesto inicial es que existe una relación de preferencias sobre loterías que es completa y transitiva que como siempre representamos con el símbolo $\succsim$, y el objetivo final es encontrar una función explícita para la utilidad de una lotería que represente estas preferencias, a partir de unos supuestos razonables sobre las preferencias humanas (axiomas).

Una lotería se puede definir con dos vectores, el de los premios $x \in \Re^n$, y el de las probabilidades $p \in \Re^n$. Por definición de probabilidad, en cualquier lotería tenemos $0 \leq p_i \leq 1$ $i = 1, ..., n$ y $\sum p_i = 1$. Dado esto, vamos a representar loterías por la notación:

$$\gamma(x, p) = \gamma(x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n)$$

Por supuesto, solamente se recibirá uno de los premios, y la probabilidad de recibir el premio x_i es p_i. Como siempre, indicaremos diferentes loterías por diferentes vectores, en este caso vectores de probabilidad, con superíndices, es decir, dos loterías diferentes podrían ser $\gamma_1(x, p^1)$ y $\gamma_2(x, p^2)$. Nótese que, esta manera de estudiar las loterías implica que siempre se mantiene el mismo vector de premios, algo que cambiamos más adelante.

Vamos a indicar la utildad de una lotería con $U(\gamma) = U(x, p)$. Nuestro objetivo es encontrar una forma funcional particular para esta función, de acuerdo con la definición de función de utilidad, es decir $U(\gamma_h) \geq U(\gamma_k)$ si y solo si $\gamma_h \succsim \gamma_k$.

En primer lugar, es necesario suponer que el individuo es capaz de ordenar los premios según una relación de preferencias que es como mínimo completa y transitiva. En este caso, existe una relación transitiva $\succsim$ tal que para cualquier dos premios x_i y x_j, o bien $x_i \succsim x_j$, o bien $x_j \succsim x_i$, o bien ambos son ciertos. Dentro de este supuesto, sabemos que existe una función de utilidad para los premios, $u(x)$ tal que $u(x_i) \geq u(x_j)$ si y solamente si $x_i \succsim x_j$. Por comodidad, vamos a ordenar los premios de acuerdo con $x_1 \succsim x_2 \succsim ... \succsim x_n$. Aunque no es estríctamente necesario, solamente vamos a considerar situaciones en las que no hay indiferencia entre premios y así tenemos $x_1 \succ x_2 \succ ... \succ x_n$, que también podemos escribir como $x_i \succ x_j$ si $i < j$.

La primera tarea es encontrar la función de utilidad de los premios, $u(x)$. Para ello, vamos a necesitar el siguiente axioma:

Axioma 4.1 (dominancia estocástica de primer orden): *Siendo $x_i \succ x_j$ cuando $i < j$, si $\sum_{i=1}^{m} p_i^h \geq \sum_{i=1}^{m} p_i^k$ $\forall m = 1, ..., n-1$ con $>$ para por lo menos un valor de m, entonces se tiene $\gamma_h(x, p^h) \succ \gamma_k(x, p^k)$.*

Para loterías que consisten solamente en dos premios x_i y x_j, en donde $x_i \succ x_j$, la dominancia estocástica indica que:

$$p_i^h > p_i^k \iff \gamma_h(x_i, x_j, p_i^h, 1 - p_i^h) \succ \gamma_k(x_i, x_j, p_i^k, 1 - p_i^k)$$

La dominancia estocástica de primer orden es lo equivalente en modelos estocásticos a las preferencias monótonas, puesto que indica que las loterías cuya ponderación probabilística es mayor sobre los premios más preferidos, son loterías más preferidas. Nótese que, para el caso especial con solamente dos premios, no solo es cierto que una mayor probabilidad sobre el mejor premio implica una lotería mejor, sino la afirmación en sentido contrario también es cierta, es decir, si una lotería es mejor que otra, entonces la lotería más preferida debe tener mayor probabilidad en el mejor premio.

Notamos ahora que podemos asociar a cada uno de los premios un número, π_i, tal que:

$$x_i \sim \widehat{\gamma}_i(x_1, x_n, \pi_i, 1 - \pi_i) \;\; i = 1, 2, ..., n$$

π_i es la probabilidad[7] que el individuo requiere sobre un premio de x_1, de modo que es indiferente ente el premio x_i y la lotería entre x_1 y x_n. Claramente $\pi_1 = 1$ (para ser indiferente entre recibir el premio x_1 con seguridad, y una lotería entre premios de x_1 y x_n con $x_1 \succ x_n$, es necesario que la lotería núnca puede dar el premio x_n) y (por un argumento semejante) $\pi_n = 0$. Ahora, puesto que $x_i \succ x_j$ si $i < j$, por preferencias transitivas, tenemos $\widehat{\gamma}_i(x_1, x_n, \pi_i, 1-\pi_i) \succ \widehat{\gamma}_j(x_1, x_n, \pi_j, 1-\pi_j)$ si $i < j$. Pero por el axioma de dominancia estocástica de primer orden, tiene que ser $\pi_i > \pi_j$ si $i < j$. En resumen, tenemos el hecho de que $\pi_i > \pi_j$ si y solamente si $x_i \succ x_j$, y correspondientemente, podemos definir la función de utilidad de los premios (al menos por ahora) como $u(x_i) = \pi_i$ $i = 1, ..., n$.

Ahora, necesitamos un segundo axioma:

Axioma 4.2 (independencia de alternativas irrelevantes): *Considere un segundo vector de n premios, z. Si resulta que $x_i \sim z_i$ $\forall i$ entonces $\gamma_k(x, p^k) \sim \gamma_k(z, p^k)$. Es decir, en cualquier lotería $\gamma_k(x, p^k)$, se puede sustituir cualquiera de los premios por algo indiferente a él sin variar la utilidad final de la lotería*[8].

De acuerdo con el axioma 4.2, en cualquier lotería podremos sustituir cada premio x_i por la lotería $\widehat{\gamma}_i(\cdot)$ correspondiente sin alterar la utilidad de la lotería, es decir, $\gamma_k(x, p^k) \sim \gamma_k(\widehat{\gamma}, p^k)$, en donde obviamente $\widehat{\gamma} = (\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2, ..., \widehat{\gamma}_n)$. Pero puesto que las loterías $\widehat{\gamma}_i(\cdot)$ comparten los mismos premios, x_1 y x_n, podemos escribir $\gamma_k(\widehat{\gamma}, p^k) = \gamma_k(x_1, x_n, q_k, 1-q_k)$, y la única cuestión para resolver es el valor de q_k.

Ahora bien, q_k es la probabilidad de recibir el premio x_1 en una lotería que da como premios n nuevas loterías. Por tanto, utilizando teoría de probabildad elemental, resulta que la probabilidad de recibir x_1 es simplemente la suma de las probabilidades de recibir x_1 condicionada a haber recibido antes cada una de las sub-loterías, es decir, $q_k = p_1^k \pi_1 + p_2^k \pi_2 + ... + p_n^k \pi_n$. Finalmente, por dominancia estocástica de primer orden, un valor mayor de q_k tiene que indicar una lotería preferida, $\gamma_h(x_1, x_n, q_h, 1-q_h) \succsim \gamma_k(x_1, x_n, q_k, 1-q_k)$ siempre que $q_h \geq q_k$, con indiferencia únicamente en el caso de igualdad de los valores de q. En resumen, hemos llegado a la conclusión de que:

$$q_h \geq q_k \text{ si y solo si } \gamma_h \succsim \gamma_k$$

y entonces podemos simplemente tomar $U(\gamma_k) = q_k = \sum p_i^k \pi_i = \sum p_i u(x_i)$, es decir, la utilidad de una lotería es el valor esperado de la utilidad de sus premios.

4.4 El triángulo Marschak-Machina

Una de las primeras herramientas gráficas para analizar elecciones en condiciones de incertidumbre fue propuesta por el economista Jacob Marschak en el año 1950, y luego resucitada por Mark Machina en la década de los 1980 para estudiar los resultados de experimentos cuyo objeto era comprobar el grado de concordancia entre elecciones reales y lo que sugiere la teoría. Siendo un análisis gráfico, es necesario reducir el número de premios n hasta un nivel en el que se puede hacer un análisis bi-dimensional, y por este motivo

[7] De acuerdo con la notación utilizada hasta ahora, realmente debemos usar π_1^i en lugar de π_i. No obstante, como cuando solamente hay dos premios, no hay necesidad de seguir con el subíndice indicador del premio correspondiente, lo eliminamos en intereses de desatascar la notación.

[8] Por supuesto, puesto que $x_i \sim x_i$, no es necesario que en el vector de nuevos premios, z, se sustituyen todos los premios anteriores. Nótese también que el axioma de independencia de alternativas irrelevantes justifica nuestro supuesto anterior de no considerar indiferencia entre dos premios cualesquiera en una lotería.

vamos a simplificar nuestra situación con el supuesto de que $n = 3$, es decir, solamente hay 3 posibles premios en cualquier lotería. Este supuesto delimita el problema hasta el máximo número de premios que se pueden analizar en un modelo bi-dimensional, en donde la dimensionalidad es la de las probabilidades, ya que podemos siempre escribir una de las probabilidades (cualquiera de las tres) como 1 menos la suma de las otras dos. Por costumbre, eliminamos la probabilidad del segundo premio, escribiendo $p_2 = 1 - p_1 - p_3$.

Asimismo, en lo que sigue, al igual que el resto del presente capítulo, es conveniente analizar las loterías cuyos premios son distintas cantidades de un solo bien. En este sentido, supondremos siempre que los premios son sumas de dinero, y así denotamos los premios con la variable w. Con esto, la única variable será la riqueza del individuo, y por tanto debemos de entender que cada vez que se menciona la utilidad de una cantidad de riqueza, se está refiriendo a la utilidad indirecta. No obstante, con la intención de no variar la notación de lo que es habitual a lo largo de la literatura (incluídos los libros de texto), seguiremos utilizando $u(w)$ para indicar la función de utilidad, aunque w será una suma de dinero (riqueza), en lugar de $v(w)$, que hemos usado hasta ahora para indicar la función indirecta de utilidad. De acuerdo con nuestro supuesto de que $w_i \succ w_j$ cuando $i < j$, puesto que ahora los premios son sumas de dinero (es decir, son números), y dentro del supuesto de preferencias monótonas, ya podemos escribir $w_1 > w_2 > w_3$.

Recuérdese que, por lo menos durante la presente sección, los tres números w_i $i = 1, 2, 3$ son parámetros fijos en todo momento, y que diferentes loterías se indicarán con diferentes vectores de probabilildades, $p^i \neq p^j$. El supuesto de que $n = 3$, que como acabamos de ver, permite escribir la probabilidad del premio intermedio como $p_2 = 1 - p_1 - p_3$, implica que cualquier lotería se puede representar por un punto en el espacio (p_1, p_3). Esto se ha hecho en la figura 4.1. Cualquier lotería que se encuentre sobre el eje horizontal corresponde con $p_3 = 0$, es decir, una lotería en la que los únicos premios posibles son w_1 y w_2. Por un razonamiento similar, cualquier lotería sobre el eje vertical se corresponde con una lotería en la que los únicos premios posibles son w_2 y w_3 Por otro lado, una lotería sobre la hipotenusa del triángulo corresponde con $p_1 + p_3 = 1$, así que $p_2 = 0$, y entonces los únicos premios son w_1 y w_3. Finalmente, cualquier lotería que se encuentra en el interior del triángulo (como la lotería γ_1 en la figura 4.1) se corresponde con una situación en la que los tres premios son posibles.

EJERCICIO 4.3: *Indique, como una distancia en uno de los ejes del triángulo Marschak-Machina, la probabilidad p_2 para una lotería estrictamente interior.*

Para ver el sentido de las preferencias en el triángulo, tenemos que utilizar la dominiancia estocástica de primer orden. Considere las dos loterías γ_2 y γ_1 en la figura 4.1. Puesto que $p_3^1 = p_3^2$, tiene que ser cierto que $p_1^1 + p_2^1 = p_1^2 + p_2^2$. Pero puesto que $p_1^1 > p_1^2$, resulta que lotería γ_1 domina a γ_2 según dominancia estocástica de primer orden, así que $\gamma_1 \succ \gamma_2$. Ahora, considérese γ_1 y γ_3. Puesto que $p_3^1 < p_3^3$, tenemos $p_1^1 + p_2^1 > p_1^3 + p_2^3$, y como $p_1^1 = p_1^3$, lotería γ_1 domina a γ_3 en el sentido de dominancia estocástica de primer orden, y correspondientemente $\gamma_1 \succ \gamma_3$. Finalmente, considera la lotería γ_4. Puesto que $p_3^1 < p_3^4$ tenemos $p_1^1 + p_2^1 > p_1^4 + p_2^4$. Pero también tenemos $p_1^1 > p_1^4$, así que por dominancia estocástica de primer orden, $\gamma_1 \succ \gamma_4$.

En resumen, a causa de la dominancia estocástica de primer orden, el sentido de preferencias en el triángulo Marschak-Machina es hacia abajo y a la derecha. Por supuesto, esto implica que si dos loterías en el triángulo son indiferentes entonces una linea recta que las une debe tener pendiente estrictamente positiva, es decir, en el triángulo, *las curvas de indiferencia tienen pendiente positiva.*

Es muy fácil encontrar las ecuaciones exactas para las curvas de indiferencia. Puesto

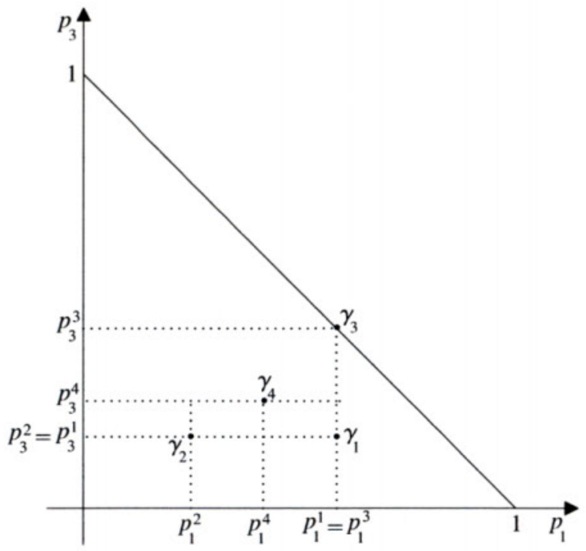


Figura 4.1.

que, por lo que hemos hecho en la sección anterior, una curva de indiferencia se define como el conjunto de puntos (p_1, p_3) tales que $Eu(w) = p_1u(w_1)+(1-p_1-p_3)u(w_2)+p_3u(w_3) = C$, en donde C es una constante y E es el operador de valor esperado. Entonces, a partir del teorema de la función implícita, se obtiene:

$$\left.\frac{dp_3}{dp_1}\right|_{dEu(w)=0} = \frac{u(w_1) - u(w_2)}{u(w_2) - u(w_3)} > 0$$

Nótese que, puesto que w_i $i = 1, 2, 3$ son constantes, también son constantes $u(w_i)$ $i = 1, 2, 3$ y entonces resulta que la pendiente de una curva de indiferencia es una constante positiva, es decir, las curvas de indiferencia son lineas rectas en el triángulo.

EJERCICIO 4.4: *Dada una representación en el triángulo Marschak-Machina de una lotería γ_i, exlique el significado de la lotería $\lambda\gamma_i$ para cualquier $\lambda > 0$. Ahora, suponga que $\gamma_i \sim \gamma_j$, y entonces demuestre que $\gamma_k \sim \gamma_i$, en donde γ_k es una combinación convexa de γ_i y γ_j.*

Es también interesante comparar las curvas de indiferencia con las curvas a lo largo de las cuales el valor esperado es constante, $Ew = p_1w_1 + (1 - p_1 - p_2)w_2 + p_3w_3 = V$. De manera análoga que lo que acabamos de hacer, se obtiene:

$$\left.\frac{dp_3}{dp_1}\right|_{dEw=0} = \frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3} > 0$$

Es decir las curvas de valor esperado constante también son lineas rectas de pendiente positiva. La cuestión interesante es, ¿cómo se comparan las pendientes de las curvas de indiferencia y las de valor esperado constante? La contestación a esta pregunta depende únicamente de la concavidad de la función de utilidad, $u(w)$. Veamos.

Puesto que hemos supuesto que los tres premios son sumas de dinero, y que $w_1 > w_2 > w_3$, podemos definir w_2 como una combinación convexa particular de w_1 y w_3:

$$w_2 = \lambda w_1 + (1 - \lambda)w_3 \implies \lambda = \frac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3} \text{ y } 1 - \lambda = \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}$$

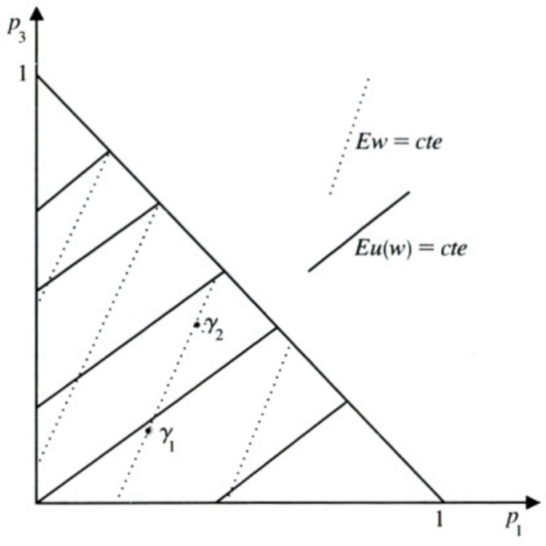


Figura 4.2.

Si $u(w)$ es una función estrictamente cóncava, por la desigualdad de Jensen utilizando esta combinación convexa en concreto, tenemos:

$$u(w_2) > \left(\frac{w_2 - w_3}{w_1 - w_3}\right) u(w_1) + \left(\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}\right) u(w_3)$$

que podemos escribir como:

$$(w_1 - w_3)u(w_2) > (w_2 - w_3)\, u(w_1) + (w_1 - w_2)\, u(w_3)$$

Ahora, al dividir esta ecuación por $(w_2 - w_3)$ se obtiene:

$$\left(\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}\right) u(w_2) > u(w_1) + \left(\frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3}\right) u(w_3)$$

Pero puesto que $\left(\frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}\right) = \left(\frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3}\right) + 1$, tenemos:

$$\left(\frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3} + 1\right) u(w_2) > u(w_1) + \left(\frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3}\right) u(w_3)$$

que se reordena directamente como:

$$\frac{w_1 - w_2}{w_2 - w_3} > \frac{u(w_1) - u(w_2)}{u(w_2) - u(w_3)}$$

En palabras, si $u(w)$ es estrictamente cóncava, entonces una linea de valor esperado constante tiene mayor pendiente (es más inclinada) que una curva de indiferencia. Este tipo de situación está representada en la figura 4.2.

EJERCICIO 4.5: *Demuestre que, si $u(w)$ es estrictamente convexa, entonces las curvas de indiferencia tienen mayor pendiente que las curvas de valor esperado constante, y que cuando $u(w)$ es lineal, las dos pendientes coinciden.*

De acuerdo con nuestros supuestos del capítulo 1, parece razonable suponer que la utilidad marginal de la riqueza es decreciente, es decir, que $u(w)$ sea una función cóncava.

A partir de ahora esto será el supuesto que siempre utilizaremos, y entonces siempre tendremos una situación como la que se representa en la figura 4.2.

Ahora, en la figura 4.2, consideramos las dos loterías loterías γ_1 y γ_2 que tienen el mismo valor esperado. Siendo $u(w)$ cóncava, resulta que $\gamma_1 \succ \gamma_2$, es decir, $U(\gamma_1) > U(\gamma_2)$. Aparte de la diferencia en utilidad esperada, las dos loterías γ_1 y γ_2 también son distintas en cuanto a su varianza, $var(\gamma) = \sigma^2(\gamma) = \sum p_i(w_i - Ew)^2$. De hecho, en la gráfica, resulta que $\sigma^2(\gamma_2) > \sigma^2(\gamma_1)$. Para ver que esto es cierto, es necesario considerar la derivada de $\sigma^2(\gamma)$ con respecto de p_1 condicionada a que Ew es una constante. No obstante, nótese que, al incrementar p_1 sobre una linea de valor esperado constante, se tiene que incrementar también p_3 y disminuir p_2. Esto corresponde con un desplazamiento de peso de probabilidad del centro de la distribución hacia los extremos, que implica un aumento en varianza.

EJERCICIO 4.6: *Demuestre matemáticamente que un movimiento hacia arriba sobre una linea de valor esperado constante implica un incremento en varianza.*

En resumen, tenemos el siguiente resultado importante, *si la función de utilidad es estrictamente cóncava, entonces un incremento en varianza sin alterar el valor esperado implica una reducción en utilidad esperada*[9]. Los economistas se refieren a esto como una *aversión al riesgo*, puesto que es normal asociar varianza con riesgo. Entonces, la concavidad de la función de utilidad de los premios es equivalente a la aversión al riesgo. Por supuesto, si $u(w)$ fuera lineal, entonces tendríamos neutralidad ante el riesgo, y si fuera convexa, entonces tenemos una preferencia por el riesgo.

4.5 La paradoja de Allais y utilidad esperada generalizada

Es interesante notar que podemos decir que el valor esperado de una lotería es lineal en las probabilidades y también en los premios (es decir, la derivada del valor esperado con respecto de cualquier probabilidad es una constante y también es constante la derivada con respecto de cualquier premio). En cambio, la utilidad esperada no es lineal en premios, pero sigue siendo lineal en las probabilidades. Es precisamente este hecho lo que conlleva que las curvas de indiferencia en el espacio de las probabilidades sean lineales.

Alrededor de 1950, el economista frances Maurice Allais (galardonado con el Premio Nobel de economía en el año 1988) propuso elegir primero entre una lotería que da un premio de 5 con probabilidad 1, y otra lotería que da un premio de 25 con probabilidad 0,1, uno de 5 con probabilidad 0,89 y uno de 0 con probabilidad 0,01. Luego eligir entre una lotería que da premios de 5 con probabilidad 0,11 y 0 con probabilidad 0,89, y otra lotería que da premios de 25 con probabilidad 0,1 y 0 con probabilidad 0,9. En la práctica, la mayoría de la gente a la que se le sugieren estas elecciones se decanta por la primera lotería en la primera elección (recibir 5 con seguridad) y por la segunda lotería en la segunda elección (recibir 25 con probabilidad 0,1).

Ahora bien, si en la primera elección, la primera lotería es la preferida, entonces debe tener mayor utilidad esperada que la otra posibilidad:

$$u(5) > 0,1u(25) + 0,89u(5) + 0,01u(0) \implies 0,11u(5) > 0,1u(25) + 0,01u(0)$$

[9] Aunque puede no ser obvio, también será cierto que una disminución en valor esperado con varianza constante reduce la utilidad esperada. Demostrar esto en el triángulo no es nada fácil puesto que las curvas de varianza constante son cónicas.

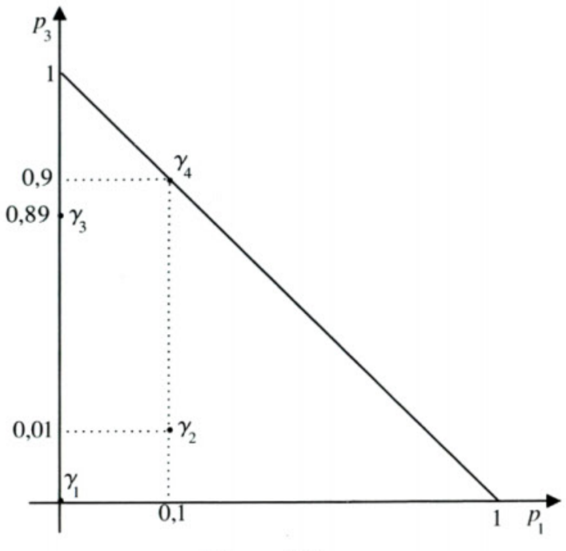


Figura 4.3.

Sin embargo, si en a segunda elección, la segunda lotería es la preferida, entonces:

$$0,1u(25) + 0,9u(0) > 0,11u(5) + 0,89u(0) \implies 0,1u(25) + 0.01u(0) > 0,11u(5)$$

que es obviamente inconsistente.

Si hacemos $w_1 = 25$, $w_2 = 5$ y $w_3 = 0$, las tres loterías de la paradoja de Allais se pueden localizar con facilidad en un triángulo Marschak-Machina, como se muestra en la figura 4.3. Lo que se debe ver inmediatamente es que una linea linea recta que une las dos loterías de la primera elección (γ_1 y γ_2) tendrá la misma pendiente que una linea recta que une las dos loterías de la segunada elección (γ_3 y γ_4), y estas dos pendientes son 0,1. Si resulta que $\gamma_1 \succ \gamma_2$, entonces las curvas de indiferencia del individuo (recuerde que son todas paralelas) deben tener una pendiente menor que 0,1, mientras que si $\gamma_4 \succ \gamma_3$, entonces hacia la parte superior del triángulo, las curvas de indiferencia deben tener una pendinente mayor que 0,1.

A raíz de experimentos del tipo de la paradoja de Allais, los economistas se replantearon la teoría de la utilidad esperada, sobre todo el hecho de que la función objetivo sea lineal en las probabilidades. Para intentar acomodar a tales observaciones, el profesor Mark Machina ha sugerido una función objetivo que se corresponde con curvas de indiferencia que son lineales, pero con mayor pendiente según se va hacia arriba en el triángulo, acabando así con un un abánico de curvas de indiferencia, mientras que otros han sugerido funciones que se corresponden con curvas de indiferencia que serían convexas (pero con pendiente positiva) en nuestro triángulo. Toda esta literatura ha recibido el nombre genérico de "teoría de utilidad esperada generalizada", puesto que se pueden generalizar como una función objetivo del tipo:

$$U(w,p) = \sum g(p_i)u(w_i)$$

en donde $g(p)$ es una función de ponderación de probabilidades, que puede ser no-lineal. Entonces, un caso especial es $g(p_i) = p_i \quad i = 1, ..., n$, que es la teoría de la utilidad esperada.

La teoría económica ha tenido unas reacciones muy dispares con respecto de cualquier formulación de función objetivo que no sea puramente lineal en probabilidades. La razón de ello es, en realidad, un debate entre la economía positiva y la normativa. Si lo que se desea es una teoría que sea descriptiva de las decisiones reales (también, se puede aquí hablar de una teoría predictiva), entonces tiene sentido pensar en acomodar una teoría a un conjunto de datos reales, como se ha hecho con la teoria de la utilidad esperada generalizada. Esto es la toma de una posición positiva al respecto de la teoría económica. Por otro lado, si el objetivo es guiar los sujetos hacia decisiones mejores, y correger errores lógicos en sus procesos de elección, entonces la única manera de poder variar la teoría de la utilidad esperada es si se encuentra en desacuerdo con alguno de los axiomas utilizados en su construcción (el axioma de dominancia estocástica de primer orden y el de independencia de alternativos irrelevantes). Como esto no es, en general[10], el caso, núnca será válido utilizar otra función objetivo sino la utilidad esperada.

En lo que sigue de este libro, tomamos siempre la postura normativa, y por tanto se rechaza cualquier función objetivo para elección ante incertidumbre que no sea utilidad esperada.

4.6 El modelo de riqueza contingente

El triángulo de Marschak-Machina considera diferentes loterías según diferencias en las probabilidades, pero con un conjunto de premios fijo. En cambio, para muchos análisis, es más conveniente considerar los premios como variables y las probabilidades fijas. En realidad, cuando el conjunto de premios es continuo, estas dos interpretaciones son idénticas. Un análisis basado en premios variables y probabilidades fijas fue el fundamento principal utilizado por Ken Arrow y Gerard Debreu en su estudio del equilibrio general en condiciones de incertidumbre, y fue bautizado con el nombre de el modelo de consumo (o riqueza) contingente[11]. El modelo entiende que no existe ninguna diferencia fundamental entre dos bienes diferentes (el caso del modelo de elección con total certidumbre) o tener en cuenta un solo bien en dos lugares geográficos distintos, o en dos "contingencias" diferentes. Como ejemplo de la idea de contingencia, considere el bien "paraguas". Un paraguas tiene mayor valor cuando llueve que cuando no. En este caso, comprederemos ex-ante (antes de que sepamos el tiempo que va a hacer) que el paraguas es un bien cuyo valor para un individuo es contingente en el sentido de que depende del tiempo que haga.

La idea fundamental es muy sencilla, y aún más en un ambiente bi-dimensional. Se establece un conjunto de posibles "estados de la naturaleza", que podemos entender como descripciones completas de todo aspecto relevante en un problema de elección, y una densidad de probabilidad sobre este conjunto. Por ejemplo, cuando se invierte en la bolsa, se sabe que el precio de las acciones que se han comprado puede subir (estado 1) o bajar (estado 2)[12]. Si establecemos una probabilidad de que el precio se ajuste a la alza, entonces tenemos un problema de incertidumbre bien formalizado. Para el tipo de problema que vamos a analizar, solamente estaremos interesados en la riqueza de un individuo, w. Para continuar con el supuesto bi-dimensional, supondremos que existen solamente dos posibles

[10] La posible excepción es el axioma de independencia de alternativas irrelevantes. Este axioma requiere que no existen complementariedades entre los premios, algo que puede no cumplirse si los premios son diversos bienes. No obstante, para el caso que hemos considerado, los premios son, simplemente, cantidades diferentes de dinero, y así no puede haber complementariedades.

[11] El modelo de riqueza contingente es más útil que el modelo de Marschak-Machina cuando las elecciones de un agente económico pueden variar el premio que recibe en una determinada contingencia, sin poder alterar la probabilidad de la contingencia.

[12] Por supuesto, con este ejemplo es posible definir un conjunto de estados mucho más amplio - que el precio suba un punto, dos puntos, y así sucesivamente tanto hacia arriba como hacia abajo.

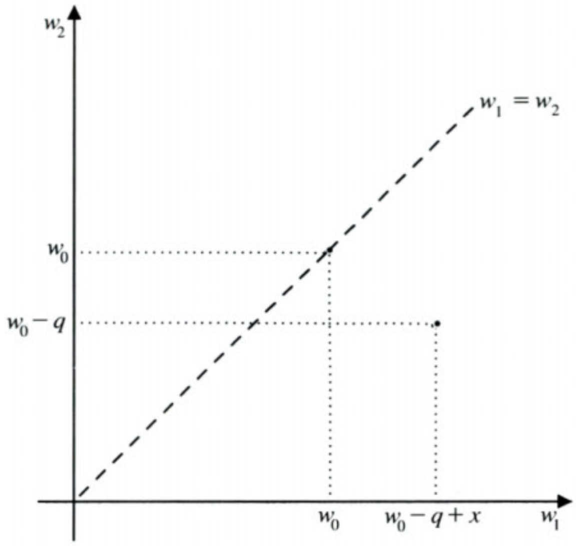


Figura 4.4.

estados, el estado 1 y el 2, y que en el estado i la riqueza es w_i $i = 1, 2$. Denotaremos la probabilidad del estado 2 por p, y así la probabilidad del estado 1 es simplemente $1 - p$. Aunque la función de utilidad relevante es la utilidad indirecta, vamos a utilizar la notación $u(w)$, para seguir con la convención normalmente usada en la literatura. El supuesto (a menos que se indique otra cosa) será que la función de utilidad es estrictamente creciente, $u'(w) > 0$, y cóncava, $u''(w) < 0$. Como acabamos de ver en el triángulo Marschak-Machina, esto implica que el individuo es adverso al riesgo, en el sentido de que un incremento en la varianza de una lotería con valor esperado constante implica una disminución en utilidad esperada. No obstante, volveremos a presentar este resultado en el modelo que ahora pasamos a analizar.

En una gráfica bidimensional, podemos representar la riqueza del individuo en cada uno de los dos estados de la naturaleza en los dos ejes (véase la figura 4.4). El punto w es la dotación de riqueza inicial, a menudo conocido como la distribución de riquezas inicial. Por costumbre, si resulta que, inicialmente $w_1 \neq w_2$, entonces definimos que el estado de menor riqueza sea el estado 2, es decir $w_2 < w_1$. La bisectriz de la gráfica (la linea recta que parte del origen con pendiente 1) se conoce como la recta de certidumbre, puesto que indica todos los vectores de riquezas tales que $w_1 = w_2$, y para estos vectores el individuo es indiferente entre los dos estados de la naturaleza, o en otras palabras, con probabilidad 1 su riqueza final será de $w = w_1 = w_2$.

Como ejemplo, en la figura 4.4 se representan dos situaciones. Por un lado, la de un individuo con una riqueza cierta de w_0, y por otro la de un individuo con riqueza cierta de w_0 junto con un billete de lotería que paga un premio de $x > 0$ con probabilidad $1 - p$ y nada con probabilidad p que ha costado q unidades monetarias (con $q < x$). El vector de riqueza contingente sobre el resultado de la lotería es $(w_1, w_2) = (w_0 - q + x, w_0 - q)$. Dado que $q < x$, aunque la distribución de riqueza antes de comprar la lotería está sobre la recta de certidumbre, la distribución alcanzada con la lotería se encuentra por debajo de esta linea. El punto importante del modelo de consumo contingente es simplemente que el individuo solamente va a recibir la riqueza indicada por uno de los componentes del vector w, y no ambos componentes (como ha sido el caso de los modelos que hemos estudiado en los capítulos anteriores).

Para empezar, consideremos el valor esperado y varianza de cualquier punto en el espacio de riquezas contingentes. Por definición, si E representa el operador de esperanza, el valor esperado de un vector w es:

$$Ew = pw_2 + (1-p)w_1 \tag{4.1}$$

Una comparación con la ecuación de la recta presupuestaria de un problema de consumo tradicional revela inmediatamente que, en el espacio de las riquezas, esto es una recta con pendiente:

$$\left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{dEw=0} = -\frac{(1-p)}{p} < 0$$

Siendo una recta con pendiente negativa, cualquier recta iso-valor esperado cortará a la recta de certidumbre en un solo punto. Si llamamos a las coordenadas de este punto $\overline{w}$, entonces tenemos $Ew = p\overline{w} + (1-p)\overline{w} = \overline{w}$. Por tanto, cuanto más lejos este una recta de iso-valor esperado del origen, mayor valor esperado se representa.

En segundo lugar, la varianza de un punto w se define por:

$$\sigma^2(w) = p(w_2 - Ew)^2 + (1-p)(w_1 - Ew)^2$$

Utilizando (4.1), tenemos:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(w) &= p(w_2 - pw_2 - (1-p)w_1)^2 + (1-p)(w_1 - pw_2 - (1-p)w_1)^2 \\
&= p((1-p)(w_2 - w_1))^2 + (1-p)(p(w_1 - w_2))^2 \\
&= p(1-p)^2(w_2 - w_1)^2 + (1-p)p^2(w_1 - w_2)^2
\end{aligned}$$

Ahora, puesto que $(w_2 - w_1)^2 = (w_1 - w_2)^2$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(w) &= p(1-p)\left[(1-p)(w_1 - w_2)^2 + p(w_1 - w_2)^2\right] \\
&= p(1-p)(w_1 - w_2)^2
\end{aligned}$$

Por tanto, las curvas de iso-varianza en el espacio de las riquezas contingentes son lineas rectas con pendiente 1, ya que directamente por el teorema de la función implícita, resulta que:

$$\left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{d\sigma^2=0} = -\frac{2p(1-p)(w_1 - w_2)}{-2p(1-p)(w_1 - w_2)} = 1$$

La linea de certidumbre es una linea de iso-varianza, precisamente la linea correspondiente a varianza igual a 0. Las lineas de iso-varianza más alejadas de la linea de certidumbre (bien sea hacia arriba o hacia abajo) indican una varianza mayor (véase la figura 4.5).

Ahora podemos considerar las preferencias. Como ya hemos indicado, las preferencias en este modelo se miden según la utilidad esperada, es decir:

$$w^1 \succsim w^2 \text{ si y solo si } Eu(w^1) \geq Eu(w^2)$$

Por tanto, la utilidad de un vector w es $Eu(w) = pu(w_2) + (1-p)u(w_1)$. Una curva de indiferencia mantiene constante la utilidad esperada, $dEu(w) = 0$, y entonces, utilizando el teorema de la función implícita, resulta que:

$$\left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{dEu(w)=0} = -\frac{(1-p)u'(w_1)}{pu'(w_2)} \equiv RMS(w) \tag{4.2}$$

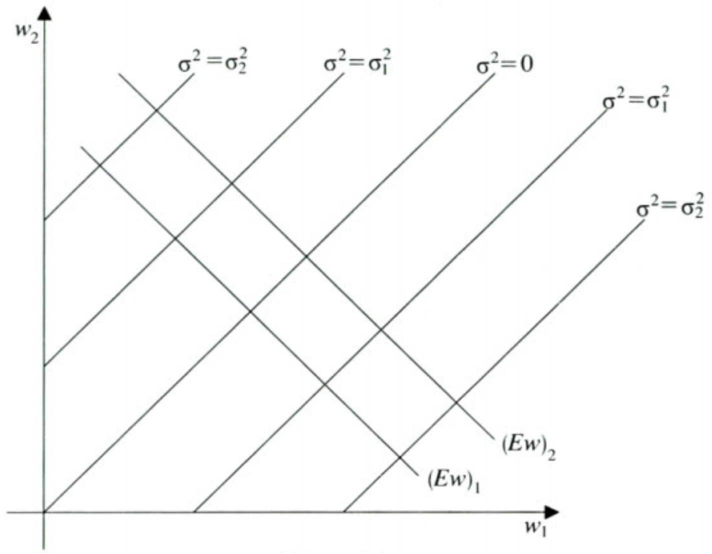


Figura 4.5.

De aquí en adelante, para evitar confusiones, vamos a utilizar $U(w) \equiv Eu(w)$. Puesto que la utilidad esperada es separable en los dos elementos del vector w, tenemos el hecho de que:

$$\frac{\partial U(w)}{\partial w_i} > 0, \ \frac{\partial^2 U(w)}{\partial (w_i)^2} < 0, \ \frac{\partial^2 U(w)}{\partial w_1 \partial w_2} = 0 \ \ i = 1, 2$$

y entonces, tal y como ya demostramos en el capítulo 1, $U(w)$ es estrictamente cuasi-cóncava, y por tanto sus curvas de indiferencia son estrictamente convexas.

EJERCICIO 4.7: *Tomando una combinación convexa de dos vectores indiferentes entre si, y utilizando la desigualdad de Jensen, demuestre que las curvas de indiferencia correspondientes a la utilidad esperada son convexas.*

Finalmente, nótese que, puesto que las curvas de indiferencia tienen pendiente negativa, cada una corta a la linea de certidumbre en un solo punto. Si llamamos a este punto $\widetilde{w}$, entonces tenemos:

$$Eu(w) = pu(\widetilde{w}) + (1-p)u(\widetilde{w}) = u(\widetilde{w})$$

Ahora, puesto que hemos supuesto $u'(w) > 0$, es evidente que cuanto más lejos del origen corta una curva de indiferencia a la linea de certidumbre, mayor nivel de utilidad esperada indica. Es decir, las curvas de indiferencia más alejadas del origen indican loterías más preferidas.

Si dibujamos las curvas de indiferencia correspondientes a una función de utilidad estrictamente cóncava, las lineas de iso-valor esperado y las lineas de iso-varianza en una sola gráfica, es inmediato que el individuo muestra aversión al riesgo (véase la figura 4.6). En primer lugar, nótese que, de la ecuación para la relación marginal de sustitución (4.2), la pendiente de una curva de indiferencia en el punto en donde corta la linea de certidumbre es igual a $-\frac{(1-p)}{p}$, es decir, es la misma pendiente que una linea iso-valor esperado. Por tanto, se deduce que la solución única al problema de elegir libremente entre un conjunto de loterías con el mismo valor esperado es aquella lotería con varianza cero. Para ver esto de otra manera, considérese un movimiento a lo largo de una linea de iso-valor esperado hacia loterías con mayor varianza (es decir, movimientos que se alejan de la linea de certidumbre).

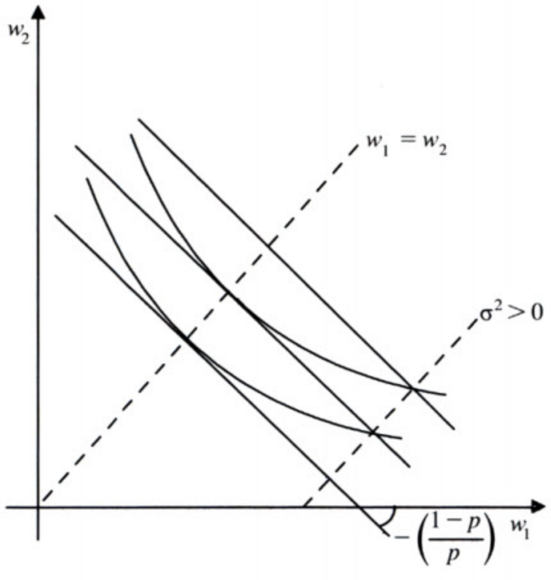


Figura 4.6.

Claramente cada movimiento de este tipo implica ir a una curva de indiferencia menor (figura 4.6). Este tipo de preferencia, que obviamente corresponde solamente a curvas de indiferencia convexas (es decir, función de utilidad cóncava), es la aversión al riesgo, puesto que a valor esperado constante se desea minimizar la varianza (que asociamos con riesgo). Por supuesto, las preferencias indicadas por la utilidad esperada también muestran, a varianza constante, una preferencia por mayores niveles de valor esperado.

4.6.1 Mediciones de aversión al riesgo

Ya que el concepto de aversión al riesgo ha sido formalmente introducido, tiene sentido analizarlo con más detalle. La pregunta más interesante consiste en si se puede caracterizar la aversión al riesgo de modo que dos individuos diferentes puedan ser comparados u ordenados según cual es más adverso al riesgo. Para hacerlo, considere la figura 4.7, en la cual se ha representado a un individuo con una riqueza libre de riesgo de w_0. El punto de riquezas inicial es una lotería indicada por el vector $w^0 = (w_1^0, w_2^0) = (w_0, w_0)$. La curva de indiferencia que pasa por w^0 divide el espacio de las riquezas en dos, los puntos estrictamente por debajo de la curva (loterías menos preferidas que w^0, es decir, $w^0 : w^0 \succ w$) y los puntos sobre y por encima de la curva (loterías por lo menos tan preferidas que w^0, es decir, $w : w \succsim w^0$). Llamamos el conjunto $A(w^0) = \{w : w \succsim w^0\}$ el *conjunto de aceptación*, puesto que indica todas las loterías que el individuo aceptaría, voluntariamente, a cambio de su lotería inicial.

Ahora, consideramos dos individuos que son idénticos en todo menos su funcion de utilidad. En particular, los dos individuos tienen la misma distribución de riqueza inicial y las mismas probabilidades para los dos estados de la naturaleza. Como acabamos de ver, con independencia de la función de utilidad, la pendiente de una curva de indiferencia en donde corta la recta de certidumbre es igual a $-\frac{(1-p)}{p}$, y por tanto resulta que las fronteras de los dos conjuntos de aceptación son necesariamente tangentes el uno al otro en el punto inicial w^0. Ahora, si resulta que uno de los conjuntos de aceptación es un sub-conjunto del otro, digamos $A_i(w^0) \subset A_j(w^0)$, entonces todas las loterías que son aceptadas por el individuo i también son aceptadas por j, pero lo opuesto no es verdad. Es decir, existen

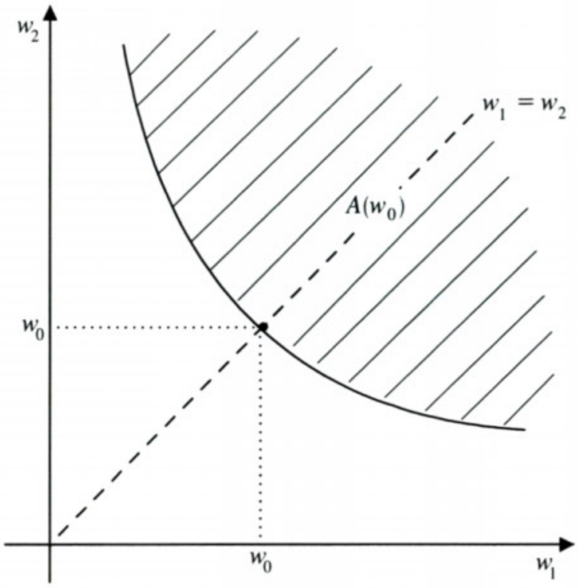


Figura 4.7.

loterías que son aceptadas por j pero rechazadas por i, a cambio de w^0. Puesto que w^0 es una situación de certidumbre, y puesto que las dos fronteras de los conjuntos de aceptación son decrecientes, para un valor esperado en particular todas las loterías que son aceptadas por j pero rechazadas por i son las de mayor varianza (mayor riesgo). En este caso, es natural decir que i es, localmente (en un entorno de w^0), más adverso al riesgo que j.

Gráficamente es óbvio que, si un individuo i es más adverso al riesgo que un individuo j, entonces la curva de indiferencia de i que pasa por el punto inicial será, localmente, más convexa que la curva de indiferencia de j (figura 4.8). Vamos a formalizar este requisito.

En primer lugar, de la ecuación (4.2), la primera derivada de una curva de indiferencia es:

$$\left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{dEu(w)=0} = -\frac{(1-p)u'(w_1)}{pu'(w_2)}$$

Diferenciando una segunda vez, se obtiene:

$$\left.\frac{d^2w_2}{d(w_1)^2}\right|_{dEu(w)=0} = -\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{u''(w_1)u'(w_2) - u'(w_1)u''(w_2)\left(\frac{dw_2}{dw_1}\right)}{[u'(w_2)]^2}\right)$$

En el punto $w_2 = w_1 = w_0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2w_2}{d(w_1)^2}\right|_{dEu(w)=0} &= -\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{u''(w_0)u'(w_0) - u'(w_0)u''(w_0)\left(-\frac{(1-p)}{p}\right)}{[u'(w_0)]^2}\right) \\
&= -\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{u''(w_0)u'(w_0)\left(1+\frac{(1-p)}{p}\right)}{u'(w_0)^2}\right) \\
&= -\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)}f(p) \\
&\equiv R_a(w_0)f(p)
\end{aligned}$$

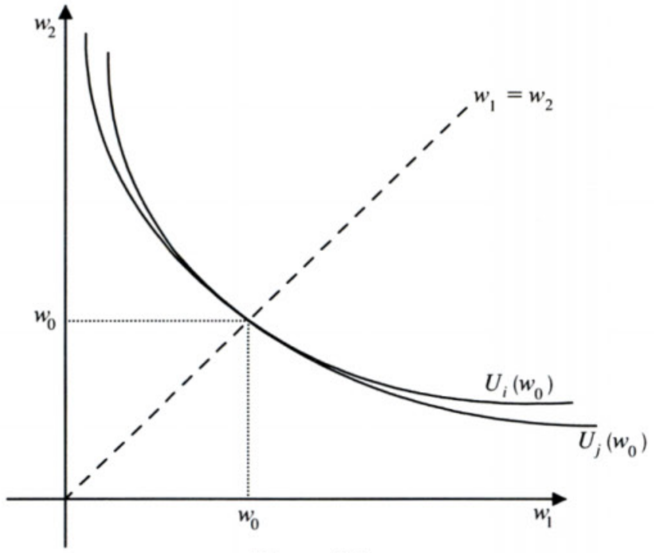


Figura 4.8.

en donde $f(p) = \frac{1-p}{p^2}$. El punto importante es que, puesto que dos individuos tienen la misma probabilidad p, si sus curvas de indiferencia iniciales son diferentes en cuanto a la segunda derivada en w^0, entonces esta diferencia tiene que deberse a una diferencia en el término $R_a(w_0)$. Dados los supuestos $u'(w) > 0$ y $u''(w) \leq 0$, resulta que $R_a(w_0)$ es no-negativo. $R_a(w_0)$ se llama *la medición Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo*, y si $R_a^i(w_0) > R_a^j(w_0)$ entonces individuo i es más adverso al riesgo que individuo j.

En este momento podemos aclarar un punto que ha quedado pendiente desde la demostración formal que hemos hecho de la teoría de la utilidad esperada. Está claro que, si dos funciones de utilidad de riqueza, $u_i(w)$ y $u_j(w)$, representan las mismas preferencias, entonces a cada función le corresponde el mismo conjunto de curvas de indiferencia en el plano de riqueza contingente. Pero a su vez, esto tiene que implicar que tienen la misma función de aversión absoluta al riesgo, $R_a^i(w) = R_a^j(w)$ para todo w.

Ahora, como ya hemos visto en el capítulo 1, una función de utilidad de cualquier vector de bienes sirve únicamente para ordenar dichos vectores desde el menos preferido al más preferido. Es decir, una función de utilidad del tipo que hemos usado hasta ahora no tiene ningún sentido cardinal, o en otras palabras, si $w_i \succ w_j$, en principio nos sirve igual de bien que $u(w_i) = 4$ y $u(w_j) = 2$ que $u(w_i) = 37$ y $u(w_j) = 9.6$. Únicamente es importante que $u(w_i) > u(w_j)$, y no la diferencia entre los dos valores, $u(w_i) - u(w_j)$. En este sentido, hemos visto que, en un ambiente de certidumbre, si la función $u(w)$ representa unas preferencias $\succsim$ en el sentido de que $u(w_i) \geq u(w_j)$ si y solo si $w_i \succsim w_j$, entonces $f(u(w))$ con $f'(\cdot) > 0$ también representa las mismas preferencias, es decir, $z(w) \equiv f(u(w))$ también es una función de utilidad. Una función compuesta de la forma $z(w) \equiv f(u(w))$ con $f'(\cdot) > 0$ se conoce como una *transformación monótona positiva* de $u(w)$.

Considérese ahora una situación de incertidumbre. Si dos funciones de utilidad de riqueza, $u_i(w)$ y $u_j(w)$, acaban representando las mismas preferencias para loterías, entonces tiene que ser cierto que, para una determinada lotería $\gamma(w,p)$, las dos funciones den la misma ordenación de loterías, o es lo mismo, que las dos utilidades esperadas implicadas son relacionadas por una transformación monótona positiva:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k u_i(w_k) = H\left(\sum_{k=1}^{n} p_k u_j(w_k)\right) \text{ con } H'(\cdot) > 0$$

Diferenciando con respecto de w_k, tenemos:

$$u_i'(w_k) = H'(\cdot)u_j'(w_k) \;\; \forall w_k$$

de donde:

$$H'(\cdot) = \frac{u_i'(w_k)}{u_j'(w_k)} \;\; \forall w_k \tag{4.3}$$

Diferenciando (4.3) se obtiene:

$$H''(\cdot) = \frac{u_i''(w_k)u_j'(w_k) - u_i'(w_k)u_j''(w_k)}{\left[u_j'(w_k)\right]^2} \;\; \forall w_k$$

Pero, si las dos funciones han de representar las mismas preferencias, $R_a^i(w_k) = R_a^j(w_k)$ para todo w_k, es decir:

$$-\frac{u_i''(w_k)}{u_i'(w_k)} = -\frac{u_j''(w_k)}{u_j'(w_k)} \;\; \Rightarrow \;\; u_i''(w_k)u_j'(w_k) = u_i'(w_k)u_j''(w_k) \;\; \forall w_k$$

de donde:

$$H''(\cdot) = 0 \;\; \forall w_k$$

En palabras, si las dos funciones han de representar las mismas preferencias, solamente se admiten funciones $H(\cdot)$ lineales. Consecuentemente:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k u_i(w_k) = H\left(\sum_{k=1}^{n} p_k u_j(w_k)\right) = a\sum_{k=1}^{n} p_k u_j(w_k) + b$$

en donde $a > 0$ de (4.3). Ahora, puesto que $b = \sum_{k=1}^{n} p_k b$, tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k u_i(w_k) = a\sum_{k=1}^{n} p_k u_j(w_k) + \sum_{k=1}^{n} p_k b = \sum_{k=1}^{n} p_k\left(a u_j(w_k) + b\right)$$

es decir:

$$u_i(w) = a u_j(w) + b \;\; \text{con} \;\; a > 0$$

En otras palabras, si $u_i(w)$ y $u_j(w)$ representan las mismas preferencias entre los premios en un problema de elección con incertidumbre, entonces están relacionadas linealmente. Esto implica que, con la incorporación de la dimensión de incertidumbre, tenemos que perder cierta generalidad en cuanto a las transformaciones admisibles en la función de utilidad de los premios. Por tanto, en vez de cualquier transformación monótona positiva, solamente podemos utilizar transformaciones lineales con pendiente positiva. La diferencia entre la función de utilidad en un problema con incertidumbre y la función en condiciones de certidumbre ha llevado al hecho de que la primera (la que nos interesa en este capítulo) se conozca por un nombre especial; es la función de utilidad von Neumann-Morgenstern, nombrada en honor a los investigadores que demostraron formalmente la validez de la teoría de la utilidad esperada.

En resumen, supongamos dos individuos i y j con distintas funciones de utilidad en el sentido de que no existe ningún par de números $a > 0$ y b tales que $u_i(w) = au_j(w) + b$. Dada esta diferencia, es cierto que $R_a^i(w) \neq R_a^j(w)$. Nombramos los individuos de tal forma que $R_a^i(w) > R_a^j(w)$. Entonces, el individuo i es (localmente en el entorno del nivel de riqueza w) más adverso al riesgo que el individuo j.

EJERCICIO 4.8: *Demuestre que, si $u_i(w) = F(u_j(w))$, en donde F es una función estrictamente creciente y estrictamente cóncava, entonces la función $u_i(w)$ es más adversa al riesgo que la función $u_j(w)$.*

Nótese que $R_a(w)$ es una función en toda regla, definido para cualquier escalar[13] w, puesto que podríamos haber utilizado cualquier punto sobre la recta de certidumbre como nuestro punto inicial en el argumento anterior. Más adelante estudiaremos las derivadas de $R_a(w)$.

La palabra "absoluta" en el nombre de $R_a(w)$ se debe a que las loterías utilizadas en su derivación son loterías absolutas, es decir, loterías cuyos premios w_1 y w_2 son cantidades absolutas de dinero. Existe otro tipo de lotería, denominado loterías relativas, cuyos premios se expresan en términos relativos a la situación inicial. Por ejemplo, la lotería definida por $\eta_r = (r_1, r_2, 1-p, p)$ es una lotería relativa si los premios son $r_i w$ para $i = 1, 2$ y para cualquier w inicial.

En el espacio de los r_i podemos representar las curvas de indiferencia para las loterías relativas, y estas curvas estarán muy relacionados con las curvas de indiferencia para loterías absolutas. Para verlo, nótese que la utilidad esperada de una lotería relativa es:

$$Eu(r, w) = pu(r_2 w) + (1-p)u(r_1 w)$$

Por el teorema de la función implícita, tenemos:

$$\left.\frac{dr_2}{dr_1}\right|_{dEu=0} = -\frac{(1-p)u'(r_1 w)w}{pu'(r_2 w)w} = -\frac{(1-p)u'(r_1 w)}{pu'(r_2 w)}$$

En cualquier lotería relativa que ofrece certidumbre (es decir, $r_1 = r_2$), se obtiene el resultado de que la pendiente de la curva de indiferencia vale $-\frac{(1-p)}{p}$, igual que en el caso de las loterías absolutas. La segunda derivada de una curva de indiferencia en el espacio de las loterías relativas es:

$$\left.\frac{d^2 r_2}{d(r_1)^2}\right|_{dEu=0} = -\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{wu''(r_1 w)u'(r_2 w) - u'(r_1 w)wu''(r_2 w)\left(\frac{dr_2}{dr_1}\right)}{(u'(r_2 w))^2}\right)$$

[13] Antes hemos usado w para indicar un vector de riquezas, mientras que ahora con la misma letra indicamos un escalar. Por el contexto del análisis, siempre debe ser claro cual es exactamente la dimensionalidad de w.

En cualquier lotería tal que $r_1 = r_2 = r$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^2 r_2}{d(r_1)^2}\right|_{dEu=0} &= -\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{wu''(rw)u'(rw) - u'(rw)wu''(rw)\left(-\frac{1-p}{p}\right)}{(u'(rw))^2}\right) \\
&= -\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{wu''(rw)u'(rw)\left(1+\frac{1-p}{p}\right)}{(u'(rw))^2}\right) \\
&= -\left(\frac{1-p}{p}\right)\left(1+\frac{1-p}{p}\right)\left(\frac{wu''(rw)}{u'(rw)}\right) \\
&= -\frac{wu''(rw)}{u'(rw)}f(p) \\
&\equiv R_r(w)f(p)
\end{aligned}
$$

Nótese que, cuando $r = 1$, tenemos $R_r(w) = wR_a(w)$. Pero, suponiendo que el individuo empieza con una riqueza inicial de w que está libre de riesgo, la lotería de certidumbre en el espacio de las loterías relativas que se encuentra sobre la frontera del conjunto de aceptación relevante es precisamente aquella con $r = 1$, y por tanto esta es la lotería que debemos utilizar para definir la aversión al riesgo en cuanto a loterías relativos. Por este motivo, se define *la medición Arrow-Pratt de aversión relativa al riesgo* como $R_r(w) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)} = wR_a(w)$. Si un individuo muestra una medición de aversión relativa al riesgo mayor que otro, entonces es más adverso al riesgo en loterías relativas.

