El problema didáctico de la enseñanza del álgebra en secundaria

Lucía Méndez Gutiérrez

Máster en Formación de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato: Matemáticas

MÁSTERES DE LA UAM

2017 - 2018

Facultad de Formación de Profesorado y Educación

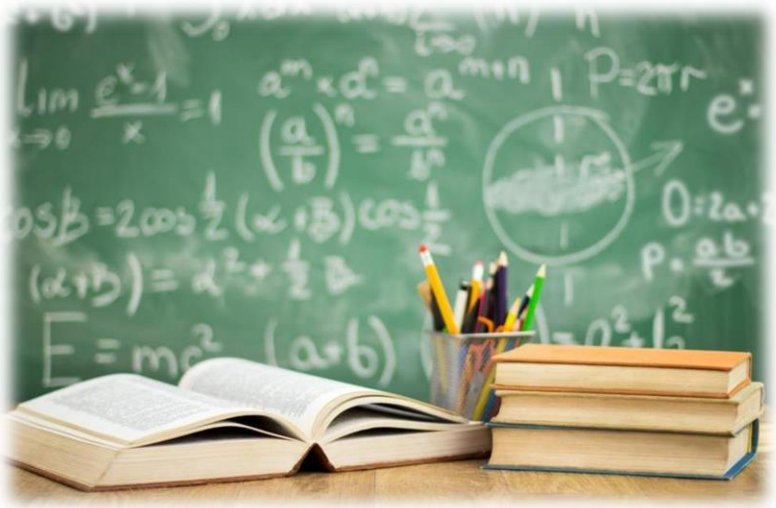
Universidad Autónoma de Madrid

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Facultad de formación de profesorado y de la educación

EL PROBLEMA DIDÁCTICO DE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN SECUNDARIA

The didactic problem of teaching algebra in secondary



Trabajo de fin de Máster

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO

(ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS)

Curso 2017/2018

Autora: Lucía Méndez Gutiérrez

Junio – 2018

Índice General

Pág.

Resumen

La enseñanza del algebra en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) ha sido y sigue siendo tema de gran interés en la didáctica de las matemáticas. Muchos investigadores consideran, por la falta de comprensión de los alumnos en su aprendizaje algebraico, no adecuada la enseñanza del álgebra escolar. En el presente trabajo, con el objetivo de observar el problema didáctico que se presenta en el álgebra en secundaria, se realiza, desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), un análisis del libro de texto como *saber enseñado* e incluso, en algunos casos, como *saber a enseñar*. Además, desde esta misma teoría, se plantea una nueva propuesta didáctica con un modelo alternativo que permite la interpretación del álgebra como instrumento de modelización y no como aritmética generalizada. Finalmente, con la intención de conocer desde otros enfoques (cognitivo y ontosemiótico) este problema didáctico, se indaga en diversas investigaciones del álgebra escolar. Y, a efectos de conclusión, se relatan las posibles ventajas o inconvenientes que todos estos enfoques o teorías pueden aportar a nuestro sistema de enseñanza actual.

Palabras clave: Modelización matemática, Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Educación Secundaria Obligatoria (ESO), problema didáctico, álgebra, enfoque epistemológico.

Abstract

The teaching of algebra in Compulsory Secondary Education has been and continues to be a great topic of interest in the teaching of mathematics. Many researchers consider the teaching of school algebra inappropriate, due to the lack of student's understanding in their algebraic learning. In this present work, with the aim of observing the didactic problem which is presented in the algebra in secondary school, an analysis of the textbook as *taught knowledge* is made from the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) even, in some cases, as *knowledge to be teach*. In addition, from this same theory, a new didactic proposal is suggested with an alternative model which allows the interpretation of algebra as a modeling instrument and not as a generalized arithmetic. Finally, with the intention of knowing this didactic problem from other approaches (cognitive and ontosemiotic), it is investigated in several researches of the school algebra. And, for conclusion purposes, the possible advantages or disadvantages that all these approaches or theories can contribute to our current educational system are recounted.

Keywords: Mathematics modelling, Anthropological Theory of Didactics (ATD), secondary school, didactic problem, algebra, epistemological approach.

1. Introducción

La razón por la que he elegido este tema de Trabajo de Fin de Máster *El problema didáctico de la enseñanza del álgebra en secundaria* viene dada tanto por la observación llevada a cabo en el primer periodo de prácticas del módulo genérico como por la aportación de algunos profesores de las asignaturas del Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (MESOB) de la Universidad Autónoma de Madrid (UAM), además de mi experiencia como alumna durante todos estos años.

Al finalizar mis estudios de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, decidí estudiar la carrera de matemáticas, pues era la asignatura que más me gustaba por aquel momento. Sin embargo, en seguida me topé con una realidad muy distinta a la que yo pensaba: unas matemáticas totalmente abstractas, llenas de demostraciones, axiomas y corolarios. Con la esperanza de que la cosa cambiara, decidí continuarla. Y fue en el último año donde, con la elección de asignaturas, tuve la oportunidad de cursar *Matemáticas para la educación secundaria*. Sin duda, todo un acierto, que me dejó con ganas de más.

Una vez acabada la carrera de matemáticas, opté por realizar el Máster de profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, donde escuché la palabra *didáctica de las matemáticas* y me empecé a interesar por ella. Gracias a ella comprendí que detrás del incuestionable libro de texto, como recurso didáctico más utilizado hoy en día por el profesor para el trabajo diario del aula, había otras grandes opciones proporcionadas por estudios de investigación didáctica de las matemáticas. De esta manera, cuando me enteré de que *El problema didáctico de la enseñanza del álgebra en secundaria* era sugerido como tema de trabajo de fin de máster pensé que sería una buena forma de, a partir de un nuevo mundo para mí "la investigación didáctica", acercarme a la problemática (que pude observar en mi primer periodo de prácticas) y conocer sus diferentes alternativas.

Además, después de elegir este tema como trabajo de fin de máster, tuve la suerte de cursar la asignatura *Iniciación a la investigación educativa en matemáticas.* Donde, a pesar de su difícil comprensión por esa nueva terminología, se me abrieron las puertas hacía nuevos conocimientos relacionados con la TAD, proporcionándome un extra de motivación e interés hacía la elaboración de este trabajo.

2. Diseño de la investigación

Se parte de una panorámica actual de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, para realizar un análisis del estado de la cuestión y para abordar, desde una perspectiva didáctica, los problemas a los que se intenta, o no, dar algún tipo de respuesta.

2.1. Objetivos

Los objetivos que se pretenden son:

- Conocer, a través de los libros de texto, cómo se trabaja la enseñanza del álgebra en la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria en el marco legislativo de la LOMCE.
- Averiguar, a través del análisis