La aversión relativa al riesgo aparece en multitud de análisis en microeconomía, tanto en condiciones de incertidumbre como en situaciones de certidumbre. La razón de ello se hace claro cuando notamos que:

$$
R_r(w) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)} = -\frac{w\left(\frac{du'(w)}{dw}\right)}{u'(w)} = -\frac{\left(\frac{du'(w)}{u'(w)}\right)}{\left(\frac{dw}{w}\right)}
$$

es decir, la medición de aversión relativa al riesgo es (el valor absoluto de) la elasticidad de la utilidad marginal con respecto de la riqueza.

Volvemos a las loterías absolutas. En lo que hemos hecho, empezamos con una situación libre de riesgo. Ahora considere un individuo con una distribución inicial de riquezas que implica incertidumbre, en concreto $w_1 > w_2$. De la misma forma que antes, la curva de indiferencia que pasa por el punto inicial forma la frontera inferior del conjunto de aceptación. Esta curva de indiferencia corta la recta de certidumbre en un punto que corresponde a una riqueza de w^* en cada estado. La cantidad w^* satisface:

$$
u(w^*) = pu(w_2) + (1-p)u(w_1) \tag{4.4}
$$

y se conoce como *la riqueza equivalente de certidumbre.*

EJERCICIO 4.9: *¿Cuál es la riqueza equivalente de certidumbre para un individuo con la lotería de la paradoja de San Petersburgo y con una función de utilidad de premios* $u(w) = Ln(w)$ *y con una riqueza libre de riesgo de 0?*

Puesto que la curva de indiferencia es estrictamente convexa, resulta que siempre será cierto que $Ew = \overline{w} > w^*$. De hecho, la diferencia entre estos dos números, $\overline{w} - w^* \equiv \pi(w, \overline{w}, u)$, nos proporciona una segunda manera de medir la aversión al riesgo de un individuo. Claramente, $\pi(w, \overline{w}, u) = 0$ solamente puede ser consistente con una curva de indiferencia lineal (coincide con la linea de iso-valor esperado), es decir, con aversión absoluta al riesgo de cero. Luego, dada una lotería inicial, cuanto más convexa es la curva de indiferencia (mayor aversión al riesgo), menor será w^*, y así mayor será $\pi(w, \overline{w}, u)$. Se conoce $\pi(w, \overline{w}, u)$ como la *prima del riesgo*, y nos interesa ver exactamente cómo se relaciona con la medición de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo.

Para ello, nótese que, de la definición de la riqueza equivalente de certidumbre (el equivalente cierto) y la definición de prima de riesgo, podemos escribir:

$$pu(w_2) + (1-p)u(w_1) = u(w^*) = Eu(w) = u(\overline{w} - \pi(w, \overline{w}, u))$$

En este sentido, podemos entender la prima del riesgo como lo que un individuo pagaría para sustituir una lotería por su valor esperado con certidumbre. Ahora, nos será de utilidad dividir la lotería inicial entre una riqueza libre de riesgo, w_0, y una lotería que indicaremos por una variable aleatoria x con valor esperado $Ex = \overline{x}$, multiplicado por una constante, k, de modo que la utilidad esperada de la situación inicial es:

$$pu(w_0 + kx_2) + (1-p)u(w_0 + kx_1) = Eu(w_0 + kx)$$

De esta forma, podemos estudiar situaciones libres de riesgo simplemente utilizando $k = 0$.

Ahora, puesto que el valor esperado de la situación incial es $E(w_0 + kx) = w_0 + kEx = w_0 + k\overline{x}$, la prima de riesgo correspondiente a la situación incial se define por $\pi(w_0, k, x, u)$, tal que:

$$Eu(w_0 + kx) = u(w_0 + k\overline{x} - \pi(w_0, k, x, u)) \tag{4.5}$$

Vamos a estudiar el comportamiento de la función $\pi(w_0, k, x, u)$ según varía k, manteniendo constantes el resto de los parámetros, y así escribiremos simplemente $\pi(w_0, k, x, u) = \pi(k)$. Sobre todo, nos interesa la función $\pi(k)$ alrededor de $k = 0$, es decir, un riesgo pequeño, para poder relacionar la prima de riesgo con la medición de aversión absoluta al riesgo, que fue estudiado alrededor de un punto de certidumbre.

En primer lugar, tomemos un desarrollo de Taylor de segundo orden de $\pi(k)$ alrededor del punto $k = 0$:

$$\pi(k) \approx \pi(0) + k\pi'(0) + \frac{k^2}{2}\pi''(0) \tag{4.6}$$

En esta ecuación, vamos a sustituir los valores de $\pi(0)$, $\pi'(0)$ y $\pi''(0)$. Empezamos notando que, si hacemos $k = 0$ en (4.5), entonces se obtiene directamente que $\pi(0) = 0$. En segundo lugar, derivamos (4.5) con respecto de k para obtener:

$$Exu'(w_0 + kx) = (\overline{x} - \pi'(k))u'(w_0 + k\overline{x} - \pi(k))$$

Cuando $k = 0$, tenemos $u'(w_0)\overline{x} = (\overline{x} - \pi'(0))u'(w_0 - \pi(0)) = (\overline{x} - \pi'(0))u'(w_0)$ puesto que como acabamos de ver, $\pi(0) = 0$. Pero entonces tenemos $\overline{x} = \overline{x} - \pi'(0)$, y así $\pi'(0) = 0$. Derivando (4.5) dos veces con respecto de k, obtenemos:

$$Ex^2u''(w_0 + kx) = (\overline{x} - \pi'(k))^2u''(w_0 + k\overline{x} - \pi(k)) - \pi''(k)u'(w_0 + k\overline{x} - \pi(k))$$

Pero, puesto que $\pi(0) = 0$ y $\pi'(0) = 0$, haciendo $k = 0$ tenemos:

$$Ex^2u''(w_0) = \overline{x}^2u''(w_0) - \pi''(0)u'(w_0)$$

es decir:

$$\pi''(0) = -\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)}(Ex^2 - \overline{x}^2)$$

Finalmente, sustituimos estos tres resultados en (4.6) para obtener:

$$\pi(k) \approx \frac{k^2}{2}\left(-\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)}(Ex^2 - \overline{x}^2)\right) = \frac{k^2(Ex^2 - \overline{x}^2)}{2}R_a(w_0)$$

Ahora, puesto que por la definición de varianza, sencillos pasos que el lector puede (y debe) comprobar revelen que:

$$\sigma^2(kx) = E(kx - k\overline{x})^2 = k^2(Ex^2 - \overline{x}^2)$$

de donde, finalmente, tenemos:

$$\pi(k) \approx \frac{\sigma^2(kx)}{2}R_a(w_0) \tag{4.7}$$

La ecuación (4.7) se conoce como la *aproximación de Arrow-Pratt* para la prima de riesgo. Muestra que, tal y como hemos indicado, cuanto mayor es la medición de aversión absoluta al riesgo, mayor será la prima del riesgo, pero también, para un valor en concreto de $R_a(w_0)$, cuanto mayor es la varianza de la lotería inicial, también mayor es la prima del riesgo.

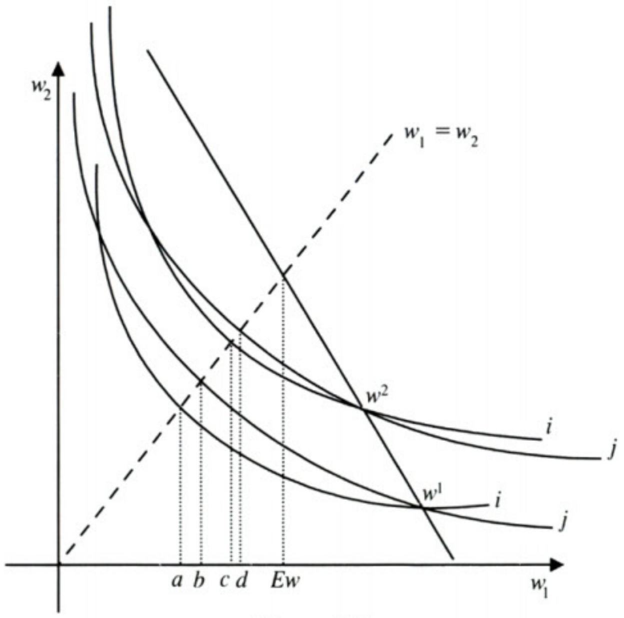


Figura 4.9.

En la figura 4.9, se muestran dos loterías con el mismo valor esperado y diferentes varianzas. Pasando por cada una de las loterías se han pintado dos curvas de indiferencia, en donde las curvas indicadas por i corresponden a mayor aversión al riesgo que las indicadas por j. En concreto, el supuesto que subyace a la figura es:

$$R_a^i(w) = A_i > A_j = R_a^j(w) \quad \text{para todo } w$$

en donde los A_k para $k = i, j$ son dos constantes. De la gráfica, concentrando la atención sobre cualquiera de las dos loterías, es inmediato que la prima de riesgo crece con la medición de aversión al riesgo. Por otro lado, centrando la atención sobre cualesquiera de las dos curvas con la misma medición de aversión al riesgo, también es obvio que la prima de riesgo crece con la varianza.

EJERCICIO 4.10: *Suponga que un individuo tiene una riqueza libre de riesgo de 350,000 euros, y que su aversión relativa al riesgo en esta riqueza tiene el valor de 4. ¿Debería el individuo aceptar o rechazar una apuesta en donde gana 105 euros con probabilidad 0,5 y pierde 100 euros con probabilidad 0,5? (pista: utiliza la aproximación de Arrow-Pratt para la prima del riesgo).*

Es importante notar que la medición Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo es una función bien definida (y también lo es la de aversión relativa al riesgo). Es decir, podemos preguntar cómo varía $R_a(w)$ según varía w. En palabras, estamos preguntando cómo varía la aversión al riesgo que un individuo siente conforme su riqueza libre de riesgo crece. En primer lugar, puesto que $R_r(w) = wR_a(w)$, resulta que:

$$R_r'(w) = R_a(w) + wR_a'(w)$$

Por tanto, siempre dentro del supuesto de que la función de utilidad es creciente y cóncava (para que aversión al riesgo, tanto absoluta como relativa, es positiva) podemos concluir directamente que:

1. Si aversión absoluta al riesgo no es decreciente ($R_a'(w) \geq 0$), entonces la aversión relativa al riesgo es creciente ($R_r'(w) > 0$).

2. Si aversión relativa al riesgo no es creciente ($R_r'(w) \leq 0$), entonces la aversión absoluta al riesgo es decreciente ($R_a'(w) < 0$).

Por otro lado, si derivamos la definición de aversión absoluta al riesgo, se obtiene:

$$\begin{aligned} R_a'(w) &= -\left(\frac{u'''(w)u'(w) - u''(w)u''(w)}{u'(w)^2}\right) \\ &= -\frac{u'''(w)}{u'(w)} + \left(\frac{u''(w)}{u'(w)}\right)^2 \\ &= -\frac{u'''(w)}{u'(w)} + R_a(w)^2 \end{aligned}$$

Nótese que, $u'''(w) \geq 0$ es una condición necesaria (pero no suficiente) para que $R_a'(w) < 0$. En otras palabras, una condición necesaria para que la aversión absoluta al riesgo es decreciente es que la utilidad marginal sea convexa. Pero, ya hemos supuesto que $u'(w) > 0$ y $u''(w) < 0$ para todo w, es decir, utilidad marginal es siempre positiva y siempre decreciente. Una conclusión directa que se obtiene de esto es que, por lo menos para niveles de riqueza suficientemente altos, la utilidad marginal tiene que ser convexa (si no, pasaría a ser negativa o tendría que ser creciente). En resumen, es generalmente aceptado que la aversión absoluta al riesgo es decreciente (y para muchos análisis, que la aversión relativa al riesgo es constante). En términos gráficos, aversión absoluta al riesgo decreciente corresponde con un conjunto de curvas de indiferencia que se hacen más rectas según se aleja del origen.

4.6.2 Transferencias de riesgo

Podemos utilizar la prima de riesgo para considerar el precio mínimo de venta y el precio máximo de compra de una lotería. Empezamos por el precio máximo de venta, que indicaremos por q. Suponiendo que la situación inicial consta de una riqueza libre de riesgo, w_0, y una lotería $\gamma(x_1, x_2, (1-p), p)$, la utilidad esperada inicial es $Eu(w) = (1-p)u(w_0 + x_1) + pu(w_0 + x_2)$. El individuo vendería la parte aleatoria de su dotación (la lotería) a cambio de una cantidad constante de dinero, q, siempre que esta cantidad satisfaciera la ecuación:

$$u(w_0 + q) \geq (1-p)u(w_0 + x_1) + pu(w_0 + x_2)$$

Puesto que el lado de la izquierda de esta desigualdad es creciente en q, el precio minimo de venta de la lotería, q^*, satisface $u(w_0+q^*) = (1-p)u(w_0+x_1)+pu(w_0+x_2)$. Pero, de la ecuación que define la riqueza equivalente de certidumbre (4.4), se deduce que $w^* = w_0+q^*$, es decir, $q^* = w^* - w_0$, que puede ser positivo o negativo.

Por otro lado, puesto que la prima de riesgo se define por $\pi = \overline{w} - w^*$, y puesto que $\overline{w} = w_0 + \overline{x}$, resulta que $\pi = w_0 + \overline{x} - (w_0 + q^*) = \overline{x} - q^*$. En otras palabras, el precio mínimo de venta de una lotería es igual a su valor esperado menos la prima de riesgo (véase la figura 4.10).

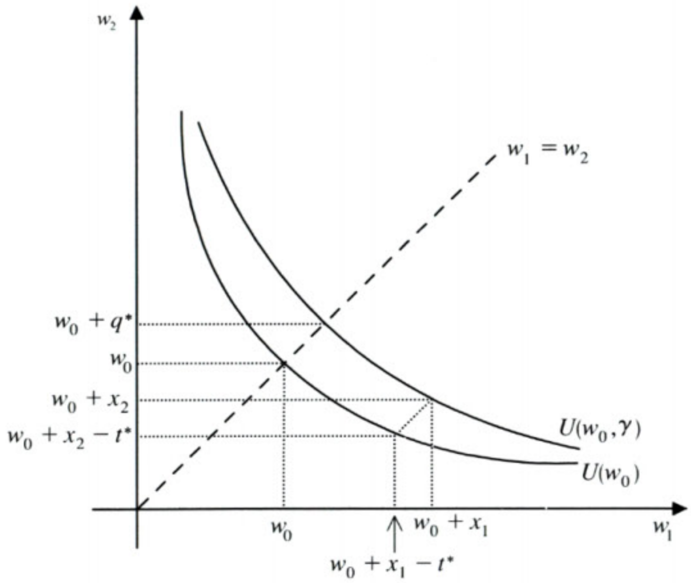


Figura 4.10.

Ahora, suponga que la situación inicial es una riqueza libre de riesgo, w_0, y se plantea comprar la lotería $\gamma(x_1, x_2, (1-p), p)$. Estaría dispuesto a pagar cualquier precio, t, que satisfaga:

$$(1-p)u(w_0 + x_2 - t) + pu(w_0 + x_1 - t) \geq u(w_0)$$

Pero, puesto que el lado de la izquierda de esta ecuación es decreciente en t, resulta que el precio máximo que pagaría por adquirir la lotería, t^*, se puede calcular a partir de la ecuación $(1-p)u(w_0 + x_2 - t^*) + pu(w_0 + x_1 - t^*) = u(w_0)$. Otra vez, el precio máximo de compra puede ser positivo o negativo. En la figura 4.10 se muestra, junto con el precio mínimo de venta, una representación gráfica del precio máximo de compra de una lotería.

Es interesante comparar los valores absolutas de q^* y t^*, para una determinada lotería, manteniendo constante la función de utilidad y la riqueza libre de riesgo. En principio, se puede formular un argumento que defiende la hipótesis de que son iguales (en valor absoluto), ya que el precio máximo de compra es el precio que deja al individuo indiferente entre seguir sin la lotería y obtenerla, mientras que el precio mínimo de venta es el precio que deja al individuo indiferente entre seguir con la lotería y desprenderse de ella.

Sin embargo, como se puede apreciar en la figura 4.10, las dos cantidades absolutas no son necesariamente iguales, y además, las diferencias entre ellas se puede explicar con la pendiente de aversión absoluta al riesgo. Por ejemplo, como ya hemos notado antes, si la aversión absoluta al riesgo es decreciente las curvas de indiferencia se hacen cada vez más lineales conforme se aleja del origen. Pero en este caso, en la figura 4.10 la curva de indiferencia indicado por $u(w_0, \gamma)$ sería más lineal que la curva indicada por $u(w_0)$, y entonces resulta que $|t^*| < |q^*|$. El lector puede comprobar que, si la aversión absoluta al riesgo es creciente entonces el precio máximo de compra es mayor que el precio mínimo de venta, y que si la aversión absoluta al riesgo es constante, entonces los dos precios son iguales.

4.7 Ejemplos de transferencias de riesgo

Existen mecanismos en todas las economías desarrolladas para llevar a cabo transferencias de riesgo. Los dos ejemplos más obvios son los mercados de los seguros y los mercados financieros. Vamos a considerar el funcionamiento de cada uno de estos dos mercados.

4.7.1 Los mercados de seguros

Un contrato de seguros es un acuerdo de intercambio de riesgo a cambio de una prima fija. En la segunda parte del presente libro, estudiaremos situaciones de equilibrio general, en donde dos individuos interactuan simultáneamente con objetivos diferentes. El caso de los contratos de seguros entra directamente en este tipo de situación, puesto que el asegurador y el asegurado normalmente tendrán objetivos diferentes que desean alcanzar mediante un solo contrato. Dado esto, tenemos que posponer una consideración completa del estudio de los contratos de seguros para más adelante, y ahora solamente estudiaremos las decisiones referidas a los seguros para una situación particularmente sencillo.

Suponga un individuo, adverso al riesgo, con una riqueza libre de riesgo w_0 y una lotería $\gamma(0, -L, (1-p), p)$, con $L > 0$. Es decir, con probabilidad p sufre una pérdida de L. Por razones lógicas, suponemos que $w_0 \geq L$. La situación inicial del individuo se puede describir por una lotería $\gamma(w_0, w_0 - L, (1-p), p)$. La riqueza esperada del individuo es $Ew = w_0 - pL$, y su utilidad esperada es $(1-p)u(w_0) + pu(w_0 - L)$. En una gráfica de riqueza contingente, la curva de indiferencia que pasa por el punto inicial divide el espacio de riquezas en dos partes, y aquella parte sobre o por encima de dicha curva indica el conjunto de aceptación, es decir, son las loterías de riqueza que el individuo aceptaría a cambio de su situación inicial (véase figura 4.11). Claramente, el individuo cambiaría su lotería inicial (quedándose su riqueza libre de riesgo) por cualquier otra lotería, $\widetilde{\gamma}(x_1, x_2, (1-p), p)$, siempre que se cumple:

$$(1-p)u(w_0) + pu(w_0 - L) \leq (1-p)u(w_0 + x_1) + pu(w_0 + x_2)$$

Vamos a referirnos a $\widetilde{\gamma}(x_1, x_2, (1-p), p)$ como *el contrato de seguros.*

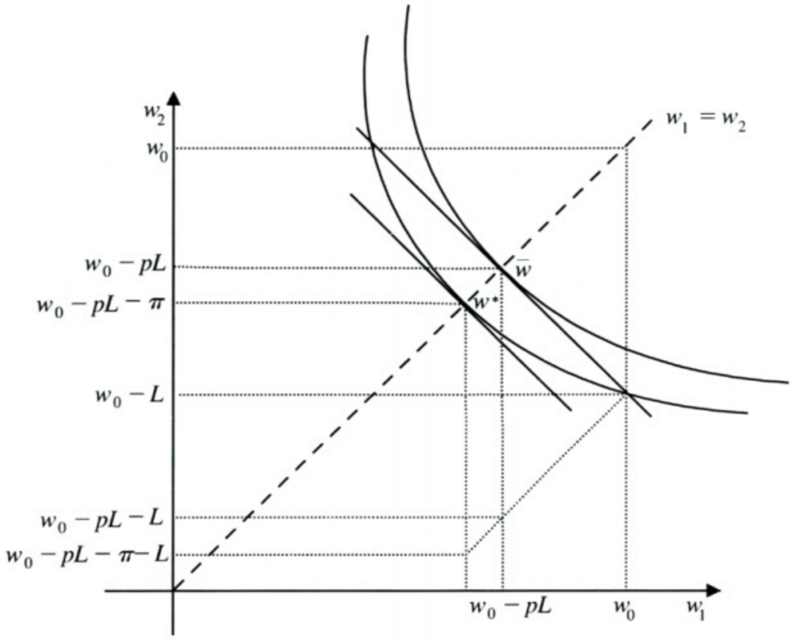


Figura 4.11.

Ahora considere la situación del asegurador. Vamos a suponer que el asegurador es neutral ante el riesgo[14], y que su situación inicial queda descrita por una riqueza libre de riesgo de z_0 y una lotería $\widehat{\gamma}(y_1, y_2, (1-p), p)$. Podemos entender la lotería $\gamma(y_1, y_2, (1-p), p)$ como indicativa de la cartera de clientes que el asegurador ya tiene. Puesto que es neutral ante el riesgo, el beneficio esperado inicial del asegurador es $z_0 + (1-p)y_1 + py_2$. Si el asegurador ofrece un contrato al individuo descrito arriba, entonces acepta la lotería $\gamma(0, -L, (1-p), p)$ a cambio de entregarle al individuo la lotería $\widetilde{\gamma}(x_1, x_2, (1-p), p)$. Si lo hace, el beneficio esperado del asegurador se queda en:

$$z_0 + (1-p)(y_1 - x_1) + p(y_2 - L - x_2)$$

Por supuesto, el "beneficio esperado" del asegurador por participar en el intercambio se mide por:

$$\begin{aligned} B(x) &= [z_0 + (1-p)(y_1 - x_1) + p(y_2 - L - x_2)] - [z_0 + (1-p)y_1 + py_2] \\ &= -[(1-p)x_1 + px_2] - pL \end{aligned}$$

Para que esto sea no-negativo (una condición lógica para que el asegurador participe), tiene que cumplirse que:

$$-pL \geq (1-p)x_1 + px_2$$

Tomando en cuenta esta condición, notamos que el intercambio deja al individuo asegurado con una situación de una riqueza esperada de $w_0 + (1-p)x_1 + px_2 \leq w_0 - pL$, es decir, los únicos puntos posibles corresponden con lineas de valor esperado para el individuo (en la gráfica de riqueza contingente) que están sobre o por debajo de su linea de valor esperado incial. Nótese que esto indica una zona de posibles contratos que se encuentra entre la curva de indiferencia inicial del individuo y la linea de valor esperado inicial. Esta

[14] Aunque la neutralidad ante el riesgo no es esencial, simplifica mucho el análisis formal.

zona de contratos indica todos los contratos que son mutuamente beneficiosos (es decir, incrementan el bienestar de por lo menos un participante sin perjudicar el bienestar del otro).

Ahora, planteamos las caracteristicas generales que debe cumplir el contrato de seguros $\widetilde{\gamma}(x_1, x_2, (1-p), p)$. En primer lugar, nótese que tiene que cumplirse que $x_1 = x_2$. Para verlo, suponga que no se da esta igualdad. En este caso, el contrato de seguros deja al individuo con una distribución de riquezas que no se encuentra sobre la linea de certidumbre. Suponga que se cumple $x_1 > x_2$ de manera que el contrato de seguros deja el individuo en un punto por debajo de la linea de certidumbre. Pero en este caso, se tiene una situación formalmente idéntica a la situación inicial, y entonces cabe un nuevo contrato mutuamente beneficioso. En este sentido, si en un primer lugar se ofrece un contrato con $x_1 > x_2$ que es aceptado, entonces sabemos que existe un nuevo contrato que también será aceptado por el asegurado, y que incrementa el beneficio esperado del asegurador. Puesto que podemos esperar que el asegurador siempre agote cualquier opción que incremente su beneficio esperado, tiene que cumplirse que $x_1 = x_2$. Dado esto, ya sabemos que el punto final del individuo se encontrará en algún punto sobre la linea recta[15] que une w^* y $\overline{w}$ en la figura 4.11. La cuestión de exactamente cual será este punto solamente se puede resolver fácilmente para dos casos extremos; por un lado cuando el asegurador actúa en un ambiente competitivo, y por otro, cuando es monopolista. Vamos a utilizar $x_1 = x_2 = \widetilde{x}_i$ para indicar el contrato, en donde $\widetilde{x}_c$ indicará una situación competitiva y $\widetilde{x}_m$ indicará una situación de monopolio.

Cuando el asegurador es una empresa competitiva, sabemos que debe ganar un beneficio esperado de 0 en cada contrato que ofrece (si no fuera así, otro asegurador ofrecería un contrato que favorece más al asgurado y que implica un beneficio esperado menor). Como hemos visto antes, esto tiene que implicar que $(1-p)x_1 + px_2 = -pL$, pero como $x_1 = x_2 = \widetilde{x}_c$, tenemos $\widetilde{x}_c = -pL$. Es decir, la riqueza final del individuo acaba siendo el punto $\overline{w}$, y su utilidad esperada es la máxima posible dentro de las posibilidades que ofrecía la zona de contratos factibles inicial. Nótese que, en este caso, con el contrato de seguros, la riqueza del individuo en ambos estados es $w_0 - pL$, es decir, en el estado 1 el contrato le pide pagar una cantidad igual a $-pL$, mientras que en el estado 2 el contrato le entrega una cantidad igual a $L - pL$. En este sentido, el contrato le pide en ambos estados el pago de $-pL$, cantidad de dinero conocida como la *prima* del contrato, mientras que en el estado 2 el contrato también le entrega una cantidad de dinero L, conocido como la *indemnización*. El hecho de que la indemnización sea, en valor absoluto, igual a la pérdida indica de que la cobertura es completa. Por otro lado, el hecho de que la prima a pagar es igual al valor esperado de la pérdida se conoce por el nombre de *prima equitativa*.

En segundo lugar, suponga que el asegurador es monopolista. Por lo que hemos hecho antes, sigue siendo válido el hecho de que el contrato de seguros se caracterice por $x_1 = x_2 = \widetilde{x}_m$, es decir, la cobertura óptima sigue siendo completa, y entonces el único aspecto que tenemos que analizar es la prima que se cobra en una situación de monopolio. Cuando es monopolista, el asegurador no tiene que temer la posibilidad de que un competidor le quite un cliente cuando aumenta la prima que cobra por cobertura completa, aunque sí tiene que tener en cuenta la posibilidad de que aumente la prima tanto que el cliente prefiera no comprar nada de cobertura. En este caso, el asegurador puede cobrar una prima de tal forma que el cliente sea indiferente entre asegurarse o no. En términos de

[15] El hecho de que el asegurado acabe en un punto sobre la linea de certidumbre se conoce como *cobertura completa* dentro del contrato de seguros.

utilidad esperada, el contrato del monopolista satisface:

$$u(w_0 + \widetilde{x}_m) = (1-p)u(w_0) + pu(w_0 - L)$$

Pero, por lo que hemos hecho antes, claramente resulta cierto que $w_0 + \widetilde{x}_m = w^*$, es decir, el individuo se quedará con su renta equivlalente cierto. Puesto que $w^* = \overline{w} - \pi = w_0 - pL - \pi$, resulta que $\widetilde{x}_m = -(pL + \pi)$. Entonces, la única diferencia entre el contrato de seguros de un monopolista y el de un asegurador competitivo es la prima de riesgo del cliente. En el caso del monopolista, el contrato de seguros óptimo da al individuo una riqueza en ambos períodos de $w_0 - (pL + \pi)$, es decir, en ambos estados el contrato le pide pagar una prima igual a $(pL + \pi)$ y en el estado 2, el contrato adicionalmente le entrega una indemnización de L.

EJERCICIO 4.11: *Analice los casos de asegurador competitivo y monopolista utilizando programas de optimización restringida y el método de Lagrange.*

EJERCICIO 4.12: *Analice los casos de asegurador competitivo y monopolista en una gráfica que mide en los ejes la prima y la indemnización.*

EJERCICIO 4.13: *Represente gráficamente una situación con un asegurador monopolista que es estrictamente adverso al riesgo.*

4.7.2 Los mercados financieros

Por supuesto, existen muchas situaciones en las que no existe la posibilidad de asegurar un riesgo directamente con un asegurador. No obstante, realmente, la única función que cumple un asegurador especializado es repartir riesgos entre muchos individuos, todos ellos adversos al riesgo. Cuando no existe un asegurador especializado, a menudo los mercados mismos ofrecen mecanismos de repartir riesgo entre muchos individuos. El ejemplo más obvio de esto es la bolsa, en donde se intercambian títulos (activos) de las empresas, con motivo de diversificar los riesgos implicados en cada actividad individual[16]. Los dueños de una empresa pueden desear vender parte de las acciones, y utilizar los fondos para comprar partes de otras empresas, así implícitamente asegurando los riesgos en su partrimonio entero. En esta sección vamos a contemplar esta actividad, primero en el modelo de riqueza contingente, y posteriormente en un modelo más común en los negocios reales.

Para empezar, supongamos que existen únicamente dos empresas y dos estados de la naturaleza. Para aclarar notación, usaremos subíndices para indicar los estados de la naturalea, y superíndices para indicar las diferentes empresas. Cada empresa $j = 1, 2$ consta de N^j partes (acciones), que se intercambian a un precio fijo por cada una de v^j, con lo que la empresa j entera tiene un valor de $V^j = v^j N^j$. Supongamos que ser dueño de una proporción β^j de las acciones da derecho a la misma proporción de los beneficios, que para empresa j en estado i son π_i^j. Por supuesto, tiene que satisfacerse que $\beta^j \leq 1$ $j = 1, 2$. Con esto, un individuo que es dueño de una proporción β^1 de la empresa 1 y β^2 de la empresa 2, tendrá riqueza en estado i de:

$$w_i = \beta^1 \pi_i^1 + \beta^2 \pi_i^2 \quad i = 1, 2$$

En vez de una dotación de riqueza libre de riesgo inicial, vamos a suponer que inicialmente el individuo está dotado con participaciones en las dos empresas, de modo que, al empezar, es dueño de una proporción β_0^j de la empresa j, en donde $j = 1, 2$. Dado esto,

[16] Por supuesto, el compartimiento de riesgo no es la única función que cumple la bolsa. También ofrece posibilidades de ganar riquezas.

puede financiar la compra de acciones en una empresa mediante la venta de acciones de la otra. Claramente, su restricción presupuestaria es:

$$v^1\beta^1N^1 + v^2\beta^2N^2 \leq v^1\beta_0^1N^1 + v^2\beta_0^2N^2$$

$$\Rightarrow\; v^1N^1(\beta^1 - \beta_0^1) + v^2N^2(\beta^2 - \beta_0^2) \leq 0$$

También vamos a añadir las restricciones $\beta^j \geq 0 \; j = 1, 2$, es decir, que no se puede ser dueño de una parte negativa de una empresa. En realidad, este tipo de restricción no tiene porque satisfacerse, puesto que solo indica que, en vez de tener participaciones el individuo debe participaciones. Situaciones como esta son, en realidad, normales, y occurren cuando existe una dimensión de tiempo en las transacciones de acciones. Un individuo, con la creencia de que el precio de las acciones en una empresa va a bajar mañana, puede venderlas hoy (aunque no las tenga) al precio de mercado de hoy, con el compromiso de entregarlas pasado mañana. Luego, con el dinero que así recauda, espera hasta el día siguiente, compra las acciones al precio menor, las entrega para saldar la deuda de acciones y se embolsa como beneficio de la operación la diferencia entre los dos precios multiplicado por la cantidad de acciones implicada en la transacción.

Nuestro interés está en la elección óptima del individuo con respecto de su cartera, es decir, los valores óptimos de β^j. El problema es maximizar $Eu(w(\beta))$ con respecto de β, condicionada a $v^1N^1(\beta^1 - \beta_0^1) + v^2N^2(\beta^2 - \beta_0^2) \leq 0$ y $\beta^j \geq 0 \; j = 1, 2$. Puesto que la función objetivo (utilidad esperada) es cóncava en β, y las restricciones son lineales (y por tanto convexas), podemos estar seguros de que el problema tiene una única solución. Como siempre, nos vamos a centrar en la solución sin tener en cuenta las restricciones de no-negatividad. En este caso, la función de Lagrange es:

$$\begin{aligned} L(\beta, \delta) &= pu(\beta^1\pi_2^1 + \beta^2\pi_2^2) + (1-p)u(\beta^1\pi_1^1 + \beta^2\pi_1^2) + \\ &\quad +\delta\left[0 - v^1N^1(\beta^1 - \beta_0^1) - v^2N^2(\beta^2 - \beta_0^2)\right] \end{aligned}$$

Si escribimos $w_i^* = \beta^{1*}\pi_i^1 + \beta^{2*}\pi_i^2 \quad i = 1, 2$, entonces las dos condiciones de primer orden son:

$$pu'(w_2^*)\pi_2^j + (1-p)u'(w_1^*)\pi_1^j = \delta v^jN^j \;\; j = 1, 2$$

y la condición complementaria de holgura es:

$$\delta\left[v^1N^1(\beta^{1*} - \beta_0^1) + v^2N^2(\beta^{2*} - \beta_0^2)\right] = 0$$

No obstante, puesto que las condiciones de primer orden indican que:

$$\delta = \frac{pu'(w_2^*)\pi_2^j + (1-p)u'(w_1^*)\pi_1^j}{v^jN^j} > 0 \;\; j = 1, 2$$

sabemos que la restricción tiene que saturarse, es decir, la condición complementaria de holgura se puede escribir como:

$$v^1N^1(\beta^{1*} - \beta_0^1) + v^2N^2(\beta^{2*} - \beta_0^2) = 0 \tag{4.8}$$

Ahora bien, las condiciones de primer orden también se pueden juntar, de tal forma que:

$$\frac{pu'(w_2^*)\pi_2^1 + (1-p)u'(w_1^*)\pi_1^1}{v^1N^1} = \frac{pu'(w_2^*)\pi_2^2 + (1-p)u'(w_1^*)\pi_1^2}{v^2N^2}$$

es decir:

$$\frac{pu'(w_2^*)\pi_2^1 + (1-p)u'(w_1^*)\pi_1^1}{pu'(w_2^*)\pi_2^2 + (1-p)u'(w_1^*)\pi_1^2} = \frac{v^1 N^1}{v^2 N^2} \tag{4.9}$$

Juntas, las ecuaciones (4.8) y (4.9) determinan la solución al problema.

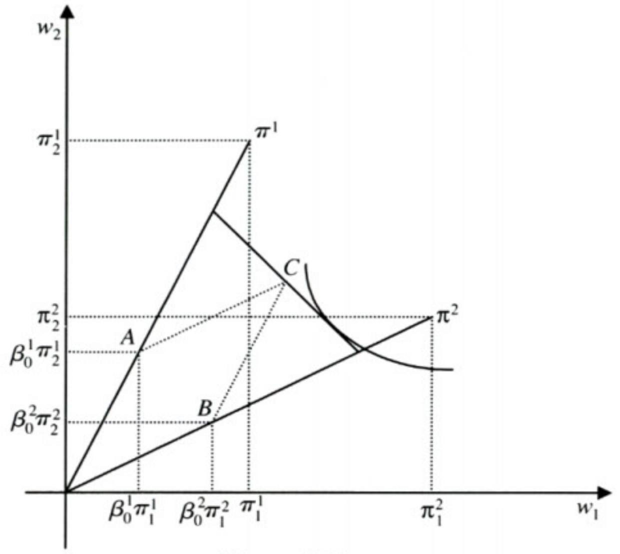


Figura 4.12.

Lo que no es tan obvio es la representación gráfica de la solución. Considere el espacio de las riquezas contingentes en la figura 4.12. Los dos puntos π^j indican las distribuciones de beneficios que las dos empresas dan, y las lineas rectas que las unen al origen indican todas las distribuciones de riquezas que se obtienen de cada empresa con valores de β^j entre 0 y 1 ($\beta^j = 0$ daría el origen, y $\beta^j = 1$ daría el punto π^j). De su dotación inicial, el individuo tiene el punto A sobre la recta correspondiente a empresa 1 y el punto B sobre la recta de la empresa 2. La suma vectoral de estos dos puntos indica que su situación inicial se describe por el punto C.

Ahora, sabemos que la pendiente de sus curvas de indiferencia en este espacio (su relación marginal de sustitución) es:

$$-\frac{(1-p)u'(w_1)}{pu'(w_2)}$$

Pero, con un poco de esfuerzo, la ecuación (4.9) se puede reordenar para obtener:

$$-\frac{(1-p)u'(w_1^*)}{pu'(w_2^*)} = -\frac{\left(V^2\pi_2^1 - V^1\pi_2^2\right)}{\left(V^1\pi_1^2 - V^2\pi_1^1\right)}$$

en donde V^j $j = 1, 2$ es el valor de la empresa j, es decir $V^j = v^j N^j$.

Para completar el análisis gráfico, nos hace falta considerar la restricción $V^1(\beta^1 - \beta_0^1) + V^2(\beta^2 - \beta_0^2) = 0$ en el espacio (w_2, w_1). Definimos:

$$g(\beta) = V^1(\beta^1 - \beta_0^1) + V^2(\beta^2 - \beta_0^2)$$

para que la restricción sea $g(\beta) = 0$. En primer lugar, notemos que el punto C necesariamente está sobre la restricción implicada, puesto que corresponde con $\beta^j = \beta_0^j$ $j = 1, 2$

que claramente satisface $g(\beta) = 0$. En segundo lugar, directamente del teorema de la función implícita tenemos:

$$\left.\frac{d\beta^2}{d\beta^1}\right|_{dg(\beta)=0} = -\left(\frac{V^1}{V^2}\right)$$

Finalmente, de $w_i = \beta^1\pi_i^1 + \beta^2\pi_i^2 \;\; i = 1,2$ tenemos:

$$\begin{aligned}\left.\frac{dw_i}{d\beta^1}\right|_{dg(\beta)=0} &= \pi_i^1 + \left(\frac{d\beta^2}{d\beta^1}\right)\pi_i^2 \;\; i = 1,2 \\ &= \pi_i^1 - \left(\frac{V^1}{V^2}\right)\pi_i^2 \;\; i = 1,2\end{aligned}$$

Dividiendo el segundo por el primero y operando:

$$\begin{aligned}\frac{\left(\left.\frac{dw_2}{d\beta^1}\right|_{dg(\beta)=0}\right)}{\left(\left.\frac{dw_1}{d\beta^1}\right|_{dg(\beta)=0}\right)} &= \left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{dg(\beta)=0} \\ &= \frac{\left[\pi_2^1 - \left(\frac{V^1}{V^2}\right)\pi_2^2\right]}{\left[\pi_1^1 - \left(\frac{V^1}{V^2}\right)\pi_1^2\right]} \\ &= -\frac{\left[\pi_2^1 - \left(\frac{V^1}{V^2}\right)\pi_2^2\right]}{\left[\left(\frac{V^1}{V^2}\right)\pi_1^2 - \pi_1^1\right]} \\ &= -\frac{(V^2\pi_2^1 - V^1\pi_2^2)}{(V^1\pi_1^2 - V^2\pi_1^1)}\end{aligned}$$

Consecuentemente, la restricción presupuestaria es una linea recta que pasa por el punto C, y el óptimo es donde se produce la tangencia entre esta linea y una curva de indiferencia (figura 4.12).

EJERCICIO 4.14: *Represente gráficamente una solución al problema correspondiente a* $\beta^{1*} < 0$.

Aunque es instructivo, el modelo de selección de cartera basado en la gráfica de riqueza contingente no tiene mucha aplicabilidad en el mundo real de las finanzas. La razón de ello es bastante obvia, existen muchos más de dos posibles estados de la naturaleza, y existen muchas más opciones que inversiones en dos empresas diferentes. Es por este motivo que en el mundo real se utiliza un modelo de inversiones en cartera algo diferente, que ahora pasamos a analizar (aunque, como siempre, de manera sencilla).

Cuando empezamos el presente capítulo, hemos hecho bastante hincapié en notar cómo un individuo adverso al riesgo responde ante variaciones en el valor esperado y la varianza de su riqueza. En concreto, hemos notado que, ceteris paribus, un aumento en valor esperado es beneficioso, mientras que, ceteris paribus, un aumento en varianza es perjudicial. El valor esperado y la varianza son, respectivamente, los dos primeros momentos estadísticos de la variable aleatoria w, y aunque sabemos que, en principio, existen muchos más momentos, podemos postular una función de utilidad que depende únicamente de los dos primeros.

Considere un desarrollo de Taylor de segundo orden de la función de utilidad, $u(w)$, alrededor del valor esperado de w, $Ew = \overline{w}$:

$$u(w) \approx u(\overline{w}) + (w - \overline{w})u'(\overline{w}) + \frac{(w - \overline{w})^2}{2}u''(\overline{w})$$

Tomando el valor esperado, tenemos:

$$Eu(w) \approx u(\overline{w}) + \frac{\sigma^2}{2}u''(\overline{w}) \equiv v(\overline{w}, \sigma^2)$$

Ahora, la función $v(\overline{w}, \sigma^2)$ es una aproximación a la utilidad esperada pero que depende únicamente del valor esperado y la varianza de la riqueza.

Derivando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\overline{w}, \sigma^2)}{\partial \overline{w}} &= u'(\overline{w}) + \frac{\sigma^2}{2}u'''(\overline{w}) \\ \frac{\partial v(\overline{w}, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= \frac{u''(\overline{w})}{2} \end{aligned}$$

Claramente, si la función de utilidad es cóncava, entonces $\frac{\partial v(\overline{w}, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} < 0$, mientras que una condición suficiente para que $\frac{\partial v(\overline{w}, \sigma^2)}{\partial \overline{w}} > 0$ es $u'''(\overline{w}) > 0$, que aceptamos como razonable puesto que, como hemos visto anteriormente, es la condición necesaria para que la aversión absoluta al riesgo sea decreciente. Dado esto, la relación marginal de sustitución en el espacio de media y varianza es:

$$\left.\frac{d\overline{w}}{d\sigma^2}\right|_{dv=0} = -\frac{\left(\frac{u''(\overline{w})}{2}\right)}{\left(u'(\overline{w}) + \frac{\sigma^2}{2}u'''(\overline{w})\right)} = -\frac{u''(\overline{w})}{2u'(\overline{w}) + \sigma^2 u'''(\overline{w})} > 0$$

Haremos sin más el supuesto de que la función $v(\overline{w}, \sigma^2)$ es cuasi-cóncava, para que las curvas de indiferencia sean crecientes (pendiente positiva) y convexas.

EJERCICIO 4.15: *¿Qué implica el supuesto de que $v(\overline{w}, \sigma^2)$ sea cuasi-cóncava para los signos de las derivadas mayores de la función de utilidad?*

Ahora, supongamos que existen dos posibles inversiones con distintas coordenadas $(\overline{w}, \sigma^2)$, y que el individuo puede comprar cualquier combinación convexa de ellas. El problema del individuo consiste en elegir la combinación convexa que maximiza su función objetivo, $v(\overline{w}, \sigma^2)$.

En particular, supongamos que las dos inversiones se ordenan de manera que:

$$\overline{w}_1 < \overline{w}_2 \text{ y } \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

es decir, la inversión 1 ofrece menor valor esperado pero también menor riesgo que la inversión 2. Por estadística elemental, sabemos que comprando una combinación convexa de las dos inversiones, en donde la combinación convexa se define por una λ que satisface $0 \leq \lambda \leq 1$, el individuo obtiene una cartera con valor esperado igual a:

$$\overline{w}(\lambda) = \lambda \overline{w}_1 + (1 - \lambda)\overline{w}_2 \tag{4.10}$$

y varianza igual a:

$$\sigma^2(\lambda) = \lambda^2 \sigma_1^2 + (1 - \lambda)^2 \sigma_2^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\varphi_{12}$$

en donde φ_{12} es la covarianza entre las dos inversiones.

Considere la segunda de estas ecuaciones. Tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^2(\lambda)}{d\lambda} &= 2\left[\lambda\sigma_1^2 - (1-\lambda)\sigma_2^2 + (1-2\lambda)\varphi_{12}\right] \\ \frac{d^2\sigma^2(\lambda)}{d\lambda^2} &= 2\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\varphi_{12}\right]\end{aligned}$$

Pero puesto que el coeficiente de correlación se define por $\rho \equiv \frac{\varphi_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$, podemos escribir la última ecuación como:

$$\frac{d^2\sigma^2(\lambda)}{d\lambda^2} = 2\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\right]$$

Ahora bien, sabemos que por la definición de el coeficiente de correlación, es siempre cierto que $-1 \leq \rho \leq 1$. Por otro lado, resulta que $\frac{d^2\sigma^2(\lambda)}{d\lambda^2}$ es decreciente en ρ. Por tanto, el valor mínimo de $\frac{d^2\sigma^2(\lambda)}{d\lambda^2}$ ocurre en donde $\rho = 1$, es decir:

$$\frac{d^2\sigma^2(\lambda)}{d\lambda^2} = 2\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\right] \geq 2\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\right] = 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 > 0$$

En resumen, hemos averiguado que $\sigma^2(\lambda)$ es una función estrictamente convexa, es decir, se cumple:

$$\sigma^2(\lambda) < \lambda\sigma_1^2 + (1-\lambda)\sigma_2^2 \tag{4.11}$$

A partir de las ecuaciones (4.10) y (4.11), sabemos que comprando una combinación convexa de las dos inversiones, el individuo obtiene una cartera con valor esperado igual a la combinación convexa de los valores esperados de las dos inversiones, y con varianza menor que la combinación convexa de las varianzas de las dos inversiones. En la figura 4.13 se muestra el conjunto de posibles inversiones (una función) que, de acuerdo con lo que acabamos de ver, es necesariamente una función cóncava. El óptimo se produce dinde la curva de indiferencia y la función de inversiones factibles son tangentes.

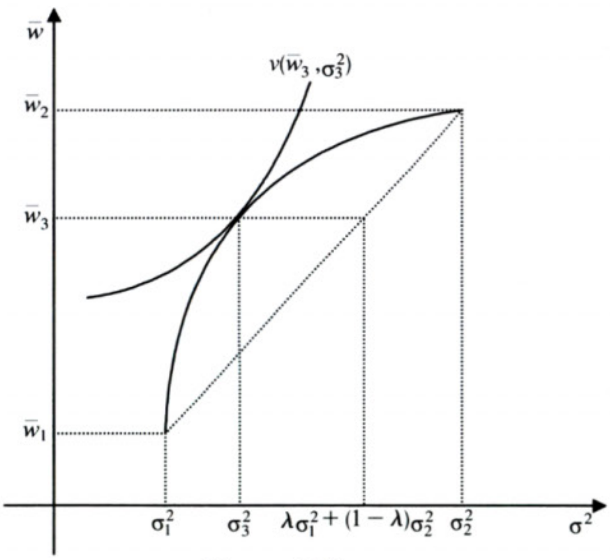


Figura 4.13.

Un caso especial, pero muy importante, dentro del modelo anterior es la elección entre un activo arriesgado y otro sin riesgo, es decir, $\overline{w}_1 < \overline{w}_2$ y $\sigma_2^2 > \sigma_1^2 = 0$. Puesto que la inversión 1 tiene cero varianza, la covarianza también tiene que ser cero, $\varphi_{12} = 0$. Dado esto, la varianza de una combinación convexa entre las dos inversiones es simplemente $\sigma^2(\lambda) = (1-\lambda)^2\sigma_2^2$. Por otro lado, el valor esperado de la combinación convexa es, como antes, $\overline{w}(\lambda) = \lambda\overline{w}_1 + (1-\lambda)\overline{w}_2$. A partir de ahora, para simplificar la notación, vamos a definir $\overline{w}(\lambda) = \overline{w}_3$ y $\sigma^2(\lambda) = \sigma_3^2$.

Nótese que, de la ecuación para la varianza de la cartera final, podemos escribir:

$$(1-\lambda) = \frac{\sqrt{\sigma_3^2}}{\sqrt{\sigma_2^2}}$$

y de allí:

$$\lambda = 1 - \frac{\sqrt{\sigma_3^2}}{\sqrt{\sigma_2^2}}$$

Si sustituimos estas dos valores en la ecuación para el valor esperado de la cartera final, tenemos:

$$\begin{aligned}
\overline{w}_3(\sigma_3^2) &= \left(1 - \frac{\sqrt{\sigma_3^2}}{\sqrt{\sigma_2^2}}\right)\overline{w}_1 + \left(\frac{\sqrt{\sigma_3^2}}{\sqrt{\sigma_2^2}}\right)\overline{w}_2 \\
&= \overline{w}_1 + \sqrt{\sigma_3^2}\left(\frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{\sqrt{\sigma_2^2}}\right)
\end{aligned}$$

La función $\overline{w}_3(\sigma_3^2)$ indica, en el espacio $(\overline{w}, \sigma^2)$ las opciones factibles que tiene el individuo para su cartera final. Puesto que $\overline{w}_3(\sigma_3^2)$ es una función lineal de la raíz cuadrada de σ_3^2, es estrictamente cóncava, y puesto que su primera derivada es:

$$\frac{d\overline{w}_3(\sigma_3^2)}{d\sigma_3^2} = \frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{2\left(\sqrt{\sigma_3^2}\sqrt{\sigma_2^2}\right)} > 0$$

es también creciente (véase la figura 4.14). Es más, su pendiente cuando $\lambda = 1$ (es decir, $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 = 0$) es infinita, y su pendiente cuando $\lambda = 0$ (es decir, $\sigma_3^2 = \sigma_2^2$) es $\frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{2\sigma_2^2} > 0$. Como antes, el individuo que maximiza $v(\overline{w}, \sigma^2) = u(\overline{w}) + \frac{\sigma^2}{2}u''(\overline{w})$ sobre este conjunto factible buscaría una tangencia entre una curva de indiferencia de esta función objetivo y la función $\overline{w}_3(\sigma_3^2)$. Recordamos que, puesto que hemos supuesto que $v(\overline{w}, \sigma^2)$ es cuasicóncava (tiene curvas de indiferencia convexas) y puesto que acabamos de ver que $\overline{w}_3(\sigma_3^2)$ es cóncava, existirá un único punto óptimo.

Directamente de estas observaciones, podemos afirmar que núnca será óptimo fijar $\lambda = 1$, es decir, siempre será óptimo incluir algo de la inversión arriesgada en la cartera. Para ver esto, simplemente notamos que la pendiente de una curva de indiferencia es:

$$\left.\frac{d\overline{w}}{d\sigma^2}\right|_{dv=0} = -\frac{u''(\overline{w})}{2u'(\overline{w}) + \sigma^2 u'''(\overline{w})} < \infty$$

Pero acabamos de ver que la pendiente del conjunto factible cuando $\lambda = 1$ es infinita y, consecuentemente, es imposible que haya una solución en la que el inversor únicamente compre la inversión libre de riesgo.

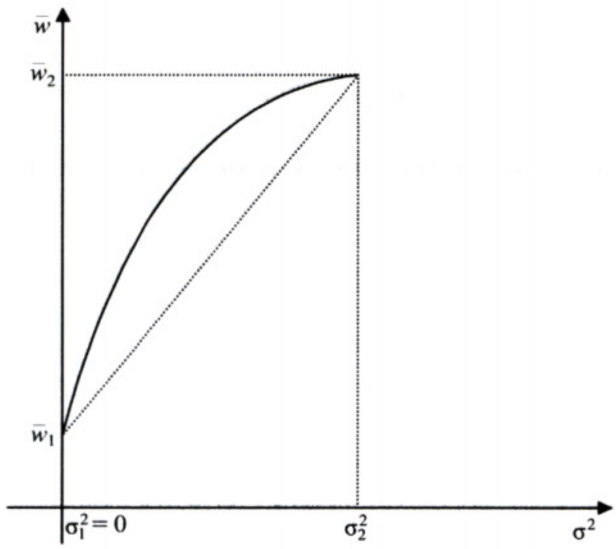


Figura 4.14.

EJERCICIO 4.16: *Suponga que la segunda inversión (la arriesgada) es bi-dimensional, y utilice la gráfica de riqueza contingente para demostrar que nunca hay soluciones en las que un inversor adverso al riesgo únicamente compra el activo libre de riesgo.*

Por otro lado, también podemos pensar en situaciones en las cuales solamente se compra la inversión arriesgada, es decir, que en el óptimo se fija $\lambda = 0$. Esto sería cierto si resulta que la relación marginal de sustitución es menor que la pendiente del conjunto factible para todos los posibles valores de λ. En resumen, puesto que la relación marginal de sustitución es creciente, y la pendiente del conjunto factible es decreciente, esto corresponde con una situación en que la relación marginal de sustitución no es mayor que la pendiente del conjunto factible aún cuando la única inversión en la cartera es la arriesgada:

$$-\frac{u''(\overline{w}_2)}{2u'(\overline{w}_2) + \sigma_2^2 u'''(\overline{w}_2)} \leq \frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{2\sigma_2^2} \tag{4.12}$$

Vamos a buscar una condición suficiente para que se satisfaga (4.12).

Para empezar, puesto que $\sigma_2^2 u'''(\overline{w}_2) > 0$, resulta que:

$$-\frac{u''(\overline{w}_2)}{2u'(\overline{w}_2) + \sigma_2^2 u'''(\overline{w}_2)} < -\frac{u''(\overline{w}_2)}{2u'(\overline{w}_2)} = \frac{1}{2} R_a(\overline{w}_2)$$

Entonces, podemos estar seguros de que se satisface (4.12) si resulta que:

$$\frac{1}{2} R_a(\overline{w}_2) \leq \frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{2\sigma_2^2} \tag{4.13}$$

Por otro lado, recuerde que la aproximación de Arrow-Pratt para la prima de riesgo en este caso es:

$$\overline{w}_2 - w_2^* \approx \frac{\sigma_2^2}{2} R_a(\overline{w}_2)$$

en donde w_2^* es el equivalente cierto a la inversión arriesgada. Aceptando la aproximación como válida y reordenando, tenemos:

$$R_a(\overline{w}_2) = \frac{2(\overline{w}_2 - w_2^*)}{\sigma_2^2}$$

Sustituyendo en (4.13), tenemos una condición suficiente para que la única inversión que se incluye en la cartera sea la arriesgada:

$$\frac{(\overline{w}_2 - w_2^*)}{\sigma_2^2} \leq \frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{2\sigma_2^2} \implies w_2^* \geq \frac{\overline{w}_2 + \overline{w}_1}{2} \tag{4.14}$$

En resumen, una condición suficiente para que el inversor invierte únicamente en el activo arriesgado es que el equivalente cierto correspondiente a esta inversión no sea inferior a la media de los valores esperados de las dos posibles inversiones. Naturalmente, es más facil que se cumpla esta condición cuando $\overline{w}_1$ es pequeño (la inversión libre de riesgo no es muy favorable), o (puesto que la condición se satisface con seguridad si $w_2^* = \overline{w}_2$) cuando w_2^* es cercano a $\overline{w}_2$ (lo que equivale a decir que la prima de riesgo es pequeña), es decir, que el inversor es muy poco adverso al riesgo. En términos gráficos, podemos representar la situación en una gráfica de riqueza contingente, como la figura 4.15, con la inversión 2 localizada en un punto w^2, y entonces resulta que existe un valor máximo para $\overline{w}_1$, digamos z, de tal forma que si $\overline{w}_1 \leq z$, sabemos que el inversor nunca participará en el activo sin riesgo. z se localiza en la gráfica de tal modo que la distancia entre z y w_2^* es exactamente la misma que la distancia entre w_2^* y $\overline{w}_2$.

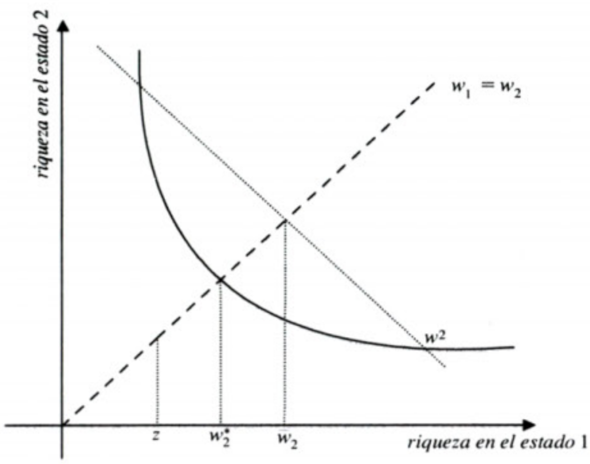


Figura 4.15.

4.8 Resumen

1. Una situación de riesgo corresponde con probabilidades conocidas objetivamente, mientras que una situación de incertidumbre corresponde con probabilidades conocidas solamente sujetivamente. No obstante, una situación de riesgo es un caso especial de incertidumbre, puesto que las probabilidades objetivas serán aceptadas como sujetivas.

2. El primer investigador en sugerir que la función objetivo para un problema de incertidumbre es el valor esperado de las utilidades de los premios fue Daniel Bernoulli en el año 1738.

3. La teoría de la utilidad esperada fue demostrado por John von Neumann y Oskar Morgenstern en 1944.

4. Se pueden analizar las elecciones en condiciones de incertidumbre cuando solamente hay tres posibles premios en la gráfica triangular de Marschak y Machina. Esta gráfica proporciona una sencilla manera de apreciar la aversión al riesgo, definida como una situación en la que un aumento en la varianza de la riqueza que mantiene constante el valor esperado, resulta reducir la utilidad esperada final.

5. La aversión al riesgo corresponde con una función de utilidad de los premios que es cóncava.

6. Quizá el modelo más utilizado para analizar elecciones en condiciones de incertidumbre haya sido el modelo de riqueza contingente de Arrow y Debreu, en donde los premios (la riqueza contingente en los estados de la naturaleza) son variables y las probabilidades fijas.

7. Si nos limitamos a solamente dos estados de la naturaleza, la aversión al riesgo se manifiesta como curvas de indiferencia que son convexas hacia el origen.

8. La medición de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo, $R_a(w)$, se define como el negativo de la segunda derivada de la función de utilidad dividido por la primera derivada. Se define para loterías localizadas en un entorno de la linea de certidumbre (loterías pequeñas).

9. Para loterías relativas, la medición de aversión al riesgo, $R_r(w)$, es $R_a(w)$ multiplicado por w, y resulta ser la elasticidad de la utilidad marginal.

10. Para problemas de incertidumbre, la función de utilidad, $u(w)$, admite únicamente transformaciones lineales positivas, en lugar de cualquier transformación monótona positiva como en problemas de certidumbre.

11. La riqueza equivalente de certidumbre (el equivalente cierto) de una lotería es aquella riqueza que, recibida con certidumbre, proporciona la misma utilidad esperada que una lotería con riesgo.

12. La prima de riesgo se define como la diferencia entre el valor esperado de una lotería y su equivalente cierto. La prima de riesgo crece con aversión absoluta al riesgo y con la varianza de la lotería en cuestión.

13. Cuando riesgos se transfieren entre individuos, podemos establecer un precio máximo de compra y un precio mínimo de venta de una lotería cualquiera. Si la aversión absoluta al riesgo es decreciente, entonces para cualquier lotería el valor absoluto del precio máximo de venta será mayor que el valor absoluto del precio mínimo de compra.

14. Los dos ejemplos más importantes de transferencias de riesgo son los mercados de seguros y los mercados financieros.

15. En un contrato de seguros entre un asegurado adverso al riesgo y un asegurador neutral al riesgo, la eficiencia de Pareto se traduce en que la cobertura sea completa. La prima que el asegurado paga por cobertura completa en un caso de un asegurador

que compite en un mercado competitivo es equitativa, y la prima correspondiente al caso de un asegurador monopolista es igual a la prima equitativa más la prima de riesgo del asegurado.

16. Como una aproximación a la utilidad esperada, se puede definir una función objetivo que depende únicamente del valor esperado y la varianza de la riqueza. Aunque esto es una aproximación, también en otro sentido es más general que el modelo de riqueza contingente puesto que se puede acomodar a situaciones con un número general de estados de la naturaleza.

17. En una elección entre un activo (inversión) sin riesgo y otro con riesgo, un individuo adverso al riesgo siempre participará, por lo menos en parte, en el activo arriesgado. Por otro lado, si el equivalente cierto del activo arriesgado no es menor que la media de los valores esperados de los dos activos, entonces el individuo únicamente invertirá en el activo arriesgado.

Capítulo 5
Maximización del Beneficio de un Productor

Capítulo 5

Maximización del Beneficio de un Productor

En los capítulos anteriores, hemos estado preocupados con las típicas elecciones que hacen individuos, entre bienes, entre períodos, o ante la incertidumbre. En este último capítulo sobre el equilibrio parcial, vamos a estudiar la elección de un productor de un bien. Como es habitual en la microeconomía, supondremos (inicialmente) que el productor está interesado en maximizar el beneficio monetario (ingresos menos costes) de su actividad en un ambiente de absoluta certidumbre. Supondremos que su actividad consiste en la producción y venta de un solo bien.

En este capítulo, vamos a centrarnos en estudiar únicamente la elección de la cantidad y precio de una empresa, dando por comprendidos los aspectos preliminares que tradicionalmente se estudian en relación con la actividad de una empresa (teoría de producción y costes) aprendidos en los cursos de microeconomía introductorios. No obstante, con el objetivo de defender los supuestos fundamentales sobre la función de costes que utilizaremos en el resto del capítulo, en la primera sección presentaremos un enfoque muy resumido de esta teoría[1].

En la segunda sección, la materia se centra en presentar la elección del precio y la cantidad para maximizar el beneficio en el mismo tipo de modelo (y entorno gráfico) que ha sido utilizado en los capítulos anteriores. En este sentido, la presentación de la materia será novedosa para la mayoría de los estudiantes, puesto que tradicionalmente se imparte la maximización del beneficio con un cambio del entorno gráfico[2]. Además, el enfoque utilizado aquí nos proporciona ciertos resultados sobre la existencia de soluciones, y sobre los problemas habituales que pueden presentarse al respecto, incluído el de la condición de cierre (cuando la solución consiste en producir una cantidad $x = 0$).

5.1 Resumen de producción y costes

La teoría de la maximización del beneficio, tradicionalmente, consiste en estudiar en primer lugar ciertos aspectos de la producción y los costes. Normalmente, se supone que una empresa funciona con una función de producción que describe la cantidad máxima de

[1] Lectores que requieren un análisis más detallada deben consutar un libro de texto especializado, por ejemplo, *Análisis Microeconómico* (3^{a}edición) por Hal Varian (publicado por Antoni Bosch en 1993).

[2] En vez de contornos de una función objetivo y una restricción, se suelen utilizar áreas en las gráficas para indicar el valor de la función objetivo, y la restricción se incorpora sin más en la función objetivo.

producto que se puede obtener a partir de un vector de factores de producción en concreto, $x = f(v)$, en donde x es la cantidad de producto obtenida y v es el vector de factores productivos. Se supone que la función de producción es creciente en todos los factores de producción (producto marginal positivo) y, por lo menos para niveles suficientemente altos de cada factor, también es cóncava en cada factor (producto marginal decreciente)[3]. Finalmente, se supone que la función de producción es estrictamente cuasi-cóncava (es decir, tiene contornos convexos), y además, es usual suponer que es homogenea.

Habitualmente se supone que la empresa contrata los factores de producción en mercados competitivos, para que los salarios por unidad de factor empleado sean parámetros en el problema de la empresa. El coste total para la empresa consiste en la suma de la cantidad de cada factor empleado multiplicado por su salario. La producción es eficiente si, para un determinado nivel de producto, la configuración de empleo de factores minimiza el coste total (o, lo que es lo mismo, para un determinado nivel del coste total, se maximiza el producto). Consecuentemente, la producción eficiente es el resultado de un problema de minimización restringida muy clásico, y la solución siempre ocurre en un punto de tangencia entre un contorno de la función de producción (llamado curva isocuanta) y un contorno de la función de costes (isocostes). Claramente, la producción eficiente es una condición necesaria (aunque no suficiente) para maximizar el beneficio final de la empresa.

La unión de todos los puntos de producción eficientes se llama la senda de expansión. Cuando se trata de un problema con solamente dos factores, que habitualmente son mano de obra ($v_1 = L$) y capital ($v_2 = K$), la senda de expansión es una función $K = S(L)$. Resulta que, si la función $f(L, K)$ es cuasi-cóncava, entonces la senda de expansión es una función monótona, y en particular, se caracteriza por $S'(L) > 0$. Si se sustituye la senda de expansión en la función de producción, se obtiene $x = f(L, S(L))$, que es una función de una sola variable (la mano de obra). Si escribimos $f(L, S(L)) = h(L)$, entonces la función h indica la cantidad de producto total que se puede obtener utilizando la cantidad de mano de obra L y suponiendo que la producción es eficiente.

Los supuestos sobre la función f implican que $h(L)$ será monótona creciente, y por tanto admite su inversa, $L = h^{-1}(x)$. Puesto que $h'(L) > 0$, también es cierto que $h^{-1\prime}(x) > 0$. Es más, dentro del supuesto de que la función de producción es homogenea, es muy sencillo demostrar que la senda de expansión será lineal, $S''(L) = 0$. Pero en este caso, puesto que f es cóncava en ambos argumentos, resulta que $h(L)$ será una función cóncava, y correspondientemente, $h^{-1}(x)$ será una función convexa.

Ahora, podemos directamente escribir la función de costes, suponiendo que la producción es eficiente, en términos de producto total en lugar de como una función de los factores. Si el salario de la mano de obra es w y el del capital es r, tenemos un coste de producción que se puede expresar como:

$$wL + rK = w\left[h^{-1}(x)\right] + r\left[S(h^{-1}(x))\right] \equiv c(x)$$

Nótese que, siendo $h(L)$ una función creciente y estrictamente cóncava, $h^{-1}(x)$ es creciente y estrictamente convexa, y además, siendo $f(L, K)$ una función homogenea, tenemos $S(L)$ lineal. Juntos, resulta que $c(x)$ será una función creciente ($c'(x) > 0$) y estrictamente convexa ($c''(x) > 0$). Estos serán los supuestos sobre la función de costes que utilizaremos de aquí en adelante.

[3]Es muy fácil demostrar que, aunque la función de producción presente, para cantidades de factores pequeños, producto marginal creciente, cualquier punto de maximización de beneficio siempre ocurre en un punto de producto marginal decreciente.

EJERCICIO 5.1: *Suponiendo que la función de producción depende solamente dos factores (K y L) y que es estrictamente cóncava, represente gráficamente los conjuntos de curvas iso-cuantas, las curvas iso-costes y la senda de expansión. Represente una segunda senda de expansión correspondiente a un salario para la mano de obra mayor.*

EJERCICIO 5.2: *Demuestre que la elasticidad de la función de costes con respecto del salario de mano de obra es menor que 1, condicionado a que la producción x sea constante.*

EJERCICIO 5.3: *Escriba la función de beneficios como función de los factores de producción y sus salarios, suponiendo que la empresa actua en un ambiente de perfecta competencia (es decir, el precio al que vende su producto es constante). Demuestre que un aumento en el salario de uno de los factores disminuye el beneficio en el óptimo.*

5.2 La maximización del beneficio

En esta sección, supondremos directamente que la empresa produce de manera eficiente, y por tanto la producción de una cantidad x da lugar a unos costes monetarios indicados por la función de costes, $c(x)$. Como acabamos de ver, es lógico que supongamos $c'(x) > 0$ para todo posible x, es decir, producir una cantidad mayor implica un mayor coste, y que la función de costes es estrictamente convexa para todo x, es decir, $c''(x) > 0$.

Puede haber ciertos costes que independientes de x, así que en general supondremos $c(0) \geq 0$, en donde nos referimos a $c(0)$ como los costes fijos de la empresa. A cambio, los costes variables, $cv(x)$, siempre dependen de x, y en particular $cv(0) = 0$. La función de costes totales se puede escribir como la suma de costes variables y fijos, $c(x) = cv(x)+c(0)$. Claramente, tenemos $cv'(x) = c'(x)$ y $cv''(x) = c''(x)$, así que la función de costes variables es también creciente y estrictamtente convexa, y cumple $cv(0) = 0$. Puesto que, para cualquier función $g(x)$ creciente y convexa es cierto que $g'(x)(x - x_0) > g(x) - g(x_0)$ para todo $x > x_0$, tenemos:

$$cv'(x)(x - x_0) > cv(x) - cv(x_0) \text{ para todo } x > x_0$$

Utilizando $x > x_0 = 0$, y recordando que $cv(0) = 0$, tenemos directamente el hecho de que:

$$cv'(x) > \frac{cv(x)}{x} \text{ para todo } x > 0 \tag{5.1}$$

que es una ecuación que será utilizada más adelante.

Por otra parte, el ingreso del productor es, por definición, el precio unitario al que vende su producción (p) multiplicado por la cantidad que vende (x), $R = px$. Supondremos que el precio máximo al que el productor puede vender una cantidad x viene determinado por el mercado con una función $D(x)$, es decir, en todo momento el productor debe respetar la restricción que le impone el mercado, $p \leq D(x)$. Como bien debe el lector recordar de cursos de microeconomía introductoria, exactamente lo que deberíamos entender por esta función depende del ambiente competitivo en que actúa el productor (competencia perfecta, monopolio u oligopolio). Aquí supondremos sin más que $D'(x) \leq 0$ para todo x, aunque claramente el caso de competencia perfecta corresponde con $D'(x) = 0$, y el monopolio corresponde con $D'(x) < 0$, puesto que en este segundo caso $D(x)$ es la demanda de mercado. Como siempre, habrá también una restricción de no-negatividad, $x \geq 0$, que, por las mismas razones que en los capítulos anteriores, nos tomamos la libertad de ignorar en lo que sigue.

El beneficio monetario del productor es $B(p,x) = px - c(x)$. En el espacio (p,x), podemos representar las curvas de "indiferencia" del productor, que llamaremos curvas *isobeneficio*. En primer lugar, del teorema de la función implícita, la pendiente de una curva isobeneficio es:

$$\left.\frac{dp}{dx}\right|_{dB=0} = \frac{c'(x) - p}{x} \tag{5.2}$$

que es negativa si $c'(x) < p$, positiva si $c'(x) > p$ e igual a cero si $c'(x) = p$.

Cuando x se aproxima a 0 sobre una curva isobeneficio caracterizada por $c'(x) < p$, es decir, se consideran puntos sobre una curva isobeneficio cada vez más cercanos al eje de los precios, la pendiente de la curva de isobeneficio se acerca a:

$$\lim_{x \to 0} \frac{c'(x) - p}{x} = -\infty$$

En otras palabras, todas las curvas de isobeneficio que se encuentran por encima de la curva de coste marginal son asintóticas al eje del precio.

Por otro lado, podemos investigar la convexidad de las curvas isobeneficio con su segunda derivada:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2p}{dx^2}\right|_{dB=0} &= \frac{\left(c''(x) - \frac{dp}{dx}\right)x - (c'(x) - p)}{x^2} \\
&= \frac{(c''(x)x - (c'(x) - p)) - (c'(x) - p)}{x^2} \\
&= \frac{c''(x)x - 2\,(c'(x) - p)}{x^2}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

El signo de (5.3) es el mismo que el signo de su numerador. Puesto que hemos supuesto $c''(x) > 0$, claramente tenemos $\left.\frac{d^2p}{dx^2}\right|_{dB=0} > 0$ siempre y cuando $\left.\frac{dp}{dx}\right|_{dB=0} \leq 0$, es decir, las curvas isobeneficio son estrictamente convexas si $c'(x) \leq p$. Su convexidad es indeterminado cuando $c'(x) > p$, pero afortunadamente, como veremos en seguida, esta indeterminación es irrelevante para el problema.

Por otro lado, considere dos puntos caracterizados por $p_1 > p_2$ y $x_1 > x_2$, y con $c'(x_i) < p_i \; i = 1,2$. Por lo que acabamos de ver, ambos puntos están sobre curvas de isobeneficio convexas con pendiente negativa, pero la curva que pasa por el primer punto está por encima de la curva que pasa por el segundo. Sin embargo, puesto que:

$$\begin{aligned}
\frac{dB(p,x)}{dp} &= x > 0 \\
\frac{dB(p,x)}{dx} &= p - c'(x)
\end{aligned}$$

para cualquier punto caracterizado por $c'(x) < p$, tanto un aumento en el precio como un aumento en la cantidad contribuyen a incrementar el beneficio. Por tanto, tenemos $B(p_1,x_1) > B(p_2,x_2)$, es decir, la curva isobeneficio que pasa por el primer punto indica un beneficio mayor. En resumen, curvas isobeneficio más alejadas del origen indican niveles de beneficio mayor (son más preferidas por el productor).

Puesto que $B(p,x) = px - c(x)$, y que una curva isobeneficio mantiene constante el beneficio, $B(p,x) = \overline{B}$, la ecuación exacta de una curva isobeneficio es $px - c(x) = \overline{B}$, es decir, para cualquier $x > 0$ una curva isobeneficio es:

$$p = \frac{c(x) + \overline{B}}{x} \tag{5.4}$$

Ahora, de la ecuación (5.1) podemos escribir:

$$cv'(x) > \frac{cv(x)}{x} \geq \frac{cv(x) + y}{x} \text{ para todo } x > 0 \text{ y todo } y \leq 0$$

Pero puesto que $cv'(x) = c'(x)$, y utilizando $y = \overline{B} + c(0)$, tenemos:

$$c'(x) > \frac{cv(x) + c(0) + \overline{B}}{x} = \frac{c(x) + \overline{B}}{x} \text{ para todo } x > 0 \text{ y todo } \overline{B} \leq -c(0)$$

En términos gráficos, esto implica que la curva isobeneficio que corresponde a un nivel del beneficio que es menor o igual al negativo del coste fijo se encuentra siempre por debajo de la función de coste marginal.

Finalmente, utilizando la regla de L´Hopital, resulta que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{cv(x)}{x} = \left. \frac{cv'(x)}{1} \right|_{x=0} = cv'(0)$$

y entonces, para cualquier $y > 0$, tenemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{cv(x) + y}{x} = cv'(0) + \infty = \infty$$

es decir, para cualquier nivel del beneficio que es mayor (por muy poco que sea) que el negativo del coste fijo, existe una parte de la curva de isobeneficio que se encuentra por encima de la curva de coste marginal y que se hace asintótica al eje de los precios. En la figura 5.1 se representan tres curvas isobeneficio junto con la curva de costes marginales.

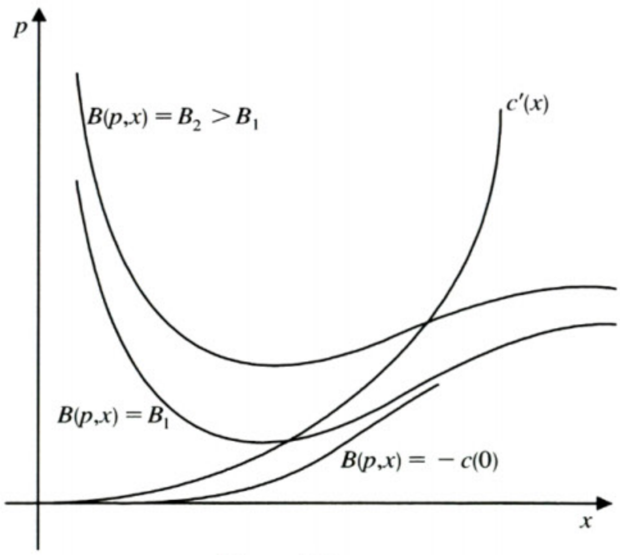


Figura 5.1.

EJERCICIO 5.4: *Demuestre que la curva isobeneficio que corresponde a un nivel del beneficio negativo también es asintótica al eje de los precios, pero con pendiente negativa.*

Ahora, la decisión del productor se puede plantear como un problema de maximización restringida, en donde la función objetivo viene a ser representado geometricamente por las curvas isobeneficio, y la restricción es $p \leq D(x)$. En efecto, el problema es maximizar $B(p,x) = px - c(x)$ bajo la condición $-D(x) \leq -p$. Si suponemos por el momento que se satisfacen los requisitos para la existencia de un óptimo único (función objetivo cóncava y restricción convexa) el Lagrangiano correspondiente al problema es:

$$L(x,p,\delta) = px - c(x) + \delta\,(D(x) - p)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(p^*,x^*,\delta)}{\partial p} &= x^* - \delta = 0 \\ \frac{\partial L(p^*,x^*,\delta)}{\partial x} &= p^* - c'(x^*) + \delta D'(x^*) = 0 \end{aligned}$$

y la condición complementaria de holgura es:

$$\delta\,(D(x^*) - p^*) = 0$$

Claramente, si en la solución tenemos que la producción es positiva, $x^* > 0$, entonces la primera condición de primer orden indica que $\delta > 0$, y así de la condición complementaria de holgura, $D(x^*) = p^*$, es decir, el productor cobrará el precio máximo que el mercado le permite. Pero en este caso, la segunda condición de primer orden ya nos indica que:

$$x^* D'(x^*) = c'(x^*) - p^* \quad \Longrightarrow \quad D'(x^*) = \frac{c'(x^*) - p^*}{x^*}$$

es decir, la solución es aquel punto sobre la función $p = D(x)$ tal que haya una tangencia con una curva isobeneficio.

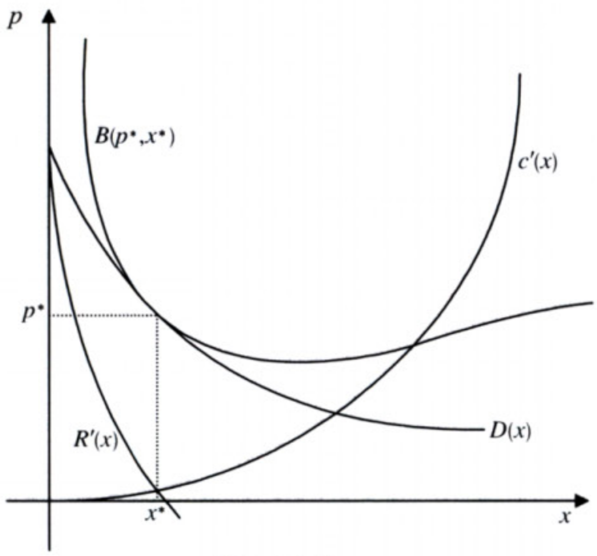


Figura 5.2.

Este tipo de solución está representada en la figura 5.2 para el caso más interesante, $D'(x) < 0$. Notemos de paso que, puesto que en la solución se tiene $D(x^*) = p^*$, podemos escribir la condición de primer orden como:

$$D'(x^*) = \frac{c'(x^*) - D(x^*)}{x^*} \quad \Longrightarrow \quad D'(x^*)x^* + D(x^*) = c'(x^*)$$

Pero recordando que el ingreso es $R(x) = D(x)x$, el ingreso marginal es $R'(x) = D'(x)x + D(x)$, así que la condición de primer orden indica que en el óptimo se igualan el ingreso marginal y el coste marginal (tal como se representa en la figura 5.2).

El problema, por supuesto, es que hemos tenido que suponer que se satisfacen las condiciones necesarias para existencia de un óptimo único, es decir, que la función objetivo es concava y que la restricción es convexa. Debemos investigar estos supuestos algo más. En primer lugar, nótese que siempre será cierto que, si $x > 0$ el productor cobrará un precio que agota las posibilidades del mercado, es decir, independientemente de todo, siempre será cierto que $p^* = D(x^*)$. Para ver que esto siempre será cierto, basta observar que la primera derivada del beneficio con respecto de p es siempre estrictamente positiva cuando el productor tiene algo que vender ($x > 0$). Entonces, nunca será optimo cobrar un precio de venta de una cantidad positiva que no sea el máximo que la restricción permite. Dado esto, podemos rehacer el problema en una sola dimensión; maximizar $B(x) = D(x)x - c(x)$ con respecto de x. La condición de primer orden es:

$$B'(x^*) = D'(x^*)x^* + D(x^*) - c'(x^*) = 0$$

y la condición de segundo orden es que $B(x)$ sea cóncava alrededor del óptimo:

$$B''(x^*) = D''(x^*)x^* + 2D'(x^*) - c''(x^*) < 0$$

Ahora, puesto que $p^* = D(x^*)$, la condición de primer orden se puede escribir como:

$$D'(x^*)x^* + p^* - c'(x^*) = 0 \implies D'(x^*) = \frac{c'(x^*) - p^*}{x^*}$$

es decir, es la misma solución encontrado antes (tangencia entre isobeneficio y la función $D(x)$). Pero ahora considere la condición de concavidad de la función de beneficios. Si sustituimos la condición de primer orden en la segunda derivada del beneficio, tenemos:

$$D''(x^*)x^* + 2\left(\frac{c'(x^*) - p^*}{x^*}\right) - c''(x^*) < 0$$

Pero a su vez, esto se reordena para obtener:

$$D''(x^*) < \frac{c''(x^*) - 2\left(\frac{c'(x^*)-p^*}{x^*}\right)}{x^*}$$

es decir:

$$D''(x^*) < \frac{c''(x^*)x^* - 2\left(c'(x^*) - p^*\right)}{(x^*)^2}$$

En otras palabras, notamos que de la ecuación (5.3), la condición de segundo orden requiere que $D(x)$ sea, alrededor del óptimo, menos convexa que la curva isobeneficio que pasa por el punto óptimo, tal y como se ha representado en la figura 5.2. Vamos a llamar a la solución en donde $D(x)$ es, localmente, menos convexa que la curva isobeneficio pasando por el punto de tangencia entre ambos una *solución de tipo 1.*

En este momento, podemos señalar un caso especial, pero muy importante. Si el productor funciona en un ambiente de competencia perfecta, resulta que puede vender cualquier cantidad de producto a un precio dado, es decir $D'(x) = D''(x) = 0$. Pero el hecho de que $D'(x) = 0$ implica directamente que en el óptimo se tiene $c'(x^*) = p^*$.

Gráficamente, la tangencia entre una curva isobeneficio y una linea de pendiente cero ocurre en donde la curva isobeneficio intersecta a la linea de coste marginal. Pero por otra parte, la condición de segundo orden viene a ser:

$$D''(x^*) < \frac{c''(x^*)}{x^*}$$

que siempre se cumple con $D''(x) = 0$ y $c''(x) > 0$. Por tanto, los problemas planteados dentro de la competencia perfecta son particularmente fáciles de resolver, puesto que siempre se satisfacen la condición de segundo orden para un óptimo (es decir, siempre se corresponden con una solución de tipo 1).

Por otro lado, cuando se tiene un problema caracterizado por $D'(x) < 0$, por ejemplo el caso de un productor monopolista, no se puede garantizar el cumplimiento de la condición de segundo orden. Cuando $D'(x) < 0$, sí será cierto que la función objetivo es cuasicóncava, por lo menos en aquella parte relevante. Para ver esto, nótese que, como ya hemos visto anteriormente, las curvas de isobeneficio son estrictamente convexas en cualquier punto que satisface $c'(x) \leq p$, es decir, condicionado a que $c'(x) \leq p$, la función $B(p, x)$ es cuasicóncava. Pero no puede nunca haber una solución con $c'(x) > p$. Para ver esto, basta observar que en cualquier punto que satisface $c'(x) > p$ la curva isobeneficio tiene pendiente positiva, y por tanto tiene que intersectar a la curva $D(x)$ desde abajo. Pero entonces una reducción en x a lo largo de $D(x)$ implicará un movimiento hacia una curva isobeneficio mayor. En conclusión, en todo momento podemos restringirnos al conjunto de puntos que satisface $c'(x) \leq p$, y en esta zona $B(p, x)$ es cuasicóncava.

En cuanto a la restricción, $p \leq D(x)$, primero nótese que para escribir la Lagrangeana correctamente, la debemos escribir en la forma $-D(x) \leq -p$, y siguiendo lo que hemos hecho en capítulos anteriores, se requiere que $-D(x)$ sea una función convexa. Pero existen fuertes razones para pensar que la curva de demanda de mercado, la función $D(x)$ para un monopolista, es estrictamente convexa. Por ejemplo, si las curvas de utilidad de los consumidores son de tipo Cobb-Douglas, es muy fácil calcular que sus curvas de demanda Marshalliana serán estrictamente convexas y asintóticas a ambos ejes. En este caso la función de demanda de mercado también será convexa. Pero si $D(x)$ es convexa, resulta que $-D(x)$ es cóncava[4].

No obstante, como la figura 5.2 indica, realmente solamente es suficiente (y no necesario) que $-D(x)$ sea convexa. Tal y como hemos ya expuesto, lo único que se requiere para una solución interior de tipo 1 (como la que se representa en la figura 5.2) es que la curva $D(x)$ sea (localmente) menos convexa que la curva isobeneficio, algo que es mucho más fácil de que se cumpla. En aras de reducir el número de posibilidades, vamos a suponer que la curva $D(x)$ tiene derivadas monótonas, es decir, se cumple $D'(x) < 0$ en todos los puntos x y que si es convexa, entonces es convexa en todo su recorrido.

El siguiente resultado será de gran utilidad para lo que sigue:

Resultado 5.1: *Tomando dos puntos cualesquiera, x_1 y x_2 ambos sobre la función $D(x)$, tales que $x_1 > x_2 > 0$ y $D(x_i) > c'(x_i)$ $i = 1, 2$, se cuumple que la pendiente de la curva isobeneficio que pasa por x_1 es mayor que la pendiente de la curva de isobeneficio que pasa por x_2.*

Puesto que con $D(x) > c'(x)$ la curva isobeneficio tiene pendiente negativa, el resultado 5.1 indica que la curva isobeneficioo que pasa por un punto más alto sobre $D(x)$ es más

[4]La función $-D(x)$ satisface el requisito de ser convexa si es lineal, un caso especial frequentemente supuesto en cursos de microeconomía introductorias, pero realmente muy poco realista.

inclinada que la curva que pasa por un punto más bajo[5]. En términos formales, recordando que la pendiente de una curva isobeneficio en un punto $p = D(x)$ es:

$$\frac{c'(x) - D(x)}{x}$$

el resultado es:

$$\frac{c'(x_1) - D(x_1)}{x_1} > \frac{c'(x_2) - D(x_2)}{x_2} \; \forall x_1, x_2 : x_1 > x_2 > 0, \; D(x_i) > c'(x_i) \; i = 1, 2$$

Para ver que esto es cierto, solamente tenemos que derivar la ecuación para la pendiente de una curva isobeneficio condicionada a un punto sobre la función $D(x)$:

$$\frac{d\left(\frac{c'(x)-D(x)}{x}\right)}{dx} = \frac{(c''(x) - D'(x))\,x - (c'(x) - D(x))}{x^2}$$

El signo de esta expresión es igual al signo de su numerador, pero puesto que $c''(x) > 0$ y $D'(x) < 0$, tenemos $(c''(x) - D'(x))\,x > 0$. Luego, también por el supuesto de entrada, resulta que $(c'(x) - D(x)) < 0$, de donde $-(c'(x) - D(x)) > 0$, y entonces el numerador es la suma de dos términos positivos. Por tanto, la derivada es positiva, es decir, la pendiente de las curvas de isobeneficio crece (se hacen más planas) según se incrementa x a lo largo de la curva $D(x)$.

Ahora, se recuerda al lector que existen siempre segmentos del mapa de curvas de isobeneficio que se encuentran por encima de la curva de coste marginal, que tienen pendiente igual a 0 en donde se cortan la curva de coste marginal, que son curvas estrictamente convexas, y que son asintóticas al eje de los precios. Puesto que $D'(x) < 0$ y $c''(x) > 0$, si suponemos que $c'(0) < D(0)$, entonces necesariamente existe un punto de intersección entre las dos curvas $D(x)$ y $c(x)$. Llamemos a este punto $\widetilde{x}_0$, es decir, $\widetilde{x}_0 \leftarrow D(\widetilde{x}_0) = c'(\widetilde{x}_0)$. Pero puesto que la curva isobeneficio que pasa por el punto $\widetilde{x}_0$ lo hace con pendiente nula (ya que $\widetilde{x}_0$ está sobre la curva de coste marginal) esta curva tiene que pasar por puntos que están por debajo de la curva $D(x)$ en donde $p > c'(x)$. Pero esta curva también se hace asintótica al eje de los precios, así que si suponemos que $D(x)$ es finito en $x = 0$, es decir $D(0) < \infty$, entonces la curva isobeneficio que pasa por el punto $\widetilde{x}_0$ volverá a intersectar a $D(x)$ en algun punto $\widehat{x}_0$ que satisface $0 < \widehat{x}_0 < \widetilde{x}_0$. En resumen, si $D(x)$ es convexa, se tiene:

$$0 = \frac{c'(\widetilde{x}_0) - D(\widetilde{x}_0)}{\widetilde{x}_0} > D'(\widetilde{x}_0) > D'(\widehat{x}_0) > \frac{c'(\widehat{x}_0) - D(\widehat{x}_0)}{\widehat{x}_0} \tag{5.5}$$

Todo esto está representado en la figura 5.3.

La existencia de las dos puntos de corte entre $D(x)$ y la curva isobeneficio que pasa por $\widetilde{x}_0$ y $\widehat{x}_0$ implica que existirá también otra curva isobeneficio, mayor que la que pasa por $\widetilde{x}_0$, que también tocará a $D(x)$ en dos puntos, digamos $\widehat{x}_1$ y $\widetilde{x}_1$ tales que $\widehat{x}_0 < \widehat{x}_1 < \widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_0$. Además, por el resultado 5.1, la diferencia entre las pendientes de la curva de isobeneficio en los puntos $\widehat{x}_1$ y $\widetilde{x}_1$ es necesariamente inferior a la diferencia entre las pendientes de la curva de isobeneficio en los puntos $\widehat{x}_0$ y $\widetilde{x}_0$. Pero si la pendiente de la curva isobeneficio en el punto $\widehat{x}_1$ no es igual a la pendiente en el punto $\widetilde{x}_1$, entonces el argumento se puede volver a repetir, con la diferencia entre las pendientes de la isobeneficio en $\widehat{x}_i$ y $\widetilde{x}_i$ cada vez menor.

[5] Por supuesto, pueden ser dos puntos sobre la misma curva iso-beneficio.

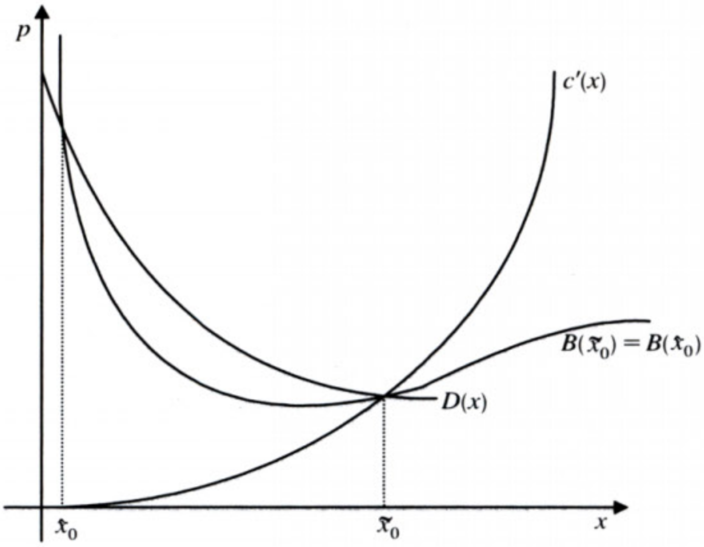


Figura 5.3.

El argumento indica que el proceso nos llevará a un punto, x^*, para el que $\widehat{x}_i = \widetilde{x}_i = x^*$, en donde la ecuación (5.5) nos indicará que la curva isobeneficio será tangente a la curva $D(x)$:

$$D'(x^*) = \frac{c'(x^*) - D(x^*)}{x^*}$$

es decir, una solución de tipo 1.

Este argumento nos lleva a la conclusión de que, dentro de los supuestos de que la función $D(x)$ satisface $c'(0) < D(0)$ y $D(0) < \infty$, siempre podemos garantizar la existencia de una solución de tipo 1 (solución única), en un punto de la curva $D(x)$ por encima de la curva de coste marginal, es decir, con un beneficio mayor que el negativo del coste fijo. Por tanto, la empresa núnca tendrá que cerar (es decir, núnca será óptimo producir $x = 0$), puesto que cuando cierre, su beneficio será igual al negativo del coste fijo.

En otras palabras, para que sea interesante tener en cuenta la posibilidad de que una empresa pueda encontrar que su óptimo sea cerrar, tenemos que modificar alguno de los supuestos iniciales. Entre los más óbvios son, que la curva de costes sea siempre convexa (incluso para niveles muy pequeños de x), y que $D(0) < \infty$. Aquí solamente discutiremos, aunque superficialmente, la segunda de estas opciones.

Si la curva $D(x)$ tomara un valor infinito en $x = 0$, entonces el argumento anterior sobre la existencia de una solución de tipo 1 no sería valida. En este caso, es factible que no haya nunca puntos que satisfacen la condición de primer orden. Pero, puesto que sabemos que las curvas isobeneficio siempre tienen algunos puntos con una pendiente mayor que $D(x)$ (suponiendo que $D(x)$ es estrictamente decreciente), dado que llegan a tener pendiente nulo (e incluso positivo), una situación de no existencia de un punto que satisface la condición de primer orden tiene que corresponder únicamente al caso en el que, en todos los puntos sobre $D(x)$, la curva isobeneficio correspondiente es más plana que $D(x)$, es decir:

$$\frac{c'(x) - D(x)}{x} > D'(x) \ \ \forall x$$

Pero esta condición se reordena facilmente para obtener $c'(x) > D'(x)x + D(x) = R'(x)$, es decir, el coste marginal es siempre mayor que el ingreso marginal. En este caso, lo óptimo es, por supuesto, cerrar la empresa, es decir $x^* = 0$, puesto que cualquier disminución en x implica un ahorro (el negativo del coste marginal) mayor que el coste de oportunidad correspondiente (la pérdida marginal en el ingreso). Puesto que todas las curvas de isobeneficio tienen pendiente de $-\infty$ en $x = 0$, la posibilidad de que el coste marginal siempre sea mayor que el ingreso marginal solamente puede darse si la curva $D(x)$ también tiene pendiente igual a $-\infty$ en $x = 0$.

No obstante, notemos que esta situación es muy irregular, desde un punto de vista empirico. Para ver esto, simplemente notar que, si la curva $D(x)$ es asintótica al eje vertical, y que además es siempre más inclinada que la curva isobeneficio, entonces según se mueve hacia arriba sobre la curva $D(x)$ se está moviendo hacia curvas de isobeneficio mayores. Sin embargo, en el limite del proceso, se acaba en una curva de isobeneficio menor que todas ellas, incluso menor que la curva de coste marginal (recuerde que, como hemos visto arriba, la curva de isobeneficio que corresponde con un beneficio igual a $-c(0)$ se encuentra por debajo de la curva de coste marginal). Entonces el proceso es discontinuo en el punto $x = 0$.

Además, si $D(0) = \infty$, el beneficio del productor que no produce sería imposible de determinar, dado que el ingreso sería $\infty \times 0$. Puesto que ningún empresario en el mundo real discutiría que, cuando no se produce, no se obtienen ingresos, debemos entender que el "precio" unitario que se obtiene cuando no se vende es estrictamente finito. Esto es más importante de lo que puede parecer, puesto que la opción de cerrar siempre debe ser tomada como una posibilidad más entre las factibles, y entonces tiene que dar un beneficio que es, por lo menos, comparable con el beneficio que se obtiene con cualquier otra elección de x. El supuesto $D(0) < \infty$ garantiza que el beneficio de no producir es igual al coste fijo[6], $B(0) = -c(0)$.

EJERCICIO 5.5: *Demuestre que, si un monopolista suministra el bien x_1 a un mercado en el que todos los consumidores tienen función de utilidad $u(x) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ y riqueza de w, entonces no existe solución de tipo 1.*

5.3 Resumen

1. La función objetivo de una empresa es su beneficio monetario.

2. La restricción es el precio máximo para cada nivel de producto, $D(x)$. Suponemos que esta función es decreciente, $D'(x) < 0$ y puede ser convexa.

3. Suponiendo que la función de producción es creciente y cóncava, entonces la función de costes de la empresa será creciente y convexa en x.

4. En el espacio de los precios y producción, (p, x), existen curvas de isobeneficio. En cualquier punto por encima de la curva de coste marginal, la curva isobeneficio es decreciente y convexa. En donde corta a la curva de coste marginal, la curva isobeneficio tiene pendiente nula, y por debajo de la curva de coste marginal, la curva isobeneficio es creciente.

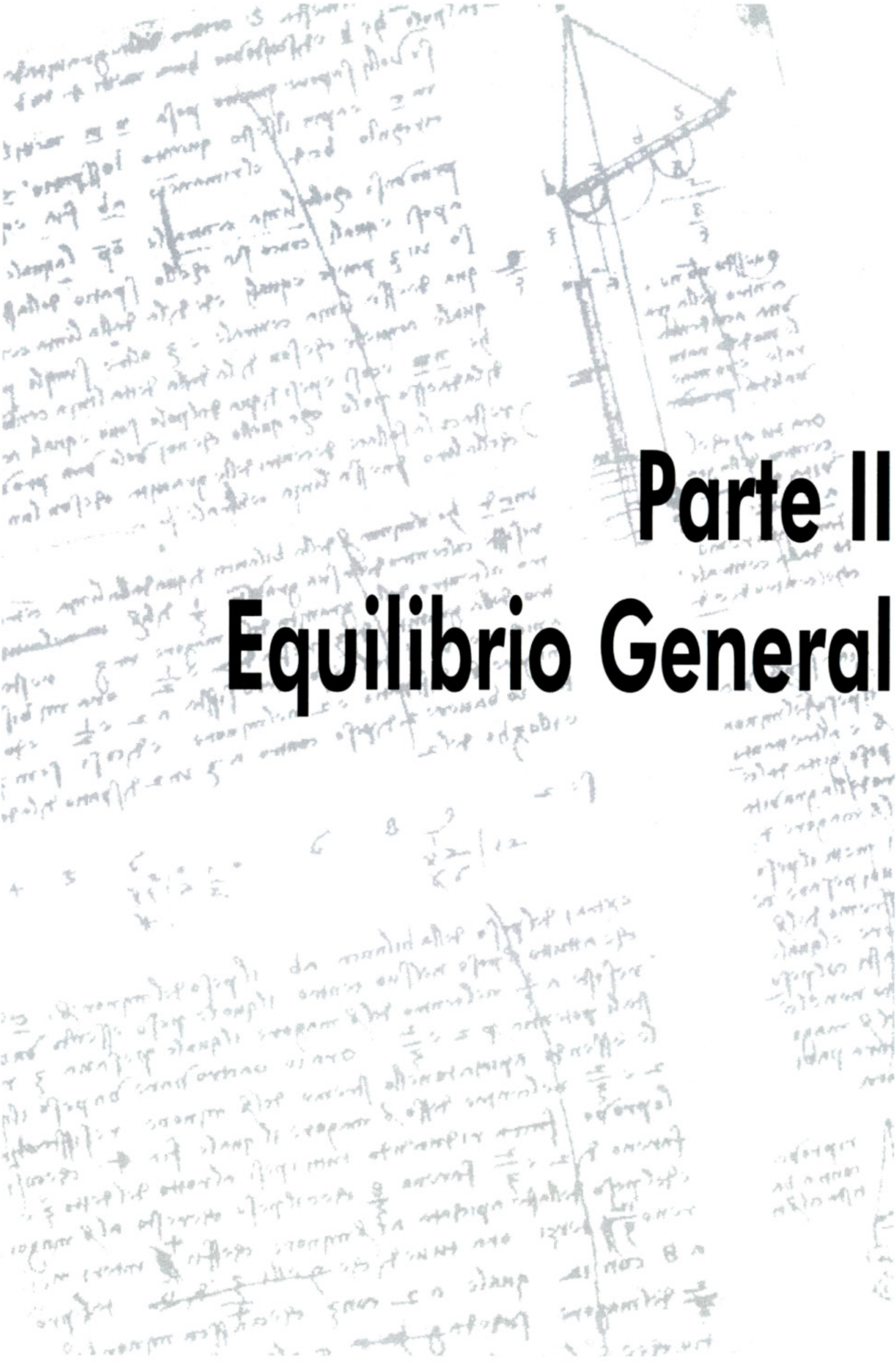
5. La curva isobeneficio correspondiente a un beneficio igual o menor que el negativo de los costes fijos se encuentra por debajo de la curva de coste marginal en todo su recorrido.

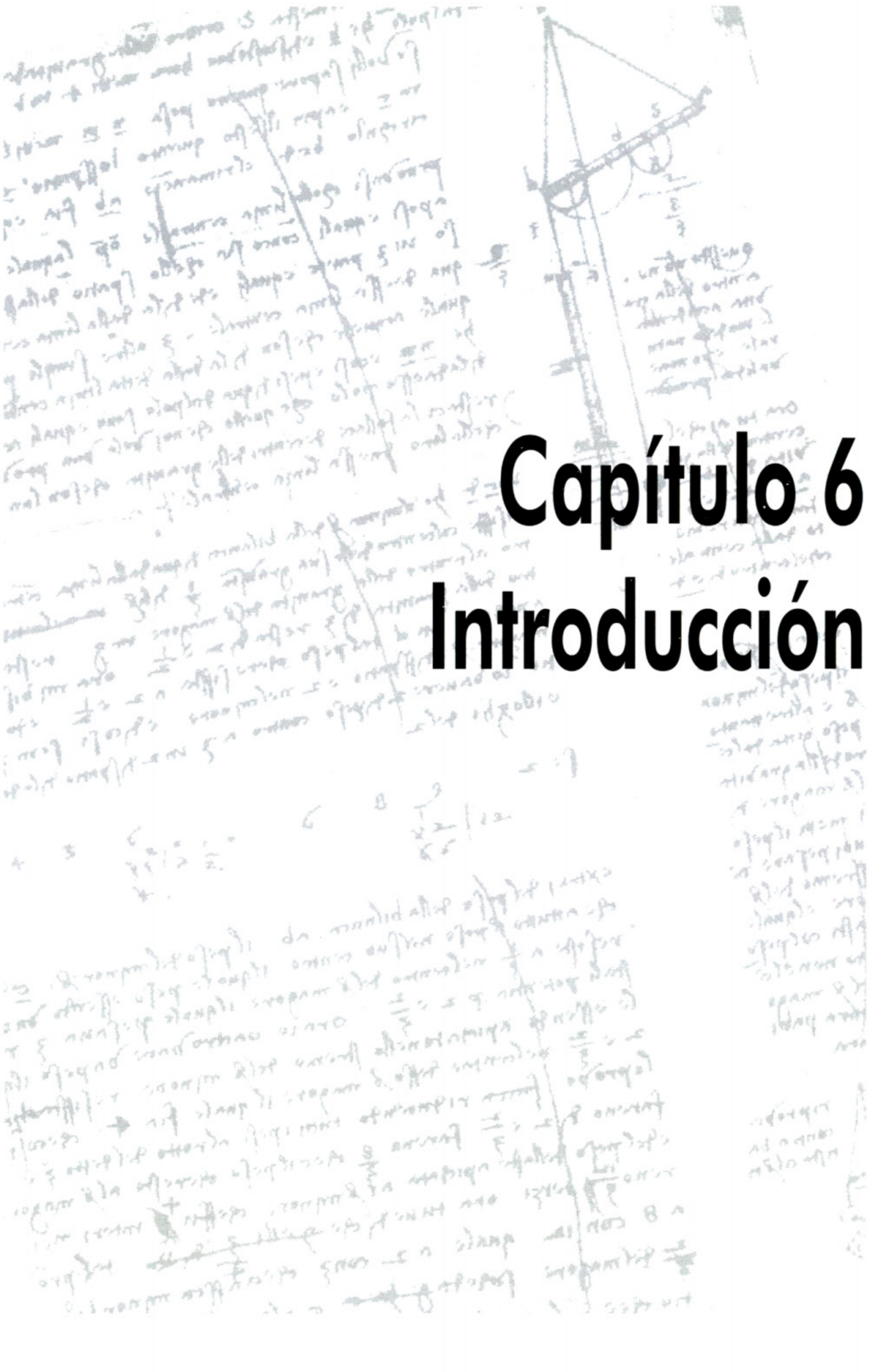
[6]Si se trata de una situación de corto plazo, con algún factor fijo, entonces el coste fijo será positivo, mientras que en el largo plazo, cuando todos los factores son variables, el coste fijo será igual a 0.

6. Las curvas isobeneficio correspondientes a un beneficio mayor que el negativo de los costes fijos es asintótica al eje de los precios.

7. Si la curva $D(x)$ satisface los requisitos de que sus derivadas son monótonas y que $c'(0) < D(0) < \infty$, entonces siempre existe una solución de tipo 1, en donde la empresa produce una cantidad estrictamente positiva y obtiene un beneficio mayor que el negativo de los costes fijos.

Parte II
Equilibrio General





Capítulo 6
Introducción

Capítulo 6

Introducción

En la primera parte de este libro se han estudiado una serie de problemas cuyo denominador común era que se contemplaba la toma de decisión de un solo individuo, tomando cualquier otro aspecto de su entorno como constante. Tales situaciones se conocen genéricamente como "equilibrio parcial". Cuando más de un individuo toma una decisión simultáneamente el entorno se conoce como "equilibrio general", y esto es lo que nos proponemos a estudiar en esta segunda parte. Estas, por lo menos, son las definiciones que aplicamos aquí, por captar la esencia de cada uno de los dos tipos de equilibrio. Otros autores definirían un equilibrio parcial como el estudio de un mercado, independiente de otros mercados, y el equilibrio general como el estudio de todos los mercados simultaneamente. Puesto que el estudio de un mercado implica estudiar simultaneamente la curva de demanda (agregación de la demanda de cada demandante) y la de oferta (agregación de la oferta de cada oferente), también presenta aspectos de equilibrio general, aunque no se tiene en cuenta el efecto que puede tener otros mercados sobre el que se está analizando.

El aspecto más importante en un problema de equilibrio general es la existencia de *interrelaciones entre los procesos de elección* implicando que cada problema tiene una influencia sobre los demás. De la misma manera que en un problema de equilibrio parcial, en donde el equilibrio se alcanza cuando el individuo en cuestión toma su decisión óptima, el equilibrio en un sistema con muchas decisiones interrelacionadas se alcanza cuando todos los individuos toman, simultáneamente, decisiones óptimas.

Como ejemplo de este tipo de situación, se considera un mercado de un bien homogéneo que está suministrado por un número reducido (pero mayor que 1) de productores independientes. El problema de cada productor individual consite en elegir la cantidad del bien que desea producir y poner en venta. Claramente, esta decisión se toma en función del precio final de venta de cada unidad, que a su vez está determinado por la suma total de las cantidades ofertadas por cada productor. En este sentido, la elección de cada productor influye sobre el precio, que luego influye sobre la decisión de cada productor, y correspondientemente, todos los problemas de elección están interrelacionados mediante su efecto sobre el precio de mercado.

El estudio del equilibrio general tiene una historia de lo más variopinto e interesante, que sigue desarrollándose hasta el presente, y de la cual nos ocuparemos enseguida. No obstante, de inmediato debemos resaltar un aspecto primordial para la teoría del equilibrio general, y así dejar asentadas las bases de lo que sigue. Desde hace más de 50 años, la teoría del equilibrio general ha seguido dos líneas diferentes, separadas por los supuestos que definen el modo de análisis. Por un lado, tenemos lo que se conoce en general por "la macroeconomía", en donde se plantea el equilibrio general de un sistema definido a partir de un proceso de agregación, y por otro, tenemos el equilibrio general "microeconómico", en donde se plantea el juego entre todos los problemas de elección, y una vez conocidas las decisiones óptimas, se pueden juntar para determinar los datos agregados. En todo caso, la diferencia importante entre los dos enfoques es el momento en el cual se plantea la agregación - en la macroeconomía, se agrega antes de resolver el sistema de ecuaciones[1], mientras que en la microeconomía se agrega una vez resuelto el sistema de ecuaciones.

Por supuesto, el enfoque de la macroeconomía proporciona un sistema de ecuaciones mucho más reducido, y por tanto menos costoso de analizar, pero con un coste de precisión añadido por tratar con bienes e individuos que son, en cierto sentido, medias ponderadas de los que realmente existen. Por otro lado, la macroeconomía proporciona también sistemas y reglas generales con bastante aplicabilidad a los problemas reales, cosa que difícilmente es posible con un sistema planteado microeconómicamente. En la macroeconomía pues, se gana manejabilidad a costa de precisión, mientras que en la microeconomía se sacrifica manejabilidad por no perder precisión. Una medida exacta de la pérdida de precisión que admite la macroeconomía pero que la microeconomía no tolera es un problema sin resolver, y así es imposible saber cuál de los dos enfoques es en realidad más razonable. No obstante, aquí nos limitamos a señalar que, con el constante incremento en las posibilidades de utilización de la informática, se pueden manejar sistemas cada vez más complicados con un menor coste, y así, cualquier sacrificio hecho en aras de aumentar la manejabilidad es menos razonable.

6.1 Un breve repaso histórico por el equilibrio general

El estudio de los sistemas de equilibrio general es tan antiguo como la propia ciencia económica. Aunque el proceso de investigación ha sufrido diversos cambios de rumbo, sobresalen no pocos logros importantes desde que Adam Smith inició el estudio de los fundamentos teóricos que determinaban el funcionamiento de las economías de los países al final del siglo XVIII. El objetivo de esta sección es poner de manifiesto, aunque de manera muy resumida, estas líneas de estudio así como los logros más notables que pueden encrontrarse en ellas.

Los autores clásicos estaban plenamente convencidos de la existencia de curvas de oferta y de demanda de cualquier bien, definidas a partir de las elecciones individuales de los oferentes y demandantes. También aceptaban el concepto de equilibrio definido como el precio al que la demanda total y la oferta total son iguales en el mercado. Si nos olvidamos de los bienes gratuitos (que solamente pueden existir con exceso de oferta), y de los problemas típicos de ninguna intersección entre oferta y demanda o más de una, podemos analizar un sistema correspondiente de un solo mercado como sigue. La demanda del bien x viene dada por la función $D_x(p_x)$, y la oferta del bien por la función $S_x(p_x)$, en donde p_x es el precio del bien x. El equilibrio en el mercado se alcanza al precio p_x^* tal que $D_x(p_x^*) = S_x(p_x^*)$.

Ahora, recuerde que cuando hemos estudiado la demanda (equilibrio de un consumidor) en el capítulo 2, todo se hizo utilizándo dos bienes. En particular, la cantidad óptima (la demanda) de cada bien viene a ser función del precio de ambos. Más en general aún, podemos plantear que existe cualquier número n de bienes, y entonces la demanda de cada uno dependerá de los precios de cada uno, $D_i(p_1, p_2, ..., p_n) = D_i(p)$. De la misma

[1]Por ejemplo, en el conocido modelo IS-LM, todos los mercados reales se reducen mediante agregación a solamente tres (bienes, dinero y bonos), y luego se busca el equilibrio simultáneo.

manera, podemos plantear que la oferta de cada bien también depende de los precios de todos los bienes, $S_i(p_1, p_2, ..., p_n) = S_i(p)$. Ahora, un equilibrio se definirá como el vector de precios no negativos, $p^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*)$, tal que en cada mercado la oferta y la demanda son iguales, $S_i(p^*) = D_i(p^*)$ $i = 1, 2, ..., n$.

Históricamente, se han estudiado 4 temas importantes referentes al equilibrio general:

1. existencia de un equilibrio general, y luego, suponiendo que existe
2. unicidad del equilibrio
3. estabilidad del equilibrio
4. eficiencia del equilibrio.

Los economistas clásicos (Smith, Ricardo, Mill, Marx, y Jevons entre otros) tenían una noción bastante fuerte, aunque imprecisa, del concepto de equilibrio como las condiciones hacia que una economía converge a lo largo del tiempo, y a las que regresa después de una variación exógena. No obstante, en esta época nunca se hizo un intento serio de formalizar la idea matemáticamente.

La gráfica típica de oferta y demanda de equilibrio en un solo mercado se debe a Alfred Marshall, aunque el mismo concepto y presentación matemática fue introducido por Cournot unos 50 años antes[2]. Cournot reconoció que el equilibrio parcial (un solo mercado) consistía en un caso especial, y que lo apropriado era un modelo con múltiples interacciones entre muchos mercados.

El primer intento de formalizar un modelo de equilibrio general fue hecho por Leon Walras en el año 1874, con un trabajo que sentó las bases para la investigación de la primera mitad del siglo XX. En su modelo, Walras menciona claramente que, para que una economía se encuentre en un equilibrio general con n bienes, tiene que existir una solución simultánea de las n ecuaciones $S_i(p) = D_i(p)$ $i = 1, 2, ..., n$ en las n incógnitas $p_1, p_2, ..., p_n$. Walras se limitó a contar ecuaciones e incógnitas para asegurar que fuesen iguales, sin entrar en mayores detalles matemáticos. En realidad, si las ecuaciones fueran lineales, independientes y si no hubieran otras restricciones, entonces el hecho de tener el mismo número de equaciones que de incógnitas sería suficiente para que existiera una solución. No obstante, las ecuaciones no son (normalmente) lineales, y existen restricciones adicionales (por ejemplo, la restricción de que los precios no son negativos), en general contar ecuaciones e incógnitas no es suficiente.

Posteriormente, Francis Edgeworth (1881) introdujo un nuevo entorno gráfico para estudiar casos sencillos de economías bidimensionales (por ejemplo, dos consumidores, dos bienes, y dos factores de producción) sin la necesidad de entrar en un análisis matemático muy avanzado (estudiaremos este modelo con detalle en el capítulo 8).

La teoría moderna de equilibrio general arranca a raíz de un seminario sobre matemáticas organizado por Karl Menger[3] en Viena durante la década de los 1930. Al seminario acudieron dos personajes clave; Abraham Wald, un matemático húngaro desempleado, y Karl Schlesinger, un influyente banquero de Venecia. Schesinger proporcionó la ayuda financiera para que Wald pudiera dedicarse a estudiar (no pudo trabajar legalmente por ser judío), y además le introdujo en el problema matemático de la existencia del equilibrio

[2] El hecho de que Cournot no recibiera el debido reconocimiento probablemente se debe a dos razones fundamentales; por un lado publicó en francés, y por otro publicó en un documento de alto contenido matemático.

[3] Hijo del famoso economista Carl Menger.

general. Entre 1934 y 1936, Wald demostró la existencia para una gama de modelos, cada uno de los cuales representa un caso especial de un sistema de equilibrio parcial[4].

Quizá la época de producción más importante para el equilibrio general fue la década de los 1950, cuando tres economistas muy importantes se dedicaron a completar y generalizar el trabajo de Wald. Estos tres personas son Kenneth Arrow, Gerard Debreu y Lional McKenzie. En una serie de artículos publicados durante la década de los años 1950, se demostró existencia del equilibrio general en un modelo muy general, y también abordaron con éxito los problemas de unicidad y estabilidad.

Una faceta muy notable de la demostración de existencia de Arrow y Debreu es su dependencia del teorema del punto fijo de Brower. Tal y como demostró Hirofumo Uzawa en 1962, esto no es ninguna casualidad - resulta que la *única* manera de demostrar existencia es mediante el teorema del punto fijo de Brower. Desde entonces, los estudiantes de microeconomía avanzada en todo el mundo han tenido que dominar este conocido teorema en sus estudios. El teorema en sí es sorprendente y sencillo de enunciar, pero bastante difícil de probar en su forma más general. Aunque en la siguiente sección volveremos a mencionar el teorema del punto fijo de Brower, afortunadamente en lo que sigue del presente libro no será necesario en absoluto utilizar el teorema, pero se recomienda al lector interesado que se consulte las referencias mencionadas en el prefacio.

6.2 Equilibrio general; Objetivo y método

En este libro, tal y como ya hemos expuesto, tomamos como un sistema de equilibrio general la unión de más de un sistema de equilibrio parical. En otras palabras, para nosotros existe un problema de equilibrio general cuando más de un individuo desea llevar a cabo un problema de maximización restringida simultáneamente, y cuando existe alguna interrelación entre dichos problemas. Por ejemplo, el problema de equilibrio parical de un consumidor da lugar a una curva de demanda, que luego influye directamente sobre el problema de maximización del beneficio del productor. Por otro lado, la propia elección de bienes a producir también tiene una relevancia directa sobre el equilibrio parcial del consumidor. Por tanto, hay una interdependencia óbvia entre los dos problemas, y tenemos un sistema de equilibrio general.

Suponga que el problema a resolver por el individuo 1 es:

$$\max_{x_1} \; f_1(x_1, x_2) \quad s.a. \;\; g_1(x_1) \leq b_1$$

y que el problema a resolver por el individuo 2 es:

$$\max_{x_2} \; f_2(x_1, x_2) \quad s.a. \;\; g_2(x_2) \leq b_2$$

De acuerdo con lo visto en el capítulo 1, suponiendo que cada problema satisface la correspondiente condición de segundo orden, la solución del problema del individuo 1 (la condición de primer orden) se puede escribir como $x_1^* = h_1(b_1, x_2)$, y la solución al problema del individuo 2 (su condición de primer orden) se puede escribir como $x_2^* = h_2(b_2, x_1)$. Claramente, cada problema influye sobre el otro, de modo que, si no sabemos con exactitud el valor de x_i no podemos calcular con exactitud el valor de x_j, en donde $i, j = 1, 2$ y $i \neq j$. Además, cualquier cambio exógeno en uno de los problemas (por ejemplo, una variación

[4] Estos trabajos no fueron traducidos al inglés hasta el año 1951.

en b_1) pone en marcha una serie de efectos en ambos problemas. No está nada claro que, una vez iniciada esta serie de efectos, el sistema converge hacia un nuevo equilibrio estable.

Un equilibrio general del sistema es un vector, $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, tal que se satisfacen simultaneamente las dos condiciones de primer orden, $x_i^* = h_i(b_i, x_j)$ en donde $i, j = 1, 2$ y $i \neq j$. Nótese que estas dos ecuaciones tendrán una gráfica en el espacio de los vectores x, es decir, podemos escribir $x_i^* = k_i(x_j)$ en donde $i, j = 1, 2$ y $i \neq j$. Por supuesto, esto requiere que las condiciones de primer orden de los individuos (por lo menos las del individuo 1) sean invertibles. Si representamos estas dos condiciones de primer orden gráficamente (véase la figura 6.1), un equilibrio general ocurre en la intersección de ambos.

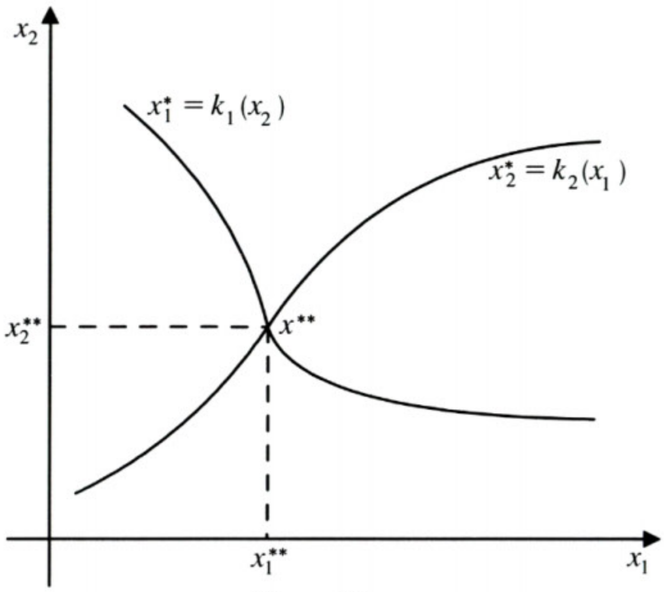


Figura 6.1.

En la figura 6.1, se ha representado la situación en la que una de las condiciones de primer orden es siempre creciente y la otra siempre decreciente,m de manera que si existe una intersección entre ellas, tal punto es único. El único punto que satisface, simultáneamente, ambas condiciones de primer orden is el punto x^{**}, y así tenemos para el caso representado, un equilibrio general. Por supuesto, otras opciones son siempre posibles. Por ejemplo, las dos curvas pueden tener la misma pendiente, en cuyo caso puede haber múltiples equilibrios, o ninguno. No obstante, si podemos encontrar casos en los que las dos condiciones de primer orden tienen pendientes diferentes en todo sus recorridos, y que nunca son asintóticas, entonces podemos siempre afirmar que existe un equilibrio general y que el equilibrio es único.

Antes de rematar el argumento con un vistazo a un razonamiento basado en el teorema del punto fijo de Brower, vale la pena hacer una observación más con respecto a la figura 6.1. Las dos curvas son condiciones de primer orden para dos problemas de optimización restringida, así que cada curva indica el valor óptimo para la correspondiente coordenada para cada posible valor de la otra coordenada. Los economistas frequentemente se refieren a esto como la "mejor respuesta", es decir, $x_1^* = h_1(b_1, x_2)$ es la mejor respuesta al dato dado para x_2. La idea de mejor respuesta es particularmente frequente en la teoría de los juegos. En concreto, en honor al famoso matemático-economista que inventó el concepto (John Nash, premio Nobel de economía en el año 1994) se dice que se tiene un "equilibrio de Nash" cuando cada jugador utiliza una estrategia que es la mejor respuesta a las estrategias de los demás. Es sencillo de apreciar, entonces, que siempre que entendemos x_i como la estrategia del jugador i, el equilibrio general representado en la figura 6.1 constituye un equilibrio de Nash. John Nash demostró que, cualquier juego finito (es decir, que tiene un número finito de jugadores, y en el que cada jugador tiene un número finito de estrategias) tiene por lo menos un equilibrio de Nash. Esto equivale a decir que siempre existirá un equilibrio general si se trata de un sistema finito, y si se definen adecuadamente las estrategias de los jugadores[5].

Para finalizar, vamos a intentar ver exactamente cómo se puede interpretar un sistema como el que se representa en la figura 6.1 en términos de un argumento de punto fijo. Para ello, se considera la figura 6.2. En esta figura, suponiendo que se arranca (por cualquier razón) del punto x^0, es razonable que el individuo 1, en respuesta al dato x_2^0, responda con $x_1^1 = h_1(b_1, x_2^0)$, y de modo similar, el individuo 2 responde con $x_2^1 = h_2(b_2, x_1^0)$. Así que, al arrancar desde el punto x^0 la economía se irá hasta el punto x^1. De igual modo, empezando con x^1, la economía luego saltará hasta el punto x^2. En general, a partir de las dos condiciones de primer orden, se puede apreciar que se genera una nueva ecuación vectorial que describe el movimiento de la economía de un punto a otro

$$x^i = G(x^{i-1})$$

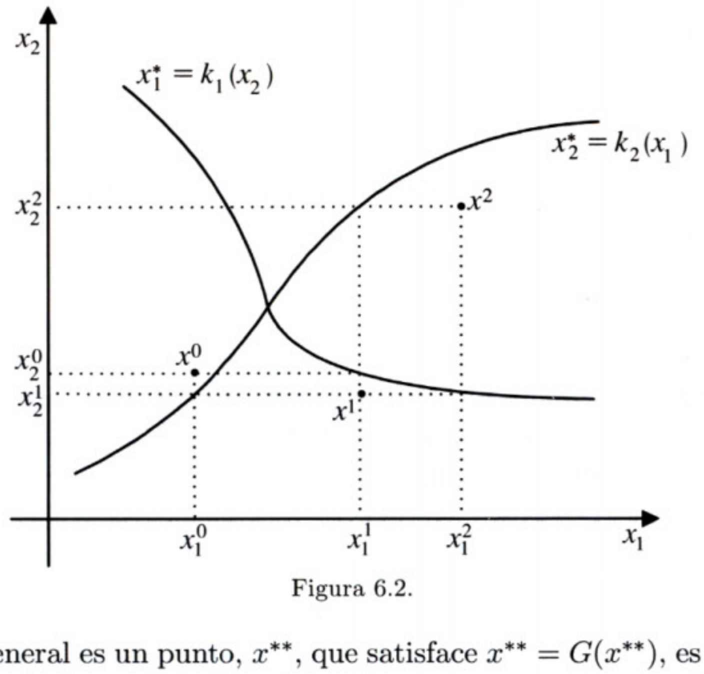


Figura 6.2.

El equilibrio general es un punto, x^{**}, que satisface $x^{**} = G(x^{**})$, es decir, es un punto que se refleja sobre si mismo. Este tipo de punto se conoce como un punto fijo de la función G, y de allí viene la importancia del teorema del punto fijo de Brower para demostrar la existencia de un equilibrio general. Aunque no lo demostraremos (y tampoco lo usaremos a partir de ahora), vale la pena mencionar explícitamente el teorema:

Teorema del punto fijo de Brower: *Suponga que X es un conjunto convexo, compacto y no-vacio, y que $f(x) \to X$ es una función continua de X sobre sí mismo. Entonces $f(x)$ tiene un punto fijo.*

[5] Este último punto es más importante que lo que parece. La demostración de Nash admite lo que se llama "estrategias mixtas", que es una combinación convexa de estrategias puras (siendo las estrategias puras en nuestro analisis los valores admisibles para x_i).

Para el caso del equilibrio general representado en la figura 6.2, solamente habría que demostrar que el conjunto de todos los posibles vectores x es convexo, compacto y no cerrado, y que la función $G(x)$ es continua para guarantizar la existencia del equilibrio. Por último, debe quedar claro que la existencia de un equilibrio general no garantiza en absoluto ni que el equilibrio sea único ni que sea estable, éstos son asuntos mucho más complicados de abordar.

Capítulo 7
El equilibrio genera intertemporal

Capítulo 7

El equilibrio general intertemporal

En este capítulo, vamos a utilizar el modelo de equilibrio parcial intertemporal (capítulo 3) para dar un primer enfoque sobre cómo se puede hacer un modelo de equilibrio general. Como se verá, la exposición requiere de muchos supuestos, algunos de los cuales son algo inesperados, y es bastante más compleja de lo que se podría haber experado al empezar. Utilizaremos el análisis para considerar no solamente la existencia del equilibrio general, sino también para intentar aclarar la relación económica entre dos variables de mucha importancia - el tipo de interés y la inflación.

En este sentido, el modelo presentado en este capítulo tiene mucho que ver con los modelos macroeconómicos que se estudian en los cursos de licenciatura. En ellos, es habitual que se estudie la relación entre el tipo de interés y la inflación en un modelo de oferta y demanda agregada dinámica. Es muy sencillo apreciar en tal análisis que debería existir una relación negativa entre las dos variables, es decir, un incremento en el tipo de interés debería tener el efecto de reducir la inflación[1]. Es decir, si utilizamos π para indicar la inflación, y r para el tipo de interés, entonces los modelos sencillos macroeconómicos predicen que existe una función $\pi = f(r)$ con pendiente negativa, $f'(r) < 0$. En efecto, muchos gobiernos creen que esto es cierto en su política económica contra la inflación. En el modelo veremos que, aunque es ciertamente posible que la relación sea negativa, no se debe descartar que tenga otro signo.

Por otro lado, muchos modelos macroecónomicos descansan sobre un supuesto de "agente representativo" que elimina algunos de los problemas relacionados con la pérdida de información al agregar. Este supuesto entiende que todos los agentes económicos tienen las mismas preferencias, y por tanto pueden ser representados por un agente cualquiera puesto que la media del conjunto sería lo mismo que cualquiera de los individuos por separado. No obstante, en el modelo que se presenta aquí, veremos que el supuesto de preferencias homogéneas es insuficiente para garantizar la existencia del equilibrio y también para obtener resultados claros en un análisis de estática comparativa. De hecho, un caso especial de preferencias homogéneas conduce al resultado de que nunca hay un equilibrio general único, y que el tipo de inflación es independiente del tipo de interés.

[1] Es un argumento a corto plazo. A largo plazo, el conocido efecto "Fisher" predice una relación lineal con pendiente 1 entre las dos variables.

7.1 El modelo

Suponga que la economía se compone de dos agentes económicos que consumen un bien en dos períodos. Sea la utilidad del consumidor i la función $U_i(c_{i1}, c_{i2})$ para $i = 1, 2$, en donde c_{it} es el consumo del consumidor i en el período t. En particular, suponga que la función de utilidad intertemporal de cada agente es separable en el tiempo, es decir $U_i(c_{i1}, c_{i2}) = u_i(c_{i1}) + \lambda_i u_i(c_{i2})$, en donde λ_i es el factor de descuento intertemporal, que satsiface $0 \leq \lambda_i \leq 1$. Se supone que la función de utilidad de cada agente para el consumo de cada período, $u_i(c)$, es estrictamente creciente $(u_i'(c) > 0)$ y estrictamente cóncava $(u_i''(c) < 0)$. Cada agente dispone de una riqueza monetaria en cada período de, w_{it}. Normalizamos para que el precio del bien de consumo en el primer período sea $p_1 = 1$, y que en el período 2 el precio del bien sea $p_2 = p$, que puede ser mayor que 1. Por tanto, el tipo de inflación entre los dos períodos es $\pi = \frac{p-1}{1}$, para que $p = \pi + 1$. En cuanto a la oferta de bienes, para tomar el escenario más sencillo al respecto, suponemos que simplemente se ofrecen los bienes que se demandan.

De igual modo que en el modelo parcial del capítulo 3, los individuos pueden transferir una parte (o la totalidad) de sus riquezas entre los dos períodos mediante ahorros y préstamos. Puesto que solamente hay dos individuos en la economía, en cualquier equilibrio general tiene que ser cierto que lo que uno de ellos decide ahorrar sea igual a la cantidad de dinero que el otro decide pedir prestada, puesto que el único fondo para prestamos son los ahorros del otro. Dado esto, es conveniente definir la demanda del ahorro del individuo 1 como s, y la del individuo 2 como $-s$. Siempre y cuando dejemos que s sea positivo o negativo, esto no supone ninguna restricción al modelo. Los préstamos y los ahorros se referencian a un tipo de interés, r, que es siempre estrictamente positivo.

Con todo esto, en cualquier equilibrio general de esta economía, los valores de consumo de los dos individuos son:

$$c_{11} = w_{11} - s \quad ; \quad c_{12} = \frac{w_{12} + s(1+r)}{1+\pi} \tag{7.1}$$

$$c_{21} = w_{21} + s \quad ; \quad c_{22} = \frac{w_{22} - s(1+r)}{1+\pi} \tag{7.2}$$

Puesto que cada individuo escoge el valor de s que maximiza su propia utilidad, hay dos condiciones de primer orden que tienen que satisfacerse en un equilibrio general:

$$\frac{\partial U_1(s^*, \pi, r)}{\partial s^*} = 0 \Rightarrow -u_1'(c_{11}^*) + \lambda_1 u_1'(c_{12}^*) \left(\frac{1+r}{1+\pi}\right) = 0 \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial U_2(s^*, \pi, r)}{\partial s^*} = 0 \Rightarrow u_2'(c_{21}^*) - \lambda_2 u_2'(c_{22}^*) \left(\frac{1+r}{1+\pi}\right) = 0 \tag{7.4}$$

Para el resto del análisis, con el fin de simplificar la notación, se suprime el asterisco que indica el valor óptimo del ahorro y del consumo, ya que siempre quedará claro del texto cuándo se desea indicar un valor óptimo. Las condiciones de segundo orden se satisfacen con el supuesto de que las funciones de utilidad son cóncavas, es decir

$$\frac{\partial^2 U_i(s, \pi, r)}{\partial s^2} = u_i''(c_{i1}) + \lambda_i u_i''(c_{i2}) \left(\frac{1+r}{1+\pi}\right)^2 < 0, \ i = 1, 2.$$

Ahora, podemos señalar un caso especial importante:

$$\text{Si } \lambda_i = \frac{1+\pi}{1+r} \ \ i = 1, 2, \text{ entonces resulta que } \frac{\partial \pi}{\partial r} = 0.$$

Para ver esto, nótese previamente que puesto que r es el tipo de interés nominal, el tipo de interés real se define como $r - \pi$, que podemos suponer es positivo sin ningún problema. Por tanto $r > \pi$, y de ahí $\lambda_i < 1$ como se requiere. Visto esto, de las condiciones de primer orden, si $\lambda_i = \frac{1+r}{1+\pi}$ $i = 1, 2$, entonces las dos ecuaciones que definen el equilibrio general son simplemente $\frac{u_i'(c_{i2})}{u_i'(c_{i1})} = 1$ $i = 1, 2$. Pero puesto que la función de utilidad de cada agente es estrictamente cóncava, esto implica directamente que $c_{i1} = c_{i2}$ $i = 1, 2$, es decir, en esta solución cada individiuo consume lo mismo en cada período.

Ahora, de las ecuaciones (7.1) y (7.2):

$$\frac{w_{12} + s(1+r)}{1+\pi} = w_{11} - s \quad ; \quad \frac{w_{22} - s(1+r)}{1+\pi} = w_{21} + s$$

Finalmente, en la solución simultánea de estas dos ecuaciones es sencillo calcular que la inflación en el equilibrio general es:

$$\pi = \frac{w_2 - w_1}{w_1}$$

en donde $w_t \equiv w_{1t} + w_{2t}$ $t = 1, 2$ es el total de la dotación monetaria en la economía en el período t.

Este curioso resultado implica que el tipo de inflación en la economía depende únicamente de las dotaciones monetarias. En particular, es independiente del tipo de interés. Sin embargo, el caso parece ser de cierta importancia puesto que $\frac{1+r}{1+\pi}$ es precisamente el factor de descuento real financiero, que a menudo se supone que coincide con los factores de descuento intertemporales de los agentes económicos. Para finalizar, es también interesante que el caso de $\lambda_i = \frac{1+r}{1+\pi}$ $i = 1, 2$ conduce al resultado de que el tipo de inflación es igual al incremento proporcional en la dotación monetaria en la economía de un período a otro, algo que se conoce por la Teoría Cuantitativa del Dinero[2]. Por tanto, el supuesto aquí es que la oferta monetaria se incrementa exógenamente y no como consecuencia de una variación en el tipo de interés.

7.2 El equilibrio general

En cualquier equilibrio general, las dos condiciones de primer orden tienen que satisfacerse simultáneamente. Podemos considerarlas en el espacio definido por el ahorro y la inflación, y así considerar que el tipo de interés es un parámetro para el problema. De acuerdo con esto, definimos las condiciones de primer orden, ecuaciones (7.3) y (7.4), como:

$$s = h_i(\pi, r) \quad i = 1, 2$$

Para poder ver como son estas dos relaciones en el espacio (s, π), tenemos que utilizar el teorema de la función implícita. En particular, a partir de (7.3) y (7.4) tenemos:

$$\frac{\partial h_1(\pi, r)}{\partial \pi} = \frac{\lambda_1 \left(\frac{1+r}{(1+\pi)^2}\right)(u_1''(c_{12})c_{12} + u_1'(c_{12}))}{u_1''(c_{11}) + \lambda_1 u_1''(c_{12})\left(\frac{1+r}{1+\pi}\right)^2} \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial h_2(\pi, r)}{\partial \pi} = -\frac{\lambda_2 \left(\frac{1+r}{(1+\pi)^2}\right)(u_2''(c_{22})c_{22} + u_2'(c_{22}))}{u_2''(c_{21}) + \lambda_2 u_2''(c_{22})\left(\frac{1+r}{1+\pi}\right)^2} \tag{7.6}$$

[2] La Teoría Cuantitativa predice que la inflación será igual al incremento proporcional de la oferta monetaria, y en el modelo que tenemos aquí, las dotaciones monetarias constituyen la oferta monetaria.

Ahora, podemos establecer el hecho de que, si $R_i(c_{i2}) > 1$, y si $R_i'(c_{i2}) = 0$ para $i = 1, 2$, entonces existe un equilibrio general único, en donde $R(c) = -\frac{cu''(c)}{u'(c)}$ es la medición de Arrow y Pratt de aversión relativa al riesgo. El supuesto de aversión relativa constante y mayor que 1 no es el único escenario que garantiza la existencia de un equilibrio único, pero sí es el supuesto más razonable dado que existen multitud de estudios empíricos que apoyan la tesis de que aversión relativa es constante y mayor que 1.

Para ver la validez de la anterior afirmación, nótese que el denominador de (7.5) es negativo por la condición de segundo orden, y así, el signo de la ecuación es el opuesto al signo de su numerador. Por tanto resulta que $\frac{\partial h_1(\cdot)}{\partial \pi} > 0$ si $u_1''(c_{12})c_{12} + u_1'(c_{12}) < 0$, lo que se puede reordenar directamente para obtener $R_1(c_{12}) > 1$. De igual modo, utilizando (7.6) resulta que $\frac{\partial h_2(\cdot)}{\partial \pi} < 0$ si $R_2(c_{22}) > 1$. En consecuencia, si la medida de Arrow y Pratt de aversión relativa al riesgo de cada individuo es mayor que 1, entonces la condición de primer orden del individuo 1 es estrictamente creciente en el espacio de ahorro-inflación, mientras que la condición de primer orden del individuo 2 es estrictamente decreciente.

Dado que las dos gráficas tienen pendientes distintas, a menos que la condición de primer orden del individuo 1 sea asintótica desde abajo a algún valor del ahorro s_a y que la condición del individuo 2 sea asintótica desde arriba a algún valor s_b con $s_a \leq s_b$, o alternativamente, si la condición del individuo 1 es asintótica desde arriba a s_a y la del individuo 2 es asintótica desde abajo a s_b con $s_a \geq s_b$, entonces las dos condiciones de primer orden tienen que tener una intersección única. Sin embargo, las condiciones solamente pueden ser asintóticas si, cuando π aumenta o disminue infinitamente, $R(c)$ converge a 1. El supuesto de que $R(c)$ es constante elimina esta posibilidad.

En particular, si suponemos que cada individuo tiene aversión relativa constante e igual a 1, entonces es imposible que exista un equilibrio general único - o bien no habrá equilibrio (las dos condiciones de primer orden son paralelas y núnca intersectan) o cualquier valor de inflación constituye un equilibrio para un valor único del ahorro (las dos condiciones coinciden exactamente). Para ello, a partir de ahora en el presente capítulo, suponemos directamente que ambos individuos tienen aversión relativa al riesgo constante mayor que 1. Definimos la aversión relativa al riesgo del individuo i en el período 2 por R_i.

7.3 El efecto de un incremento en el tipo de interés

Dado el supuesto de que ambos individuos tienen aversión al riesgo constante mayor que 1, sabemos que existe un equilibrio general, y ahora vamos a considerar cómo queda este equilibrio afectado por un incremento exógeno en el tipo de interés. Para hacerlo, de nuevo es necesario utilizar el teorema de la función implícita conjuntamente con las condiciones de primer orden (7.3) y (7.4). Despues de unos pasos muy sencillos, resulta que:

$$\frac{\partial h_1(\pi, r)}{\partial r} = -\frac{\left(\frac{\lambda_1}{1+\pi}\right)\left(u_1''(c_{12})\left(\frac{1+r}{1+\pi}\right)s + u_1'(c_{12})\right)}{u_1''(c_{11}) + \lambda_1 u_1''(c_{12})\left(\frac{1+r}{1+\pi}\right)^2} \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial h_2(\pi, r)}{\partial r} = -\frac{\left(\frac{\lambda_2}{1+\pi}\right)\left(u_2''(c_{22})\left(\frac{1+r}{1+\pi}\right)s - u_2'(c_{22})\right)}{u_2''(c_{21}) + \lambda_2 u_2''(c_{22})\left(\frac{1+r}{1+\pi}\right)^2} \tag{7.8}$$

Por el supuesto de concavidad de la función de utilidad, el denominador de ambas ecuaciones (7.7) y (7.8) es negativo, y por tanto el signo del efecto de un incremento en r sobre la demanda de ahorro de ambos individuos es el mismo que el signo de los numeradores. Empezamos por el efecto de un incremento en r sobre $h_1(\pi, r)$. Tenemos:

$$\frac{\partial h_1(\pi, r)}{\partial r} \gtreqless 0 \text{ cuando } u_1''(c_{12})\left(\frac{1+r}{1+\pi}\right)s + u_1'(c_{12}) \gtreqless 0$$

lo cual reduce direcamente a:

$$\frac{\partial h_1(\pi, r)}{\partial r} \gtreqless 0 \text{ cuando } s \lesseqgtr \frac{1+\pi}{A_1(c_{12})(1+r)} \equiv g_1(s)$$

en donde $A_1(c) \equiv -\frac{u_1''(c)}{u_1'(c)}$ es la medición de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo. De igual forma, resulta que:

$$\frac{\partial h_2(\pi, r)}{\partial r} \gtreqless 0 \text{ cuando } s \lesseqgtr -\frac{1+\pi}{A_2(c_{22})(1+r)} \equiv g_2(s)$$

Ahora, puesto que por definición $A(c) = \frac{R(c)}{c}$, utilizando el hecho de que la aversión relativa es constante para cada individuo, $R_i = cte$, $i = 1, 2$, y utililzando las ecuaciones (7.1) y (7.2), las dos funciones $g_i(s)$ $i = 1, 2$ se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \left(\frac{c_{12}}{R_1}\right)\left(\frac{1+\pi}{1+r}\right) = \frac{w_{12}}{(1+r)R_1} + \frac{s}{R_1} \\ g_2(s) &= -\left(\frac{c_{22}}{R_2}\right)\left(\frac{1+\pi}{1+r}\right) = -\frac{w_{22}}{(1+r)R_2} + \frac{s}{R_2} \end{aligned}$$

En efecto, $g_i(s)$ $i = 1, 2$ son ambas funciones lineales de s con pendiente positiva. Además, puesto que resulta que $g_i'(s) < 1 \quad i = 1, 2$, podemos concluir que, siempre dentro del supuesto de aversión relativa constante, existen dos números, $s_1 = \frac{w_{12}}{(1+r)(R_1-1)} > 0$ y $s_2 = -\frac{w_{22}}{(1+r)(R_2-1)} < 0$, tales que $g_i(s) \lesseqgtr s$ cuando $s \gtreqless s_i$, $i = 1, 2$. Esto se ha representado gráficamente en la figura 7.1.

Ahora, recuerdérdese que, como ya hemos averiguado antes, la condición de primer orden del individuo 1 en el espacio (s, π) tiene pendiente positiva, mientras que la del individuo 2 tiene pendiente negativa, un incremento en r tiene el efecto de girar $h_1(\cdot)$ en el sentido de las agujas del reloj alrededor del punto $s = s_1$, y de girar $h_2(\cdot)$ en contra de las agujas del reloj alrededor del punto $s = s_2$ (véase las figuras 7.2 y 7.3).

Cuando se incrementa el tipo de interés desde r hasta r', tres situaciones diferentes son posibles, dependiendo del valor inicial del ahorro en equilibrio; $s_1 \geq s(r) \geq s_2$, $s(r) > s_1$, y $s(r) < s_2$. Pero, si (sin pérdida alguna de generalidad) suponemos que el individuo 1 es el que demanda un ahorro positivo, entonces el nivel de ahorro en el equilibrio satisface $s \geq 0$, y así solamente es necesario considerar los dos primeros casos.

El más fácil es el caso $s_1 \geq s(r) \geq s_2$ que está representado en la figura 7.4. Claramente, en este caso el incremento en el tipo de interés siempre tendrá el efecto de disminuir la inflación. Por el contrario, si inicialmente resulta que $s(r) > s_1$, entonces no podemos garantizar este resultado. Por ejemplo, en la figura 7.5 se indica una situación en el cual un incremento en el tipo de interés tiene el efecto de incrementar el tipo de inflación.

En resumen, solamente se puede garantizar que in incremento en el tipo de interés tendrá el efecto de disminuir la inflación si resulta que el ahorro inicialmente satisface la desigualdad $s(r) \leq \frac{w_{12}}{(1+r)(R_1-1)}$, o lo que es lo mismo, $R_1 \leq \frac{w_{12}}{s(1+r)}+1$. Si estas desigualdades

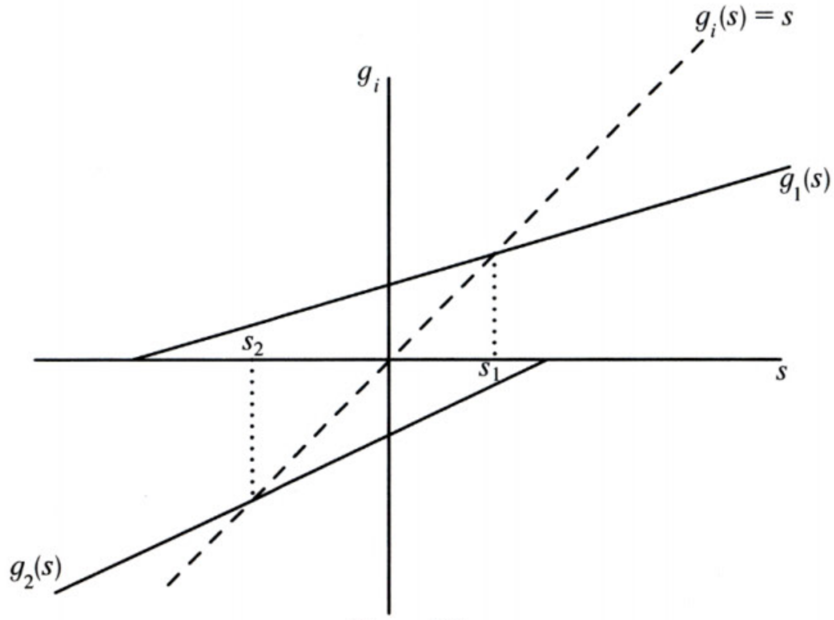


Figura 7.1.

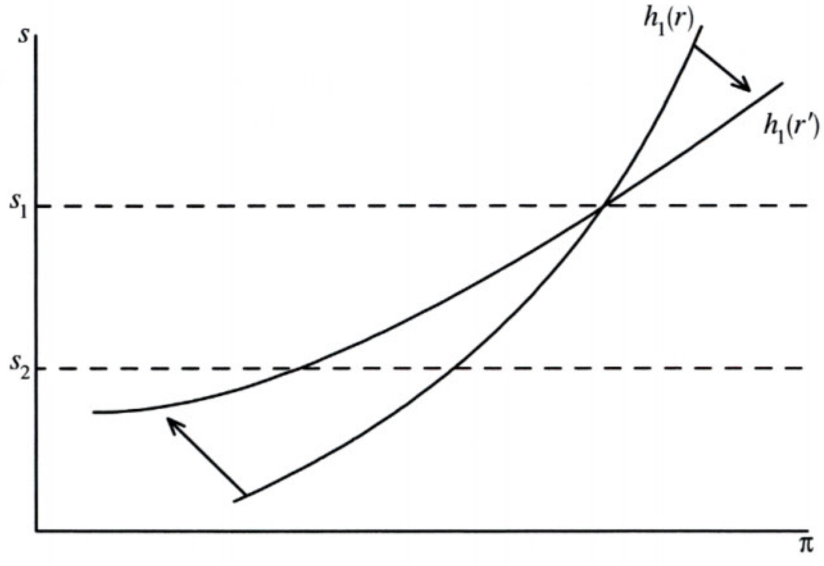


Figura 7.2.

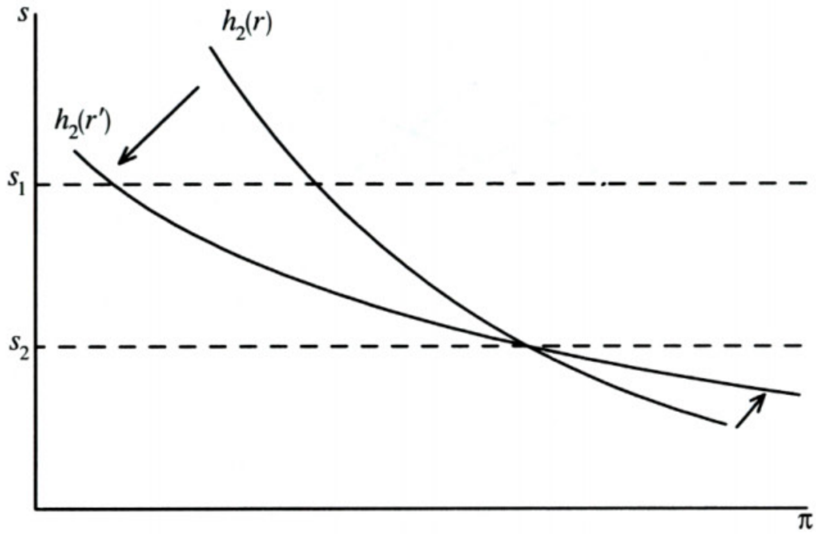


Figura 7.3.

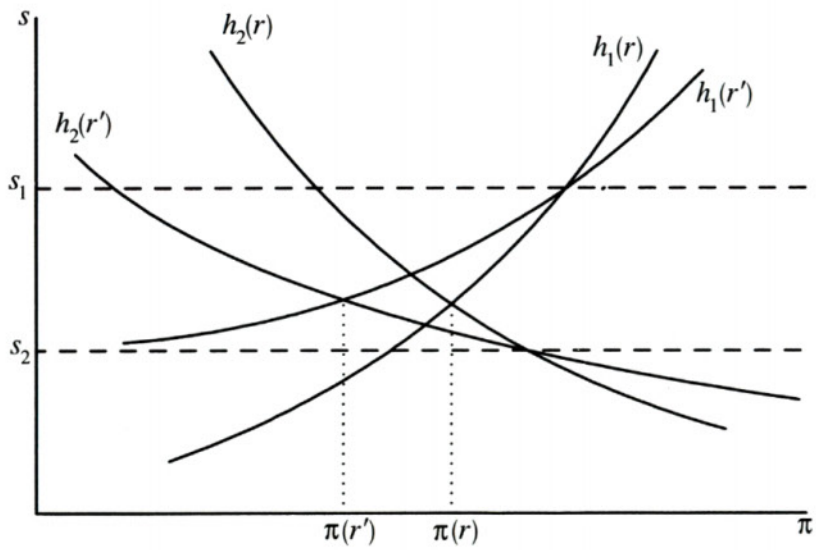


Figura 7.4.

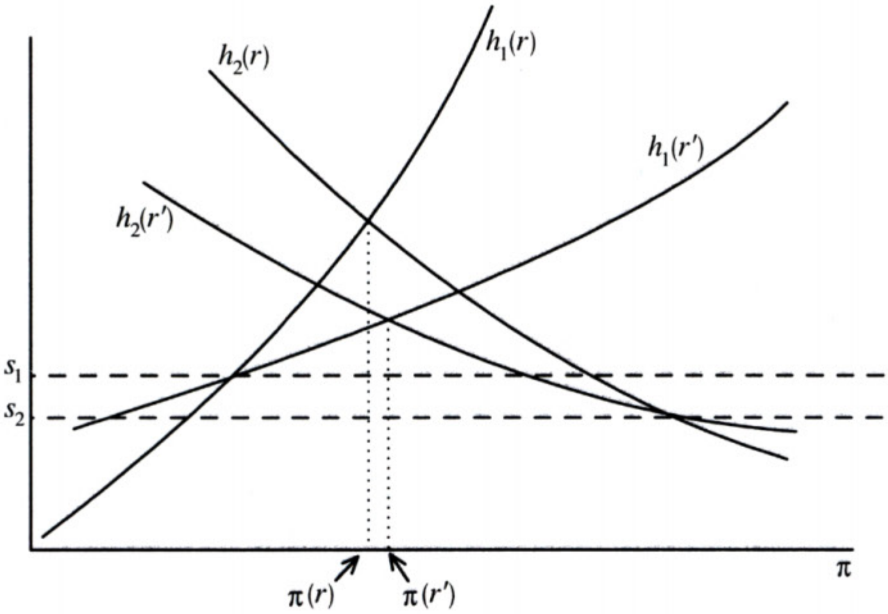


Figura 7.5.

no son satisfechas, no podemos determinar el efecto que sobre inflación tiene un incremento en el tipo de interés (la inflación puede aumentar o disminuir).

Claramente, este resultado indica que la comparación del ahorro inicial con el número s_1 es de mucha importancia para la política anti-inflacionista. Por ejemplo, cuando s_1 está cerca de 0, entonces es menos probable que la condición se satisfaga.Esta situación se produce cuanto mayor es R_1, mayor es el tipo de interés inicial r, y cuanto menor es la dotación del segundo período del ahorrador, w_{12}.

No obstante lo anterior, resulta interesante considerar explícitamente el caso de preferencias homogéneas. Suponga entonces que $R_1 = R_2 \equiv R$ y que $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$. Como ya hemos mencionado antes, debemos excluir el caso $\lambda = \frac{1+\pi}{1+r}$. Para este caso, resulta que siempre es cierto que el tipo de inflación en el equilibrio es una función decreciente del tipo de interés, $\frac{\partial \pi}{\partial r} < 0$.

Para ver esto, empezamos notando que dado el supuesto de aversión relativa al riesgo constante, la función de utilidad del individuo i en el período t es

$$u_i(c_{it}) = \frac{c_{it}^{1-R_i}}{1-R_i} + z_i$$

en donde z_i es una constante. Así, la utilidad marginal en cualquier período es $u_i'(c_{it}) = c_{it}^{-R_i}$. Dado esto, las dos condiciones de primer orden (7.3) y (7.4) se escriben como:

$$\frac{c_{i2}}{c_{i1}} = \left(\frac{\lambda_i(1+r)}{(1+\pi)}\right)^{\frac{1}{R_i}} \quad i = 1,2$$

Ahora, con preferencias homogéneas, $R_1 = R_2 \equiv R$ y $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$, tenemos:

$$\frac{c_{i2}}{c_{i1}} = \left(\frac{\lambda(1+r)}{(1+\pi)}\right)^{\frac{1}{R}} \quad i = 1,2$$

Por tanto, las ecuaciones (7.1) y (7.2) indican que las dos equaciones simultáneas que definen el equilibrio general son:

$$\frac{w_{12}+s(1+r)}{(w_{11}-s)(1+\pi)}=\left(\frac{\lambda(1+r)}{(1+\pi)}\right)^{\frac{1}{R}}=\frac{w_{22}-s(1+r)}{(w_{21}+s)(1+\pi)}$$

Es fácil resolver estas dos ecuaciones para obtener:

$$\pi = \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{R}{R-1}}[\lambda(1+r)]^{\frac{1}{1-R}}-1 \tag{7.9}$$

$$s = \frac{w_{11}w_{22}-w_{12}w_{21}}{(1+r)w_1+w_2} \tag{7.10}$$

Directamente, entonces, resulta que en este caso:

$$\frac{\partial\pi}{\partial r}=\left(\frac{\lambda}{1-R}\right)\left[\frac{w_2}{w_1\lambda(1+r)}\right]^{\frac{R}{R-1}}<0$$

Es también interesante notar que para el caso de preferencias homogéneas, puesto que hemos definido nuestros individuos para que $s>0$, resulta que el individiduo 1 es aquel con mayor dotación relativa en el primer período, es decir, $\frac{w_{11}}{w_{12}}>\frac{w_{21}}{w_{22}}$.

7.4 Resumen

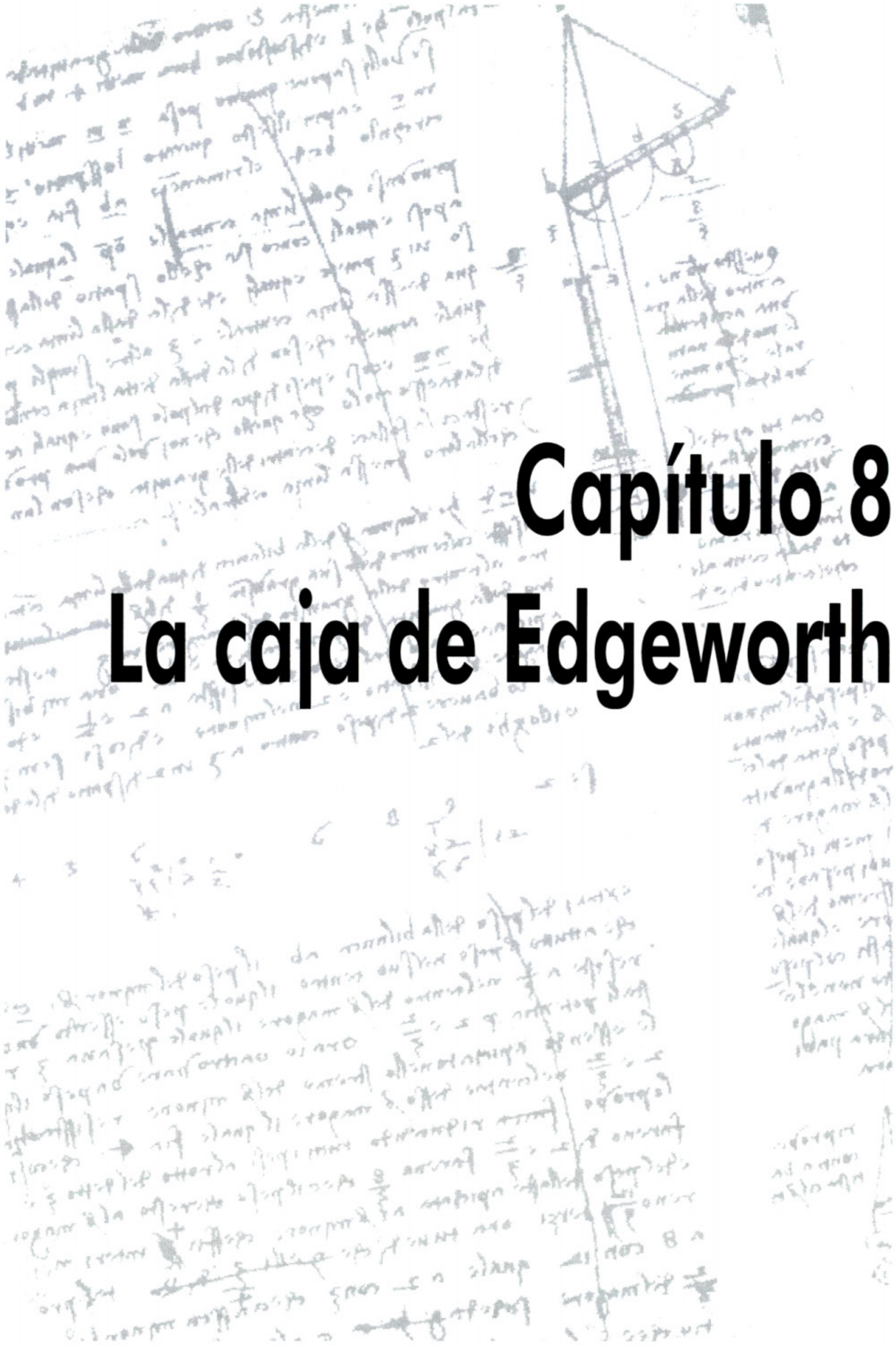
1. El equilibrio general ocurre en la intersección de las condiciones de primer orden para la demanda de ahorros de los dos individuos en el modelo.

2. Si las preferencias de los dos individuos implican un factor de descuento intertemporal igual al factor de descuento financiero real, entonces no existe un equilibrio único (o bien hay infinitos equilibrios o no hay ninguno), y el tipo de inflación es independiente del tipo de interés. De hecho, en este caso especial, el tipo de inflación se determina como el tipo de crecimiento de la dotación total de dinero en la economía entre los dos períodos, de igual forma que en la Teoría Cuantitativa del Dinero.

3. Si ambos individuos tienen aversión relativa al riesgo constante y mayor que 1, entonces un equilibrio general único existe.

4. Si las preferencias son homogéneas (excluiendo el caso del punto 2 arriba), y suponiendo aversión relativa al riesgo constante y mayor que 1, entonces siempre el tipo de inflación es decreciente con el tipo de interés.

5. Cuando las preferencias no son homogéneas, entonces solamente se puede garantizar que el tipo de inflación disminuirá con un aumento en el tipo de interés si la cantidad de ahorro es inicialmente pequeña, o si la aversión relativa al riesgo del ahorrador es suficientemente pequeña.



Capítulo 8
La caja de Edgeworth

Capítulo 8

La caja de Edgeworth

Una de los herramientas más útiles para el estudio del equilibrio general es la "caja de Edgeworth", primeramente propuesta por Francis Edgeworth al final del siglo XIX. La caja es una representación gráfica para estudiar casos de economías bidimensionales (dos consumidores, dos productores, dos bienes, dos factores de producción, etc.), en la que se pueden apreciar bastantes de los más fundamentales aspectos del equilibrio general (existencia, eficiencia, etc.) sin la necesidad de recurrir al uso de complicadas matemáticas.

En este capítulo, vamos a considerar el equilibrio general en la caja de Edgeworth para una gama de situaciones. De entrada, construiremos paso a paso el modelo "2x2x2", es decir, un modelo con dos consumidores, dos bienes, dos productores y dos factores de producción, en condiciones de certidumbre y veremos su equilibrio general en condiciones de competencia perfecta. También consideraremos el efecto del poder de mercado en la forma de un monopolista. Posteriormente, introduciremos la incertidumbre en el modelo (eso sí, sin sector productivo) para poder apreciar una serie de resultados muy importantes para el capítulo sobre información asimétrica.

Para empezar, sin embargo, vamos a mencionar una serie de definiciones y resultados preliminares que serán utilizados con mucha frequencia durante este capítulo. En primer lugar, una *asignación* de bienes entre consumidores es un vector que estipula una cantidad de cada uno de los dos bienes para cada uno de los dos individuos. Se dice que una asignación x es *factible* si satisface

$$x_j^1 + x_j^2 \leq W_j \quad j = 1, 2 \tag{8.1}$$

en donde x_j^i es la cantidad del bien j asignada al individuo i, y W_j es la cantidad total disponible del bien j en la economía. Una asignación, x, *domina en sentido de Pareto* a otra, y, si

$$u_i(x) \geq u_i(y) \quad i = 1, 2 \tag{8.2}$$

en donde $u_i(\cdot)$ es la función de utilidad del individuo i, que suponemos es estrictamente creciente en ambos bienes (i, j) y estrictamente cuasicóncava (es decir, las curvas de indiferencia son estrictamente convexas). A partir de cualquier punto, y, podemos definir el conjunto de todos los puntos que dominan a y según la ecuación (8.2) como

$$D(y) \equiv \{x : u_i(x) \geq u_i(y) \quad i = 1, 2\} \tag{8.3}$$

Puesto que estamos suponiendo que cada función de utilidad es cuasicóncava, es decir, el conjunto $D_i(y) \equiv \{x : u_i(x) \geq u_i(y)\}$ es estrictamente convexo, y claramente el conjunto

$D(y)$ es la intersección de $D_1(y)$ y $D_2(y)$, es decir, $D(y) = D_1(y) \cap D_2(y)$, resulta evidente que $D(y)$ también es un conjunto convexo.

EJERCICIO 8.1: *Utilizando la desigualdad de Jensen y suponiendo que las funciones de utilidad de los individuos son cóncavas, demuestre formalmente que el conjunto $D(y)$ es convexo.*

Un *equilibrio* en la economía tiene que ser una asignación que satisface, como poco, los requisitos de ser factible por un lado, y por otro que sea un intercambio voluntario por parte de ambos individuos. Este segundo requisito (el de intercambio voluntario) se puede garantizar si se trata de un punto para el que no existe otra asignación que la domine en sentido de Pareto, es decir, que $D(x) = \emptyset$. En principio pues, nos centramos en este tipo de punto. Si $D(x) = \emptyset$, entonces se dice que x es *eficiente en sentido de Pareto.* Si $D(x) \neq \emptyset$, es decir, existe por lo menos un punto que domine a x en sentido de Pareto, entonces se dice que x es ineficiente en sentido de Pareto.

EJERCICIO 8.2: *Suponga que no hay ningún punto factible que domina en sentido de Pareto al punto x. ¿Es cierto entonces que x domine en sentido de Pareto a todos los demás puntos factibles?*

Suponga que una asignación y satisface la ecuación (8.1) con estricta desigualdad. Entonces, podemos estar seguros de que existe otro, digamos x, que es factible y que domina a y en sentido de Pareto. Para verlo, basta con notar que ambas curvas de utilidad son (por supuesto) estrictamente crecientes, y que podemos simplemente asignar las cantidades de los dos bienes que y deja sin asignar entre los dos individuos de cualquier manera para dominar a y sin llegar a ser no factible. Por tanto, entonces, ninguna asignación que satisface (8.1) con estricta desigualdad puede ser considerado un equilibrio de la economía por implicar pérdidas innecesarias de utilidad (o en otras palabras, por ser ineficiente en sentido de Pareto).

8.1 Una economía de intercambio puro

Para empezar, vamos a estudiar una situación en la que existen dos consumidores con dotaciones dadas de los dos bienes, x_1 y x_2. De momento, para no complicar el modelo con un sector productivo, no nos preguntamos sobre la procedencia de las dotaciones, simplemente suponemos que existen. La dotación inicial del individuo i es $w^i = (w_1^i, w_2^i)$ para $i = 1, 2$, que la utilidad $u_i(w^i) = u_i(w_1^i, w_2^i)$. Se supone en todo momento que los bienes son perfectamente divisibles. Esta información está representada en la figura 8.1.

Nuestro objetivo es ver si los dos individuos pueden intercambiar cantidades de los bienes entre sí de manera que se beneficien ambos, y si esto es posible, intentar encontrar una situación de equilibrio en la economía. En este sentido, vamos a poder apreciar con facilidad en la caja asuntos tales como la existencia de un equilibrio general para el problema, y también la eficiencia del equilibrio.

Para constuir la caja de Edgeworth, se procede en dos simples pasos. En primer lugar, invertimos la gráfica del individuo 2 para que aparezca como en la figura 8.2, y en segundo lugar, colocamos la gráfica invertida del individuo 2 encima de la gráfica del individuo 1 (sin invertir), de modo que coinciden los dos puntos de la dotación inicial.

Al colocar la gráfica del individuo 2 encima de la del individuo 1, se obtiene una caja de anchura $W_1 = w_1^1 + w_1^2$ y de altura $W_2 = w_2^1 + w_2^2$, como la que se ha representado en la figura 8.3. Para simplificar la notación, llamamos al punto correspondiente a la dotación en la caja simplemente w, y nos referimos al origen de la gráfica que corresponde al individuo i como 0_i. El sentido de preferencia del individuo i es hacia el origen 0_j, para

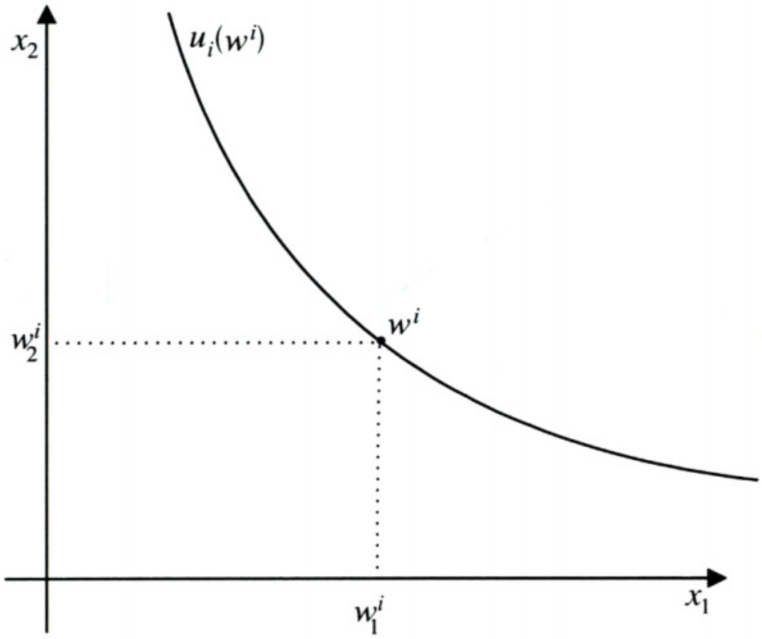


Figura 8.1.

$i, j = 1, 2$ y $i \neq j$. Cualquier punto en la caja indica una asignación de los dos bienes entre los dos individuos, de modo que la cantidad entera disponible de cada bien esté asignada entre los dos. Es decir, quedándonos el origen del individuo 1 (0_1) como orientativa para la caja, entonces un punto cualquiera, x, con coordenadas (x_1, x_2) implica que el individuo 1 se queda con una cantidad x_i del bien i mientras que el individuo 2 se queda con una cantidad $W_i - x_i$ del mismo bien.

En el punto de dotación, w, cuyas coordenadas son $(w_1, w_2) = (w_1^1, w_2^1)$, la relación marginal de sustitución del individuo 1 es

$$RMS_1(w) = -\left.\frac{\left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right)}\right|_{x=w}$$

y la relación marginal de sustitución del individuo 2 es

$$RMS_2(w) = -\left.\frac{\left(\frac{\partial u_2(W-x)}{\partial (W_1-x_1)}\right)}{\left(\frac{\partial u_2(W-x)}{\partial (W_2-x_2)}\right)}\right|_{x=w}$$

pero como W es un parámetro constante, podemos simplemente escribir $u_2(W - x) = u_2(x)$, con $\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_i} < 0$ $i = 1, 2$, y así tenemos

$$RMS_2(w) = -\left.\frac{\left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1}\right)}{\left(\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2}\right)}\right|_{x=w}$$

Hay solamente dos posibles eventualidades cuando se superpone la gráfica del individuo 2 sobre la del individuo 1 de esta manera - o bien las curvas de indiferencia son tangentes la una a la otra en el punto w, o bien no lo son. En la figura 8.3 se muestra el caso más

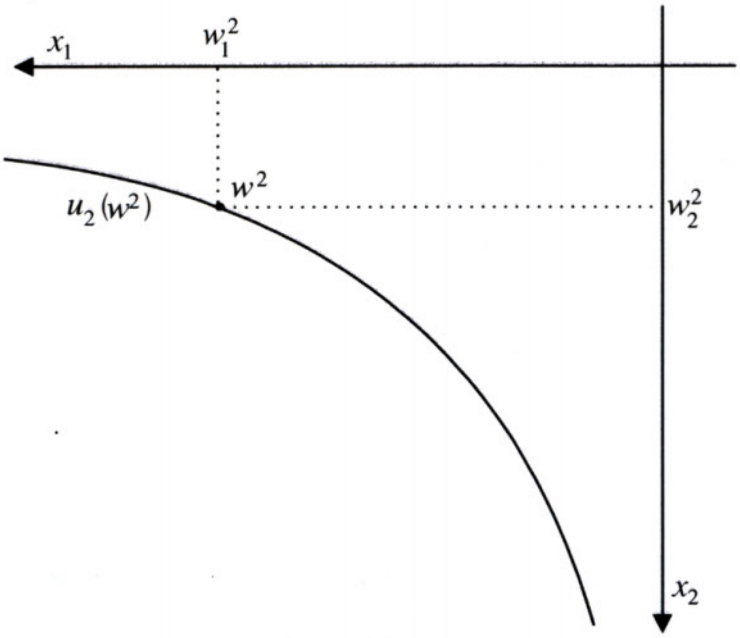


Figura 8.2.

razonable, que es cuando las curvas de indiferencia no son tangentes en el punto de la dotación inuicial w.

Tal situación se caracteriza por una desigualdad entre las relaciones marginales de sustitución de los dos individuos en el punto de la dotación inicial. En concreto, puesto que es irrelevante cuál de los dos individuos queda indicado por "individuo 1" y cuál por "individuo 2", la situación de la figura 8.3 es válida para cualquier situación en la que inicialmente no hay igualdad entre las relaciones marginales de sustitución de los dos individuos. A partir de ahora, supondremos que en inicio, la relación marginal de sustitución de los dos individuos es diferente en el punto correspondiente a la dotación inicial, y que el individuo 1 es aquel con menor RMS (recuérdese que $RMS_i(x) < 0$ $i = 1, 2$), es decir

$$RMS_1(w) < RMS_2(w)$$

Cuando este es el caso, la convexidad de cada curva de indiferencia hacia su correspondiente origen implica que existirá siempre una zona de puntos dentro de una "lupa" (región sombreada en la figura 8.3), en donde las fronteras de la lupa son las propias curvas de indiferencia iniciales (en la figura 8.3 la lupa está indicada con una sombra). Esta lupa es de suma importancia. Dado un punto cualquiera dentro de esta lupa, digamos x, tal punto satisface $u_i(x) \geq u_i(w)$ para $i = 1, 2$. En resumen, la lupa es el conjunto $D(w)$ (ver 8.3). Dado esto podemos ya asegurar que, siempre que $RMS_1(w) \neq RMS_2(w)$, entonces el conjunto de puntos que dominan a la dotación en sentido de Pareto no es vacío, es decir, $D(w) \neq \emptyset$.

Antes de considerar diferentes asignaciones dentro de la caja, debemos comentar un pequeño detalle con respecto del conjunto $D(w)$. En principio no hay garantía de que $D(w)$ se sitúe dentro de la caja, es decir, que los puntos del conjunto $D(w)$ sean factibles. Pero sí podemos asegurar que por lo menos una parte del conjunto sería siempre factible si el punto correspondiente a la dotación inicial no se encuentra sobre el borde inferior o sobre el borde de la derecha de la caja. Esto requiere que $w_2^1 > 0$ y $w_1^2 > 0$, es decir, que

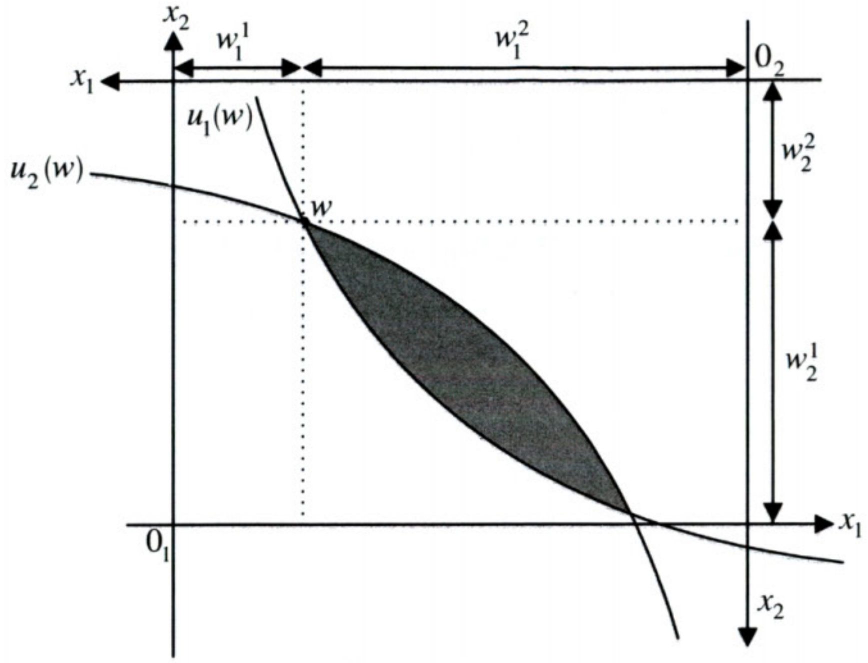


Figura 8.3.

el individuo i está inicialmente dotado con una cantidad estrictamente positiva del bien j, para $i, j = 1, 2$ y $i \neq j$. En lo que resta del presente capítulo, con objeto de no introducir problemas analíticos de poca importancia, es conveniente suponer que todos los puntos dentro del conjunto $D(w)$ son factibles (tal y como se representa en la figura 8.3).

Considérese ahora una asignación x, distinta de w y que satisface $x \notin D(x)$. Cualquiera que sea, tiene que representar una disminución en la utilidad de por lo menos uno de los dos individuos (y puede que de ambos). Por tanto, tal punto nunca puede ser factible en una situación de intercambio voluntario, puesto que aquel individuo cuya utilidad sufre una disminución al cambiar w por x se negará a participar en el intercambio.

Hasta ahora, podemos resumir diciendo que, siempre que la dotación inicial satisface $RMS_1(w) < RMS_2(w)$ con $w_j^i > 0$ para $i, j = 1, 2$ con $i \neq j$, entonces existe un conjunto no vacío de puntos factibles, $D(w)$, que dominan en sentido de Pareto al punto w. Pero es más, si hay un equilibrio en un punto x, entonces x tiene que ser uno de los puntos factibles que dominan en sentido de Pareto a w ($x \in D(w)$) puesto que los demás puntos siempre serían vetados por al menos uno de los dos individuos como asignación alternativa a w, es decir, los demás puntos no satisfacen el requisito de intercambio voluntario.

El argumento de que si $RMS_1(w) \neq RMS_2(w)$, entonces $D(w) \neq \emptyset$ puede ser extendido a cualquier punto en general dentro de la caja:

$$\forall x \;\; RMS_1(x) \neq RMS_2(x) \iff D(x) \neq \emptyset \tag{8.4}$$

Para ver porqué, simplemente hay que notar que, cualquier punto x que satisface $RMS_1(x) \neq RMS_2(x)$ nos conduce a una gráfica que es formalmente idéntica a la figura 8.3 en que las curvas de indiferencia se cortan en el punto x. Existirá entonces un conjunto de puntos, $D(x)$, que dominan en sentido de Pareto a x. Como el doble sentido de la flecha en la ecuación (8.4) indica, el argumento funciona al revés también. Si el conjunto $D(x)$ no es vacío, entonces las curvas de indiferencia tienen que cortarse en x.

EJERCICIO 8.3: *Demuestre formalmente que si el conjunto $D(x)$ no es vacío, entonces las curvas de indiferencia tienen que cortarse en x.*

Pero nótese que, puesto que $RMS_1(x) \neq RMS_2(x)$ es una condición necesaria y suficiente para $D(x) \neq \emptyset$, por exclusión, resulta que $RMS_1(x) = RMS_2(x)$ tiene que ser una condición necesaria y suficiente para $D(x) = \emptyset$, es decir

$$RMS_1(x) = RMS_2(x) \iff D(x) = \emptyset$$

El conjunto de todos los puntos que son eficientes en sentido de Pareto que viene dado por el conjunto

$$C \equiv \{x : D(x) = \emptyset\}$$

se conoce como la *curva de contratos.* Resulta que, siempre y cuando $D(w) \neq \emptyset$, la intersección entre los conjuntos C y $D(w)$ no es vacía, $C \cap D(w) \equiv N(w) \neq \emptyset$. El conjunto resultante, $N(w)$, recibe el nombre de el *núcleo* de la economía. Para ver esto, simplemente notar que podemos adjudicarle un nivel de utilidad al individuo 2 que satisface $U_2 > u_2(w)$. Luego, consideramos el problema de maximización restringida siguiente

$$\max_x \; u_1(x) \text{ s.a. } u_2(x) \leq U_2$$

Puesto que cualquier curva de indiferencia del individuo 2 es una función estrictamente cóncava (recuerdese que estamos referenciando la caja al origen 0_1), el conjunto de puntos que satisface $u_2(x) \leq U_2$ es estrictamente convexo. Pero puesto que $u_1(x)$ es cuasicóncava, sabemos (capítulo 1) que existe una solución única al problema, caracterizada por $u_2(x) = U_2$ y tangencia entre la frontera del conjunto factible (es decir, la curva de indiferencia definida por $u_2(x) = U_2$) y la curva de indiferencia de la función objetivo (es decir, una curva de indiferencia de la función $u_1(x)$). Entonces, la solución al problema de maximización restringida es un punto de tangencia entre las curvas de indiferencia de los dos individuos. Finalmente, siempre y cuando se escoja un número U_2 que sea suficientemente cercano a $u_2(w)$, la solución al problema propuesto tiene que encontrarse dentro del conjunto $D(w)$.

La curva de contratos y el núcleo están representados gráficamente en la figura 8.4. Específicamente, la curva de contratos es la curva de pendiente positiva que va de origen a origen en la figura 8.4, mientras que el núcleo es aquella parte de la curva de contratos que se sitúa en la zona sombreada, $D(w)$.

8.1.1 Equilibrio

Según los requisitos de que un equilibrio debe ser factible y voluntario, resulta que tiene que encontrarse dentro del conjunto $D(w)$. Pero, nos quedamos con la pregunta, ¿cuál de todos estos puntos será el equililibrio? La respuesta a la pregunta depende de las reglas según las cuales los dos individuos llevan a cabo los intercambios de bienes.

Hay una opción que resulta muy sencilla de localizar en la caja. Suponga que el intercambio de bienes es mediante el puro trueque, y que el individuo 1 actúa como monopolista en el sentido de que él sugiere un intercambio, y el individuo 2 solamente acepta o rechaza la propuesta. El punto que el individuo 1 va a proponer debe resolver el problema

$$\max_x \; u_1(x) \quad \text{s.a.} \quad u_i(x) \geq u_i(w) \; i = 1, 2$$

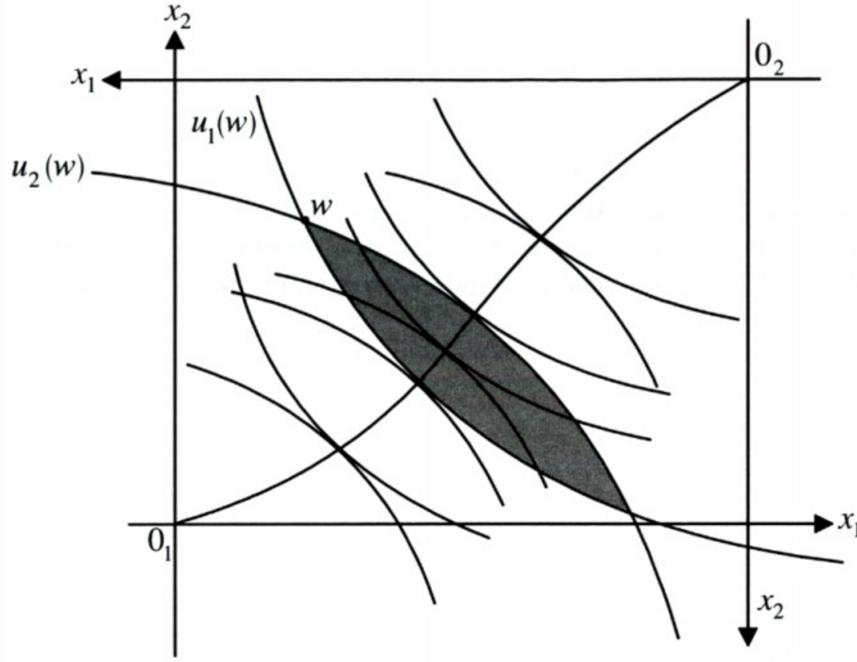


Figura 8.4.

Nótese que las dos restricciones en este problema son equivalentes a $x \in D(w)$. Ahora, puesto que $D(w)$ es un conjunto no-vacío y estrictamente convexo, y que la función objetivo $u_1(x)$ es estrictamente cuasicóncava y creciente, sabemos que existe una solución única al problema, y que esta solución se encuentra sobre la frontera superior del conjunto factible. Es más, la solución es un punto de tangencia entre un contorno de la función objetivo y la frontera superior del conjunto factible. Pero la frontera superior del conjunto $D(w)$ en la caja de Edgeworth es la curva de indiferencia $u_2(x) = u_2(w)$. Con todo esto, la solución al problema es el único punto que satisface $RMS_1(x) = RMS_2(x)$ y $u_2(x) = u_2(w)$, es decir, es el punto de corte entre la curva de contratos y la curva $u_2(x) = u_2(w)$.

EJERCICIO 8.4: *¿Cuál es el equilibrio en un modelo de trueque en el que el individuo 2 propone el intercambio y el individuo 1 acepta o rechaza?*

Este proceso sugiere que, si el proceso de intercambio es de trueque puro, y que de algún modo, el poder de mercado se reparte entre los individuos, entonces el equilibrio tiene que ser un punto sobre el núcleo de la economía. Pero, ¿exactamente qué punto será? Esta pregunta suculenta es un tema que tenemos que aplazar hasta el próximo capítulo, y de momento vamos a perseguir el concepto de equilibrio por la vía sugerida por el propio Edgeworth.

Edgeworth estudió el equilibrio en la caja abandonando el supuesto de trueque en favor de un supuesto de intercambio con relación a los precios. En concreto, se supone:

1. los dos individuos llevan sus dotaciones iniciales a un mercado,

2. en el mercado hay un poder supremo (un "subastador") que anuncia el precio relativo, p, al que se pueden intercambiar los bienes,

3. en función de p, cada individuo formula sus demandas respectivas de ambos bienes,

4. si existe excedente (es decir, si las dos demandas no suman exactamente 0 en ambos bienes), el subastador no permite que se efectúen los intercambios y revisa p,

5. si no existe excedente (si las dos demandas suman exactamente 0 en ambos bienes), entonces el subastador permite que se efectúen los intercambios (se ha llegado al equilibrio).

Nótese que para que este sistema funcione no es necesario que exista el dinero como un tercer bien, puesto que lo único que se requiere es un precio relativo (el precio de uno de los bienes en función del otro, es decir, para obtener una unidad del bien 1 es necesario entregar a cambio p unidades del bien 2) y no precios absolutos (precios de los bienes en función de dinero). El sistema propuesto por Edgeworth es suficiente para que exista un equilibrio, y puesto que en el juego ninguno de los individuos tiene poder de mercado alguno, se conoce el correspondiente equilibrio como el *equilibrio competitivo.*

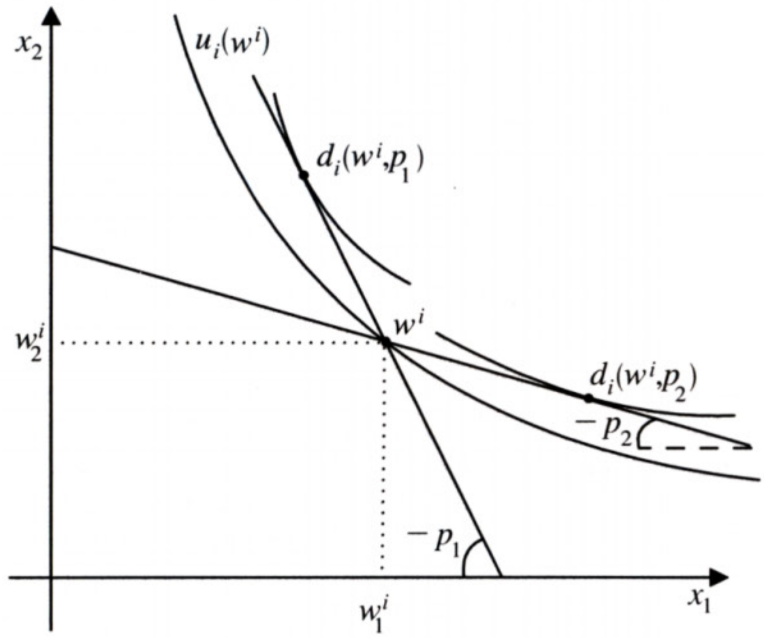


Figura 8.5.

Para ver cuál es el equilibrio competitivo, considere la figura 8.5 que muestra la situación de uno de los dos individuos. En cuanto el subastador haya anunciado un precio relativo p, el individuo ya tiene una restricción presupuestaria, que es una recta de pendiente $-p$ y que pasa por su punto de dotación inicial. Para ver que siempre pasa por la dotación inicial, nótese que independientemente de cúal es el precio relativo, un individuo siempre tiene a su alcance consumir su dotación sin más, y que al hacerlo, se agotará (por definición) la dotación inicial. En efecto, si el precio relativo es p entonces el individuo i puede entregar su dotación inicial entera del bien 1 a cambio de pw_1^i unidades del bien 2. Dado esto, la dotación inicial entera puede valorarse en términos del bien 2 según $w_2^i + pw_1^i$. Así que el individuo podrá acceder a cualquier cesta de bienes (x_1, x_2) cuyo valor en términos del bien 2, $x_2^i + px_1^i$ no supere el valor de la dotación inicial. De esta forma el precio relativo implica una restricción presupuestaria de

$$x_2^i + px_1^i \leq w_2^i + pw_1^i$$

es decir,

$$x_2^i \leq w_2^i + p(w_1^i - x_1^i)$$

Esto es un conjunto cuya frontera superior es la línea recta $x_2^i = w_2^i + p(w_1^i - x_1^i)$, que tiene pendiente $-p$ y que obviamente pasa por el punto (w_1^i, w_2^i). Por supuesto, esta es la recta presupuestaria.

En este punto, podemos destacar un muy conocido resultado que es siempre útil tener en cuenta. La *Ley de Walras* dice que si en una economía con n mercados y agentes económicos que demandan según una restricción presupuestaria, si $n-1$ mercados están en equilibrio (el excedente de demanda es 0) entonces también tiene que encontrarse en equilibrio el último mercado. Para el caso especial de la caja de Edgeworth, la Ley de Walras implica que es suficiente para un equilibrio general que se compruebe que uno cualquiera de los mercados se encuentra en equilibrio. El argumento que demuestra este hecho empieza por notar que la demanda total del bien 2 es $x_2^1 + x_2^2$, y que este bien cuenta con una oferta total de $w_2^1 + w_2^2$. Utilizando el hecho de que las demandas deben satisfacer la recta presupuestaria de cada individuo, si el mercado del bien 2 está en equilibrio, tiene que satisfacerse la ecuación

$$x_2^1 + x_2^2 = \left(w_2^1 + p(w_1^1 - x_1^1)\right) + \left(w_2^2 + p(w_1^2 - x_1^2)\right) = w_2^1 + w_2^2$$

Cancelando términos comunes y agrupando, se tiene

$$p(w_1^1 - x_1^1 + w_1^2 - x_1^2) = 0$$

Pero puesto que $p > 0$, esto implica que

$$x_1^1 + x_1^2 = w_1^1 + w_1^2$$

es decir, el mercado del bien 1 también está en equilibrio.

Una vez estipulado el valor de p, el individuo puede determinar su punto de demanda, $d_i(w^i, p)$ como el punto sobre la recta presupuestaria que forma tangencia con una curva de indiferencia. Según varía p, el punto de demanda también varía, tal y como se indica en la figura 8.5 con la variación en p entre dos valores, $p_1 > p_2$. Nótese que siempre existirá un valor para p tal que $d_i(w^i, p) = w$, es decir, se forma una recta presupuestaria que es tangente a la curva de indiferencia inicial justo en el punto de la dotación inicial. Si en la figura 8.5 se pinta una curva que una todos los puntos $d_i(w^i, p)$ según se varía p, se obtiene lo que se llama *la curva precio-consumo del individuo i*, CPC_i (véase la figura 8.6).

Los puntos impotantes a tener siempre en mente con respecto de una curva precio-consumo son:

1. un punto sobre una curva precio-consumo indica un punto de demanda óptima,
2. en un punto sobre una curva precio-consumo, la curva de indiferencia es tangente a la recta presupuestaria,
3. el único punto sobre la curva precio-consumo en que la curva en sí es tangente a la curva de indiferencia que pasa por el mismo punto es el punto de dotación inicial w,
4. si x es un punto sobre la curva precio-consumo con $x \neq w^i$, entonces $u_i(x) > u_i(w^i)$, es decir, la curva precio-consumo está gráficamente más alta que la curva de indiferencia que pasa por la dotación inicial.

Ahora podemos volver a la caja de Edgeworth. En la figura 8.7 se representa una caja de Edgeworth junto con las curvas de indiferencia iniciales, el conjunto $D(w)$, y las dos

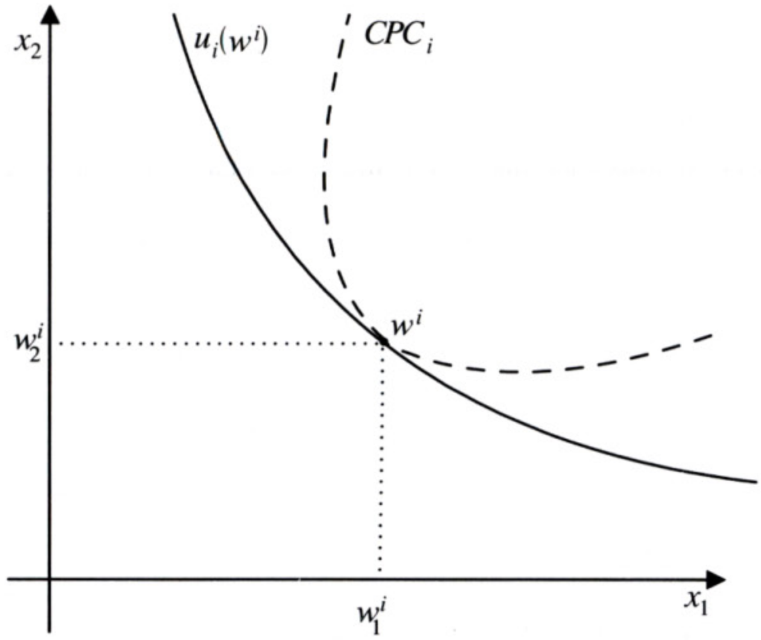


Figura 8.6.

curvas precio-consumo. Ahora, puesto que cada CPC es tangente a su respectiva curva de indiferencia en el punto w, y que en este punto las dos curvas de indiferencia se cortan, es necesariamente cierto que una parte de cada CPC recorre el conjunto $D(w)$. Es más, las dos CPC tienen necesariamente un punto de corte en algun punto $e \in D(w)$. Para ver porqué, simplemente hay que recordar que cada curva CPC_i es tangente a $u_i(w)$ en el punto w, con lo que las dos curvas CPC tienen que cortarse en este punto. En concreto, en este punto, según se mueve dentro del conjunto $D(w)$ la curva CPC_1 tiene que estar por debajo de CPC_2 dentro de la caja. Por otro lado, CPC_1 está siempre por encima de la curva de indiferencia $u_1(w)$ mientras que la curva de indiferencia $u_2(w)$ no está siempre por encima de la curva de indiferencia $u_1(w)$. Esto implica que tiene que existir un punto de corte (aparte del punto w) entre CPC_1 y $u_2(w)$ y que este punto de corte ocurre por encima de la curva de indiferencia $u_1(w)$. El mismo argumento implica que debe existir un punto de corte entre CPC_2 y $u_1(w)$ que ocurre por debajo de la curva de indiferencia $u_2(w)$. Finalmente, estos puntos de corte implican que necesariamente CPC_1 acaba por encima de CPC_2. Puesto que CPC_1 empieza por debajo de CPC_2 (a partir del punto w) pero acaba por encima, tiene que existir (por lo menos) un punto de corte entre las dos, y este punto de corte tiene que encontrarse dentro del conjunto $D(w)$. En la figura 8.7 el punto de corte entre las CPC está indicado por el punto e.

Se considera ahora la implicación del punto e. Si pintamos una recta que una los dos puntos w y e, esta recta representa una recta presupuestaria para ambos individuos. Pero puesto que justo con esta recta presupuestaria cada individuo forma su punto de demanda en e (ver Fig. 8.5), sabemos que las dos curvas de indiferencia que pasan por e tienen ambas que ser tangentes a la misma recta presupuestaria, y por tanto son tangentes entre si. Por tanto, e se encuentra sobre la curva de contratos, es decir, es un punto eficiente en sentido de Pareto. Finalmente, puesto que con el precio relativo p los dos puntos de demanda coinciden, el excedente de demanda de ambos bienes es igual a 0, es decir, e es un punto de equilibrio general.

EJERCICIO 8.5: *Pinte la curva CPC para todos los precios relativos posibles entre*

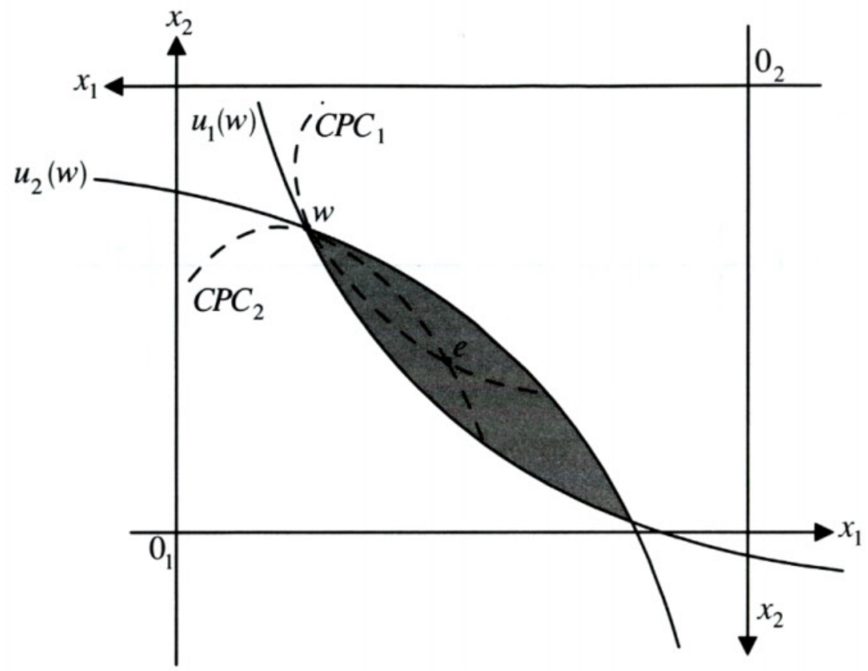


Figura 8.7.

0 y ∞, y considere la posibilidad de que haya más de un punto de corte entre las dos CPC en la caja de Edgeworth.

El hecho de que, si se trata de una situación perfectamente competitiva, el equilibrio general ocure sobre la curva de contratos es muy importante. De hecho, esta parece ser la idea que tenía en la mente Adam Smith cuando habló de la "mano invisible", mediante la cual los individuos que persiguen su propio bienestar acaban favoreciendo el objetivo social de eficiencia. Hoy en día, este resultado se concoce como *el primer teorema fundamental del bienestar*, y se suele enunciar como sigue; si no hay imperfecciones en el mercado, entonces un equilibrio general competitivo es eficiente en sentido de Pareto. Existe un segundo teorema fundamental del bienestar, que enuncia que, si no hay imperfecciones en la economía, cualquier punto eficiente en sentido de Pareto sostiene un equilibrio general para alguna dotación incial.

EJERCICIO 8.6: *Formule un argumento gráfico en la caja de Edgeworth que dé como resultado el segundo teorema fundamental del bienestar. ¿Es única la dotación inicial para la que un punto eficiente en sentido de Pareto cualquiera es equilibrio general?*

La inclusión de la frase "si no hay imperfecciones" en los teoremas fundamentales del bienestar es también importante. Quizá la más importante imperfección que puede haber es el poder de mercado, que en el modelo que estamos tratando (intercambio en función de un precio relativo), se puede entender como el poder de fijación del precio relativo, es decir, que uno de los dos individuos también haga el papel del subastador. Vamos a considerar brevemente esta posibilidad, que llamaremos el caso del monopolio. Específicamente, supondremos que el individuo 1 es el monopolista, y así fija el precio relativo, mientras que el individuo 2 simplemente responde ante este precio relativo con su punto de demanda óptima.

El equilibrio en este caso corresponde con el precio relativo que, por un lado es aceptado voluntariamente por el idividuo 2, y que por otro proporciona la máxima utilidad para el individuo 1. La solución es sencilla; puesto que el precio relativo que se busca tiene que implicar un intercambio voluntario por parte del individuo 2, se trata de encontrar el punto sobre CPC_2 que más le interesa al individuo 1, siempre sujeto a que tal punto se encuentra dentro del conjunto $D(w)$. Podemos fácilmente encontrar el equilibrio en la economía con monopolista haciendo uso de la figura 8.8.

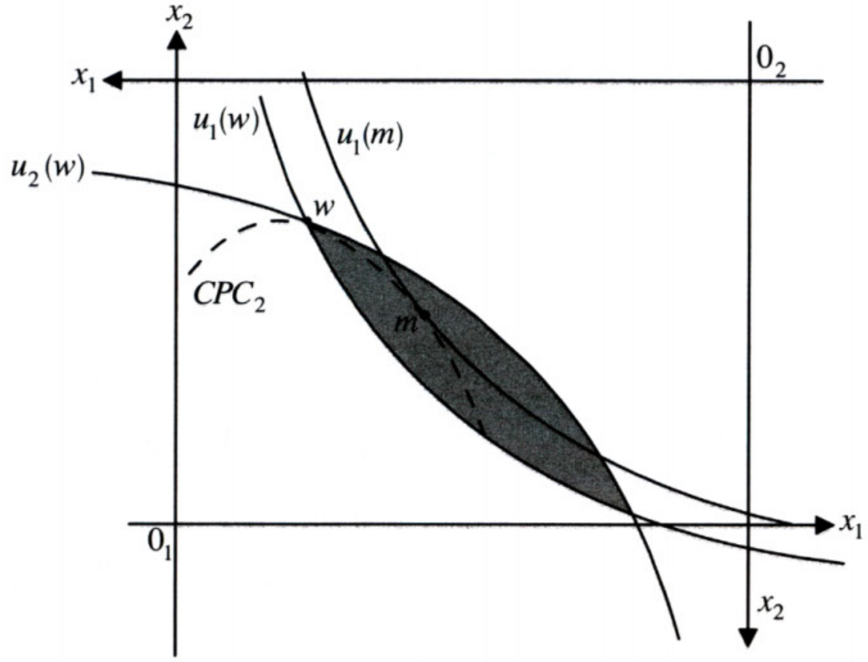


Figura 8.8.

En la figura 8.8, el punto sobre CPC_2 que maximice la utilidad del individuo 1 es el punto m, el punto en donde la pendiente de ambas curvas son iguales. Primero, notemos que tal punto existe, puesto que CPC_2 tiene mayor pendiente que $u_1(w)$ en el punto w (recuerde que ambas tienen pendiente negativa en w y que la pendiente de CPC_2 es igual a la pendiente de $u_2(w)$ en w), pero como existe otro punto de corte entre CPC_2 y $u_2(w)$, tiene que existir puntos sobre CPC_2 en donde su pendiente es menor que la de $u_2(w)$. Puesto que ambas son funciones continuas, suponiendo que CPC_2 es derivable en todos sus puntos, tiene que existir por lo menos un punto en donde la pendiente de CPC_2 es igual a la pendiente de $u_2(x)$ en el mismo punto. Por otro lado, el punto m tiene que cumplir $m \in D(w)$, es decir, m domina a w en sentido de Pareto. Esto se debe a que la curva CPC_2 siempre se encuentra por debajo de $u_2(w)$ en la caja, y que en el punto donde corta a $u_1(w)$, lo tiene que hacer con pendiente menor que la pendiente de $u_1(w)$.

Sin embargo, el hecho más notable del punto m es que no es eficiente en sentido de Pareto. Para apreciar la razón de este hecho, simplemente tenemos que recordar que, en cualquier punto sobre CPC_2 la curva de indiferencia del individuo 2 es tangente a la recta que une el punto y la dotación w. En particular, con la excepción del mismo punto w, la curva CPC_2 nunca es tangente a la curva de indiferencia del individuo 2. Pero en el punto m la CPC_2 sí es tangente a la curva de indiferencia del individuo 1, y por tanto las dos curvas de indiferencia no pueden ser tangentes entre sí. La ineficiencia en sentido de Pareto del punto m se debe a la existencia de poder de mercado por parte del individuo 1, una clara imperfección en el mercado. Siendo ineficiente en sentido de Pareto, el punto m deja un conjunto no vacío de puntos, $D(m)$, tal y como se indica en la figura 8.9.

Ahora bien, entre todas los posibles valores para el precio relativo, el individuo 1 po-

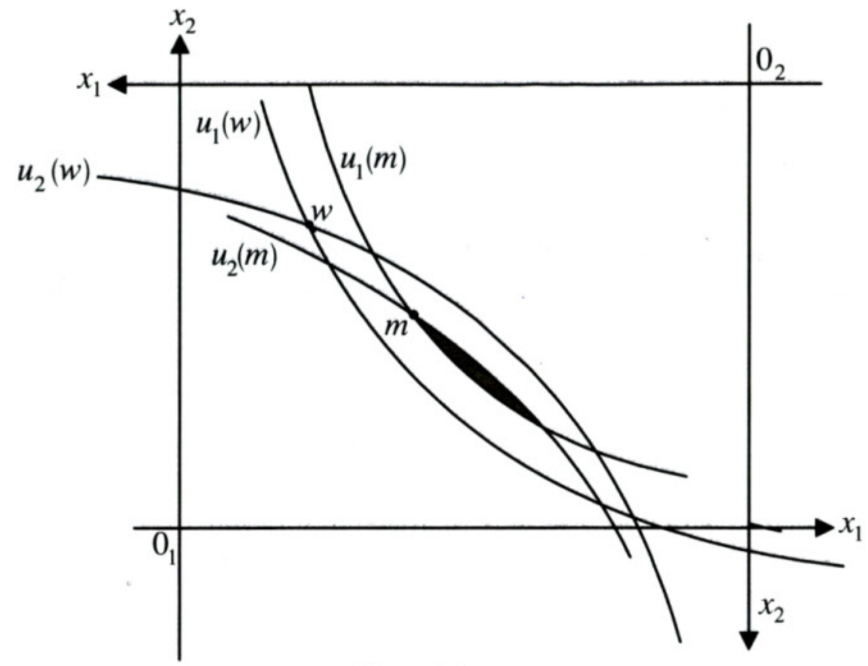


Figura 8.9.

dría haber utilizado justo aquel que corresponde con el equilibrio general competitivo. Sin embargo, es obvio que no lo hace, puesto que aquel precio relativo corresponde con un punto sobre la curva de contratos, mientras que el punto m no comparte este hecho. Podemos directamente concluir que el monopolista debe recibir mayor utilidad en la solución de monopolio que en la solución competitiva. Pero si el punto e está sobre la curva de contratos en algún lugar por debajo de la curva de indiferencia $u_1(m)$, necesariamente es cierto que el punto e está también por debajo de la curva de indiferencia $u_2(m)$, es decir, el individuo 2 recibe menor utilidad en la solución de monopolista que en la solución competitiva.

Finalmente, vale la pena considerar la razón por la cual el individuo 1 no sugiere un precio relativo tal que se acabe sobre un punto eficiente en sentido de Pareto dentro de la zona $D(m)$ en la figura 8.9. Pues, despues de todo, tal punto le ofrece mayor utilidad que el punto m. La razón es sencillamente que ninguno de los puntos eficientes en sentido de Pareto dentro de $D(m)$ está sobre la curva CPC_2, y por tanto no son factibles para el monopolista (de hecho, el único punto que es eficiente en sentido de Pareto y que está sobre la curva CPC_2 que pase por w es el equilibrio general competitivo). No obstante, una vez alcanzado el punto m (y los intercambios hechos), claramente el proceso puede volver a empezar, con un nuevo precio relativo, y moverse a un nuevo punto, digamos m' dentro del conjunto $D(m)$. Pero este proceso puede continuar, y en cada paso el conjunto de puntos que domina en sentido de Pareto a la solución anterior es cada vez más pequeño, y acabará por desaparecer. En este momento, se habrá llegado a un punto eficiente en sentido de Pareto, que se encuentra dentro del conjunto $D(m)$ inicial. Este proceso se conoce como *discriminación de precios*, y claramente conduce a un punto final, $\widetilde{m}$, que satisface $\widetilde{m} \in D(m)$, es decir, ambos individuos ganan utilidad con este proceso.

EJERCICIO 8.7: *Sea* $u_i(x) = (x_1^i)^\alpha (x_2^i)^{1-\alpha}$ *para* $i = 1, 2$ *y para* $0 < \alpha < 1$. *Las dotaciones iniciales son* $w_1^1 = 1$, $w_2^1 = 2$, $w_1^2 = 3$, *y* $w_2^2 = 2$. *Encuentre el precio relativo y la asignación del equilibrio general competitivo.*

8.2 Una economía con sector productivo

En la sección anterior, hemos analizado una economía de intercambio puro, en la que los bienes que acaban consumiendo los dos individuos venían dados al principio. Ahora vamos a pensar en una economía en la que existe un sector productivo que produce los bienes a partir de unos factores de producción. A cambio de esta nueva complicación, solamente vamos a solucionar el equilibrio competitivo.

Sigamos con el supuesto de que existen dos individuos consumidores con funciones de utilidad crecientes y cuasicóncavas, y dos bienes de consumo, x_1 y x_2. Aunque no es estrictamente necesario, ahora vamos a suponer que existe el dinero en la economía, y que entonces cada bien tiene un precio absoluto. Vamos a utilizar p_i para indicar el precio monetario del bien i, y $P = \frac{p_1}{p_2}$ para indicar el precio relativo. Ahora, suponemos que hay dos empresas, la empresa j se dedica a la producción del bien j, para $j = 1, 2$. Las empresas tienen funciones de producción $f_j(K, L)$, en donde K es el factor capital y L es el factor trabajo. Las funciones de producción indican la máxima cantidad de producto que se puede obtener a partir de los insumos, es decir

$$x_j \leq f_j(K, L) \tag{8.5}$$

Se dice que la producción es *eficiente* si $x_j = f_j(K, L)$. Se supone que las funciones de producción, $f_j(\cdot)$, son estrictamente crecientes y cóncavas[1], para que las curvas isocuantas sean siempre convexas.

Inicialmente, cada empresa está dotada con cantidades no negativas de ambos factores de producción, que denotamos por $\widetilde{K}_j$ y $\widetilde{L}_j$ respectivamente, y las cantidades totales de cada factor en la economía son $\widetilde{K} = \widetilde{K}_1 + \widetilde{K}_2$ y $\widetilde{L} = \widetilde{L}_1 + \widetilde{L}_2$. Las factores de producción se pueden intercambiar en un mercado perfectamente competitivo en precios monetarios r para capital y w para mano de obra[2]. El objetivo de cada empresa es maximizar su beneficio monetario,

$$\pi_j = p_j x_j - rK_j - wL_j \quad \text{para} \quad j = 1, 2$$

en donde K_j y L_j son las demandas de capital y mano de obra de la empresa j, dados los precios de los factores, los precios de los bienes, y su dotación inicial de factores. Claramente, a partir de la definición de la función de producción (8.5), tenemos

$$\pi_j \leq p_j f_j(K_j, L_j) - rK_j - wL_j \quad \text{para} \quad j = 1, 2$$

así que puesto que se busca maximizar π_j, cualquiera que sean las demandas de los factores siempre será cierto que la empresa funcionará con producción eficiente, y así podemos escribir las funciones de beneficio como

$$\pi_j = p_j f_j(K_j, L_j) - rK_j - wL_j \quad \text{para} \quad j = 1, 2 \tag{8.6}$$

Ahora, dadas las dotaciones de los factores de producción, se puede formar una nueva caja de Edgeworth en el espacio de los factores de producción, en donde se representan

[1] En realidad, cuasicóncavas sería suficiente.

[2] Esta elección de notación para los precios de los factores productivos es la más usual. No obstante, se avisa al lector de que la letra w, que ahora representa el salario para mano de obra, en la sección anterior representaba el punto de dotación inicial en la caja de Edgeworth. Puesto que ahora no hay dotaciones de bienes, la notación utilizada no debe causar confusiones.

las curvas isoquantas de las dos empresas. Es tentador pensar que el equilibrio en la caja de Edgeworth de producción se alcanza siguiendo un argumento equivalente al que conduce al equilibrio en el plano de los consumos, pero no es cierto. Si se postulan curvas precio-consumo en el plano de los factores, utilizando los puntos en donde las isoquantas son tangentes a las rectas que pasan por el punto de dotación y con pendiente igual a la razón de los precios de los factores, entonces se estaría planteando que las dos empresas maximizan su producción dentro de una condición presupuestaria. Esto no es cierto, pues las empresas siempre maximizan su beneficio y no necesariamente su producción.

En cualquier equilibrio en donde las empresas maximizan su beneficio monetario, a partir de las ecuaciones (8.6), sabemos que las dos condiciones de primer orden de cualquiera de las empresas cuando eligen sus demandas de los factores son

$$p_j \frac{\partial f_j(K_j, L_j)}{\partial K_j} = r \ \text{ y } \ p_j \frac{\partial f_j(K_j, L_j)}{\partial L_j} = w \ \text{ para } \ j = 1, 2 \tag{8.7}$$

Si escribimos los productos marginales como

$$\frac{\partial f_j(K_j, L_j)}{\partial K_j} \equiv PMK_j \ \text{ y } \ \frac{\partial f_j(K_j, L_j)}{\partial L_j} \equiv PML_j \quad j = 1, 2$$

y entonces dividimos la segunda de las condiciones en (8.7) por la primera, se obtiene el resultado de que

$$\frac{PML_j}{PMK_j} = \frac{w}{r} \quad \text{para} \quad j = 1, 2 \tag{8.8}$$

El lado de la izquierda de (8.8) es el valor absoluto de la relación marginal de sustitución técnica de la empresa ($RMST$), es decir, es el valor absoluto de la pendiente de una curva isocuanta. Entonces (8.8) indica que, en cualquier equilibrio general para esta economía, sigue siendo cierto que las empresas tienen que actuar con una asignación de recursos que se encuentra sobre la curva de contratos de su caja de Edgeworth. Dado esto, vamos a pensar en todos los puntos que se encuentran sobre la curva de contratos de la caja de Edgeworth de los factores productivos.

En primer lugar, consideraremos lo que se llama el *conjunto de posibilidades de producción*, y que denotaremos por X, que son todos los puntos dentro del espacio de los productos totales x_1 y x_2, que pueden ser producidos con las funciones de producción $f_1(\cdot)$ y $f_2(\cdot)$ y las dotaciones $\widetilde{L}$ y $\widetilde{K}$ de factores de producción. Por definición, el conjunto de posibilidades de producción es

$$\begin{aligned} X \equiv \{x : x_j \leq f_j(K_j, L_j) \ \ j = 1, 2 \\ K_j \geq 0 \ \ j = 1, 2 \\ L_j \geq 0 \ \ j = 1, 2 \\ K_1 + K_2 \leq \widetilde{K} \\ L_1 + L_2 \leq \widetilde{L}\} \end{aligned}$$

Resulta que, siempre y cuando las funciones de producción sean cóncavas (como hemos ya supuesto) entonces el conjunto de posibilidades de producción es estrictamente convexo. Vamos a demostrar este importante resultado. Sean $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ y $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$ ambos miembros de X, es decir, $x^1 \in X$ y $x^2 \in X$. Lo que hace falta mostrar es que cualquier combinación convexa de estos dos puntos, $x^3 \equiv \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ con $0 \leq \lambda \leq 1$, también pertenence a X. Definimos

$$\left.\begin{array}{r} L_j^3 \equiv \lambda L_j^1 + (1-\lambda)L_j^2 \\ K_j^3 \equiv \lambda K_j^1 + (1-\lambda)K_j^2 \end{array}\right\} \; j = 1,2$$

Ahora, por definición de las funciones de producción

$$\begin{array}{rcl} x_j^3 & \equiv & \lambda x_j^1 + (1-\lambda)x_j^2 \\ & \leq & \lambda f_j(K_j^1, L_j^1) + (1-\lambda) f_j(K_j^2, L_j^2) \;\; j = 1,2 \end{array}$$

Pero, dentro del supuesto de que las funciones de producción son cóncavas, es decir

$$\lambda f_j(K_j^1, L_j^1) + (1-\lambda) f_j(K_j^2, L_j^2) \leq f_j(K_j^3, L_j^3) \;\; j = 1,2$$

tenemos el resultado de que

$$x_j^3 \leq f_j(K_j^3, L_j^3) \;\; \text{para} \;\; j = 1,2 \tag{8.9}$$

es decir, con los valores de los factores (K_j^3, L_j^3), resulta que las cantidades de los productos x_j^3 son factibles.

Finalmente, notamos que puesto que x^1 y x^2 pertenecen a X, tiene que ser cierto que

$$K_j^i \geq 0, \; L_j^i \geq 0 \;\; \text{para} \;\; i, j = 1,2$$

y también que

$$K_1^i + K_2^i \leq \widetilde{K}, \;\; L_1^i + L_2^i \leq \widetilde{L} \;\; \text{para} \;\; i = 1,2$$

Pero entonces resulta que

$$\left.\begin{array}{r} K_j^3 = \lambda K_j^1 + (1-\lambda)K_j^2 \geq \lambda 0 + (1-\lambda)0 = 0 \\ L_j^3 = \lambda L_j^1 + (1-\lambda)L_j^2 \geq \lambda 0 + (1-\lambda)0 = 0 \end{array}\right\} \; j = 1,2 \tag{8.10}$$

y también que

$$\begin{array}{rcl} K_1^3 + K_2^3 & = & (\lambda K_1^1 + (1-\lambda)K_1^2) + (\lambda K_2^1 + (1-\lambda)K_2^2) \\ & = & \lambda(K_1^1 + K_2^1) + (1-\lambda)(K_1^2 + K_2^2) \\ & \leq & \lambda \widetilde{K} + (1-\lambda)\widetilde{K} = \widetilde{K} \end{array} \tag{8.11}$$

y

$$\begin{array}{rcl} L_1^3 + L_2^3 & = & (\lambda L_1^1 + (1-\lambda)L_1^2) + (\lambda L_2^1 + (1-\lambda)L_2^2) \\ & = & \lambda(L_1^1 + L_2^1) + (1-\lambda)(L_1^2 + L_2^2) \\ & \leq & \lambda \widetilde{L} + (1-\lambda)\widetilde{L} = \widetilde{L} \end{array} \tag{8.12}$$

Al final, a partir de (8.9), (8.10), (8.11) y (8.12), tenemos el hecho de que $x^3 \equiv \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ satisface todos los requisitos para pertenecer al conjunto de posibilidades de producción, así que $x^3 \in X$, y por tanto, X es un conjunto convexo. Un conjunto de posibilidades de producción, correspondiente a funciones de producción estrictamente cóncavas, se representa en la figura 8.10.

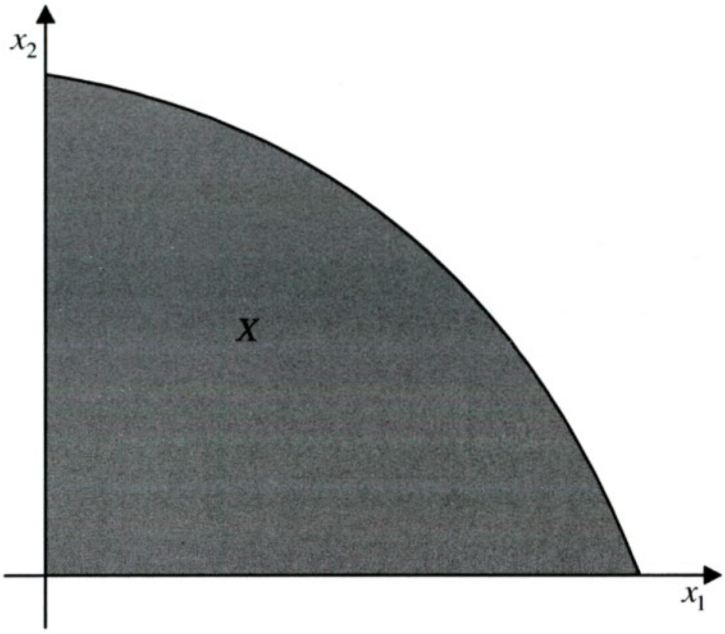


Figura 8.10.

La frontera superior del conjunto de posibilidades de producción, llamado simplemente la *frontera de posibilidades de producción*, es de especial interés. Obviamente un punto que se sitúe sobre esta frontera satisface el hecho de que es imposible incrementar la producción de uno de los productos (mediante una reasignación de los recursos de producción) sin disminuir la producción del otro bien. Esto tiene dos implicaciones claras, por un lado, la correspondiente asignación tiene que asignar todos los factores entre las empresas, es decir

$$L_1 + L_2 = \widetilde{L} \quad K_1 + K_2 = \widetilde{K}$$

y por otro, tiene que satisfacer el hecho de que la asignación de recursos se encuentra sobre la curva de contratos en la caja de Edgeworth de los recursos de producción. Como hemos visto antes que en cualquier equilibrio general en donde las empresas maximican su beneficio monetario, se situan sobre esta curva de contratos, es también cierto que se situan sobre la frontera del conjunto de posibilidades de producción. Para indicar que cualquier punto sobre la fontera de posibilidades de producción necesariamente es un punto caracterizado por la igualdad entre la relación marginal de sustitución de cada empresa y la relación de los precios de los factores (tal y como se expresa en la ecuación (8.8)), indicaremos estos puntos por x^*. Ahora pasamos a considerar exactamente cual de todos estos puntos será el eligido en un equilibrio general.

En primer lugar, puesto que X es un conjunto convexo, su frontera superior es una función cóncava. La pendiente de esta función, conocida como la *tasa marginal de transformación*, or simplemente TMT, viene definida a partir de la ecuación

$$TMT(x^*) \equiv \left.\frac{dx_2^*}{dx_1^*}\right|_{L_1+L_2=\widetilde{L},\ K_1+K_2=\widetilde{K}} < 0$$

Ahora, una variación en x_j^* requiere una variación en sus dos factores de producción, K_j^* y L_j^*, es decir

$$dx_j^* = \frac{\partial f_j(K^*, L^*)}{\partial K} dK_j^* + \frac{\partial f_j(K^*, L^*)}{\partial L} dL_j^* \;\; j = 1, 2$$

es decir

$$\begin{aligned} dx_j^* &= PMK_j dK_j^* + PML_j dL_j^* \\ &= PMK_j \left(dK_j^* + \left(\frac{PML_j}{PMK_j} \right) dL_j^* \right) \quad j = 1,2 \end{aligned}$$

Pero como $\frac{PML_j}{PMK_j} = \frac{w}{r}$, tenemos

$$dx_j^* = PMK_j \left(dK_j^* + \left(\frac{w}{r} \right) dL_j^* \right) \quad j = 1,2$$

Ahora, dividiendo la segunda de estas ecuaciones por la primera, se obtiene

$$\frac{dx_2^*}{dx_1^*} = \frac{PMK_2(dK_2^* + \left(\frac{w}{r}\right) dL_2^*)}{PMK_1(dK_1^* + \left(\frac{w}{r}\right) dL_1^*)}$$

Finalmente, puesto que $L_1^* + L_2^* = \widetilde{L}$ y $K_1^* + K_2^* = \widetilde{K}$, resulta que $dK_2^* = -dK_1^*$ y $dL_2^* = -dL_1^*$, es decir

$$\frac{dx_2^*}{dx_1^*} = -\frac{PMK_2}{PMK_1} \tag{8.13a}$$

Además, por la ecuación (8.8), resulta que

$$\frac{PML_1}{PMK_1} = \frac{PML_2}{PMK_2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{PMK_2}{PMK_1} = \frac{PML_2}{PML_1}$$

y entonces podemos afirmar que la pendiente de la frontera de posibilidades de producción en cualquier punto es igual al opuesto de la razón entre las productos marginales de las empresas para cualquiera de los dos factores.

EJERCICIO 8.8: *Sabemos que, en cualquier equilibrio general las empresas funcionan en un punto sobre la curva de contratos y, por tanto se puede caracterizar mediante un proceso de maximización de la producción de una de las empresas condicionada a que la producción de la otra empresa sea mayor o igual a una cantidad dada. Formule este problema mediante el método de Lagrange, y considere el valor del multiplicador de Lagrange. Compare este valor con la tasa marginal de transformación en la ecuación (8.13a) y saque las conclusiones pertenentes.*

Ahora, la curva que describe la frontera de posibilidades de producción tiene pendiente negativa (puesto que las dos funciones de producción son estrictamente crecientes), y es la frontera superior de un conjunto estrictamente convexo (cuando las funciones de producción son estrictamente cóncavas). Entonces, es una función cóncava, y por tanto su pendiente es distinta en todos los puntos. Dado esto, podemos ya fácilmente encontrar el punto de equilibrio general.

Se recuerda que, en el equilibrio general, las dos empresas maximizan su beneficio monetario, y por tanto satisfacen las condiciones de primer orden

$$p_j PMK_j = r \ \text{ y } \ p_j PML_j = w \quad \text{para} \quad j = 1,2$$

Pero entonces, resulta que

$$PMK_j = \frac{r}{p_j} \ \text{ y } \ PML_j = \frac{w}{p_j} \quad \text{para} \quad j = 1,2$$

Por tanto, a partir de la ecuación (8.13a), resulta que, en el equilibrio general para el problema

$$\frac{dx_2^*}{dx_1^*} = -\frac{PMK_2}{PMK_1} = -\frac{\left(\frac{r}{p_2}\right)}{\left(\frac{r}{p_1}\right)} = -\frac{p_1}{p_2}$$

Así, resulta que en el equilibrio general, la tasa marginal de transformación es igual a la razón de precios de los bienes finales, que a su vez, como ya hemos visto, tiene que ser igual a la relación marginal de sustitución de los dos individuos, $TMT = RMS_i$ para $i = 1, 2$. Este requisito implica que no es posible aumentar la producción de uno de los bienes, y por tanto disminuir la producción del otro, de modo que se beneficien ambos consumidores. Para ver esto, suponga que la RMS de los consumidores fuera igual a $-a$, y que la TMT fuera igual a $-b$, con $a > b$. Entonces, los dos consumidores estarían dispuestos a reducir su consumo del bien 2 en a unidades si pudieran incrementar su consumo del bien 1 en 1 unidad. Pero en esta economía es necesario reducir la producción del bien 2 en b unidades para incrementar la producción del bien 1 en 1 unidad. Puesto que $a > b$, lo que los consumidores están dispuestos a renunciar del bien 2 es mayor que lo que la economía les exige renunciar si se reasignan los recursos productivos para incrementar la producción del bien 1 en 1 unidad. Correspondientemente, se puede incrementar la utilidad de por lo menos un consumidor (dándole una nueva unidad del bien 1 y restándole b unidades del bien 2) sin alterar el consumo (y por tanto la utilidad) del otro consumidor.

En resumen, en un equilibrio general, tenemos tres tipos de eficiencia que se deben respetar:

1. Eficiencia en consumo (o eficiencia en la distribución de los bienes), indicado por $RMS_1 = RMS_2$, es decir, se acaba en un punto sobre la curva de contratos en el espacio de los bienes finales. Esto significa que no es posible reasignar los bienes entre los consumidores de modo que ambos se beneficien.

2. Eficiencia en producción, indicado por $RMST_1 = RMST_2$. Esto implica que se funciona en un punto sobre la curva de contratos en el espacio de los factores, o lo que es lo mismo, sobre la frontera de posibilidades de producción. Esto significa que no es posible reasignar los factores entre las empresas de modo que se incremente la producción de uno de los bienes sin disminuir la producción del otro, hecho que incrementaría sin lugar a dudas las utilidades de los consumidores.

3. Eficiencia en la mezcla de productos, indicado por $TMT = RMS_i$ para $i = 1, 2$. Esto significa que no es posible reasignar los factores productivos de modo que se incremente la utilidad de por lo menos un consumidor sin disminuir la del otro.

Se muestra un equilibrio general en la figura 8.11, en donde se ha indicado el punto de equilibrio general sobre la frontera de posibilidades de producción por el punto x^{**}, y en donde se indican las curvas de indiferencia de los dos consumidores, y el punto de asignación de los bienes entre ellos, el punto e.

8.3 Equilibrio con incertidumbre

En esta sección, vamos a contemplar cómo afecta la incertidumbre al equilibrio general. A cambio de la introducción de la nueva complicación que supone la incertidumbre, vamos

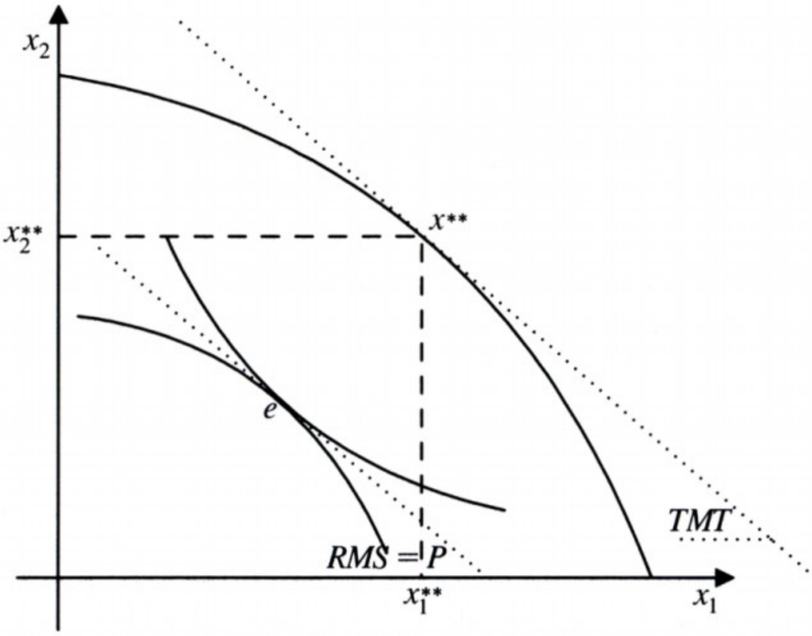


Figura 8.11.

a volver al caso de una economía sin sector productivo. El marco de análisis que vamos a aplicar aquí es el de la incertidumbre en el modelo de consumo contingente. Suponemos que la economía consta de dos individuos, estrictamente adversos al riesgo, con una dotación inicial del único bien (que por comodidad consideraremos que es dinero) de $w^i = (w_1^i, w_2^i)$ para $i = 1, 2$. Aquí, w_j^i es la riqueza del individuo i en el estado de la naturaleza (o contingencia) j, y si $w_1^i \neq w_2^i$ entonces el individuo i tiene una dotación inicial arriesgada. En principio supondremos que el estado 2 es el malo para ambos individuos, es decir $w_2^i < w_1^i$ para ambos $i = 1, 2$. Este supuesto implica que la riqueza total en el estado 2, $W_2 = w_2^1 + w_2^2$, es estrictamente menor que la riqueza total en el estado 1, $W_1 = w_1^1 + w_1^2$. Este hecho, $W_2 < W_1$, se conoce como la existencia de *riesgo agregado.* Cuando existe riesgo agregado, la caja de Edgeworth es más larga que alta (véase la figura 8.12).

En la figura 8.12, se indican las dos rectas C_i en donde $i = 1, 2$, que son las rectas de certidumbre para los dos individuos. Cualquier punto sobre la recta C_i ofrece absoluta certidumbre al individuo i en el sentido de que indica un punto en donde $x_1^i = x_2^i$. El supuesto de que el estado 2 es malo para ambos individuos implica que el punto de dotación inicial, w, se halla estrictamente entre las dos rectas de certidumbre. Por lo demás, la caja de Edgeworth en la figura 8.12 no es distinta de cualquier otra.

8.3.1 La curva de contratos

De igual modo que en el modelo bajo certidumbre, la curva de contratos en la caja de riquezas contingentes es el conjunto de todos los puntos eficientes en sentido de Pareto, es decir, los puntos en donde las curvas de indiferencia de los dos agentes tienen la misma pendiente. La aversión al riesgo de los dos individuos tiene una implicación importante para la posición de la curva de contratos en el modelo con incertidumbre. *En todos los puntos interiores, la curva de contratos tiene que hallarse entre las dos rectas de certidumbre, sin nunca tocar ninguna de estas.* La razón de esto es sencilla de apreciar. Sabemos (véase el capítulo 4) que la pendiente de cada curva de indiferencia al pasar por su propia línea de certidumbre es precisamente $-\frac{(1-p)}{p}$, en donde p es la probabilidad de que ocurra

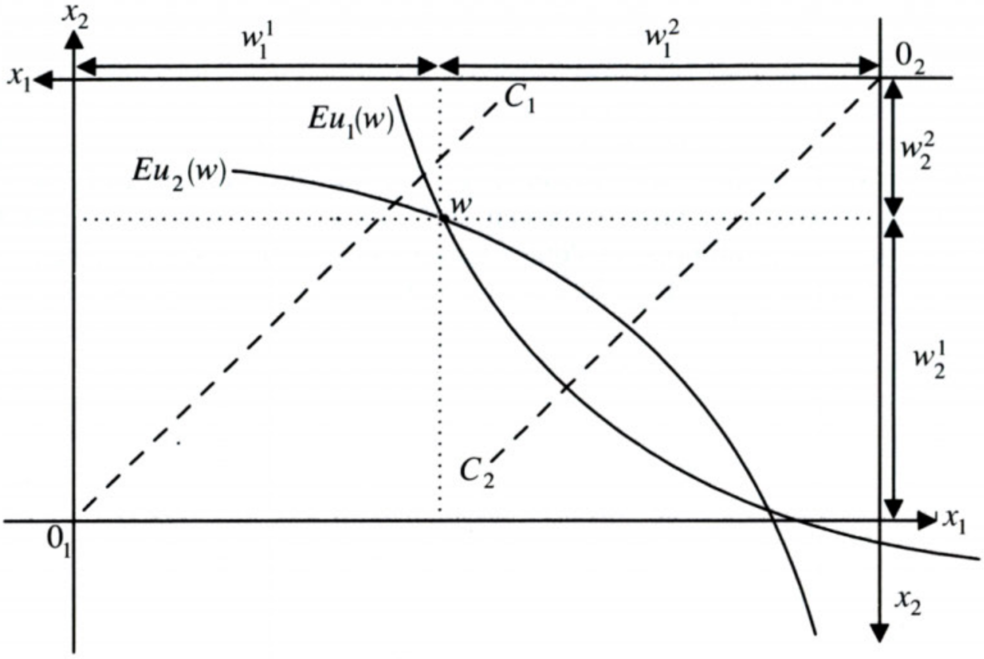


Figura 8.12.

el estado 2. La estricta convexidad de las curvas $Eu_1(x)$ y la estricta concavidad (desde la perspectiva del origen 0_1) de las curvas $Eu_2(x)$ implica entonces que no es posible que una curva de indiferencia del individuo 1 tenga pendiente $-\frac{(1-p)}{p}$ en donde corta la recta de certidumbre del individuo 2 (y por tanto, las dos curvas de indiferencia no pueden ser tangentes entre sí en un punto sobre la recta de certidumbre del individuo 2. Un argumento análogo implica que tampoco pueden ser tangentes las dos curvas de indiferencia en un punto sobre la recta de certidumbre del individuo 1. Finalmente, considérese una curva de indiferencia en particular, $Eu_2(x) = U$. Esta curva tiene que cortar ambas rectas de certidumbre. Pero esta curva de indiferencia tiene menor pendiente que la curva de indiferencia del individuo 1 en donde $Eu_2(x) = U$ corta la recta de certidumbre del individuo 2 (se recuerda que las dos pendientes son negativas), y mayor pendiente en el punto en donde $Eu_2(x) = U$ corta la recta de certidumbre del individuo 1. Por el teorema de valor medio, la tangencia entre $Eu_2(x) = U$ y una curva $Eu_1(x)$ tiene que ocurrir en un punto entre las dos rectas de certidumbre.

La lógica que subyace el hecho de que la curva de contratos no puede tocar las rectas de certidumbre en puntos interiores es también fácil de apreciar. Puesto que ambos individuos son estrictamente adversos al riesgo, no sería nunca eficiente un contrato en el que uno de los individuos aceptase todo el riesgo.

Hay dos excepciones a la regla de que la curva de contratos no puede tocar las rectas de certidumbre en puntos interiores, aunque estas excepciones tienen que implicar distintos supuestos que el caso estudiado arriba. En primer lugar, si uno de los dos individuos es neutral ante el riesgo y el otro adverso, entonces la curva de contratos coincide enteramente con la recta de certidumbre del agente adverso al riesgo. El individuo neutral ante el riesgo tiene curvas de indiferencia que son lineales con pendiente $-\frac{(1-p)}{p}$ en todos sus puntos. Por tanto, la tangencia entre las curvas de indiferencia de los dos individuos tiene que ocurrir en un punto en donde la curva de indiferencia el individuo adverso al riesgo también tiene esta pendiente, que resulta ser el punto en donde su curva de indiferencia corta su recta de certidumbre. La intuición por este resultado es obvio. Si existe un individuo neutral ante el riesgo y otro adverso, es eficiente que el que es neutral acabe con todo el riesgo, puesto que le es menos costoso aceptar riesgo (de hecho, el riesgo le implica un coste nulo).

En segundo lugar, aunque los dos individuos sean estrictamente adversos al riesgo, la curva de contratos tiene que tocar las rectas de certidumbre si no hay riesgo agregado, es decir si $W_1 = W_2$. En este caso, la caja de Edgeworth sería un cuadrado perfecto, y entonces las dos rectas de certidumbre tienen que coincidir exactamente, formando la diagonal de la caja. Pero entonces, cualquier punto sobre la recta de certidumbre del individuo 1, en donde su curva de indiferencia tiene pendiente $-\frac{(1-p)}{p}$, es también un punto sobre la recta de certidumbre del individuo 2, y entonces la pendiente de su curva de indiferencia también es $-\frac{(1-p)}{p}$. Por tanto, el punto está sobre la curva de contratos. Claramente la curva de contratos coincide exactamente con las rectas de certidumbre de ambos individuos. La lógica detrás de este suceso es también fácil de apreciar. En ausencia de riesgo agregado, necesariamente existen puntos que ofrecen certidumbre a ambos individuos simultáneamente. Si ambos individuos son adversos al riesgo, los puntos que eliminan el riesgo a ambos individuos serán siempre más eficientes que los puntos en donde por lo menos un individuo sufre algún riesgo.

Quitando estos dos casos especiales, la curva de contratos nunca puede tocar las rectas de certidumbre en un punto interior. Este caso más general, coincidiendo con dos individuos estrictamente adversos al riesgo y con la existencia de riesgo agregado, será el caso que nos ocupe de ahora en adelante. Pero hay que resaltar un hecho curioso del resultado - solamente podemos garantizar su validez para puntos interiores, es decir, puntos en donde ambos individuos reciben cantidades positivas de ambos bienes. Esto deja sin considerar dos puntos en concreto, los dos origenes de la caja, 0_1 y 0_2, que son los únicos dos puntos no-interiores sobre las rectas de certidumbre. La pregunta lógica entonces es, ¿puede la curva de contratos pasar por los origines de la caja? De hecho, es tentador pensar que la curva de contratos debe siempre pasar por estos dos puntos. Vamos a considerar este aspecto de la curva de contratos.

Sabemos que la curva de contratos está formada por todos los puntos en donde se igualan las relaciones marginales de sustitución de ambos individuos. Puesto que la relación marginal de sustitución del individuo i es

$$RMS_i = -\frac{(1-p)u_i'(x_1^i)}{pu_i'(x_2^i)} \quad \text{para} \quad i = 1, 2$$

resulta que la curva de contratos es el conjunto de todos los puntos, tales que $x_j^1 + x_j^2 = W_j$ para $j = 1, 2$, que satisfacen

$$-\frac{(1-p)u_1'(x_1^1)}{pu_1'(x_2^1)} = -\frac{(1-p)u_2'(x_1^2)}{pu_2'(x_2^2)}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{u_1'(x_1^1)}{u_1'(x_2^1)} = \frac{u_2'(x_1^2)}{u_2'(x_2^2)} \tag{8.14}$$

Curiosamente, entonces, la posición de la curva de contratos es independiente de la probabilidad con que se presenten los dos estados de la naturaleza.

Utilizando (8.14) podemos investigar con facilidad los dos origenes de la caja. En primer lugar, se considera el punto 0_1, que coincide con $x_1^1 = x_2^1 = 0$ y $x_j^2 = W_j$ para

$j = 1, 2$. Ahora, puesto que $W_1 > W_2$, claramente es cierto que

$$\left.\frac{u_2'(x_1^2)}{u_2'(x_2^2)}\right|_{x_j^2 = W_j} = \frac{u_2'(W_1)}{u_2'(W_2)} < 1$$

Por otro lado, si $0 < u_1'(0) < \infty$, entonces

$$\left.\frac{u_1'(x_1^1)}{u_1'(x_2^1)}\right|_{x_1^1 = x_2^1 = 0} = 1$$

Por tanto, si $0 < u_1'(0) < \infty$, resulta que es imposible que el origen 0_1 esté sobre la curva de contratos. Con un argumento equivalente, resulta que si $0 < u_2'(0) < \infty$, entonces el origen 0_2 tampoco puede estar sobre la curva de contratos. Dado esto, vamos a pensar un poco más sobre la condición $0 < u_i'(0) < \infty$.

En primer lugar, por el supuesto de que la función de utilidad es estrictamente cóncava sabemos que la utilidad marginal es siempre decreciente pero positivo. Entonces queda directamente excluido la posibilidad de que $u_i'(0) = 0$, puesto que si fuera así, entonces con una función de utilidad cóncava, la utilidad marginal tendría que ser negativa para cualquier nivel de riqueza positiva. Entonces, el único caso que nos concierne como la posible inclusión de los origenes (uno o ambos) en la curva de contratos es la posibilidad de que $u_i'(0) = \infty$.

Si $u_i'(0) = \infty$ la curva de contratos pasa precisamente por el origen 0_i. Efectivamente, suponga que la función de utilidad del individuo 1 se caracteriza por $u_1'(0) = \infty$. Considere el valor de x_1^1 que corresponde con eficiencia de Pareto en una asignación en la que $x_2^1 = 0$ y $x_2^2 = W_2$, es decir, el punto sobre el borde inferior de la caja de Edgeworth que corresponde con la eficiencia de Pareto. Sea el valor de x_1^1 correspondiente $x_1^1 = a$. Sea lo que fuere a, necesariamente es cierto que $a \leq W_1 - W_2$, puesto sabemos que el punto en cuestión nunca puede encontrarse por debajo de la recta de certidumbre del individuo 2 (la curva de contratos siempre se encuentra entre las rectas de certidumbre de ambos individuos), y esta recta corta el borde inferior de la caja justo en el punto indicado por $x_1^1 = W_1 - W_2$. Ahora, en el punto en cuestión tenemos

$$\left.\frac{u_1'(x_1^1)}{u_1'(x_2^1)}\right|_{x_1^1 = a \leq W_1 - W_2,\ x_2^1 = 0} = \frac{u_1'(a)}{\infty}$$

Por otro lado, en el punto en cuestión, el individuo 2 recibe una cantidad de riqueza en el estado 1 de $x_1^2 = W_1 - a \geq W_1 - (W_1 - W_2) = W_2 > 0$. Puesto que la utilidad marginal es decreciente, resulta que $u_2'(W_1 - a) \leq u_2'(W_2)$. Por tanto, en este punto tendríamos

$$\left.\frac{u_2'(x_1^2)}{u_2'(x_2^2)}\right|_{x_1^2 = W_1 - a > 0,\ x_2^2 = W_2} = \frac{u_2'(W_1 - a)}{u_2'(W_2)} \leq \frac{u_2'(W_2)}{u_2'(W_2)} = 1$$

Para que el punto corresponda con eficiencia de pareto, debe cumplirse que

$$\frac{u_1'(a)}{\infty} = \frac{u_1'(W_1 - a)}{u_1'(W_2)} \leq 1$$

Ahora, nótese que es imposible que esta ecuación sea satisfecha con $a > 0$, puesto que implicaría $u_1'(a) < \infty$, y entonces

$$\frac{u_1'(a)}{\infty} = 0 < \frac{u_1'(W_1 - a)}{u_1'(W_2)}$$

Por tanto, la única opción posible es que, cuando $u_1'(0) = \infty$ la curva de contratos tiene que pasar precisamente por el origen 0_1. Por supuesto, un argumento equivalente revela que, si $u_2'(0) = \infty$ la curva de contratos tiene que pasar por el origen 0_2. Por supuesto, ambas cosas pueden ocurrir simultáneamente.

Como resumen de lo que se ha visto, destacamos que, siempre y cuando ambos individuos sean estrictamente adversos al riesgo y que exista riesgo agregado, las asignaciones eficientes de riesgo nunca podrán ofrecer una situación de certidumbre para ninguno de los individuos siempre que sean punto interior (la curva de contratos no puede tocar las rectas de certidumbre). Por otro lado, la curva de contratos pasa por el origen 0_i de la caja si y solo si resulta que $u_i'(0) = \infty$. Para decir más, es conveniente encontrar una ecuación general que describa la pendiente de la curva de contratos. Haremos esto para cualquier punto estrictamente interior.

Empezamos con la ecuación que define la curva de contratos, ecuación (8.14), que cuando se trata de un punto interior tal que $x_j^1 + x_j^2 = W_j$ para $j = 1, 2$, podemos escribir como

$$u_1'(x_1^1)u_2'(W_2 - x_2^1) = u_1'(x_2^1)u_2'(W_1 - x_1^1)$$

Tomando logaritmos de ambos lados, resulta que en cualquier punto interior que es eficiente en sentido de Pareto, se tiene

$$Ln(u_1'(x_1^1)) + Ln(u_2'(W_2 - x_2^1)) = Ln(u_1'(x_2^1)) + Ln(u_2'(W_1 - x_1^1))$$

Entonces podemos definir la función

$$h(x_1^1, x_2^1) \equiv Ln(u_1'(x_1^1)) + Ln(u_2'(W_2 - x_2^1)) - Ln(u_1'(x_2^1)) - Ln(u_2'(W_1 - x_1^1)) \tag{8.15}$$

La curva de contratos entendida como una función en el espacio definido de acuerdo con el origen 0_1, es decir $x_2^1 = c(x_1^1)$, se define a partir de $h(x_1^1, x_2^1) = 0$. Del teorema de la función implícita, tenemos

$$\left.\frac{dx_2^1}{dx_1^1}\right|_{h(\cdot)=0} = -\frac{\left(\frac{\partial h(\cdot)}{\partial x_1^1}\right)}{\left(\frac{\partial h(\cdot)}{\partial x_2^1}\right)}$$

siempre que $\frac{\partial h(\cdot)}{\partial x_2^1} \neq 0$. Ahora, resulta que

$$\frac{\partial(Ln(u'(x))}{\partial x} = \frac{u''(x)}{u'(x)} = -A(x)$$

en donde $A(x)$ es la medida de Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo. Dado esto, tenemos[3]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(\cdot)}{\partial x_1^1} &= -A_1(x_1^1) - A_2(W_1 - x_1^1) < 0 \\
\frac{\partial h(\cdot)}{\partial x_2^1} &= A_2(W_2 - x_2^1) + A_1(x_2^1) > 0
\end{aligned}$$

[3]El subíndice A_i coresponde con u_i.

Finalmente, se tiene que la pendiente de la curva de contratos en cualquier punto interior es

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dx_2^1}{dx_1^1}\right|_{h(\cdot)=0} &= \frac{A_1(x_1^1)+A_2(W_1-x_1^1)}{A_2(W_2-x_2^1)+A_1(x_2^1)} \\
&= \frac{A_1(x_1^1)+A_2(x_1^2)}{A_1(x_2^1)+A_2(x_2^2)} \qquad (8.16)
\end{aligned}$$

Directamente de (8.16) podemos concluir

1. puesto que ambos individuos son estrictamente adversos al riesgo, $A_i > 0$ para $i = 1, 2$, la curva de contratos tiene pendiente positiva en todos los puntos interiores;

2. puesto que la curva de contratos se encuentra estrictamente entre las dos rectas de certidumbre, tenemos $x_1^i > x_2^i$ para ambos $i = 1, 2$, resulta que la pendiente de la curva de contratos es menor que 1 si ambos individuos tienen aversión absoluta decreciente, mayor que 1 si ambos individuos tienen aversion absoluta creciente, e igual a 1 si ambos individuos tienen aversión absoluta constante.

8.3.2 Contratos de repartos proporcionales constantes

En la vida real, se establecen muchos contratos de asignación de riesgo con repartos proporcionales de una variable aleatoria, en donde las proporciones no dependen del total a repartir. Por ejemplo, los contratos de los artistas y autores típicamente establecen que el autor de una canción o libro recibe un pago de 10% del valor total de ventas, y que el resto se lo queda el distribuidor (casa de discos, editorial, etc.). El hecho es que el pago proporcional del autor (el 10%) es el mismo cuando la venta es alta o cuando es baja. En otras ocasiones, el pago proporcional del autor crece con el valor de la venta (por ejemplo, puede recibir un 10% cuando la venta es baja y 15% cuando es alta). En esta subsección vamos a considerar este tipo de contrato, para ver si son eficientes en sentido de Pareto.

En el marco de análisis que tenemos, podemos entender que W_1 y W_2 son dos posibles realizaciones de una variable aleatoria (W_2 ocurre con probabilidad p), y que dos individuos tienen que repartir el valor final que tome W entre sí mediante un contrato de asignación. Podemos entender que W es el excedente que los dos individuos crean, mediante una relación económica entre ellos. Puesto que en cualquier asignación eficiente se tiene que respetar el requisito de que se reparte todo la riqueza generada, solamente es necesario considerar lo que el contrato asigne al individuo 1. En general, entonces, tenemos que pensar en dos valores

$$\widetilde{x}_1^1 = k_1(W_1) \ \text{ y } \ \widetilde{x}_2^1 = k_2(W_2)$$

Si el contrato es de reparto de proporciones constantes, entonces las funciones k_j toman una forma muy concreta. En particular entonces, tendremos

$$\widetilde{x}_j^1 = \alpha W_j \ \text{ para } \ j = 1, 2$$

Pero en este caso, puesto que $\alpha = \frac{\widetilde{x}_1^1}{W_1}$, resulta que el contrato estipula una asignación que tiene que satisfacer

$$\widetilde{x}_2^1 = \left(\frac{W_2}{W_1}\right)\widetilde{x}_1^1$$

Claramente, se trata de un punto sobre la diagonal de la caja de Edgworth, puesto que la ecuación de la diagonal es la de una ecuación lineal con ordenada en el origen y pendiente $\frac{W_2}{W_1}$. Dado esto, tenemos que considerar cuando la curva de contratos puede especificar un contrato de asignación que está sobre la diagonal de la caja.

Resulta que, independientemente de todo, la curva de contratos tiene por lo menos un punto que coincide con la diagonal de la caja. Esto es bastante obvio para el caso $u_i'(0) = \infty$ para algún $i = 1, 2$, puesto que como ya hemos visto, en este caso la curva de contratos toca la diagonal por lo menos en el origen 0_i. En el caso de $u_i'(0) < \infty$ para ambos $i = 1, 2$, recordamos que la curva de contratos no puede tocar ninguno de los origenes, y como tiene que encontrarse estrictamente entre las rectas de certidumbre, tiene que tocar el borde inferior de la caja en un punto estrictamente por debajo de la diagonal, y tiene que tocar el borde superior de la caja en un punto estrictamente por encima de la diagonal. Siendo una función continua, se sigue que necesariamente ha de tocar la diagonal en al menos un punto. Dado esto, sabemos que cualquiera que sea la situación, por lo menos existe un contrato eficiente existe tal que cada individuo recibe un reparto proporcional constante.

Para ver esto un poco más formalmente, empezamos por definir $\frac{W_2}{W_1} \equiv \delta < 1$, de manera que un contrato sobre la recta de contratos de reparto proporcional constante es $\widetilde{x}_2^1 = \delta \widetilde{x}_1^1$. Si la curva de contratos toca esta linea en un punto interno, tiene que ser cierto que

$$\begin{aligned}\frac{u_1'(\widetilde{x}_1^1)}{u_1'(\delta\widetilde{x}_1^1)} &= \frac{u_2'(W_1 - \widetilde{x}_1^1)}{u_2'(W_2 - \delta\widetilde{x}_1^1)} \\ &= \frac{u_2'(W_1 - \widetilde{x}_1^1)}{u_2'(\delta(W_1 - \widetilde{x}_1^1))}\end{aligned}$$

Reordenando, resulta que se busca un valor $x_1^1 = \widetilde{x}_1^1$ que satisface

$$\frac{u_1'(\widetilde{x}_1^1)}{u_2'(W_1 - \widetilde{x}_1^1)} = \frac{u_1'(\delta\widetilde{x}_1^1)}{u_1'(\delta(W_1 - \widetilde{x}_1^1))}$$

Definimos dos funciones

$$\begin{aligned}M(x) &\equiv \frac{u_1'(x)}{u_2'(W_1 - x)} \\ N(x) &\equiv \frac{u_1'(\delta x)}{u_1'(\delta(W_1 - x))}\end{aligned}$$

Pero, nótese que, para el caso a mano ($u_i'(0) < \infty$ para $i = 1, 2$)

$$M(0) = \frac{u_1'(0)}{u_2'(W_1)} > \frac{u_1'(0)}{u_2'(W_2)} = N(0)$$

y que

$$M(W_1) = \frac{u_1'(W_1)}{u_2'(0)} < \frac{u_1'(W_2)}{u_2'(0)} = N(W_1)$$

Así que la función $M(x)$ arranca por encima de $N(x)$ pero acaba por debajo. Siendo ambas funciones continuas, resulta que tiene que existir por lo menos un punto (estrictamente interior, es decir, que cumple $0 < x < W_1$) tal que $M(x) = N(x)$, es decir, existe por lo menos un punto sobre la curva de contratos que se caracteriza por un reparto proporcional constante.

Pero podemos decir más. Podemos investigar los casos en los cuales la intersección entre la curva de contratos y la recta de repartos proporcionales constantes es única. Para ello, nótese que

$$\begin{aligned} M'(x) &= \frac{u_1''(x)u_2'(W_1 - x) + u_1'(x)u_2''(W_1 - x)}{u_2'(W_1 - x)^2} \\ &= -M(x)\left[A_1(x) + A_2(W_1 - x)\right] < 0 \end{aligned}$$

y de modo similar

$$N'(x) = -N(x)\delta\left[A_1(\delta x) + A_2(\delta(W_1 - x))\right] < 0$$

Es decir, las dos funciones $M(x)$ y $N(x)$ son decrecientes (véase la figura 8.13).

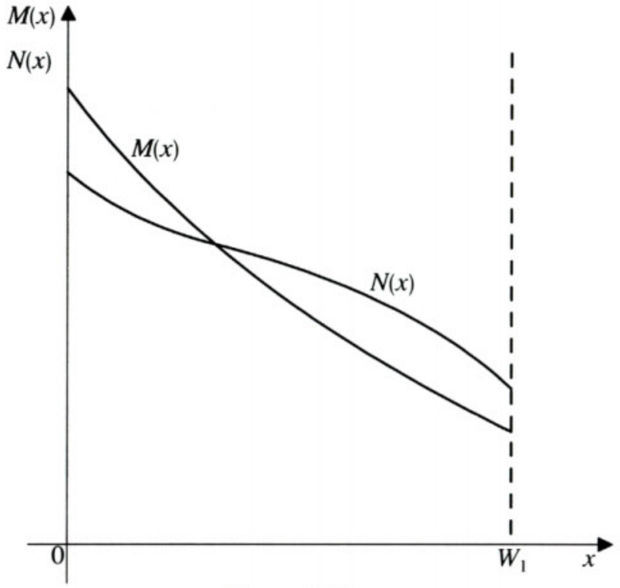


Figura 8.13.

Podemos afirmar que la intersección entre las dos curvas es única (como en la figura 8.13) si, en cualquier x tal que $M(x) = N(x)$, resulta que $M'(x) < N'(x) < 0$, es decir, si en su intersección la función $M(x)$ es la más inclinada. Pero directamente de las ecuaciones de las dos derivadas, esto requiere

$$A_1(x) + A_2(W_1 - x) > \delta\left[A_1(\delta x) + A_2(\delta(W_1 - x))\right] \tag{8.17}$$

Ahora, definimos una función $f(\lambda) \equiv \lambda\left[A_1(\lambda x) + A_2(\lambda(W_1 - x))\right]$. Nótese que la ecuación (8.17) es equivalente a $f(1) > f(\delta)$, y como $\delta < 1$, es suficiente que $f'(\lambda) > 0$. Puesto que

$$f'(\lambda) = \left[A_1(\lambda x) + A_2(\lambda(W_1 - x))\right] + \lambda\left[xA_1'(\lambda x) + (W_1 - x)A_2'(\lambda(W_1 - x))\right]$$

se requiere

$$\left[A_1(\lambda x) + A_2(\lambda(W_1 - x))\right] + \lambda\left[xA_1'(\lambda x) + (W_1 - x)A_2'(\lambda(W_1 - x))\right] > 0$$

que se puede escribir como

$$\left[A_1(\lambda x) + \lambda x A_1'(\lambda x)\right] + \left[A_2(\lambda(W_1 - x)) + \lambda(W_1 - x)A_2'(\lambda(W_1 - x))\right] > 0$$

Esta condición se satisface si resulta que

$$A_i(z) + zA_i'(z) > 0 \quad i = 1, 2 \tag{8.18}$$

Claramente, si aversión absoluta al riesgo no es decreciente, $A_i'(z) \geq 0 \;\; i = 1, 2$, y entonces se satisface esta condición con seguridad. Pero aversión absoluta no-decreciente es un supuesto poco realista, así que buscaremos otras opciones. Ahora bien, a partir de aquí, existe más de una opción para obtener una condición suficiente para que permita que se satisfaga (8.18). En primer lugar, puesto que por definición de la medida de aversión relativa al riesgo, $R_i(z) = zA_i(z)$, resulta que $R_i'(z) = A_i(z) + zA_i'(z)$, de donde nuestra condición se puede escribir como

$$R_i'(z) > 0 \quad i = 1, 2$$

En resumen, es suficiente o bien que la aversión absoluta al riesgo de ambos individuos sea no decreciente, o que la aversión relativa al riesgo de ambos individuos sea creciente para que haya una única intersección entre las dos funciones $M(x)$ y $N(x)$, y por tanto, que haya un único punto sobre la curva de contratos que corresponde con un contrato de reparto de proporciones constantes.

No obstante, podemos encontrar otras condiciones para el caso en que la aversión relativa al riesgo no es creciente para ambos individuos. Nótese que, el hecho de que $M(x)$ empiece por encima de $N(x)$ pero acabe por debajo implica que, si ambas funciones fueran estrictamente convexas solamente podría haber una intersección entre ambas. No es complicado ver que las segundas derivadas de ambas funciones son

$$\begin{aligned} M''(x) &= M(x)\left((A_1(x) + A_2(W_1 - x))^2 - A_1'(x) + A_2'(W_1 - x)\right) \\ N''(x) &= N(x)\left((A_1(\delta x) + A_2(\delta(W_1 - x))^2 - A_1'(\delta x) + A_2'(\delta(W_1 - x)\right) \end{aligned}$$

Dado esto, es suficiente que se satisfaga

$$(A_1(\lambda x) + A_2(\lambda(W_1 - x)))^2 - A_1'(\lambda x) + A_2'(\lambda(W_1 - x)) > 0 \;\; \text{para} \;\; \lambda = 1, \delta$$

Pero puesto que estamos suponiendo que la aversión absoluta al riesgo es decreciente, el único término negativo es $A_2'(\lambda(W_1 - x))$. Por tanto, si expandimos el término al cuadrado, resulta ser suficiente que

$$A_2(z)^2 + A_2'(z) \geq 0 \;\; \text{para cualquier } z \tag{8.19}$$

Pero, puesto que sabemos que por un lado $A(z) + zA'(z) = R'(z)$, y por otro que $z = \frac{R(z)}{A(z)}$, lo que buscamos es que

$$A_2(z)^2 + \frac{A_2(z)\left(R_2'(z) - A_2(z)\right)}{R_2(z)} \geq 0$$

es decir

$$A_2(z)\left(A_2(z) + \frac{R_2'(z) - A_2(z)}{R_2(z)}\right) \geq 0$$

Puesto que $A_2(z) > 0$, nuestra condición (8.19) se puede expresar como

$$R_2'(z) \geq A_2(z)\,(1 - R_2(z))$$

Hay otras opciones. Por ejemplo, considere el hecho de que

$$A'(z) = \frac{\partial\left(-\frac{u''(z)}{u'(z)}\right)}{\partial z} = -\left(\frac{u'''(z)u'(z) - u''(z)u''(z)}{u'(z)u'(z)}\right) = -\left(\frac{u'''(z)}{u'(z)} - A(z)^2\right)$$

Multiplicando el primer sumando arriba y abajo por $u''(z)$, obtenemos

$$A'(z) = -P(z)A(z) + A(z)^2 = A(z)\,[A(z) - P(z)]$$

en donde $-\frac{u'''(z)}{u''(z)} \equiv P(z)$ se conoce como la *medición de prudencia absoluta.* Nótese, de paso, que, cuando la aversión absoluta al riesgo es positiva, será decreciente si y solo si la medición de aversión absoluta al riesgo es menor que la medición de prudencia absoluta. Dado esto, y recordando que la medición de aversión relativa al riesgo es $R(z) = zA(z)$, podemos escribir nuestra condición (8.19) como

$$A_2(z)\,(2A_2(z) - P_2(z)) > 0$$

Claramente, puesto que (por hipótesis) tenemos $A_2(z) > 0$, es suficiente que

$$2A_2(z) > P_2(z)$$

A menudo se utilizan funciones de utilidad cuadráticas (sobre todo en la literatura de finanzas), en cuyo caso $u'''(z) = 0$, y por tanto $P(z) = 0$. Para este caso claramente se satisface esta última condición, y así habrá una sola intersección entre la curva de contratos y la recta de repartos de proporciones constantes.

EJERCICIO 8.9: *Demuestre que el caso en el que los dos individuos tienen funciones de utilidad cuadráticas, la curva de contratos es lineal con pendiente mayor que 1.*

El argumento de arriba se ha basado en el supuesto inicial de que $u_i'(0) < \infty$ para $i = 1, 2$, en cuyo caso sabemos que la curva de contratos no puede pasar por los origenes de la caja de Edgeworth. Pero, ¿qué ocurre cuando la utilidad marginal de los individuos se hace infinita con cero riqueza? Para este caso resulta que

$$M(0) = N(0) = \infty$$

y

$$M(W_1) = N(W_1) = 0$$

y así resulta que el argumento anterior ya no nos vale para garantizar que existe algún punto interior tal que $M(x) = N(x)$. El caso más obvio en donde esto occure es cuando los dos individuos tienen funciones de utilidad con aversión relativa al riesgo constante. En este caso, la función de utilidad del individuo i es

$$u_i(z) = \frac{z^{1-R_i}}{1 - R_i} \quad \text{para} \quad i = 1, 2$$

de donde la utilidad marginal es

$$u_i'(z) = \frac{1}{z^{R_i}} \quad \text{para} \quad i = 1, 2 \tag{8.20}$$

que claramente tiende a ∞ cuando z tiende a 0.

Para cualquier punto interior, se sigue teniendo

$$M'(x) = -M(x)\,[A_1(x) + A_2(W_1 - x)] < 0$$

y

$$N'(x) = -N(x)\delta\,[A_1(\delta x) + A_2(\delta(W_1 - x))] < 0$$

Ahora, nótese que éstas se pueden escribir como

$$\begin{aligned} M'(x) &= -M(x)\left[\frac{R_1(x)}{x} + \frac{R_2(W_1 - x)}{W_1 - x}\right] \\ &= -M(x)\left[\frac{(W_1 - x)R_1(x) + xR_2(W_1 - x)}{x(W_1 - x)}\right] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N'(x) &= -N(x)\delta\left[\frac{R_1(\delta x)}{\delta x} + \frac{R_2(\delta(W_1 - x))}{\delta(W_1 - x)}\right] \\ &= -N(x)\left[\frac{(W_1 - x)R_1(\delta x) + xR_2(\delta(W_1 - x))}{x(W_1 - x)}\right] \end{aligned}$$

De ahí, se desprende con facilidad que, si ambos individuos tienen aversión relativa al riesgo constante, o sea $R_i(\delta z) = R_i(z)$ para $i = 1, 2$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} M'(x) &= -M(x)K \\ N'(x) &= -N(x)K \end{aligned}$$

lo que implica directamente que, para todo x se cumple

$$\frac{M'(x)}{N'(x)} = \frac{M(x)}{N(x)}$$

En particular, esto indica que

$$M(x) \gtreqless N(x) \iff M'(x) \gtreqless N'(x) \tag{8.21}$$

En otras palabras, la función que se sitúa en una posición más alta gráficamente también tiene que tener la mayor pendiente. Pero esto implica que las dos funciones no pueden cortarse, puesto que si se tocan, tienen que hacerlo con la misma pendiente, es decir, el punto en donde se tocasen sería un punto de tangencia entre las dos funciones. Ahora debe quedar claro que no puede existir tal punto, puesto que implicaría que la función que fuera más alta gráficamente tuviera mayor pendiente a la izquierda del punto de tangencia pero menor pendiente a la derecha del punto, lo que queda excluída por (8.21). En conclusión, si ambos individuos tienen aversión relativa al riesgo constante, entonces o bien una de las dos funciones está siempre por encima de la otra, o coinciden exactamente en todos los puntos. Es decir, *si ambos individuos tienen aversión relativa* *al riesgo constante, o bien no existe ningún punto interior en donde la curva de contratos intersecta a la diagonal de la caja de Edgeworth, o bien coincide completamente con la diagonal.*

Para ver cuándo tenemos cada una de estas dos opciones, escribimos las ecuaciones exactas de las funciones $M(x)$ y $N(x)$, haciendo uso de la forma funcional de las funciones de utilidad de los dos individuos. Usando (8.20), resulta que

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{x^{-R_1}}{(W_1 - x)^{-R_2}} = \frac{(W_1 - x)^{R_2}}{x^{R_1}} \\ N(x) &= \frac{(\delta x)^{-R_1}}{(\delta(W_1 - x))^{-R_2}} = \delta^{R_2 - R_1}\left(\frac{(W_1 - x)^{R_2}}{x^{R_1}}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, resulta que, para todo x podemos afirmar que

$$M(x) \gtreqless N(x) \iff \delta^{R_2 - R_1} \lesseqgtr 1$$

Finalmente, puesto que $\delta < 1$, tenemos

$$M(x) \gtreqless N(x) \iff R_2 \gtreqless R_1$$

En términos de la caja de Edgeworth, si el individuo 2 es más adverso al riesgo que el individuo 1 ($R_2 > R_1$), entonces la curva de contratos se encuentra siempre por debajo de la diagonal de la caja, si el individuo 1 es más adverso al riesgo que el individuo 1 ($R_1 > R_2$) entonces la curva de contratos se encuentra siempre por encima de la diagonal, y si ambos son igualmente adversos al riesgo, entonces la curva de contratos coincide con la diagonal (véase la figura 8.14). Nótese que, si hay un individuo más adverso al riesgo que el otro, entonces la curva de contratos indica que el menos adverso asegura (parcialmente) al más adverso.

8.4 Resumen

1. La caja de Edgeworth muestra todas las asignaciones factibles en el sentido de que indica todas las asignaciones mediante las cuales se reparten todos los bienes entre los agentes económicos.

2. La curva de contratos, que es la unión de todos los puntos de tangencia entre curvas de indiferencia, está formada por las asignaciones eficientes en sentido de Pareto.

3. Si el modelo es competitivo y perfecto, entonces el equilibrio general al que se llega es eficiente en sentido de Pareto (primer teorema fundamental del bienestar).

4. Si no hay imperfecciones, entonces todo punto eficiente en sentido de Pareto soporta un equilibrio general competitivo para alguna dotación inicial (segundo teorema fundamental del bienestar).

5. Si hay poder de monopolio en la fijación de precios, entonces el equilibrio general no es eficiente en sentido de Pareto.

6. En un modelo con dos consumidores, dos bienes y dos factores de producción, en un equilibrio general competitivo, se igualan las relaciones marginales de sustitución de ambos individuos a la razón de los precios y a la tasa marginal de transformación.

7. En un equilibrio general con dos agentes adversos al riesgo, con incertidumbre y riesgo agregado, la curva de contratos no puede nunca ofrecer certidumbre a ningún individuo en un punto estrictamente interior.

8. La pendiente de la curva de contratos es menor que 1 si ambos individuos tienen aversión absoluta decreciente, mayor que 1 si ambos individuos tienen aversión absoluta creciente, e igual a 1 si ambos individuos tienen aversión absoluta constante.

9. La curva de contratos no puede pasar por el origen de la caja de Edgeworth correspondiente a un individuo cuya utilidad marginal con riqueza igual a 0 sea estrictamente finita.

10. La curva de contratos tiene por lo menos un punto que coincide con la diagonal de la caja.

11. La intersección entre la curva de contratos y la diagonal de la caja es única si ambos individuos tienen aversión absoluta al riesgo no decreciente, si la aversión relativa al riesgo de ambos individuos es creciente, o si la pendiente de la aversión relativa al riesgo no es menor que el producto de aversión absoluta al riesgo y uno menos la aversión relativa al riesgo de ambos individuos (o que dos veces la aversión absoluta al riesgo no es menor que la prudencia absoluta al riesgo).

12. Si ambos individuos tienen aversión relativa al riesgo constante con la misma aversión, entonces la curva de contratos coincide con la diagonal de la caja, pero si tienen diferentes aversiones entonces no hay ningún punto interior en donde la curva de contratos intersecta a la diagonal.

Capítulo 9
Modelos de Negociación

Capítulo 9

Modelos de Negociación

En el capítulo anterior, queda de manifiesto el hecho de que es elemental resolver situaciones en las cuales existen características de competencia perfecta en al menos un lado del mercado. De hecho, nuestro supuesto hasta ahora siempre ha sido que el consumo se caracteriza por infinitos agentes y libre entrada y salida, aunque hemos tratado unas situaciones en las cuales la producción es un monopolio y otras en las cuales la producción también es competitiva. Pero, ¿qué ocurre en un modelo en el cual hay cierto poder de mercado en ambos lados? En la época de Edgeworth y Walras, esta pregunta resultó imposible contestar. A lo sumo, solamente se podría concluir que, en la caja de Edgeworth, la solución se iba a encontrar sobre la curva de contratos, dentro de la zona que domina en sentido de Pareto a la dotación, y que previsiblemente tendería a repartir de algún modo en función de los poderes de mercado relativo[1]. Pero exactamente cómo describir, y resolver, esta situación formalmente resultó imposible para los economistas contemporaneos de Edgeworth, por la sencilla razón de que hacía falta contemplar un modelo formal de *estrategias*, o lo que hoy día se conoce por la *teoría de los juegos*, y cuyas herramientas básicas que no fueron desarrolladas hasta la segunda década del siglo XX (precisamente por John von Neumann).

Fue John Nash, en un artículo publicado en el año 1950 quien propuso que la solución exacta no es indeterminada. De hecho, propuso una serie de axiomas sencillos que la solución debe respetar, y demostró que solamente hay una solución que satisface simultáneamente a todos estos axiomas. También proporcionó una manera sencilla de encontrar esta solución. En este capítulo, vamos a considerar dos modelos de negociación. En primer lugar, haremos un desarollo de un modelo basado cercanamente en el modelo de negociación de Nash. Luego estudiaremos un modelo conocido por el nombre de "modelo de propuestas alternativas", que se debe al trabajo de Ariel Rubinstein en el año 1983. Por último, consideraremos el nexo entre estos dos modelos.

9.1 El modelo de negociación de Nash

Considere dos agentes económicos, con funciones de utilidad $u_i(x)$ para $i = 1, 2$, en donde se supone, como siempre, que $u_i'(x) > 0$ y $u_i''(x) < 0$. Los dos individuos pueden cerrar un acuerdo, de beneficio mutuo, pero existe un conflicto de intereses sobre exactamente cuál de los posibles acuerdos se debe utilizar en el sentido de que cuanto más favorece el acuerdo

[1] Esta misma idea fue lo único que propusieron von Neumann y Morgenstern en su obra maestra que introduce la teoría de los juegos a la economía, "Games and Economic Behavior".

a un individuo, menos favorece al otro. Supondremos que si hay un acuerdo, entonces es firmado voluntariamente por ambos individuos. Una teoría de negociación explora la relación entre las características generales de la situación y el acuerdo resultante. John Nash propuso que los dos individuos tienen la opción de escoger un acuerdo de entre un conjunto de posibles acuerdos, X. Un acerdo estipula simplemente un punto como (x_1, x_2), en donde x_i es el pago que recibe el jugador i, con $i = 1, 2$. Se supone que el conjunto X es acotado y cerrado con frontera superior. Uno de los puntos dentro de X es el punto de desacuerdo, δ, que estipula el pago de los individuos cuando éstos no consigen estar de acuerdo, de manera que la utilidad de reserva de los individuos es $u_i(\delta_i)$ para $i = 1, 2$. Por ejemplo, una situación podría corresponder al reparto de una cantidad de dinero (como puede ser un excedente de mercado) de tamaño total T, de modo que el conjunto factible para el problema es $X(T) = \{x : x_1 + x_2 \leq T\}$.

Se supone que existe un subconjunto no vacío de X, tal que $u_i(x_i) \geq u_i(\delta_i)$ para ambos $i = 1, 2$. Esto proporciona la garantía absoluta de que existe el interés mutuo de sentarse a negociar. Lo que deseamos resolver es una predicción sobre el acuerdo al que llegarán los dos individuos, x^*, que llamaremos una *solución* del problema.

Puesto que estamos suponiendo explícitamente la existencia de preferencias indicadas por funciones de utilidad, no es necesario contemplar directamente el conjunto factible X, sino el conjunto de posibilidades de utilidad, U, definido a partir de el conjuto de posibles acuerdos y las funciones de utilidad como

$$U \equiv \{(u_1(x_1), u_2(x_2)) : x \in X\}$$

Resulta que el conjunto U es también acotado y cerrado superiormente, adicionalmente supondremos que U es un conjunto convexo. Se consideran situaciones en las que los individuos negocian directamente sobre los puntos $u = (u_1, u_2)$ dentro del conjunto U. Al punto de desacuerdo, lo denotamos por $d = (u_1(\delta_1), u_2(\delta_2))$, y por supuesto tenemos $d \in U$. Un problema de negociación queda completamente descrito por (U, d). Escribiremos una solución del problema como $u^* = S(U, d)$, en donde u^* es un vector de utilidades. Naturalmente, interpretamos $S(U, d)$, si es única, como la predicción del acuerdo que los dos individuos acabarán firmando.

EJERCICIO 9.1: *Demostrar que, si X es convexo, y si $u_i(x_i)$ es cóncava para $i = 1, 2$, entonces U es convexo.*

Ahora, considere los siguientes tres axiomas que la solución debería satisfacer:

1. *Invarianza ante transformaciones equivalentes*: La solución no varía ante transformaciones lineales positivas de la utilidad de los individuos, es decir, si definimos una transformación lineal positiva general por la función $t(z) \equiv az + b$, con $a > 0$, entonces sabemos que las curvas de utilidad $u_i(x_i)$ y $t(u_i(x_i)) = a_i u(x_i) + b_i$ con $a_i > 0$ muestran las mismas preferencias. Por tanto, debería resultar que los dos problemas de negociacion (U, D) y $(t(U), t(D))$ proporcionan la misma solución dentro de X. Esto implica que

$$S(t(U), t(d)) = t(S(U, d)) \tag{9.1}$$

2. *Eficiencia de Pareto*: si hay un acuerdo en el vector u, no puede existir otro acuerdo factible, u^0, tal que por lo menos un individuo prefiere u^0 a u. En términos matemáticos, tenemos

$$u^0 \in U \text{ y } u \in U \text{ tal que } u_i^0 > u_i \text{ para al menos un } i \quad \Rightarrow \quad S(U, d) \neq u$$

Nótese de paso que el axioma de eficiencia de Pareto, junto con el supuesto de que existen puntos factibles que dominan en sentido de Pareto a d, implica directamente que es imposible que el proceso acabe en desacuerdo.

3. *Independencia de las alternativas irrelevantes*: si $d \in Y \subseteq U$, y si $S(U,d) \in Y$ entonces $S(Y,d) = S(U,d)$. Es decir, si existe un subconjunto de utilidades, Y, que contiene tanto al punto de desacuerdo como a la solución del problema (U,d), entonces la solución del problema reducido (Y,d) tiene que ser la misma que la solución del problema inicial, puesto que del problema incial solamente se han eliminado del conjunto factible opciones que no son relevantes (peores que $S(U,d)$).

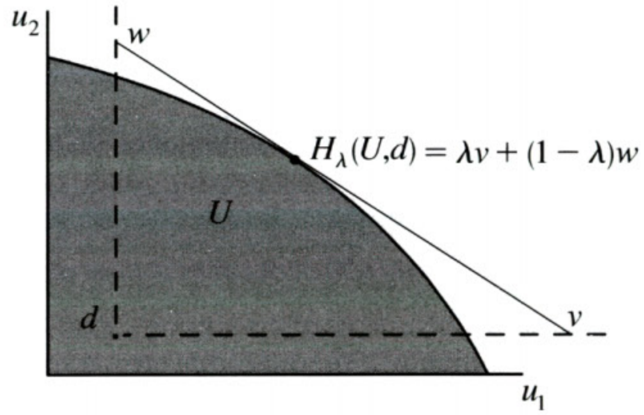


Figura 9.1.

Resulta que, sorprendentemente, solamente existe una solución al problema que satisface simultáneamente los tres axiomas (es decir, $S(U,d)$ es única si nos restringimos a soluciones que satisfacen los tres axiomas). La demostración de este hecho no es difícil, pero sí algo laboriosa. Para empezar, considérese la figura 9.1, que muestra un problema de negociación típico. Nótese que podemos definir un punto $H_\lambda(U,d)$ sobre la frontera del conjunto U de acuerdo con una línea tangente a la frontera que es la combinación convexa de dos puntos, w y v, que se encuentran, respectivamente, encima y a la izquierda de el punto de desacuerdo, d. El punto $H_\lambda(U,d)$ está definido para un valor de λ concreto, es decir, $H_\lambda(U,d) = \lambda v + (1-\lambda)w$ para un λ concreto entre 0 y 1. Es obvio que a cada punto sobre la frontera de U que satisface $u_i \geq d_i$ para $i = 1, 2$, le corresponde un valor único de λ. De hecho, según se avanza hacia arriba y a la izquierda sobre la frontera de U, se están contemplando valores cada vez menores de λ. Visto esto, se procede en varios pasos.

Paso 1: si $H_\lambda(U,d)$ satisface los tres axiomas, entonces resulta que $H_\lambda(U,d) = S(U,d)$. Para ver esto, empezamos con el problema de negociación de la figura 9.2, donde se representa un conjunto asequible Z con frontera lineal que une los dos puntos (0,1) y (1,0), indicados por w' y v' respectivamente, y con punto de desacuerdo $d = 0$. Por el axioma de eficiencia de Pareto, sabemos que la solución de este problema, $S(Z,0)$, tiene que hallarse sobre la frontera del conjunto, así que se puede expresar como combinación convexa de los dos puntos w' y v', es decir, la solución define un valor concreto de λ mediante la ecuación $S(Z,0) = \lambda v' + (1-\lambda)w'$. Ahora, suponga que este valor de λ es precisamente el que se representa en la figura 9.1, de modo que el punto $H_\lambda(U,d)$ queda perfectamente identificado por $S(Z,0)$.

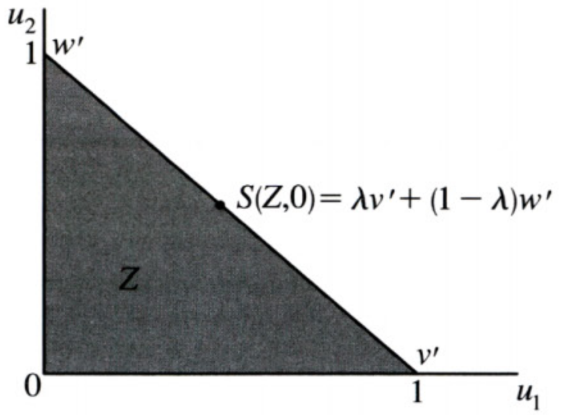


Figura 9.2.

Paso 2: Definimos una transformación lineal de las utilidades, de modo que $t_1(d_1) = 0$ y $t_1(v_1) = 1$, y que $t_2(d_2) = 0$ y $t_2(w_2) = 1$. Esto siempre es posible, puesto que cualquier transformación lineal positiva tiene 2 variables a escoger, y entonces podemos identificar a ambos con dos ecuaciones que se satisfacen en cada caso. Por ejemplo, la transformación relevante en el caso del individuo 1 debe resolver las ecuaciones $a_1 d_1 + b_1 = 0$ y $a_1 v_1 + b_1 = 1$. Es sencillo encontrar que la transformación necesaria es $a_1 = \frac{1}{v_1 - d_1} > 0$ y $b_1 = \frac{d_1}{d_1 - v_1} < 0$. Mediante estas transformaciones, el conjunto U se transforma en el conjunto $t(U)$, el punto w se transforma en el punto w' (es decir $t(w) = w'$) el punto v se transforma en el punto v' (es decir $t(v) = v'$) y el punto d se transforma en el punto 0 (es decir $t(d) = 0$). Pero por construcción, también resulta que el punto $H_\lambda(U,d)$ se transforma en el punto $S(Z,0)$, es decir

$$t(H_\lambda(U,d)) = S(Z,0) \tag{9.2}$$

Todo esto queda representado en la figura 9.3.

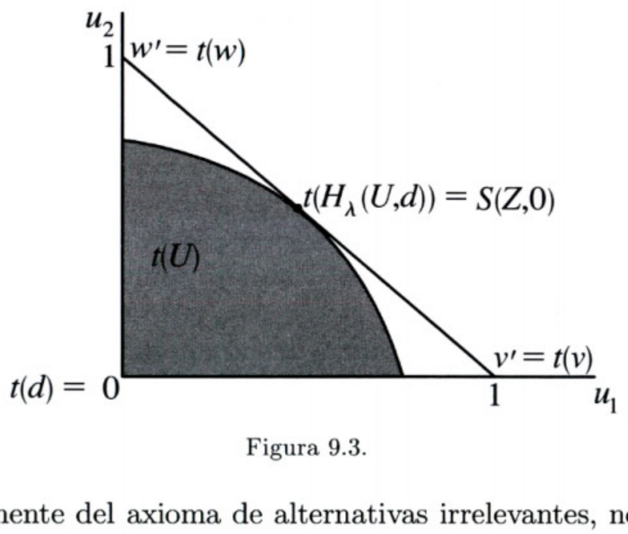


Figura 9.3.

Paso 3: Directamente del axioma de alternativas irrelevantes, notamos por la figura 9.3 que

$$S(t(U),0) = S(Z,0) \tag{9.3}$$

Pero puesto que $0 = t(d)$, la ecuación (9.3) indica que $S(t(U), t(d)) = S(Z, 0)$, que junto con la ecuación (9.2) nos da el resultado de que $S(t(U), t(d)) = t(H_\lambda(U, d))$. Finalmente, si comparamos esta última ecuación con la que corresponde al axioma de independencia de transformaciones equivalentes (9.1), evidentemente podemos concluir que $H_\lambda(U, d) = S(U, d)$, como queríamos demostrar.

Ahora bien, faltaría ver que $H_\lambda(U, d)$ de hecho satisface los tres axiomas antes de poder concluir que efectivamente este punto, $H_\lambda(U, d)$, es la solución al problema de negociación. Por construcción, es evidente que $H_\lambda(U, d)$ satisface tanto el axioma de eficiencia de Pareto (puesto que $H_\lambda(U, d)$ se localiza sobre la frontera del conjunto U) como el axioma de independencia de alternativas irrelevantes. Para ver el axioma de invarianza ante transformaciones equivalentes, es conveniente describir el punto $H_\lambda(U, d)$ de una manera más formal. Resulta que

$$H_\lambda(U, d) \quad \longleftarrow \quad \max_u \ N(u, d, \lambda) \equiv (u_1 - d_1)^\lambda (u_2 - d_2)^{1-\lambda} \quad \text{sujeto a} \quad u \in U$$

El término $N(u, d, \lambda)$ se conoce por el nombre de "el producto de Nash", y es una función estrictamente cuasicóncava y creciente en u, así que sus contornos son estrictamente convexos y crecen en valor según se alejan del origen. Por otro lado, puesto que el conjunto U es convexo (por supuesto), sabemos que la solución a este problema de maximización existe, es única, y se halla sobre la frontera superior de U. Por otro lado, la solución es un punto de tangencia entre la frontera de U y un contorno de $N(u, d, \lambda)$. Pero determinar exactamente cuál es la ecuación general para la pendiente de la frontera de U no es nada obvio, así que vale la pena acercarse al problema de otra manera.

Nótese que, puesto que por definición matemática, la línea tangente a la frontera del conjunto U en el punto $H_\lambda(U, d)$ tiene ecuación

$$u_2(u_1) = w_2 + \left(\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\right)(u_1 - w_1)$$

Entonces, si planteamos el problema

$$\max_u \ N(u, d, \lambda) \quad \text{sujeto a } u_2 \leq w_2 + \left(\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\right)(u_1 - w_1)$$

y si resulta que la solución a este segundo problema es precisamente el punto $H_\lambda(U, d)$, entonces queda claro que la solución al primer problema también es $H_\lambda(U, d)$, pués la restricción del segundo problema es (por definición) tangente al conjunto U precisamente en el punto $H_\lambda(U, d)$. Denotaremos la solución de este segundo problema de optimización por u^0. Entonces el vector u^0 queda caracterizado por la saturación de la restricción, y por la condición de tangencia:

$$u_2^0 = w_2 + \left(\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\right)(u_1^0 - w_1)$$

$$-\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\left(\frac{u_2^0 - d_2}{u_1^0 - d_1}\right) = \left(\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\right)$$

Utilizando el hecho de que $d_2 = v_2$ y $d_1 = w_1$, es sencillo resolver estas dos ecuaciones para obtener

$$u_i^0 = \lambda v_i + (1 - \lambda) w_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2$$

es decir, $u^0 = H_\lambda(U, d)$.

Ahora, considere un problema con funciones de utilidad transformadas. En concreto, considere la solución al problema

$$\max_{t(u)} \; N(t(u), t(d), \lambda) \;\; \text{sujeto a} \;\; t(u_2) \leq t(w_2) + \left(\frac{t(v_2) - t(w_2)}{t(v_1) - t(w_1)}\right)(t(u_1) - t(w_1))$$

Puesto que la estructura general de este problema es igual que el anterior, directamente podemos indicar que la solución es

$$t_i(u_i)^0 = \lambda t_i(v_i) + (1 - \lambda)t_i(w_i) \;\; \text{para} \;\; i = 1, 2$$

es decir $H_\lambda(t(U), t(d)) = t(H_\lambda(U, d))$, que es el axioma buscado.

En resumen, el punto $H_\lambda(U, d)$, definido a partir del problema de maximización restringida

$$\max_{u} \; N(u, d, \lambda) \;\; \text{sujeto a} \;\; u \in U$$

corresponde con la solución del problema de negociación, $S(U, d)$. Finalmente, vale la pena destacar que puesto que U es convexa y $N(u, d, \lambda)$ es cuasi-cóncava en u, este problema de maximización admite una, y solamente una, solución. Es decir, la solución al problema de negociación es única.

No obstante, queda todavía un asunto que contemplar. La solución general a un problema de negociación se define a partir de un dato en concreto, λ. ¿Qué debemos entender exactamente por este valor? En realidad, el artículo original de Nash no contemplaba este parámetro, pero eso sí, tuvo que incluir un cuarto axioma. Nash supuso, implícitamente, que $\lambda = 0,5$, y entonces $N(u, d, \lambda) = (u_1 - d_1)^{0,5}(u_2 - d_2)^{0,5} = ((u_1 - d_1)(u_2 - d_2))^{0,5}$. Pero luego resulta que en el problema de maximización restringida, el parámetro $\lambda = 0,5$ es superfluo, puesto que el vector u que maximiza $((u_1 - d_1)(u_2 - d_2))^{0,5}$ también maximiza $(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$. Hoy día, se entiende λ ser el *poder relativa de negociación* del individuo 1 (y por tanto, $1 - \lambda$ es el poder relativo de negociación del individuo 2), que capta en algún sentido la habilidad negociadora de este individuo[2]. Esto surge del hecho de que, en el modelo de Nash, λ se define a partir del problema de negociación de la figura 9.2, y define la distancia a lo largo de la frontera del conjunto triangular en donde se encuentra la solución de este problema. También, resulta que en la solución del juego de la figura 9.2, λ es la utilidad que recibe el individuo 1. No obstante, esta definición parece algo adhoc, y resulta que con el tiempo apareció otro modelo de negociación que, indirectamente, proporcionó una mejor conceptualización del significado de λ.

9.2 El modelo de Rubinstein de propuestas alternativas

En el modelo de negociación de Nash, no existe ninguna consideración explícita del tiempo. Así, el modelo es equivalente a una situación en la que los dos individuos se sientan a la mesa de negocios con un papel en blanco y un bolígrafo y tras hablar detenidamente sobre las diferentes opciones, escriben un acuerdo sobre el papel que es firmado por ambos. En otro modelo de negociación, el profesor Ariel Rubinstein propuso un modelo de negociación

[2] Es habitual hablar de la "solución general" cuando λ no es 0,5, y de la "solución regular" cuando $\lambda = 0,5$.

basado en propuestas de acuerdos alternativos. En su modelo, Rubinstein supone explícitamente una regla que controle el propio mecanismo de negociación. Se define el primer individuo que es el que empieza, proponiendo un reparto factible. El segundo individuo puede entonces aceptar esta propuesta, en cuyo caso firman el acuerdo y el juego acaba, o si no desea aceptar, ofrece una contra-propuesta. Seguidamente, el individuo 1 puede o bien aceptar o bien rechazar la contra-propuesta, y en caso de rechazarla, de nuevo le toca a él formular una nueva propuesta. Y así hasta que el juego acaba, bien en un acuerdo aceptado, bien en desacuerdo. Al igual que en el modelo de Nash, en caso de desacuerdo a cada individuo le corresponde una utilidad (utilidad de reserva) predeterminada.

Puesto que esta manera de modelar el proceso de negociación introduce explícitamente el tiempo (se define un "período" como el tiempo que transcurre entre el momento en el que un individuo hace una propuesta y el momento en el que el otro toma la decisión de o bien aceptar o bien rechazar. Por tanto, un rechazo siempre marca el final de un período), Rubinstein introduce explícitamente factores de descuento intertemporal en el modelo. Concretamente, si el individuo i recibe u_i unidades de utilidad en el período n, entonces en el primer período (cuando el juego empieza) valora esa utilidad en su valor presente, $\alpha_i^{n-1}u_i$, en donde $\alpha \leq 1$ es su factor de descuento intertemporal, que se supone es estrictamente positivo. De esta manera, visto desde el presente, una utilidad futura es menos valiosa cuanto más lejos en el tiempo se recibe. Este es el mecanismo que incentiva a los individuos a llegar a un acuerdo cuanto antes.

Para ver cómo funciona el modelo de Rubinstein, reconsidere la figura 9.2. En ella, se puede apreciar que los dos individuos están regateando utilidades dentro de un conjunto de posibilidades definido simplemente por $u_1+u_2 \leq 1$. Aunque debemos tener cuidado con la interpretación de una suma de utilidades (realmente no hay significado alguno, puesto que las utilidades no son comparables entre diferentes individuos). A diferencia de lo que se representa en la figura 9.2, vamos a suponer que el punto de desacuerdo es definido generalmente como $d = (d_1, d_2)$, que no tiene porqué ser el origen (como se representa en la figura 9.2), aunque sí supondremos explícitamente que el punto de desacuerdo es estríctamente interior, es decir $d_1 + d_2 < 1$.

Supongamos que el juego solamente tiene un período, es decir, en el primer período, el individuo 1 propone un acuerdo, y el individuo 2o puede aceptar o rechazar, y si rechaza ambos individuos reciben su utilidad de reserva (eso sí, un período más tarde). ¿Cuál es la propuesta que debe ofrecer el individuo 1? Primero, notamos que siempre será cierto que se satisface $u_1 + u_2 = 1$, puesto que de otra forma, el individuo 1 podría incrementar su utilidad sin coste alguno para el individuo 2. Dado esto, independientemente de quien haga la propuesta, siempre podemos trabajar exclusivamente con la utilidad del primer individuo, ya que la utilidad del segundo siempre será $u_2 = 1 - u_1$.

Es fácil de ver que se puede hallar la solución del problema en un sencillo problema de maximización restringida. Concretamente, la propuesta que ofrecerá el individuo 1 será la solución a

$$\max_u \; u_1 \;\; \text{sujeto a} \;\; u_1 \geq \alpha_1 d_1 \;\; \text{y} \;\; 1 - u_1 \geq \alpha_2 d_2$$

La interpretación es sencilla. Suponga que el individuo 1 ofrece un acuerdo consitente en el valor u_1. En este caso, pueden ocurrir dos cosas - que el individuo 2 acepte el acuerdo, en cuyo caso el individuo 1 recibe una utilidad de u_1, o que el individuo 2 rechace el acuerdo en cuyo caso el individuo 1 recibe una utilidad cuyo valor presente es $\alpha_1 d_1$ (se recuerda que, si una propuesta es rechazada, se pasa al siguiente período). La segunda restricción proporciona la garantía de que el individuo 2 no va a rechazar el acuerdo (pues su utilidad si acepta es $u_2 = 1 - u_1$, mientras que su utilidad si rechaza es $\alpha_2 d_2$. La primera restricción simplemente implica que el individuo 1 también prefiere que 2 no rechace.

Nótese entonces, que la segunda restricción se puede escribir como $u_1 \leq 1 - \alpha_2 d_2$. Finalmente, puesto que $d_1 + d_2 < 1$, y $\alpha_i \leq 1$ para $i = 1, 2$, es necesariamente cierto que $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 < 1$, es decir, $\alpha_1 d_1 < 1 - \alpha_2 d_2$. La implicación es simplemente que el individuo 1 debe escoger aquel valor de u_1 que satisface el conjunto factible, es decir, $\alpha_1 d_1 \leq u_1 \leq 1 - \alpha_2 d_2$. La solución es obvia: $u_1^* = 1 - \alpha_2 d_2$.

El modelo de un solo período es realmente elemental, así que veamos lo que pasa cuando admitimos más períodos. En aras de simplificación en lo que a la notación se refiere, diremos que la variable objetivo para un juego con n períodos es $u_1(n)$, y que la propuesta hecha en el período m (en donde $m \leq n$) es $u_1(m, n)$.

Se empieza con un juego de solamente 2 períodos, es decir, ahora en el primer período, el individuo 1 propone un acuerdo, que puede ser aceptado o rechazado por el individuo 2. En caso de rechazarlo, el individuo 2 formula una contra-propuesta de acuerdo, que el individuo 1 puede aceptar o rechazar. Si se rechaza esta segunda propuesta, ambos individuos reciben su utilidad de desacuerdo, el punto d. Para analizar esta situación, tenemos que encontrar la propuesta óptima que ofrecerá el individuo 1 en el período 1, y además la propuesta óptima que ofrecería el individuo 2 en el período 2 en caso de que rechace la primera propuesta. Consideramos primero el segundo de estos problemas. El individuo 2 se enfrenta con un problema de maximización restringida que, con todas las variables medidas en valor presente, es

$$\max_{u_1(2,2)} \alpha_2(1 - u_1(2,2)) \text{ sujeto a } \alpha_1 u_1(2,2) \geq \alpha_1^2 d_1, \;\; \alpha_2(1 - u_1(2,2)) \geq \alpha_2^2 d_2$$

Claramente, las dos restricciones se pueden escribir como $u_1(2,2) \geq \alpha_1 d_1$ y $1 - \alpha_2 d_2 \geq u_1(2,2)$, e igual que antes, el hecho de que $d_1 + d_2 < 1$ garantiza que $\alpha_1 d_1 < 1 - \alpha_2 d_2$. El problema, entonces, corresponde con encontrar el valor mínimo de u_1 que satisface ambas restricciones, que resulta ser $u_1(2,2)^* = \alpha_1 d_1$ a partir de las restricciones mencionadas.

Ahora, ¿cuál es la propuesta óptima para el individuo 1 en el primer período? Recordando que, si se rechaza la propuesta, se pasaría al segundo período, y que acabamos de ver que en este caso el individuo 2 propondrá un acuerdo de $u_1(2,2)^*$, que será aceptado por el indivdiuo 1, el problema es

$$\max_{u_1(1,2)} u_1(1,2) \text{ sujeto a } u_1(1,2) \geq \alpha_1 u_1(2,2)^*, \;\; 1 - u_1(1,2) \geq \alpha_2(1 - u_1(2,2)^*)$$

Pero esto es exactamente igual que el problema elemental de un solo período analizado antes, con la salvedad de que se ha sustituido d_1 por $u_1(2,2)^*$ y d_2 por $1 - u_1(2,2)^*$. Así que la solución es

$$\begin{aligned} u_1(1,2)^* &= 1 - \alpha_2(1 - u_1(2,2)^*) \\ &= 1 - \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 d_1 \end{aligned}$$

EJERCICIO 9.2: *Compruebe que es cierto que $\alpha_1 u_1(2,2)^* < 1 - \alpha_2(1 - u_1(2,2)^*)$ para que el conjunto factible del problema del primer período sea no vacío.*

Visto lo anterior, estamos en situación de resolver un juego de negociación con un número n cualquiera de periodos siempre que n sea un número par. Considérese un juego de cuatro períodos, $n = 4$. Si la primera y la segunda propuesta es rechazada por ambos participantes, entonces quedarían 2 períodos, y acabamos de ver cómo se resuelve. Por tanto, resulta que

$$\begin{aligned} u_1(3,4)^* &= u_1(1,2)^* \\ &= 1-\alpha_2+\alpha_2\alpha_1 d_1 \end{aligned}$$

Por otro lado, la propuesta en el primer período satisface

$$u_1(1,4)^* = 1-\alpha_2+\alpha_2\alpha_1 u_1(3,4)^*$$

Uniendo estas dos ecuaciones, resulta que

$$\begin{aligned} u_1(1,4)^* &= 1-\alpha_2+\alpha_2\alpha_1(1-\alpha_2+\alpha_2\alpha_1 d_1) \\ &= 1-\alpha_2+\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_2^2 d_1 \end{aligned}$$

Propuesta que sería aceptada por el individuo 2. Siguiendo de esta manera, resulta que $u_1(5,8)^* = u_1(1,4)^*$ y $u_1(1,8)^* = 1-\alpha_2+\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_2^2 u_1(5,8)^*$ para que

$$u_1(1,8)^* = 1-\alpha_2+\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_2^2-\alpha_1^2\alpha_2^3+\alpha_1^3\alpha_2^3-\alpha_1^3\alpha_2^4+\alpha_1^4\alpha_2^4 d_1$$

En general, podemos escribir que la solución para un número general de períodos (que sería aceptado por el individuo 2) es

$$u_1(1,n)^* = 1-\alpha_2+\alpha_1\alpha_2-\ldots-\alpha_1^{\frac{n}{2}-1}\alpha_2^{\frac{n}{2}}+\alpha_1^{\frac{n}{2}}\alpha_2^{\frac{n}{2}} u_1\left(\frac{n}{2}+1,n\right)^* \quad \text{para todo } n \text{ par}$$

No obstante, si expandimos los términos, resulta que esta ecuación se puede escribir como

$$\begin{aligned} u_1(1,n)^* &= 1+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\alpha_1^i\alpha_2^i-\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\alpha_1^{i-1}\alpha_2^i+\alpha_1^{\frac{n}{2}}\alpha_2^{\frac{n}{2}}d_1 \\ &= 1+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\alpha_1^i\alpha_2^i-\frac{1}{\alpha_1}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\alpha_1^i\alpha_2^i+\alpha_1^{\frac{n}{2}}\alpha_2^{\frac{n}{2}}d_1 \\ &= 1+\left(1-\frac{1}{\alpha_1}\right)\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\alpha_1^i\alpha_2^i+\alpha_1^{\frac{n}{2}}\alpha_2^{\frac{n}{2}}d_1 \end{aligned} \tag{9.4}$$

De especial interés es el caso de cuando $n \longrightarrow \infty$, es decir, cuando el juego tiene infinitos períodos. Pero, directamente de (9.4), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} u_1(1,n)^* = 1+\left(\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_1^i\alpha_2^i+\alpha_1^{\infty}\alpha_2^{\infty}d_1$$

Pero como $\alpha_i < 1$ para ambos $i = 1, 2$, el último término es cero, y además

$$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_1^i\alpha_2^i = \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^i = \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u_1(1,n)^* &= 1+\left(\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}\right) \\
&= \frac{\alpha_1(1-\alpha_1\alpha_2)+(\alpha_1-1)\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(1-\alpha_1\alpha_2)} \\
&= \frac{\alpha_1-\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_2-\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(1-\alpha_1\alpha_2)} \\
&= \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2} \qquad (9.5)
\end{aligned}$$

La ecuación (9.5) es la solución, hallada por primera vez por el profesor Ariel Rubinstein, para un juego de negociación de duración (factible) infinita. Siempre y cuando los dos individuos son impacientes, es decir, cuando $\alpha_i < 1$ para ambos $i = 1, 2$, resulta que la propuesta hecha en el primer período (propuesta que corresponde con (9.5)) siempre será aceptada.

EJERCICIO 9.3: *Encuentre el equilibrio en el juego de negociación de Rubinstein para el caso $\alpha_1 = \alpha_2$, y demuestre que en este caso existe una ventaja en actuar primero (es decir, $u_1(1,\infty)^* > \frac{1}{2}$).*

EJERCICIO 9.4: *Sea $R(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}$. Represente los contornos de esta función en el espacio de las α_i suponiendo que* $0 < \alpha_i < 1$ para $i = 1, 2$.

9.3 Relación entre los dos modelos de negociación

En las dos secciones anteriores, hemos estudiado dos modelos de negociación diferentes. Sin embargo, resulta que hay una relación muy cercana entre ambos. En esta sección final, vamos a considerar exactamente cuál es esta relación. Para ello, vamos a volver a considerar el significado de los factores de descuento que aparecen en el modelo de Rubinstein.

En primer lugar, hemos definido α_i como el factor de descuento del individuo i. El factor de descuento indica la paciencia del individuo en el tiempo, cuanto mayor es α_i más paciente es el individuo. Así, se puede apreciar que en la solución del modelo de Rubinstein con infinitos períodos, la utilidad del primer individuo es menor cuanto más paciente es el individuo 2. Ahora, considere una cantidad de utilidad, u, a recibir en el período 2. Valorado en términos de utilidad presente (período 1) esta utilidad vale αu, que cuando $\alpha < 1$ es menor que u. Pero, como se vió en el capítulo 3, donde se ha presentado el modelo sencillo de consumo intertemporal, vimos que el valor financiero presente de una cantidad de dinero x a percibir en el período 2 es precisamente $\frac{x}{1+r}$, donde r es el tipo de interés financiero. De esta manera, podemos apreciar fácilmente que el factor de descuento financiero es $\alpha_f = \frac{1}{1+r}$. En una ecuación de este tipo, el término r se conoce como la "tasa de descuento" (en este caso, la tasa de descuento financiero). De la misma manera, existe una tasa de descuento en las preferencias, q, definida por la relación

$$\alpha = \frac{1}{1+q}$$

Naturalmente, puesto que un valor mayor de α indica una mayor paciencia, la paciencia es decreciente en la tasa de descuento, es decir, cuanto mayor es q, menor es la paciencia intertemporal del individuo.

Ahora bien, ¿qué ocurre si el período natural contemplado hasta ahora se divide en dos partes (sub-períodos), y que se define el factor de descuento de acuerdo con una composición en estos dos sub-períodos? Para contestar a esta pregunta, volvemos al caso de cálculo financiero. Cuando el tipo de interés r se ha definido para un período natural, el tipo de interés correspondiente a cada una de los dos subperíodos será $\frac{r}{2}$. Así que, al principio del segundo sub-período del período 1, una unidad de dinero a recibir al principio del período 2 tendrá valor financiero

$$\frac{1}{1+\frac{r}{2}} = \frac{2}{2+r}$$

De la misma manera, una unidad de dinero a recibir al principio del período 2 tendrá un valor presente al principio del primer sub-período del período 1 de

$$\left(\frac{1}{1+\frac{r}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{2+r}\right)^2$$

Lo mismo sucede con la tasa de descuento en las preferencias. Si q es la tasa de descuento definida para un período natural, y si los períodos naturales se dividen en dos partes cada uno, la tasa de descuento correspondiente a cada sub-período es $\frac{q}{2}$, y el factor de descuento será $\frac{2}{2+q}$.

Podemos fácilmente extender esto a cualquier división de los períodos naturales. Si cada período natural se divide en z sub-períodos de igual duración, entonces la tasa de descuento correspondiente a cada sub-período resulta ser

$$\frac{1}{1+\frac{q}{z}} = \frac{z}{z+q}$$

Ahora, consideremos qué le pasa a la solución del modelo de negociación de Rubinstein cuando, en vez de períodos naturales, se va dividiendo en sub-períodos, con una división cada vez mayor. La solución indicaría que la utilidad del primer individuo, con una división en z sub-períodos sería

$$u_1(z)^* = \frac{1-\left(\frac{z}{z+q_2}\right)}{1-\left(\frac{z}{z+q_1}\right)\left(\frac{z}{z+q_2}\right)}$$

Con un poco de esfuerzo, es sencillo reducir esto a

$$u_1(z)^* = \frac{q_2(z+q_1)}{z(q_1+q_2)+q_1q_2}$$

Se contempla ahora lo que sucede con esta solución a medida que el número de períodos crece, es decir, cuando $z \to \infty$. Utilizando la regla de L'Hôpital, tenemos

$$\lim_{z\to\infty} \frac{q_2(z+q_1)}{z(q_1+q_2)+q_1q_2} = \frac{q_2}{q_1+q_2}$$

Es decir, cuando la duración de los "períodos" dentro del modelo de negociación de Rubinstein se hace infinitamente pequeña, la solución corresponde con un acuerdo que le da al individuo 1 (el que empieza el proceso con la primera propuesta de acuerdo) una utilidad igual a la relación entre la tasa de descuento del individuo 2 y la suma de las tasas de descuento de ambos individuos. Puesto que la paciencia de los individuos varía inversamente con sus tasas de descuento, al individuo 1 le conviene negociar con un contrincante muy poco paciente (un q_2 muy alto).

Estamos ahora en situación de ver con claridad la relación entre los dos modelos de negociación. Una interpretación natural del modelo de Nash es que los períodos intertemporales son infinitamente pequeños (el tiempo es continuo) y por tanto resulta que es el caso límite del modelo de Rubinstein. La solución de negociación de Nash requiere saber cuáles son los poderes relativos de negociación (el valor de λ en la explicación de anterior), pero recordando que λ se define a partir de la solución de Nash del problema representado en la figura 9.2, tenemos ahora una interpretación natural para este valor;

$$\lambda = \frac{q_2}{q_1 + q_2}$$

9.4 Resumen

1. Un problema de negociación consiste en un espacio de acuerdos factibles y un punto de desacuerdo.

2. Es útil estudiar los problemas de negociación definidos directamente en espacios de utilidad de los jugadores.

3. La solución del problema de negociación de Nash identifica un punto único que satisface tres axiomas razonables; eficiencia de Pareto, invarianza ante transformaciones equivalentes, e independencia delas alternativas irrelevantes.

4. La solución de Nash se plantea de acuerdo con un valor pre-establecido para el poder relativo de negociación de los jugadores (λ).

5. El modelo de Rubinstein plantea un juego de negociación de acuerdo con una regla de propuestas de acuerdos intertemporales alternativos.

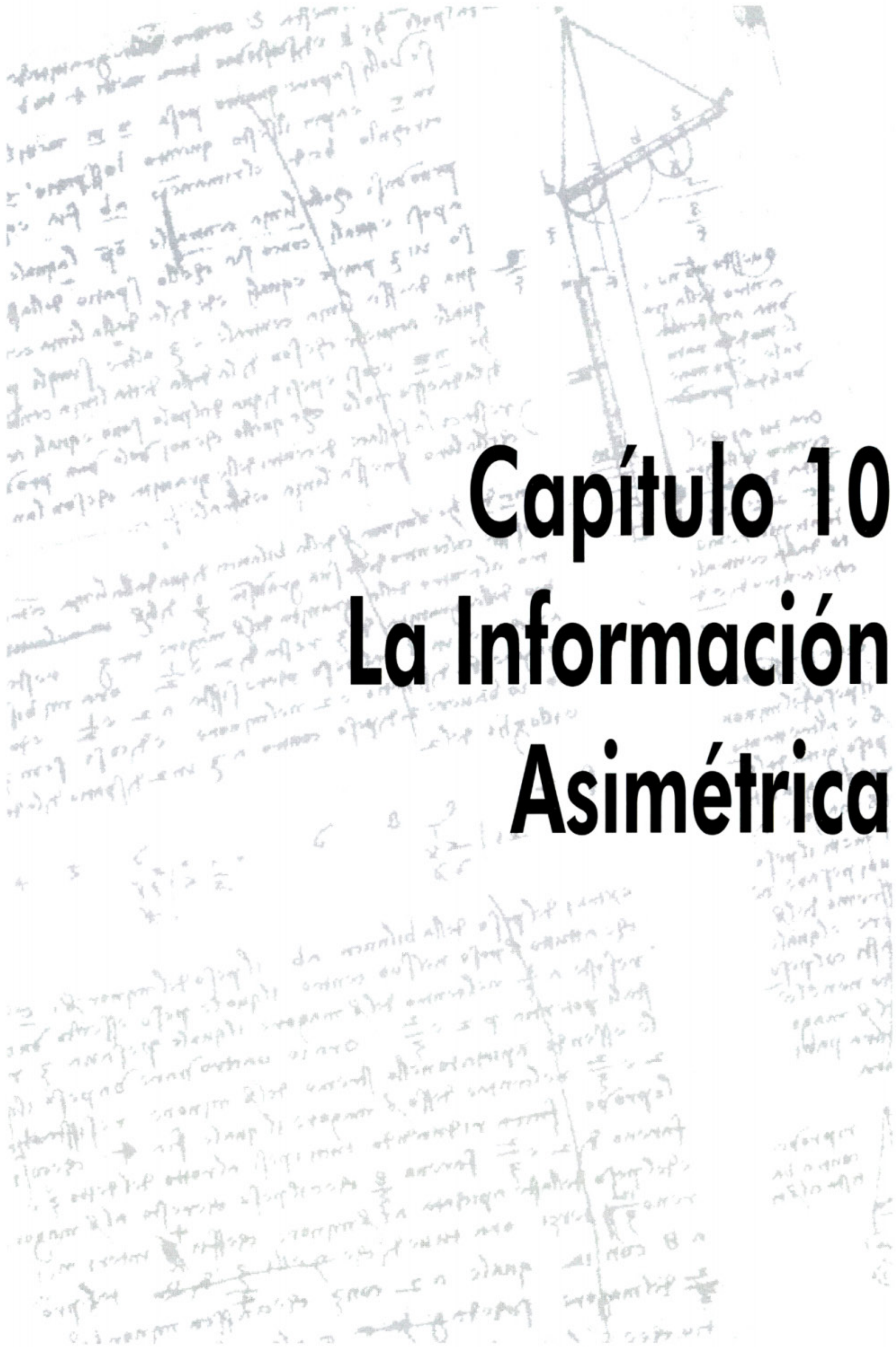
6. En la solución del modelo de Rubinstein, la propuesta hecha en el primer período es aceptada.

7. La solución del modelo de Rubinstein se puede plantear en un modelo de horizonte temporal finito, o con un horizonte temporal infinito.

8. La solución del modelo de Rubinstein con horizonte temporal infinito depende únicamente de los factores de descuento intertemporal de los jugadores.

9. Cuando se acorta infinitamente la duración de los períodos en el modelo de Rubinstein, la solución resulta ser un acuerdo que proporciona al individuo 1 una utilidad igual a la proporción de la tasa de descuento del individuo 2 en la suma de las tasas de descuento de ambos jugadores.

10. La solución del modelo de Rubinstein con infinitos períodos cada uno de duración infinitamente corta proporciona una interpretación natural para los poderes de negociación en el modelo de Nash. Aceptando esta interpretación, el modelo de Nash resulta ser un caso particular del modelo de Rubinstein.



Capítulo 10
La Información Asimétrica

Capítulo 10

La Información Asimétrica

En todos los capítulos precedentes, los resultados obtenidos han dependido del supuesto de que todos los agentes económicos comparten exactamente la misma información cuando llevan a cabo sus procesos de elección. Por ejemplo, considérese una caja de Edgeworth con incertidumbre, pero en donde los dos agentes disponen de distinta información respecto de la probabilidad de que sucedan los dos estados de la naturaleza, y en donde ninguno de los dos sabe cuál es la probabilidad que el otro agente utiliza. En este caso, la relación marginal de sustitución del individuo i es $RMS_i = -\frac{(1-p_i)u_i'(x_1^i)}{p_i u_i'(x_2^i)}$, en donde p_i es la probabilidad que supone este individuo para la ocurrencia del estado 2. Igualando las dos relaciones marginales de sustitución, resulta la curva de contratos se caracteriza por los puntos que verifican

$$\frac{(1-p_1)u_1'(x_1^1)}{p_1 u_1'(x_2^1)} = \frac{(1-p_2)u_2'(x_1^2)}{p_2 u_2'(x_2^2)}$$

Si el individuo i supiera el valor de p_j para $i, j = 1, 2$ y $i \neq j$, entonces nada fundamental habría cambiado con respecto de lo que se hizo en el capítulo 8. Únicamente ocurre que la posición y pendiente de la curva de contratos depende de ambas probabilidades p_1 y p_2. El probema se produce cuando ninguno de los dos agentes sabe la probabilidad utilizada por el otro. En este caso, nadie sabe dónde se localiza la curva de contratos, e incluso es debatible que *exista* una curva de contratos, ya que resulta imposible igualar las relaciones marginales de sustitución si se desconoce el valor de un parámetro dentro de la ecuación característica. Un caso como este, en donde los dos agentes disponen de información distinta a la hora de realizar sus elecciones, se conoce como un problema en un marco de información asimétrica.

Dada la obvia importancia y realismo de un supuesto de información asimétrica, es muy interesante que realicemos el tratamiento de un modelo sencillo de equilibrio general en donde dos personas cuentan con diferentes conjuntos de información. Esto es lo que vamos a hacer a lo largo de este último capítulo. No obstante, antes de empezar conviene resaltar y definir con precisión dos términos que aparecen frecuentemente en la literatura, con el propósito de que la exposición sea muy clara. En primer lugar, se puede diferenciar entre un problema con información perfecta y uno con *información imperfecta*. Si la información es perfecta, entonces no hay ningún dato relevante desconocido por ninguno de los agentes económicos. Claramente este es el escenario que hemos supuesto hasta ahora. Por el contrario, un problema de información imperfecta corresponde a una situación en donde no hay información perfecta, es decir, al menos un agente económico desconoce algún dato importante. Dentro de lo que es la información imperfecta, podemos identificar una situación de *información asimétrica* cuando diferentes agentes económicos desconocen distintos datos, y una situación de información simétrica cuando los datos que un agente cualquiera desconoce son desconocidos por todos los agentes, es decir, todo el mundo posee la misma información. A modo de resumen, problemas en un marco de información perfecta son, por definición, problemas de información simétrica, pero los problemas de información imperfecta pueden ser de información simétrica o asimétrica (por tanto, un problema de información asimétrica necesariamente es de información imperfecta).

El modelo que vamos a utilizar a lo largo del capítulo es el de la caja de Edgeworth, aunque en ninguna gráfica se representan los ejes superiores de la caja, de modo que se entiende que un punto x en el espacio del análisis indica lo que le corresponde al individuo 1. Por supuesto, el sentido de las preferencias del agente 1 son hacia arriba, mientras que el sentido de las preferencias del individuo 2 son hacia abajo (cuanto menos recibe el agente 1, más recibe el agente 2). Con motivo de hacer una exposición consistente, haremos el supuesto de que la información asimétrica corresponde a una situación en la que el individuo 1 está perfectamente informado, mientras que el individuo 2 desconoce el valor verdadero de un dato relevante. Vamos a estudiar dos tipos de problema de información asimétrica, diferenciados según el tipo de dato que el agente 2 desconoce. Si es un parámetro del problema (es decir, si su valor se establece exógenamente), entonces se trata de un problema de *selección adversa*, mientras que si el dato que el agente 2 desconoce es una variable de elección del agente 1 (es decir, el valor del dato se establece por el individuo 1 endógenamente), entonces se trata de un problema de *riesgo moral*.

Para hacer un análisis lógico de una situación de información asimétrica, es muy útil tener un objetivo predeterminado bien claro. Lo más razonable es que el objetivo sea el de maximizar la utilidad esperada de alguno de los dos agentes económicos, y con esta idea en la mente, el marco de análisis que vamos a utilizar, de acuerdo con lo que es ya habitual en la literatura sobre la información asimétrica, se conoce como el marco *principal-agente*. Los dos términos “principal” y “agente”[1] son los nombres que se utilizan para definir a las dos partes de un contrato de prestación de servicios. Un principal contrata a un agente para realizar alguna acción en concreto (por ejemplo, en una relación entre un abogado y un cliente, el abogado es el agente, el cliente es el principal y la acción puede ser la defensa de una causa ante un tribunal). Dentro de este marco, lo interesante acontece cuando el principal, que diseña un contrato para ofrecérselo a un agente, sufre una desventaja en lo que a la información se refiere (es decir, el principal es el individuo 2 y el agente es el individuo 1). Podemos entender un “contrato” como un documento formal que recoje todas y cada una de las responsibilidades y obligaciones de las dos partes, o también puede ser algo tan sencillo como un precio al que se intercambia algún bien o servicio, o bien el pago que se debe realizar en cada posible contingencia.

En el equilibrio de un problema con información asimétrica, se utiliza el concepto de equilibrio de Nash de la teoría de los juegos. Concretamente, *se tendrá un equilibrio cuando ningún principal tiene el incentivo de variar la oferta de contratos que hace, dada la oferta que hacen los demás principales.*

Un problema de información asimétrica solamente cobra interés y sentido cuando se analiza en un marco de incertidumbre. Supongamos que un principal desea establecer un contrato que define el salario que debe cobrar un agente a cambio de la realización de una acción bien definida, que da lugar a un resultado perfectamente observable y medible por todos pero que depende de la habilidad inata del agente para el desempeño de la

[1] La influencia del inglés es clara en estos dos conceptos que se traducen de ,anera literal en toda la literatura editada en castellano.

acción. Si el principal no puede observar la habilidad del agente, se produce un problema de información asimétrica (de hecho, sería un problema de selección adversa). Como es natural, al principal le interesaría pagar al agente de acuerdo con su habilidad verdadera (quizá para pagar más al agente más habilidoso que al menos habilidoso); sin embargo, al no poder observar el grado de habilidad, es posible que acabe contratando con un agente de baja habilidad pero pagando el salario que le correspondería a un agente con habilidad alta. Si la relación se efectúa en un ambiente de perfecta certidumbre, entonces, al terminar la acción, el valor del resultado define perfectamente la información desconocida por el principal al comenzar. Es decir, en ausencia de incertidumbre, como la observación de un mal resultado es una prueba inequívoca de que se trata de un agente con habilidad baja, mientras que un buen resultado es una prueba clara de que se trata de un agente con habilidad alta, el problema de información asimétrica se resuelve perfectamente con un contrato contingente - si el resultado es bueno, entonces el agente debe cobrar el salario correspondiente a un grado de habilidad alta, pero si el resultado es malo, el agente debe cobrar el salario correspondiente a la habilidad baja. En este caso, se dice que el valor del resultado es una *señal perfecta* para la información inicialmente desconocida por el principal. La existencia de una señal perfecta tiene el efecto de eliminar el problema de información asimétrica inicial.

Por supuesto las cosas son muy diferentes cuando la acción se desarrolla en un ambiente de incertidumbre. En este caso, el valor del resultado final dependerá de la habilidad inata del agente, pero también de la realización del estado de la naturaleza. Por ejemplo, independientemente de lo bueno o malo que sea un entrenador de fútbol, la probabilidad de que su equipo gane o pierda nunca es extrema (es decir, aunque el entrenador sea malo, todavía es factible que el equipo gane algún partido; por el contra, puede que se trate de un gran entrenador y sin embargo nadie será capáz de asegurar que el equipo va a ganar siempre. No obstante, es razonable suponer que la probabilidad de que se produzca un resultado favorable es mayor si el agente dispone de habilidades buenas que si se trata de un agente con habilidad baja. En este caso, el resultado final es una *señal imperfecta* de la información desconocida, y entonces tenemos un problema de información asimétrica que no tiene solución trivial.

Por otra parte, si se repite la acción muchas veces y se observa el vector de resultados correspondientes, una sencilla aplicación de la Ley de Bayes es suficiente para que este caso converja a la situación de certidumbre. Ahora bien, puede que esto no sea muy interesante para el principal, al que podría convenirle más el diseño de un contrato que le garantizase que, desde el principio, el agente que trabaja con él es el habilidoso.

10.1 La selección adversa

Un problema de selección adversa sucede cuando el agente es informado sobre el valor verdadero de un parámetro pero el principal desconoce este valor. El siguiente juego, primeramente sugerido por George Akerlof[2], constituye un buen ejemplo de una situación de selección adversa. Un individuo tiene un coche que desea vender en el mercado de segunda mano. El coche puede ser de una calidad excelente, en cuyo caso tiene un valor de v_1, o puede ser defectuoso, en cuyo caso su valor es de v_2, en donde obviamente $v_2 < v_1$. El dueño del coche, por el hecho de haber conducido el vehículo durante cierto tiempo, conoce

[2] George A. Akerlof (1970). "The Market for "Lemons": Quality, Uncertainty and the Market Mechanism". *The Quaterly Journal of Economics.*

perfectamente su calidad verdadera, que denotamos por v, sea cual sea. No obstante, se sabe que cierta proporción, digamos q, de todos los coches en el mercado de segunda mano son de calidad defectuosa. Por otro lado, un segundo individuo, para el que la calidad del coche es un dato desconocido, está interesado en comprar el coche. Ambos individuos están regateando el precio de la transacción, p. Se supone que los dos individuos son neutrales ante el riesgo. Claramente, el dueño del coche no estaría dispuesto a aceptar un precio inferior a v, así que el precio de la transacción (si se realiza) debe satisfacer $p \geq v$, en caso contrario, el vendedor rechaza la transacción. Por otro lado, la neutralidad ante el riesgo del comprador indica que estaría dispuesto a pagar, como mucho, un precio igual al valor esperado de un coche cualquiera del mercado de segunda mano, así que el precio de la transacción tiene que también satisfacer $p \leq (1-q)v_1 + qv_2$. Ahora bien, si el vendedor acepta un precio de $(1-q)v_1 + qv_2$ es una señal perfecta de que en realidad se trata de un coche de valor v_2, pues sabemos que $(1-q)v_1 + qv_2 < v_1$ y que el hecho de que el vendedor acepta el trato ya elimina la posibilidad de que el valor verdadero del coche sea v_1. En este caso, la aceptación del precio $(1-q)v_1 + qv_2$ señala perfectamente que $v = v_2$, y entonces el único precio posible para la transacción es $p = v_2$. Desafortunadamente, lo mismo no ocurre si en realidad resulta que $v = v_1$. En este caso, obviamente el hecho de que $(1-q)v_1 + qv_2 < v_1$ indica que el precio mínimo que aceptaría el vendedor es mayor que el precio máximo que ofrecería el comprador y la transacción no puede realizarse. El hecho de que en este ejemplo los únicos coches que se podrían comprar y vender en el mercado de segunda mano son de baja calidad es de donde proviene el término selección adversa - la asimetría en la información puede tener el resultado de que el mercado seleccione únicamente las calidades más adversas.

Ejercicio 10.1: *Razone por qué el comprador no debe entender que el rechazo de un precio de* $(1-q)v_1 + qv_2$ *por parte del vendedor sea una señal perfecta de que la calidad verdadera sea* v_1. *¿Sería una solución al problema el hecho de que un mecánico pueda certificar la calidad verdadera del coche con certidumbre?*

En el ejemplo anterior, puesto que no hay incertidumbre, es evidente que existen mecanismos mediante los cuales la solución al problema se vuelve trivial. Por ejemplo, la venta de un producto con garantía en este caso es suficiente para que se pueda realizar la transacción, siempre y cuando la calidad verdadera del coche sea un dato contrastable por terceros, y no variable por ninguno de los individuos. Por supuesto, las situaciones más realistas descansan en un marco con incertidumbre. Este tipo de situaciones se tratan a continuación.

Suponga un principal que desea contratar a un agente para realizar una acción bien definida y del todo observable. Existe una población de agentes diferenciados por su "tipo", que resume sus talentos y caracteristicas naturales e invariantes, pero no directamente observables (como puede ser, por ejemplo, su intelegencia, su habilidad de trabajar en equipo, su probabilidad de faltar al trabajo por enfermedad, ...). Supongamos que solamente hay dos tipos de agente en la población, digamos tipo 1 y tipo 2. La proporción de individuos de tipo 1 sobre el total de la población la población es π, que suponemos estrictamente entre 0 y 1. Se supone que cada agente individual está perfectamente informado sobre su tipo verdadero, pero que el principal no dispone de esta información (es decir, el principal sí sabe que hay dos tipos, sabe la descripción perfecta de cada tipo, y sabe el valor de π, pero no es capaz de saber el tipo exacto de un agente cualquiera).

La relación se lleva a cabo en un ambiente de incertidumbre con dos estados de la naturaleza, en donde consideraremos que el estado 1 es el mejor (es decir, sea cual sea el tipo del agente contratado, el estado 1 corresponde con un mejor resultado para el principal, el estado 2 implica un resultado peor). En concreto, supongamos que si ocurre el estado i, entonces el resultado de la relación contratual es x_i, en donde $x_1 > x_2$, siendo la variable x una cantidad monetaria. Haremos el supuesto de que los dos tipos de agente se diferencian según su probabilidad de que sucedan los dos estados de la naturaleza. Si el principal contrata con un agente del tipo i, entonces resulta que la probabilidad del estado 2 es p_i, en donde $i = 1, 2$. Concretamente, supondremos que $p_1 < p_2$, de modo que un agente de tipo 1 es "bueno" y que un agente de tipo 2 es "malo" en el sentido de que el tipo 1 consigue el estado de la naturaleza desfavorable con menor probabilidad (y por tanto, consigue el estado más favorable con mayor probabilidad).

En este marco, un "contrato" ofrecido por el principal a un agente, consiste en dos números que indican el pago que el agente recibe en función del estado de la naturaleza que surja. En concreto, sea un contrato en general un vector $w = (w_1, w_2)$, en donde el agente recibe un salario de w_i cuando el resultado es x_i para $i = 1, 2$. El principal puede ofrecer a cada agente más de un contrato, a efectos de que el agente escoja entre ellos. No obstante, es importante resaltar que, puesto que el principal no es capaz de distinguir entre los dos tipos de agente, *tiene que ofrecer la misma variedad de contratos a cada agente*. Si cada agente, independientemente de su tipo, escoje el mismo contrato de entre los que el principal ofrece, se dice que se se han *agrupado*, y podemos hablar de un *equilibrio agrupador*, mientras que si los agentes de tipo 1 escojen un contrato diferente que el que escojen los de tipo 2, entonces se dice que se han *separado*, y podemos hablar de un *equilibrio separador*. Ante todo, estaremos interesados en situaciones de equilibrio separador, puesto que cuando cada tipo de agente escoje (libremente) un contrato diferente, esta elección revela la información que inicialmente era desconocida por el principal (y por este motivo, también se habla de equilibrios de auto-selección, o equilibrios reveladores).

Puesto que el principal es el contratante en la relación, supondremos que en general es un empresario, y hablaremos de su función objetivo como su *beneficio esperado*. Como es habitual en los empresarios, supondremos que su beneficio se mide en términos monetarios, es decir, el principal es neutral ante el riesgo. A cambio, puesto que los agentes son los contratados, supondremos que en general su función objetivo es su utilidad esperada y que son adversos ante el riesgo. Para facilitar el análisis, es muy habitual suponer que los agentes son idénticos en todo menos la probabilidad de que se produzcan los estados de la naturaleza. Concretamente entonces, la función de utilidad indirecta de cualquier agente es $u(z)$, con $u'(z) > 0$ y $u''(z) < 0$.

Si el principal acaba contratando con un agente de tipo i, entonces su beneficio esperado es

$$\begin{aligned} E_i(x - w) &= (1 - p_i)(x_1 - w_1) + p_i(x_2 - w_2) \\ &= E_i x - (1 - p_i)w_1 - p_i w_2 \end{aligned}$$

y la utilidad esperada de un agente de tipo i es

$$E_i u(w) = (1 - p_i)u(w_1) + p_i u(w_2) \quad i = 1, 2$$

Las curvas de indiferencia de los agentes en el espacio de los contratos son decrecientes y convexas respecto del origen (véase el capítulo 4 para un análisis detallado de este hecho), y su relacion marginal de sustitución en cualquier punto w es

$$RMS_i(w) = -\frac{(1 - p_i)u'(w_1)}{p_i u'(w_2)} \quad i = 1, 2$$

En cualquier punto sobre la bisectriz del espacio de los contratos ($w_1 = w_2$), resulta que

$$RMS_i(w)|_{w_1=w_2} = -\frac{(1-p_i)}{p_i} \quad i = 1, 2$$

Además del supuesto de que $p_1 < p_2$, resulta que en cualquier punto en el espacio de los contratos la curva de indiferencia de un agente de tipo 1 es más inclinada que la curva de indiferencia de un agente de tipo 2 pasando por el mismo punto. Para ver esto, simplemente diferenciamos $RMS_i(w)$ con respecto de p_i,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial RMS_i}{\partial p_i} &= -\frac{(-u'(w_1)p_i u'(w_2)) - (1-p_i)u'(w_1)u'(w_2)}{(p_i u'(w_2))^2} \\
&= \frac{u'(w_1)u'(w_2)}{(p_i u'(w_2))^2}(p_i + (1-p_i)) \\
&= \frac{u'(w_1)}{p_i^2 u'(w_2)} > 0
\end{aligned}$$

Es decir, cuanto mayor es p_i, mayor es la relación marginal de sustitución. Como la relación marginal de sustitución es negativa, un incremento en RMS corresponde con una curva de indiferencia más plana.

De igual forma, las curvas de indiferencia del principal son lineales en el espacio de los contratos, y su pendiente en cualquier punto cuando se trata de un contrato con un agente de tipo i es $-\frac{(1-p_i)}{p_i}$, es decir, las curvas de indiferencia del principal son más planas cuando se trata de un agente de tipo 2 que cuando se trata de un agente de tipo 1. En la figura 10.1 se muestran las curvas de indiferencia de los dos tipos de agente, y en la figura 10.2 las curvas de indiferencia del principal cuando contrata con cada tipo de agente.

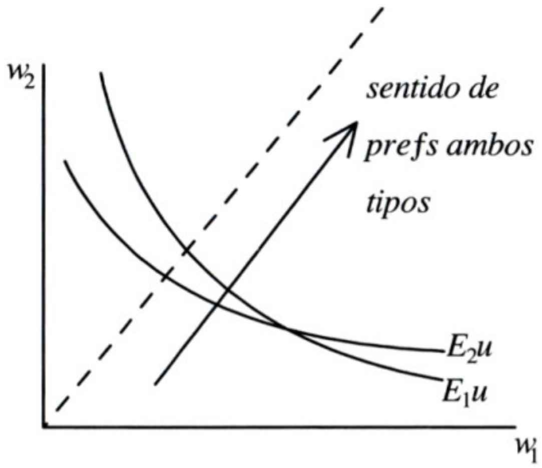


Figura 10.1.

Sea la utilidad de reserva de un agente de tipo i igual a $\overline{u}_i$, y supongamos que la utilidad de reserva del principal es 0. Suponiendo que todos los agentes tienen las mismas oportunidades fuera de la relación bajo análisis, y recordando que los agentes de tipo 1 son en algún sentido mejores ya que consiguen el estado bueno con mayor probabilidad, es razonable entonces suponer que $\overline{u}_2 < \overline{u}_1$, es decir, los agentes de tipo 1 tienen una utilidad de reserva mayor que los de tipo 2. En concreto, esto implica que la curva de indiferencia de reserva de los agentes de tipo 1 corta a la bisectriz del espacio de los contratos en un

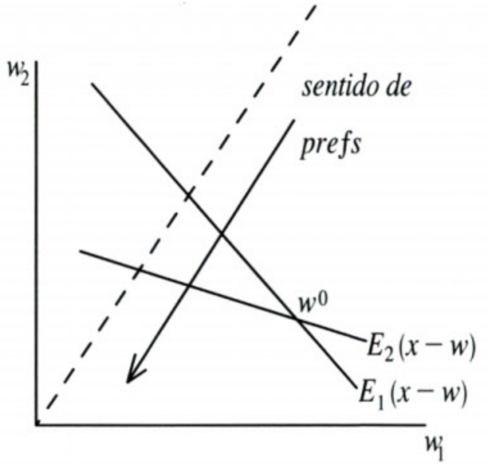


Figura 10.2.

punto más alto que la curva de indiferencia de reserva de los agentes de tipo 2. También implica que las dos curvas de indiferencia de reserva intersectan en un punto caracterizado por $w_1 > w_2$.

Un contrato w consigue que participen voluntariamente un agente del tipo i y el principal cuando se satisfacen simultáneamente las condiciones

$$\begin{aligned} (1-p_i)u(w_1) + p_i u(w_2) &\geq \overline{u}_i \\ E_i x - (1-p_i)w_1 - p_i w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Estas dos condiciones se conocen como las *condiciones de participación* (del agente de tipo i y del principal, respectivamente).

Nótese que, puesto que hay solamente dos tipos de agente, como mucho el principal podrá ofrecer dos contratos. La razón es obvia; si ofrece más de dos contratos, todos menos dos serán ignorados por todos los agentes. Es decir, a todos los agentes de un solo tipo les va a interesar el mismo contrato del conjunto total de contratos ofrecidos, puesto que todos los agentes de un solo tipo son idénticos entre sí. Así, puesto que solamente hay dos tipos de agente diferentes, solamente es necesario ofrecer (como mucho) dos contratos distintos. Nuestro objetivo será el de encontrar las coordenadas de los dos contratos "óptimos", que denotaremos por w^{*1} y w^{*2} respectivamente, sin imponer que sean necesariamente distintos.

Por supuesto, un contrato cualquiera w, ofrece al principal un beneficio esperado diferente según el tipo de agente que lo firma. Por esto, si efectivamente el principal ofrece dos contratos distintos, uno diseñado para los agentes de tipo 1 y otro diseñado para los agentes de tipo 2, denominados (respectivamente) w^1 y w^2, es necesario que se asegure de que los firmantes del primer contrato son agentes de tipo 1, y los firmantes del segundo contrato son agentes de tipo 2. Formalmente, y recordando que el principal tiene que ofrecer ambos contratos a cada agente, esto requiere que los dos contratos respeten las llamadas *condiciones de compatibilidad de incentivos*, que son

$$E_i u(w^i) \geq E_i u(w^j) \quad i, j = 1, 2$$

Las condiciones de compatibilidad de incentivos aseguran que a cada tipo de agente, le interesa más el contrato diseñado para su tipo que el contrato diseñado para el otro tipo.

El principal podría desear contratar con ambos tipos de agente (eso sí, con diferentes contratos), o podría desear contratar a un solo tipo de agente. Siempre que pueda encontrar un contrato que satisface todas las condiciones de participación y de compatibilidad de incentivos, deseará efectuar un contrato. En toda esta sección haremos el supuesto de que en la solución al problema, el principal contrata con ambos tipos de agente.

El objetivo que el principal busca con la oferta de los contratos óptimos depende del entorno, es decir, competencia perfecta o monopolio. Un principal que funciona en un ámbito de competencia perfecta, está condicionado a tener un beneficio esperado no-negativo, mientras que si es un monopolista, maximizaría libremente su beneficio. Vamos a tratar cada una de estas opciones por separado.

10.1.1 Competencia perfecta

Si el principal actúa en competencia perfecta el mercado le impone que su beneficio esperado no sea estrictamente positivo. Por otra parte, como por su condición de participación tampoco puede ser negativa, tendrá que acabar con un beneficio nulo exactamente. En este caso, podríamos modelar su problema como dos problemas simultáneos de maximización restringida, en donde las funciones objetivos son las utilidades esperadas de los dos tipos de agente, y los dos problemas llevan las mismas restricciones, concretamente, las tres condiciones de participación, y las dos condiciones de compatibilidad de incentivos. No obstante, dado que es más facil tratar un único problema, vamos a modelar el problema maximizando la suma ponderada de las dos funciones de utilidad esperada de los dos agentes (ponderadas según la probabilidad de cada tipo de agente), condicionada también a las restricciones de participación y compatibilidad de incentivos de los agentes, y condicionada a que la suma ponderada de los beneficios del principal sea nula. Es decir, el problema es como sigue

$$\max_{w^1,w^2} \; \pi\left[(1-p_1)u(w_1^1)+p_1u(w_2^1)\right]+(1-\pi)\left[(1-p_2)u(w_1^2)+p_2u(w_2^2)\right]$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
\frac{\pi\left[E_1x-(1-p_1)w_1^1-p_1w_2^1\right]}{(1-\pi)\left[E_2x-(1-p_2)w_1^2-p_2w_2^2\right]} &= -1 && (10.1)\\
(1-p_1)u(w_1^1)+p_1u(w_2^1) &\geq \overline{u}_1 && (10.2)\\
(1-p_2)u(w_1^2)+p_2u(w_2^2) &\geq \overline{u}_2 && (10.3)\\
(1-p_1)u(w_1^1)+p_1u(w_2^1) &\geq (1-p_1)u(w_1^2)+p_1u(w_2^2) && (10.4)\\
(1-p_2)u(w_1^2)+p_2u(w_2^2) &\geq (1-p_2)u(w_1^1)+p_2u(w_2^1) && (10.5)
\end{aligned}$$

Se trata claramente un problema muy extenso, con 4 variables a elegir (las dos componentes de los dos vectores de salarios), y 5 restricciones (que suponen 5 multiplicadores de Lagrange). En total, si resolvieramos por el método de Lagrange, tendríamos un sistema de 9 ecuaciones y 9 incógnitas. Afortunadamente, es mucho más facil hacer un análisis gráfico.

Para empezar, nótese el siguiente resultado:

Resultado 10.1: *Sea cual sea la solución al problema de selección adversa con perfecta perfecta, tiene que caracterizarse por* $w^{*1} \neq w^{*2}$.

El resultado 10.1 indica que es imposible que en la solución al problema se diseñe el mismo contrato para ambos tipos de agente, es decir, no habrá núnca un equilibrio agrupador. Para ver la razón, supongamos que no fuera cierto, y que $w^{*1} = w^{*2} = w$ fuera una solución al problema, y definimos $q \equiv \pi p_1 + (1-\pi)p_2$. Primero, si la solución implica un solo contrato para ambos tipos, entonces, para satisfacer la restricción (10.2), se requiere

$$\pi\left[E_1 x - (1-p_1)w_1 - p_1 w_2\right] = -(1-\pi)\left[E_2 x - (1-p_2)w_1 - p_2 w_2\right]$$

de donde despejando w_2 se obtiene la línea recta definida por

$$w_2 = \frac{\pi E_1 x + (1-\pi)E_2 x}{q} - \frac{(1-q)}{q} w_1$$

Esta recta pasa por el punto en donde se intersectan las rectas de indiferencia del principal condicionado a un contrato con cada tipo de agente (el punto w^0 en la figura 10.2). En los puntos situados a la izquierda de w^0 la utilidad positiva que se recibe con los agentes de tipo 1 queda contrarestada por la utilidad negativa obtenida de los agentes de tipo 2. Vamos a indicar esta recta por $E_\pi(x-w) = 0$.

Pero en este caso, puesto que el objetivo es maximizar la suma ponderada de las utilidades de los dos agentes, esta solución tiene que encontrarse en algún punto estrictamente entre los dos puntos en donde cada curva de indiferencia se hace tangente a la recta $E_\pi(x-w) = 0$, dado que con cualquier otra opción se puede incrementar la utilidad de ambos agentes con un movimiento a lo largo de la recta. Así, la solución corresponde con un punto en donde la curva de indiferencia de los agentes de tipo 1 es más inclinada que la recta $E_\pi(x-w) = 0$ y la curva de indiferencia de los agentes de tipo 2 es menos inclinada que dicha recta.

Ejercicio 10.2: *Pruebe (gráficamente) lo que se afirma en el párrafo anterior.*

La situación expuesta se ha representado en la figura 10.3. El contrato propuesto de equilibrio es w, punto en el que se intersectan dos curvas de indiferencia. La más inclinada corresponde a un agente de tipo 1 y la menos inclinada a un agente de tipo 2.

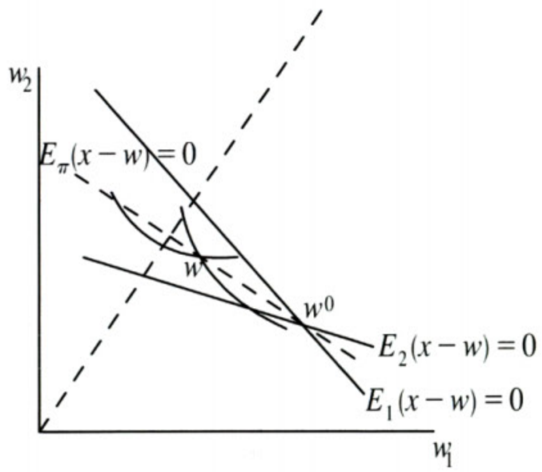


Figura 10.3.

Ahora bien, nótese que esto implica que se abre siempre la opción de diseñar un nuevo contrato que se localiza por debajo de la curva de indiferencia del agente tipo 2 y por encima de la curva de indiferencia del agente tipo 1, que sería aceptada solamente por un agente de tipo 1, y que proporcionaría al principal una utilidad esperada estrictamente positiva, ya que se encuentra por debajo de la correspondiente recta de utilidad esperada nula (la recta $E_1(x-w)=0$). Por ejemplo, en la figura 10.3, cualquier contrato sobre la recta $E_\pi(x-w)=0$ entre los dos puntos w y w^0 sería suficiente. Pero, dada la oferta (que estamos suponiendo) de w por parte de los principales, todos ellos tienen el incentivo de variar su oferta, y consecuentemente, el punto w nunca puede ser un equilibrio.

Ejercicio 10.3: *En la figura 10.3, se ha representado el candidato a equilibrio w a la izquierda de w^0, y el argumento que se ha presentado corresponde con esta opción. Pruebe que el argumento no cambia cuando se considera un candidato a equilibrio a la derecha de w^0.*

Visto que nunca puede darse un equilibrio agrupador, el resultado es que se diseña un contrato distinto para cada tipo de agente. Pero entonces el contrato diseñado para los agentes de tipo 1 tiene que hallarse sobre la recta $E_1(x-w)=0$, mientras que el contrato diseñado para los agentes de tipo 2 tiene que encontrarse sobre la recta $E_2(x-w)=0$ (ya que la única opción alternativa es un contrato sobre $E_\pi(x-w)=0$, que como acabamos de probar, nunca es un equilibrio). Es decir, cada principal no sólo va a recibir un beneficio esperado nulo cuando sume el beneficio esperado de cada contrato, sino que también va a percibir un beneficio esperado nulo en cada uno de los contratos individuales.

Si escojemos un punto cualquiera sobre la recta $E_2(x-w)=0$ como el contrato que se diseña para el agente de tipo 2 y lo denominamos w^2 (por comodidad, dibujamos el punto w^2 a la izquierda de w^0), se tiene que por este punto pasa una curva de indiferencia de un agente de tipo 2, $E_2u(w^2)$, que corta a la recta $E_1(x-w)=0$ en algún punto, pongamos que es el $w^1(w^2)$. Así, para respetar la condición de compatibilidad de incentivos de los agentes de tipo 2, el contrato que se diseña para los de tipo 1 (w^1) no puede situarse estrictamente por encima de la curva de indiferencia $E_2u(w^2)$, pues si lo hiciera, los agentes de tipo 2 escojerían el contrato w^1 antes de w^2. Por otra parte w^1 también debe encontrarse sobre la recta $E_1(x-w)=0$ puesto que tiene que proporcionar un beneficio esperado nulo para el principal. Dado esto, debemos buscar el punto w^1 que maximiza $E_1u(w^1)$ sujeto a que esté situado sobre la recta $E_1(x-w)=0$ y más arriba o más abajo del punto $w^1(w^2)$. Claramente el punto que buscamos es el propio punto $w^1(w^2)$, puesto que a medida que se desplaza la recta $E_1(x-w)=0$ hacia arriba se ofrecien a un agente de tipo 1 contratos con el mismo valor esperado y con menor varianza, lo que le aumenta su utilidad esperada. En resumen, si escojemos un punto arbitrario w^2 sobre la recta $E_2(x-w)=0$, y lo usamos como el contrato diseñado para los agentes de tipo 2, entonces el contrato correspondiente a los agentes de tipo 1 es el punto en donde la curva de indiferencia $E_2u(w^2)$ corta a la recta $E_1(x-w)=0$.

Una vez conocido cuál es el contrato para los agentes de tipo 1 que corresponde a cualquier contrato para los de tipo 2, resta por determinar cuál es el contrato óptimoque debe ofertarse a los agentes de tipo 2. Pero esto es trivial. Puesto que el objetivo es maximizar la suma ponderada de las utilidades esperadas, lo único que tenemos que hacer es elevar la curva de indiferencia de los agentes de tipo 2 a su posición más alta posible en el espacio de los contratos, ya que entonces también estará en su posición máxima la curva de indiferencia de los agentes de tipo 1. Esto obviamente corresponde al punto sobre $E_2(x-w)=0$ en donde $w_1=w_2$. La situación se representa en la figura 10.4.

En resumen, si el principal ofrece a cualquier agente la elección entre los dos contratos w^1 y w^2 según queda representado en la figura 10.4, entonces

1. los agentes de tipo 1 escogerán el contrato w^1,
2. los agentes de tipo 2 escogerán el contrato w^2,

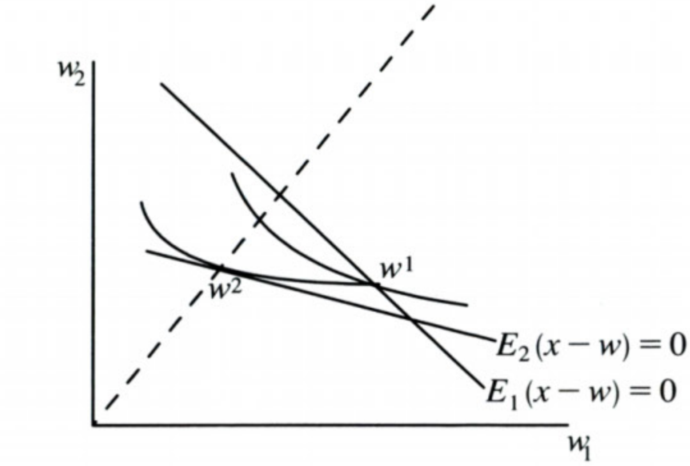


Figura 10.4.

3. el principal recibirá un beneficio esperado nulo,
4. no se puede diseñar otro par de contratos, distintos entre sí, que cumplan los tres puntos anteriores sin disminuir la utilidad esperada de ambos tipos de agente.

Por consiguiente, los dos contratos representados en la figura 10.4 contituyen el (único) equilibrio separador para el problema. Puesto que no hay equilibrios agrupadores, tenemos que estos dos contratos son el único equilibrio factible, sin embargo, puede darse un pequeño problema. Considérese la posibilidad de que la curva de indiferencia de los agentes de tipo 1 corte a la linea $E_\pi(x-w)=0$, como se representa en la figura 10.5. En este caso, dada la oferta de w^1 y w^2 por parte de todos los demás principales, un principal rebelde tendría el incentivo de ofrecer un único contrato en la zona indicada por la sombra en la figura 10.5, que lograría captar a todos los agentes (puesto que se halla por encima de ambas curvas de indiferencia), y le proporcionaría un beneficio esperado positivo (puesto que se encuentra por debajo de la recta $E_\pi(x-w)=0$. En este caso, la opción del beneficio esperado positivo con un contrato agrupador que mejora la utilidad de ambos tipos de agente parece destruir a w^1 y w^2 como equilibrio.

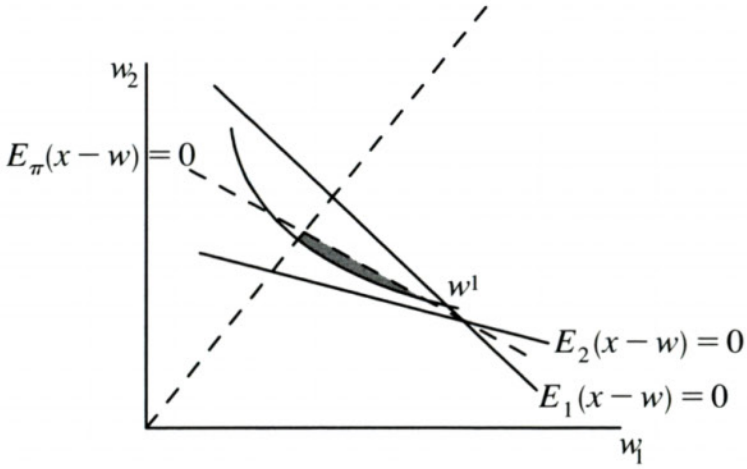


Figura 10.5.

No obstante, aún en este caso, ¿es realmente cierto que a algún principal le interese ofrecer un contrato en la zona sombreada? De hacerlo, inmediatamente se abriría la opción para todos los demás principales de ofrecer un nuevo contrato por debajo de la curva de indiferencia de los agentes de tipo 2 y por encima de la de los agentes de tipo 1, quitándole así al principal rebelde todos sus agentes de tipo 1 y dejándole con los de tipo 2. Pero puesto que el contrato ofertado por el principal rebelde se encuentra en una zona por encima de la recta $E_2(x-w)=0$, éste obtendría un beneficio esperado estrictamente negativo. En conclusión, un argumento como este es suficiente para defender la situación de la figura 10.4 como el único equilibrio dentro del marco de la selección adversa en competencia perfecta.

Ejercicio 10.4: *Calcule el equilibrio en un modelo de competencia perfecta cuando hay dos agentes, con función de utilidad* $u(z)=\sqrt{z}$, *y en donde los dos tipos se definen según las probabilidades del estado 2 de* $p_1=0,2$ *y* $p_2=0,6$. *Una proporción* $\pi=0,4$ *de los agentes son de tipo 1. La utilidad de reserva de los dos tipos son* $\overline{u}_1=80$ *y* $\overline{u}_2=40$.

Después de este análisis gráfico, podemos concluir con los siguientes puntos;

1. El contrato óptimo diseñado para los agentes de tipo 2, denominado w^{*2}, se encuentra como la solución simultánea de las ecuaciones $E_2(x-w)=0$ y $w_1=w_2$. Es decir, $w_1^{*2}=w_2^{*2}=E_2x$.

2. El contato óptimo diseñado para los agentes de tipo 1, denominado w^{*1}, se encuentra como la solución simultánea de las ecuaciones $E_1(x-w)=0$ y $E_2u(w)=u(E_2x)$.

3. El equilibrio es separador, es decir, cada tipo de agente escoge un contrato distinto.

4. En el equilibrio, la condición de incentivos de los agentes de tipo 2 se satura, pero la de los agentes de tipo 1 no se satura.

5. En el equilibrio, los agentes de tipo 2 reciben la misma utilidad (y el mismo contrato) que hubiesen recibido en condiciones de información simétrica, pero los agentes de tipo 1 reciben menor utilidad que la que hubiesen recibido con información simétrica.

6. La reducción en utilidad sufrida por los agentes de tipo 1 se debe a un aumento en riesgo que deben admitir, como coste de señalización de su tipo (es decir, es el coste que deben sufrir para evitar que el contrato diseñado para ellos sea atractivo para los agentes de tipo 2).

10.1.2 Un principal monopolista

Cuando un principal actúa como monopolista, su objetivo es el de maximizar su beneficio esperado. Naturalmente, cuando hay un solo principal, podemos ignorar todos los argumentos del caso de competencia perfecta basados en principales rebeldes ofreciendo contratos que quitan los agentes de un solo tipo, o de ambos tipos, de los demás principales. En este caso el principal simplemente tiene que buscar dos contratos que respeten el hecho de que su beneficio esperado no sea negativo, que permitan participar a ambos tipos de agente, y en los que cada tipo de agente escoge libremente el contrato diseñado para él en vez del contrato diseñado para el otro tipo. Según lo que se ha descrito en el punto anterior, la condición de participación del principal se puede ignorar, ya que sabemos que siempre tiene la opción de ofrecer el par de contratos que corresponden al caso de competencia perfecta y así ganar un beneficio esperado nulo. Por tanto, maximizando su beneficio esperado, en ningún caso va a recibir un beneficio esperado negativo y podemos formular el problema como

$$\max_{w^1,w^2} \; \pi \left[E_1x - (1-p_1)w_1^1 - p_1 w_2^1\right] + (1-\pi)\left[E_2x - (1-p_2)w_1^2 - p_2 w_2^2\right]$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
(1-p_1)u(w_1^1) + p_1 u(w_2^1) &\geq \overline{u}_1 && (10.6)\\
(1-p_2)u(w_1^2) + p_2 u(w_2^2) &\geq \overline{u}_2 && (10.7)\\
(1-p_1)u(w_1^1) + p_1 u(w_2^1) &\geq (1-p_1)u(w_1^2) + p_1 u(w_2^2) && (10.8)\\
(1-p_2)u(w_1^2) + p_2 u(w_2^2) &\geq (1-p_2)u(w_1^1) + p_2 u(w_2^1) && (10.9)
\end{aligned}$$

Otra vez, se trata de un problema extenso, en este caso de 4 variables incógnitas más 4 multiplicadores de Lagrange, y 8 ecuaciones simultáneas. No obstante, la solución es de nuevo sencilla si utilizamos el método gráfico para analizar el problema.

En la solución resulta que;

1. la condición de participación del agente de tipo 1, (10.6), tiene que saturarse,

2. la condición de compatibilidad de incentivos del agente de tipo 2, (10.9), tiene que saturarse,

3. en el contrato óptimo diseñado para los agentes de tipo 2, resulta que $w_1^{*2} = w_2^{*2}$.

Vamos a ver que estos tres resultados son ciertos. En primer lugar, sea cual sea el contrato que se diseña para los agentes de tipo 2, éste les proporciona un determinado nivel de utilidad, y por tanto una determinada curva de indiferencia. Sea esta curva $E_2u(w^2)$. ¿Cuál de todos los contratos ofertados a los agentes de tipo 2 que les proporciona exactamente este nivel utilidad esperada es el que maximiza el beneficio esperado del principal, condicionado a que efectivamente es un agente de tipo 2 el que lo firma? Larespuestas viene dada por el contrato que corresponde con la linea $E_2(x-w)$ más cercana posible al origen en el espacio de los contratos y que permite que el agente siga participando en el contrato. El contrato óptimo estará caracterizado por un punto en donde los dos salarios son iguales y, por tanto, en él se va a ofrecer a los agentes de tipo 2 el salario $w_1^{*2} = w_2^{*2}$.

Según lo que se ha explicado, representamos una curva de indiferencia para un agente de tipo 2 en un nivel arbitrario de utilidad, $E_2u(w) = u(w^2)$, y junto a esta curva dibujamos la curva de indiferencia de reserva de los agentes de tipo 1 (véase la figura 10.6), $E_1u(w) = \overline{u}_1$. La zona de puntos que está simultáneamente por encima de $E_1u(w) = \overline{u}_1$ y por debajo de la curva $E_2u(w) = u(w^2)$ corresponde a contratos que satisfacen, simultáneamente, participación de los agentes 1, y la compatibilidad de incentivos de ambos tipos (recordando que el contrato que se está utilizando para dar con la curva $E_2u(w) = u(w^2)$ es aquél que está sobre la bisectriz de la gráfica, $w_1^2 = w_2^2 \equiv w^2$). ¿Cuál de todos estos contratos es el que maximiza el beneficio esperado del principal, condicionado a que es firmado por un agente de tipo 1? Pues, el contrato que corresponde con la linea $E_1(x-w)$ más cercana posible al origen en la gráfica. Recordando que según nos desplazamos sobre la curva $E_1u(w) = \overline{u}_1$ hacia la bisectriz de la gráfica, las rectas $E_1(x-w)$ están cada vez más cercanas al origen, lo que hay que hacer es seleccionar el punto sobre $E_1u(w) = \overline{u}_1$ más cercano posible a la bisectriz. De la figura 10.6, queda claro que el punto en cuestión es la intersección de las dos curvas de indiferencia. Sea este punto $w^1(w^2)$. Nótese que

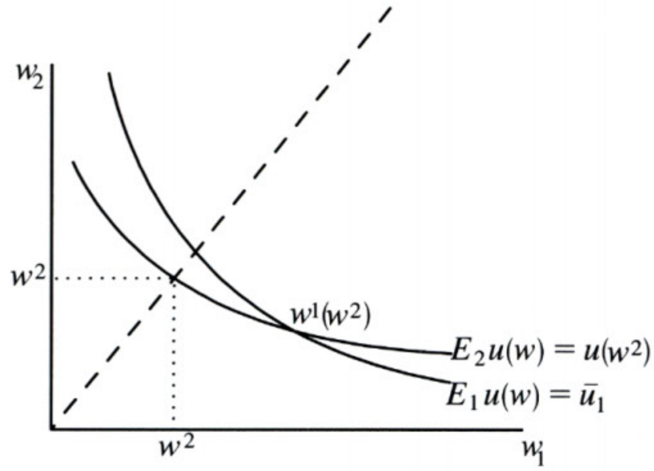


Figura 10.6.

este punto se caracteriza por la saturación de la condición de incentivos del agente de tipo 2 y la saturación de la condicion de participación del agente de tipo 1.

Tras este análisis, la pregunta que queda por contestar es, ¿cuál es el valor óptimo del salario que debe ofrecerse a los agentes de tipo 2, w^2? Una vez contestado esto, el contrato de equilibrio para los agentes de tipo 1 se puede calcular directamente. Un aumento en w^2 conlleva una disminución en el beneficio esperado que se obtiene con los agentes de tipo 2 (un coste), pero un aumento en el beneficio esperado que se obtiene con los agentes de tipo 1 (un ingreso). En el óptimo, el principal equilibrará estos dos efectos, de modo que el coste marginal que se obtiene por un incremento en w^2 sea igual al ingreso marginal generado. En general, desde luego no podemos concluir que el punto final buscado saturará la condición de participación de los agentes de tipo 2. Vamos a investigar un poco más sobre esto, pero para aliviar un poco la notación, utilizaremos la variable w para representar el salario de los agentes de tipo 2 (se recuerda que es el mismo en ambos estados), y w_i para el salario de los agentes de tipo 1 en el estado i.

Antes de adelantarnos en el análisis de este problema, del análisis gráfico se desprende que, siempre y cuando el principal fije el salario para los agentes de tipo 2 en un nivel inferior al salario cierto que satura la restricción de participación de los agentes de tipo 1, entonces por un lado sabemos que la condición de incentivos de los agentes de tipo 1 no se puede saturar, y por otro sabemos que el contrato diseñado para los agentes de tipo 1 se caracteriza por $w_1 > w_2$. En el análisis que hacemos en los siguientes párrafos, vamos a hacer uso del resultado general de que, menos en el caso extremo planteado (que ya veremos cuando corresponde y cuando no), la condición de incentivos de los agentes de tipo 1 no se va a saturar nunca de modo que resulta irrelevante para el problema.

Puesto que en todos los casos se saturan la condición de participación de los agentes de tipo 1 y la de incentivos de los agentes de tipo 2, podemos escribir

$$\begin{aligned}(1-p_1)u(w_1)+p_1u(w_2) &= \overline{u}_1\\ (1-p_2)u(w_1)+p_2u(w_2) &= u(w)\end{aligned}$$

Sin demasiado esfuerzo, podemos utilizar estas dos ecuaciones para definir las coordenadas del contrato de los agentes de tipo 1 como funciones implícitas del salario de los agentes de tipo 2, esto es

$$\begin{aligned} u(w_1) - \left(\frac{p_2\overline{u}_1 - p_1 u(w)}{p_2 - p_1}\right) &= 0 \\ u(w_2) - \left(\frac{(1-p_1)u(w) - (1-p_2)\overline{u}_1}{p_2 - p_1}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la función implícita a estas dos ecuaciones, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial w} &= -\frac{\left(\frac{p_1}{p_2-p_1}\right) u'(w)}{u'(w_1)} \\ &= -\left(\frac{p_1}{p_2-p_1}\right)\frac{u'(w)}{u'(w_1)} < 0 \end{aligned} \tag{10.10}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_2}{\partial w} &= -\frac{-\left(\frac{1-p_1}{p_2-p_1}\right) u'(w)}{u'(w_2)} \\ &= \left(\frac{1-p_1}{p_2-p_1}\right)\frac{u'(w)}{u'(w_2)} > 0 \end{aligned} \tag{10.11}$$

Dado que podemos ignorar la condición de incentivos de los agentes de tipo 1 puesto que (menos cuando el equilibrio es agrupador) nunca se satura, podemos escribir el problema del principal como

$$\max_w \; f(w) \equiv \pi E_1 x + (1-\pi)E_2 x - \pi\left[(1-p_1)w_1(w) + p_1 w_2(w)\right] - (1-\pi)w$$

sujeto a

$$u(w) \geq \overline{u}_2$$

Si escribimos la restricción como

$$g(w) \equiv -u(w) \leq -\overline{u}_2$$

entonces para utilizar el método de Lagrange, solamente tendríamos que comprobar que la función objetivo es cóncava en w, ya que la ecuación que define la restricción, $g(w)$, es convexa por hipótesis de entrada.

La primera derivada de la función objetivo es

$$\begin{aligned} f'(w) &= -\pi\left[(1-p_1)\frac{\partial w_1}{\partial w} + p_1\frac{\partial w_2}{\partial w}\right] - (1-\pi) \\ &= -\pi\left[-(1-p_1)\left(\frac{p_1}{p_2-p_1}\right)\frac{u'(w)}{u'(w_1)} + p_1\left(\frac{1-p_1}{p_2-p_1}\right)\frac{u'(w)}{u'(w_2)}\right] - (1-\pi) \\ &= -\pi\left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2-p_1}\right) u'(w)\left[u'(w_2)^{-1} - u'(w_1)^{-1}\right] - (1-\pi) \end{aligned} \tag{10.12}$$

y la segunda derivada es

$$\begin{aligned} f''(w) &= -\pi\left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2-p_1}\right) u''(w)\left[u'(w_2)^{-1} - u'(w_1)^{-1}\right] \\ &\quad -\pi\left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2-p_1}\right) u'(w)\left(\frac{\partial\left(u'(w_2)^{-1} - u'(w_1)^{-1}\right)}{\partial w}\right) \end{aligned}$$

Pero puesto que

$$\frac{\partial\left(u'(w_2)^{-1}-u'(w_1)^{-1}\right)}{\partial w}=-u'(w_2)^{-2}u''(w_2)\frac{\partial w_2}{\partial w}+u'(w_1)^{-2}u''(w_1)\frac{\partial w_1}{\partial w}>0$$

el segundo término de esta segunda derivada es claramente negativo. El primer término es no positivo si

$$u'(w_2)^{-1}-u'(w_1)^{-1}\leq 0$$

es decir, si

$$u'(w_2)\geq u'(w_1)\quad\Longrightarrow\quad w_2\leq w_1$$

No obstante, como veremos en seguida, esto será cierto en todos los casos. Por tanto resulta que la función objetivo es estrictamente cóncava en w.

Dado esto, podemos utilizar el método de Lagrange para resolver el problema simplificado. La función de Lagrange es

$$\begin{aligned}L(w,\delta) &= \pi E_1x+(1-\pi)E_2x-\pi\left[(1-p_1)w_1(w)+p_1w_2(w)\right]\\ &\quad -(1-\pi)w+\delta\left[-\overline{u}_2+u(w)\right]\end{aligned}$$

La condicón de primer orden es $\frac{\partial L}{\partial w}=0$, es decir $f'(w)+\delta u'(w)$, que de (10.12) es

$$-\pi\left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2-p_1}\right)u'(w)\left[u'(w_2)^{-1}-u'(w_1)^{-1}\right]-(1-\pi)+\delta u'(w)=0 \qquad (10.13)$$

Por otro lado, la condición complementaria de holgura es

$$\delta\left[-\overline{u}_2+u(w)\right]=0$$

Ahora, nótese que, nunca es factible una solución con $w_2>w_1$, puesto que en este caso tendríamos $u'(w_2)^{-1}-u'(w_1)^{-1}>0$. Pero esto solamente puede corresponder con $\delta>0$, es decir, la condición de participación de los agentes de tipo 2 se tendría que saturar. Pero, entonces el contrato óptimo de los agentes de tipo 1 está en la intersección de las dos curvas de utilidad de reserva, que dado el hecho de que $\overline{u}_2<\overline{u}_1$ (el tipo malo tiene una utilidad reserva inferior a la del tipo bueno) ocurre en un punto en donde $w_1>w_2$.

Consideremos el caso especial cuando $\pi=1$. En este caso, la condición de primer orden es

$$\left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2-p_1}\right)u'(w)\left[u'(w_2)^{-1}-u'(w_1)^{-1}\right]=\delta u'(w)\geq 0$$

Pero entonces, tiene que ser que

$$u'(w_2)^{-1}-u'(w_1)^{-1}\geq 0$$

es decir

$$w_2\geq w_1$$

Sin embargo, puesto que sabemos que nunca es factible un equilibrio con $w_2>w_1$, este caso tiene que corresponder con $w_2=w_1$, es decir, el contrato de los agentes de tipo

1 esté sobre la recta de certidumbre. El hecho de que el contrato de los agentes de tipo 1 está sobre la curva de indiferencia de los agentes de tipo 2 implica que, en el caso especial de π tienda a 1, tenemos $(w_2 - w_1) \longrightarrow 0$. En este caso, también tiene que ser cierto que $\delta = 0$, es decir, no se satura la condición de participación de los agentes de tipo 2.

Es más, en cualquier otro caso, $\pi < 1$, necesariamente tiene que ser que $w_2 < w_1$, y el equilibrio tiene que ser separador. Para ver esto, simplemente aplicamos el teorema de la función implícita a la condición de primer orden

$$\frac{\partial w}{\partial \pi} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial \pi}\right)}{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial w^2}\right)}$$

cuyo signo es igual al signo del numerador. Pero puesto que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial \pi} = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial \pi}$$

de (10.12) resulta que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial \pi} = -\left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2 - p_1}\right) u'(w) \left[u'(w_2)^{-1} - u'(w_1)^{-1}\right] + 1$$

que sería estrictamente positivo siempre cuando $u'(w_2)^{-1} - u'(w_1)^{-1} \leq 0$, es decir, siempre cuando $w_2 \leq w_1$. Entonces, empezando con $\pi = 1$, en cuyo caso $\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial \pi} = 1 > 0$, sabemos que una disminución marginal en π conlleva una disminución en w, y correspondientemente un movimiento a un equilibrio caracterizado por $w_1 > w_2$. Siguiendo el proceso, será cierto que disminuciones en π siempre hacendecrecer w hasta que se alcance un equilibrio en el que se satura la restricción de participación de los agentes de tipo 2.

Por último, es interesante considerar si el equilibrio en donde se satura la restricción de participación de los agentes de tipo 2 corresponde con $\pi = 0$, o puede alcanzarse con un $\pi > 0$. La respuesta correcta es que existe un número $\pi^0 > 0$ tal que el equilibrio con cualquier $\pi \leq \pi^0$ se caracteriza por la saturación de la condición de participación de los agentes de tipo 2. Para verlo, notemos que la condición de primer orden indica que el valor del multiplicador de Lagrange para cualquier nivel de π es

$$\delta(\pi) = \pi \left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2 - p_1}\right) \left[u'(w_2(w(\pi)))^{-1} - u'(w_1(w(\pi)))^{-1}\right] + (1-\pi)u'(w(\pi))^{-1}$$

Cuando $\pi = 1$ sabemos que $w_1 = w_2 = w$, y en este caso

$$\delta(\pi)|_{\pi=1} = 0$$

mientras que cuando $\pi = 0$, tenemos

$$\delta(\pi)|_{\pi=0} = u'(w(\pi))^{-1} > 0$$

Finalmente, considere $\delta'(\pi)$ cuando $\pi = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\delta'(\pi) &= \left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2 - p_1}\right) \left[u'(w_2(w(\pi)))^{-1} - u'(w_1(w(\pi)))^{-1}\right] \\
&\quad + \pi \left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2 - p_1}\right) \left(\frac{\partial \left[u'(w_2(w(\pi)))^{-1} - u'(w_1(w(\pi)))^{-1}\right]}{\partial \pi}\right) \\
&\quad + (1-\pi) \left(\frac{\partial u'(w(\pi))^{-1}}{\partial \pi}\right) - u'(w(\pi))^{-1}
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\delta'(\pi)\big|_{\pi=0} &= \left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2-p_1}\right)\left[u'(w_2(w(0)))^{-1}-u'(w_1(w(0)))^{-1}\right] \\
&\quad + \left(\frac{\partial u'(w(0))^{-1}}{\partial \pi}\right) - u'(w(0))^{-1}
\end{aligned}$$

y como $\left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2-p_1}\right)\left[u'(w_2(w(0)))^{-1}-u'(w_1(w(0)))^{-1}\right]<0$, resulta que

$$\begin{aligned}
\delta'(\pi)\big|_{\pi=0} &< \left(\frac{\partial u'(w(0))^{-1}}{\partial \pi}\right) - u'(w(0))^{-1} \\
&= -u'(w(\pi))^{-2}u''(w(\pi))\left.\frac{\partial w}{\partial \pi}\right|_{\pi=0} - u'(w(\pi))^{-1} \\
&= -u'(w(\pi))^{-1}\left[\frac{u''(w(\pi))}{u'(w(\pi))}\left.\frac{\partial w}{\partial \pi}\right|_{\pi=0}+1\right]
\end{aligned}$$

Pero, sabemos que en general

$$\frac{\partial w}{\partial \pi} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial \pi}\right)}{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial w^2}\right)}$$

así que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial w}{\partial \pi}\right|_{\pi=0} &= \left.-\frac{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial w \partial \pi}\right)}{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial w^2}\right)}\right|_{\pi=0} \\
&= \frac{-\left(\frac{(1-p_1)p_1}{p_2-p_1}\right)u'(w)\left[u'(w_2)^{-1}-u'(w_1)^{-1}\right]+1}{\delta u''(w)} < 0
\end{aligned}$$

En resumen, el hecho es que

$$\delta'(\pi)\big|_{\pi=0} < -u'(w(\pi))^{-1}\left[\frac{u''(w(\pi))}{u'(w(\pi))}\left.\frac{\partial w}{\partial \pi}\right|_{\pi=0}+1\right] < 0$$

es decir, el multiplicador de Lagrange tiene pendiente negativa en π para valores de π cercanos a 0. Dado esto, si representemos la función $\delta(\pi)$ gráficamente, empieza en un punto estrictamente positivo pero con pendiente estrictamente negativa, y alcanza el valor 0 en algún nivel de π que es estrictamente positivo, que hemos denominado π^0, y luego a partir de allí, se mantiene el valor 0 (véase la figura 10.7).

En resumen, el equilibrio para el caso de selección adversa con un principal monopolista se caracteriza por los siguientes puntos;

1. el equilibrio será separador, siempre cuando existan agentes de tipo 2,

2. los agentes de tipo 2 obtendrán un contrato libre de riesgo, y, dependiendo de cuál sea su proporción sobre la población total, pueden obtener una utilidad mayor que su utilidad de reserva (y por tanto, la asimetría en información les beneficia, puesto que con información simétrica, obtendrán su utilidad de reserva exactamente),

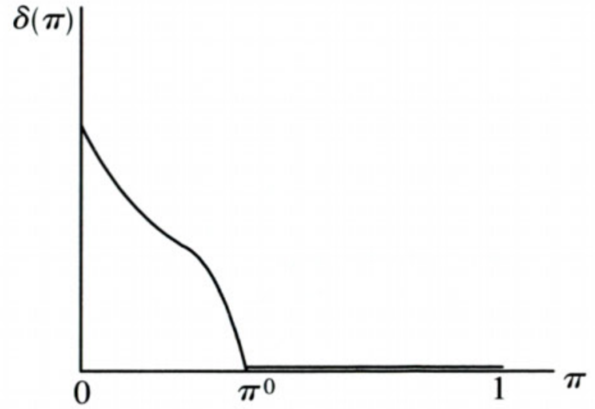


Figura 10.7.

3. los agentes de tipo 1 obtendrán un contrato con riesgo, y obtendrán exactamente su utilidad de reserva.

Ejercicio 10.5: *Con los mismos datos del ejercicio 10.4, calcule el equilibrio con un principal monopolista.*

10.2 El Riesgo Moral

En una situación de riesgo moral, lo que el principal desconoce es el valor de una variable que controla el agente. A diferencia de la selección adversa, en donde el principal no observa la identidad de los agentes (quiénes son los agentes), con el riesgo moral no observa lo que hacen los agentes (es decir, sus acciones). Para modelar esta situación con la mínima diferenciación sobre lo que hemos hecho en el caso de la selección adversa, vamos a suponer que cada agente es idéntico en lo que a su función de utilidad se refiere (que seguimos suponiendo que es creciente y cóncava), pero ahora cada agente puede escoger la probabilidad del estado 2, haciendo que sea o bien p_1 o bien p_2, en donde como antes, $p_1 < p_2$. Por supuesto, el agente no escoge la probabilidad directamente, sino que la probabilidad viene determinada por sus acciones, que sí puede escoger libremente y sin que el principal le observe. Por ejemplo, suponga un individuo que tiene su coche asegurado contra el robo. La probabilidad de que efectivamente le roben el coche depende del cuidado que el individuo pone en evitar el robo - aparcando un sitios bien iluminados, asegurándose de que las puertas están bien cerradas, comprando un sistema antirrobo, etc. Puesto que el asegurador no puede, con un coste razonable, observar este tipo de comportamiento por parte del individuo, se ha creado un problema de riesgo moral. La clave para entender un problema de riesgo moral consiste en considerar que hay, en prinicipio, un conflicto de intereses entre el principal y el agente en relación a lo que el agente debería hacer, es decir, las acciones que debería tomar, y consecuentemente, la probabilidad de los estados que se tiene. Si es costoso para el agente realizar acciones que disminuyen la probabilidad del estado malo (por ejemplo, cuidando de que no le roben el coche, trabajando con mucho esfuerzo para que una fábrica rinda bien, etc.), y sin embargo si el principal desea que estas acciones se realicen, entonces puede ser difícil encontrar la manera de incentivar al agente para que tome las medidas oportunas. No basta con sencillamente pagar al agente un plus en su salario (o reducirle la prima de seguros) a cambio de que realice las acciones que conducen a una probabilidad baja para el estado malo, porque el principal no puede comprobar si las acciones realmente se hacen o no. Como las acciones suponen un coste para el agente, éste aceptería sin más el aumento en salario (o la disminución en su prima de seguros), y luego pasaría de realizar las acciones en cuestión.

Cuando resolvemos un problema de riesgo moral, lo primero que se tiene que notar es que, como ahora todos los agentes son idénticos en todos los aspectos (misma función de utilidad, mismas opciones de cara a las posibles acciones, y mismas posibilidades en la probabilidad final de los estados de la naturaleza), siempre habrá un solo contrato. No tiene nunca sentido ofrecer más de un contrato, puesto que hacerlo sería reconocer que es favorable que agentes idénticos se comporten de manera distinta.

Los supuestos concretos que utilizaremos son los siguientes. En el estado 1, el resultado de la relación entre el principal y el agente es x_1, que es mayor que el resultado que ocurre en el estado 2, x_2. La probabilidad del estado 2 depende de una variable que llamarémos el "esfuerzo" del agente, y que denotamos por e. Supongamos que e puede tomar únicamente 2 posibles valores, e_1 o e_2, en donde $e_1 > e_2$. Naturalmente, debemos entender que e_1 corresponde con un esfuerzo alto, y e_2 con un esfuerzo bajo. El principal no puede observar la elección de esfuerzo que hace el agente. Se supone que la probabilidad del estado 2 es igual a $p(e)$, con $p'(e) < 0$, es decir, con esfuerzo alto, la probabilidad del estado malo disminuye y, como es lógico, la probabilidad del estado bueno aumenta. Por tanto, tenemos $p(e_1) < p(e_2)$.

Supondremos que la utilidad del agente es $U(w, e) = u(w) - d(e)$, en donde $u'(w) > 0$, $u''(w) < 0$, $d'(e) > 0$ y $d''(e) > 0$. Vamos a referirnos a $u(w)$ como la utilidad de dinero, y a $d(e)$ como la desutilidad que produce el esfuerzo. Se supone que la utilidad del agente es separable en dinero y esfuerzo es para comodidad matemática. Sin este supuesto, nada imporante cambiaría, pero todo sería más complicado y todo dependería del signo de la derivada cruzada entre dinero y esfuerzo. Puesto que la desutilidad de esfuerzo es independiente del estado de la naturaleza, suponiendo que el agente recibe un salario de w_i en el estado $i = 1, 2$, su utilidad esperada es

$$E_e(u(w) - d(e)) = (1 - p(e))u(w_1) + p(e)u(w_2) - d(e) = E_e u(w) - d(e)$$

Como antes, supondremos que el principal es neutral ante el riesgo, es decir, su beneficio esperado es simplemente $E_e(x - w)$.

Sea la siguente función:

$$\begin{aligned} f(w) &\equiv [(1 - p(e_2))u(w_1) + p(e_2)u(w_2) - d(e_2)] \\ &\quad - [(1 - p(e_1))u(w_1) + p(e_1)u(w_2) - d(e_1)] \\ &= u(w_2)(p(e_2) - p(e_1)) + u(w_1)(1 - p(e_2) - 1 + p(e_1)) - d(e_2) + d(e_1) \\ &= (p(e_2) - p(e_1))(u(w_2) - u(w_1)) - d(e_2) + d(e_1) \end{aligned}$$

que indica la diferencia entre la utilidad esperada de realizar el esfuerzo e_2 y e_1. Claramente, si se ofrece al agente un contrato con unos salarios de modo que $f(w) > 0$, entonces el agente tiene una preferencia estricta por esfuerzo e_2, mientras que si $f(w) < 0$, entonces el agente prefiere el esfuerzo e_1, y por supuesto si $f(w) = 0$, entonces el agente es indiferente entre los dos esfuerzos. Por el teorema de la función implícita, tenemos

$$\left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{df(w)=0} = \frac{u'(w_1)}{u'(w_2)} > 0$$

es decir los contornos de la función $f(w)$ tienen pendiente positiva en el espacio de los contratos.

Vamos a considerar la curva de nivel que corresponde a $f(w) = 0$. Por su definición, el contorno $f(w) = 0$ corresponde con los contratos en los cuales la condición de incentivos se satura, es decir, el agente es indiferente entre ofrecer esfuerzo alto o bajo. En primer lugar, se aprecia que

$$(p(e_2) - p(e_1))(u(w_2) - u(w_1)) - d(e_2) + d(e_1) = 0$$

implica que

$$(p(e_2) - p(e_1))(u(w_2) - u(w_1)) = d(e_2) - d(e_1) < 0$$

Como $p(e_2) - p(e_1) > 0$, resulta que los vectores w tales que $f(w) = 0$ han de satisfacer que $u(w_2) - u(w_1) < 0$, es decir, $w_2 < w_1$. Por otro lado, puesto que la pendiente de este contorno en cualquier punto es la razón de utilidades marginales, y sabiendo que la función de utilidad es cóncava, el hecho de que $w_2 < w_1$ implica que la pendiente de la curva es menor que 1 en todos sus puntos al ser $u'(w_2) > u'(w_1)$.

Ejercicio 10.6: *¿Cuándo sería el contorno $f(w) = 0$ lineal? ¿Cuándo sería convexa o cóncava?*

En la figura 10.8 se muestra la curva $f(w) = 0$, junto con dos curvas de indiferencia del agente que se cortan en un punto de $f(w) = 0$. Las curvas de indiferencia representadas son netas de la desutilidad de esfuerzo, es decir, se han representado los contornos de $E_e u(w)$, en lugar de $E_e u(w) - d(e)$, que es la utilidad verdadera de cada elección de esfuerzo. Como sabemos que un individuo es indiferente entre dos situaciones solamente cuando las curvas de indiferencia intersectan sobre la línea de certidumbre, si movemos las dos curvas de la figura hacia abajo en la cantidad $d(e_i)$ correspondiente, acabarán cortándose sobre la linea de certidumbre (es decir, la curva en la figura que intersecta $w_1 = w_2$ más arriba se tendría que mover más lejos, que es lo mismo decir que $d(e_1) > d(e_2)$. La curva de indiferencia más inclinada corresponde con el caso de esfuerzo e_1 mientras que la curva de indiferencia menos inclinada corresponde con el caso de esfuerzo e_2. En la gráfica, puesto que sabemos que $E_{e_1}u(w) - d(e_1) = E_{e_2}u(w) - d(e_2)$ en la curva $f(w) = 0$, y que $d(e_1) > d(e_2)$, resulta que $E_{e_1}u(w) > E_{e_2}u(w)$. Cuanto más arriba está el punto que consideremos sobre la curva $f(w) = 0$, mayor es la utilidad esperada del agente. También es cierto que, si dos curvas de indiferencia no se intersectan sobre la curva $f(w) = 0$, entonces el agente prefiere la curva que intersecta más arriba.

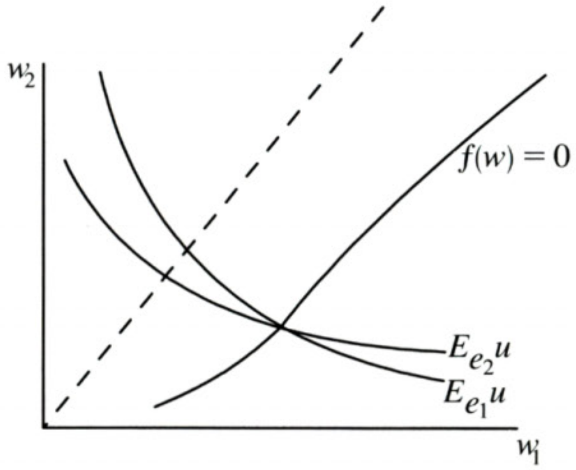


Figura 10.8.

Puesto que sobre la curva $f(w) = 0$ el agente es indiferente entre las dos opciones de esfuerzo, también es cierto que tiene una preferencia por un esfuerzo en concreto cuando se le ofrece un punto en un cada lado de la curva. Para ver exactamente cuál es esta preferencia, solamente tenemos que pensar en un punto sobre la recta de certidumbre. Cuando el contrato del agente se caracteriza por $w_1 = w_2 = w$, está claro que, independientemente de cuál sea su esfuerzo, tenemos $E_{e_1}u(w) = E_{e_2}u(w) = u(w)$, de modo que siempre escojerá el esfuerzo que minimiza la desutilidad. Así, como $d(e_1) > d(e_2)$, esto equivale a decir que con un contrato de salario cierto, el agente siempre prefiere esfuerzo bajo. Por tanto, en cualquier contrato a la izquierda de la curva $f(w) = 0$ el agente ofrecerá esfuerzo e_2, mientras que en cualquier contrato a la derecha de la curva, el agente ofrecerá el esfuerzo e_1.

Vamos a analizar ahora al principal. Puesto que el principal es neutral ante el riesgo, su beneficio esperado en cualquier contrato, cuando el esfuerzo del agente es e_i, es

$$p(e_i)(x_2 - w_2) + (1 - p(e_i))(x_1 - w_1)$$

Por tanto, el principal sería indiferente entre las dos opciones de esfuerzo si

$$p(e_1)(x_2 - w_2) + (1 - p(e_1))(x_1 - w_1) = p(e_2)(x_2 - w_2) + (1 - p(e_2))(x_1 - w_1)$$

es decir, si

$$w_2 = (x_2 - x_1) + w_1 \equiv g(w_1)$$

Claramente, $g(w_1)$ es una función lineal con pendiente igual a 1. En la figura 10.9, se muestra la línea $g(w_1)$ junto con los contornos de beneficio esperado del principal correspondientes a las dos opciones de esfuerzo. En la gráfica, tenemos $E_{e_1}(x-w) = E_{e_2}(x-w)$. Cuando más abajo sobre la línea $g(w_1)$ está el punto que consideremos, mayor es el beneficio esperado.

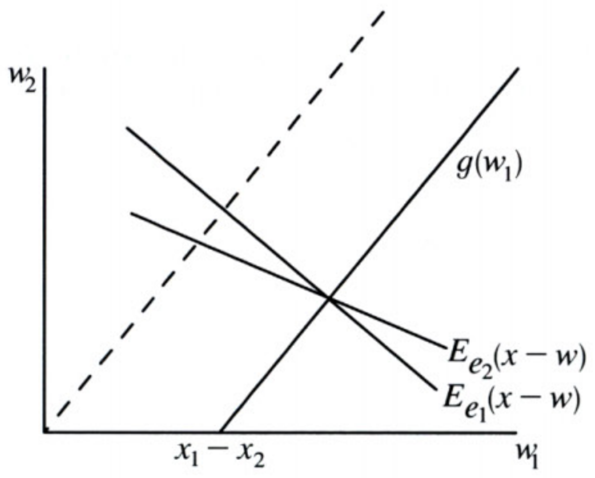


Figura 10.9.

Juntamos ahora las dos figuras 10.8 y 10.9. La elección de contrato depende del caso que se considere, competencia perfecta o monopolio. Vamos a analizar cada caso por separado.

10.2.1 Competencia perfecta

Puesto que si el principal actúa en competencia perfecta, su beneficio esperado está restringido a ser 0, empezamos por representar las dos rectas de beneficio esperado $E_{e_i}(x-w) = 0$. Ahora, el problema del principal consiste en encontrar el contrato que maximiza la utilidad esperada del agente, sujeto a la restricción de participación de éste, y la condicion de compatibilidad de incentivos. De igual modo que en el problema de la selección adversa, podemos suponer sin más que la condición de participación se va a satisfacer, pero sin saturarse, puesto que un contrato que ofrece al principal un beneficio esperado nulo tiene que maximizar la utilidad esperada que se ofrece al agente. Entonces, ¿cuál es el punto sobre la recta $E_{e_2}(x - w) = 0$ más preferido por el agente? Obviamente es el punto de intersección entre $E_{e_2}(x - w) = 0$ y la recta de certidumbre. Como este punto está a la izquierda de la curva $f(w) = 0$, se satisface (pero no se llega a saturar) la condición de incentivos, es decir, el principal contrata esfuerzo e_2, y en este contrato, el agente ofrece e_2. Claramente, este es el mejor contrato que se puede diseñar con el objeto de que el agente trabaje con el esfuerzo e_2. En la figura 10.10, este contrato se indica como el punto A^*.

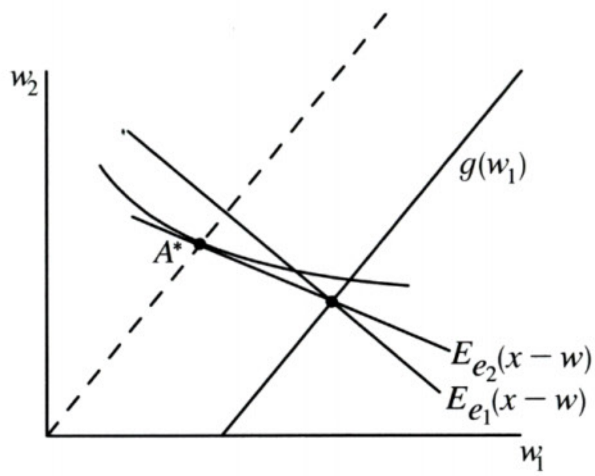


Figura 10.10.

Sin embargo, no está claro que el punto A^* sea el mejor contrato que el principal puede ofrecer. Tenemos que considerar el mejor contrato que pueda diseñar de modo que el agente ofrezca el esfuerzo e_1, y luego escojer entre éste y el punto A^* aquél que más le interesa al agente (al fin y al cabo, el principal siempre será indiferente ya que su beneficio esperado en cualquier caso es 0). Como el contrato en cuestión tiene que estar sobre la línea $E_{e_1}(x - w) = 0$, y como tiene que estar o bien sobre o bien a la derecha de la curva $f(w) = 0$, es evidente que no existe manera mejor de contratar al agente de modo que ofrezca el esfuerzo e_1 que el punto B^*, en donde la recta $E_{e_1}(x - w) = 0$ corta la curva $f(w) = 0$ (véase la figura 10.11).

Finalmente, ¿cuál de los dos contratos A^* y B^* debería ofrecer el principal? La respuesta es, sencillamente, el que más le guste al agente. Para evaluar esta preferencia, solamente tenemos que representar las dos curvas de indiferencia del agente que pasan por ambos contratos, y ver dónde cortan a la curva $f(w) = 0$. En la figura 10.12 se representa el caso límite de perfecta indiferencia entre los dos contratos. En esta figura, resulta que la curva de indiferencia del agente que pasa por A^* corta a $f(w) = 0$ exactamente en el punto B^*, demanera que el agente es indiferente entre las dos opciones, y como el principal

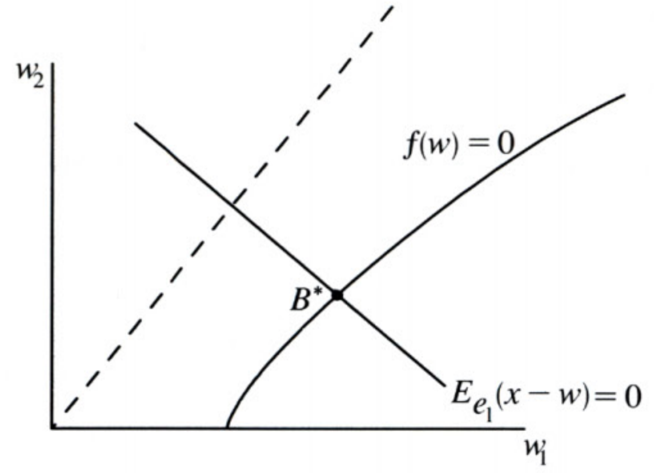


Figura 10.11.

recibe un beneficio esperado de 0 con cada opción, también es indiferente. No obstante, los casos más realistas corresponden con una preferencia estricta por parte del agente. Si el contrato A^* estuviera un poco más alto que la posición mostrada en la figura 10.12, entonces la curva de indiferencia del agente que pasa por A^* cortaría $f(w) = 0$ más arriba que el punto B^*, en cuyo caso sabemos que el agente tiene una preferencia estrícta por el contrato A^*. Puesto que el principal es indiferente, en este caso la solución implica que se ofrece A^*, y que el agente ofrece el esfuerzo e_2. Por otro lado, si el contrato A^* estuviera un poco más abajo que en la posición mostrada en la figura 10.12, entonces el agente tendría una preferencia estricta por el contrato B^*, que se convertiráen el contrato de equilibrio, mientras que el esfuerzo será e_1.

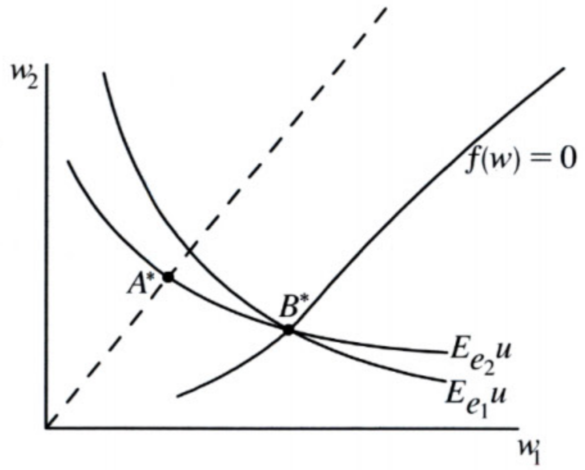


Figura 10.12.

Los siguientes puntos resumen las conclusiones que se extraen del caso competitivo.

1. Si el contrato óptimo implica el esfuerzo e_2, entonces se caracteriza por la igualdad del salario del agente en cada estado de la naturaleza. En este caso, el agente recibe un contrato sin riesgo.

2. Si el contrato óptimo implica el esfuerzo e_1, entonces se caracteriza por el hecho de que el salario del agente en el estado 1 es mayor que su salario en el estado 2. En

este caso, el agente recibe un contrato con riesgo.

3. Si en el equilibrio se contrata el esfuerzo alto, e_1, entonces la condición de incentivos se satura, mientras que si en el equilibrio se contrata el esfuerzo bajo, e_2, entonces la condición de incentivos no se satura.

Ejercicio 10.7: *Proporcione un argumento intuitivo para explicar que, aunque siempre es factible contratar a un agente con un contrato que garantiza que realiza un esfuerzo alto, no siempre es el equilibrio en el problema.*

10.2.2 El caso de un principal monopolista

El objetivo de un principal monopolista es ofrecer un contrato con el que le maximice el beneficio esperado, condicionado a que el agente participa, y que el agente ofrezca el esfuerzo que el principal desea. De igual modo que en la situación de competencia perfecta empezamos deduciendo el contrato óptimo cuando el objetivo es que el agente utiliza el esfuerzo bajo, e_2. Como el objetivo gráfico es llevar la recta $E_{e_2}(x-w)$ tan cerca del origen como sea posible, obviamente lo que el principal debería hacer en este caso es buscar la curva de indiferencia del individuo más cercana al origen posible, que va a coincidir naturalmente con la curva de indiferencia de reserva del individuo. Si suponemos que, fuera de la relación con el principal el agente puede obtener una utilidad de $\overline{u}$, en el caso de que ofrezca el esfuerzo e_2, la curva de utilidad de reserva del agente será aquél que satisface $E_{e_2}u(w) = \overline{u} + d(e_2)$. Es más, condicionada a esta curva de indiferencia, el contrato que maximiza el beneficio esperado del principal es el punto en donde la curva de indiferencia corta a la recta de certidumbre. Llamemos a este punto A^*.

Entonces, ¿cuál es el mejor contrato, desde la perspectiva del principal, que se puede ofrecer y que garantiza el esfuerzo alto, e_1? Sabemos que el contrato en cuestión tiene que hallarse sobre la curva de indiferencia de reserva del agente cuando ofrece el esfuerzo e_1, y que tiene que estar sobre o a la derecha de la curva $f(w) = 0$, pues si no, el agente no ofrece e_1 sino e_2. Por otra parte, sabemos que la curva de indiferencia de reserva en este caso, $E_{e_1}u(w) = \overline{u} + d(e_1)$ corta a la curva $f(w) = 0$ exactamente en el mismo punto que la curva $E_{e_2}u(w) = \overline{u} + d(e_2)$, puesto que ambas curvas ofrecen al agente una utilidad igual a la máxima que puede obtener fuera de la relación en cuestión. Además, sabemos que, condicionado al esfuerzo e_1, el beneficio esperado del principal es mayor cuanto más cercanas a la recta de certidumbre se sitúan las rectas de isobeneficio esperado. En conclusión, el mejor contrato que se le puede ofrecer al agente y que garantiza que el esfuerzo que ofrece es e_1, consiste precisamente en el punto sobre $f(w) = 0$ donde se cortan las dos curvas de indiferencia de reserva del agente (véase la figura 10.13).

Únicamente resta por decidir entre estos dos contratos. Esta vez, claro está, la elección se hace en función de cuál de los dos contratos ofrece mayor beneficio esperado al principal. Para evaluar esto, solamente tenemos que pintar las dos rectas de iso-beneficio esperado del principal que pasen por los dos puntos A^* y B^*, y ver dónde intersectan el uno al otro en relación con la recta $g(w_1)$. Por supuesto, el principal prefiere una recta de beneficio esperado más cercana al origen que pueda, prefiere A^* si las dos rectas de beneficio esperado que pasan por A^* y B^* se intersectan a la derecha de la recta $g(w_1) = 0$, y en caso contrario, prefiere B^*. En la figura 10.14, se representa otra vez el caso de absoluta indiferencia.

La recta tangente a la curva $E_{e_2}u = \overline{u} + d(e_2)$ en el punto A^* es la recta de iso-beneficio esperado correspondiente a este contrato. Pongamos que el nivel del iso-beneficio esperado en este caso es $E_{e_2}(x-w) = z$. Por otro lado, la recta de pendiente negativa que pasa por

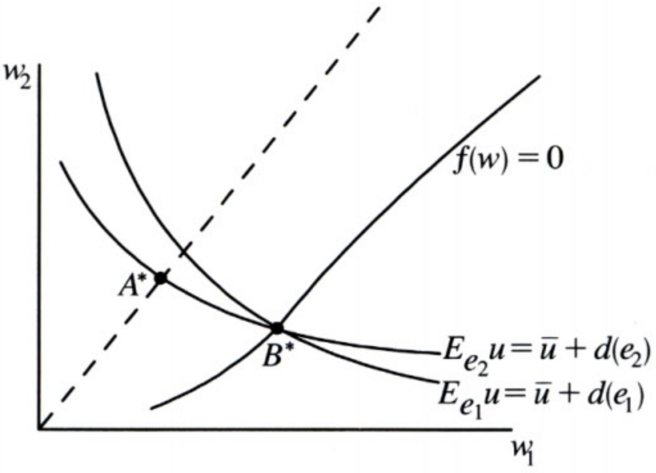


Figura 10.13.

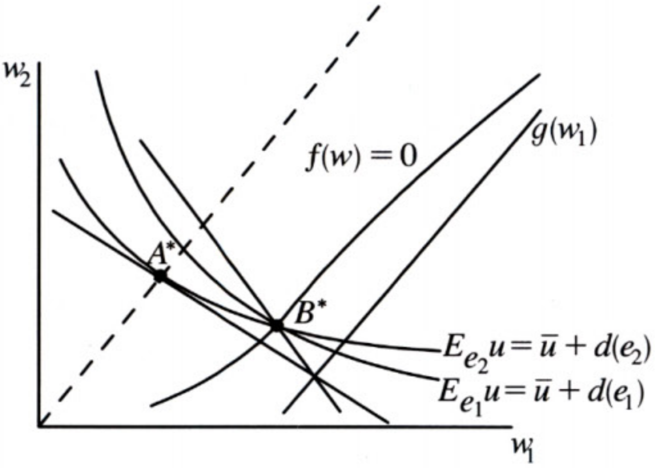


Figura 10.14.

el punto B^* es la recta de iso-beneficio esperado correspondiente a este contrato. Puesto que en la figura 10.14 hemos representado el caso en el que estas dos rectas de iso-beneficio esperado se intersectan justo en la recta $g(w_1)$, entonces en la figura tenemos el caso en el que el nivel del iso-beneficio esperado en el contrato B^* es exactamente $E_{e_1}(x - w) = z$. En este caso, los dos contratos ofrecen al principal el mismo beneficio esperado, y así sería indiferente entre ambos. Los dos casos más realistas corresponden con una gráfica en la que movemos la recta $g(w_1)$ un poquito hacia un lado en comparación con su posición en la figura 10.14. Si $g(w_1)$ estuviera a la derecha de su posición según se representa en la figura 10.14, entonces las dos rectas de isobeneficio esperado se habrían cortado a la izquierda de $g(w_1)$. En este caso, la recta $E_{e_1}(x - w)$ cortaría a $g(w_1)$ más abajo que la recta $E_{e_2}(x - w)$, lo que indicaría que $E_{e_1}(x - w) > E_{e_1}(x - w)$, y entonces el principal recibe un beneficio esperado mayor con el contrato B^* que con A^*. Por tanto, en este caso ofrecerá B^* y obtendrá el esfuerzo alto, e_1. Por supuesto, si en lugar de la posición de $g(w_1)$ en la figura 10.14, la dibujásemos un poquito a la izquierda, resultaría que el principal recibe un beneficio esperado mayor con el contrato A^*, y entonces éste será el contrato que ofrecerá obteniendo el esfuerzo bajo, e_2.

Como resumen del caso de riesgo moral con un principal monopolista, podemos resaltar los siguientes hechos:

1. Cualquiera que sea el caso, en el equilibrio la condición de participación del agente se satura.

2. El contrato óptimo para esfuerzo bajo se encuentra en la intersección entre la curva de indiferencia de reserva del agente cuando utiliza el esfuerzo bajo y la recta de certidumbre. El contrato óptimo para esfuerzo alto se encuentra en la intersección entre la curva de indiferencia de reserva cuando utiliza el esfuerzo alto y la curva $f(w) = 0$.

3. Si en el equilibrio se contrata esfuerzo alto, entonces la condición de incentivos del agente se satura. Si en el equilibrio se contrata esfuerzo bajo, entonces la condición de incentivos del agente no se satura.

10.3 Resumen

En este capítulo, hemos considerado el modelo de principal y agente, utilizando sobre todo un análisis gráfico. Los puntos más destacables son los siguientes:

1. Un problema de selección adversa corresponde con una situación en la cual hay una característica del agente, invariante que éste no puede variar y que no es observable por el principal.

2. Un problema de riesgo moral corresponde con una situación en la cual una acción del agente no puede ser observada por el principal.

3. En el equilibrio de un problema de selección adversa cuando el principal actúa en un ambiente competitivo, los agentes de tipo desfavorable reciben un contrato sin riesgo (el mismo que hubiesen percibido en condiciones de información perfecta), y los agentes de tipo más favorable reciben un contrato con riesgo (peor para ellos que lo que hubiesen recibido en condiciones de información perfecta). El principal recibe un beneficio esperado igual que en condicones de información perfecta (0 en ambos casos).

4. En el equilibrio de un problema de selección adversa cuando el principal es monopolista, los agentes de tipo desfavorable reciben un contrato sin riesgo (posiblemente mejor que el que hubiesen recibido en condiciones de información perfecta), y los agentes de tipo más favorable reciben un contrato con riesgo (que les ofrece la misma utilidad que la que hubiesen recibido en condiciones de información perfecta). El principal recibe un beneficio esperado menor que en condiciones de información perfecta.

5. En el equilibrio de un problema de riesgo moral, sea cual sea el ambiente de actuación del principal, siempre se ofrece un solo contrato. Este contrato puede implicar esfuerzo bajo o esfuerzo alto.

6. En el equilibrio de un problema de riesgo moral, sea cual sea el ambiente de actuación del principal, la condición de incentivos del agente solamente se satura cuando se contrata el esfuerzo alto.

7. En el equilibrio de un problema de riesgo moral con un principal competitivo, el principal recibe el mismo beneficio esperado que en condiciones de información perfecta

(0 en ambos casos). En un problema de riesgo moral con un principal monopolista, el principal recibe un beneficio esperado igual que en condiciones de información perfecta cuando contrata esfuerzo bajo, y menor cuando contrata esfuerzo alto.

ISBN 84-7477-875-1
9 788474 778755

UAM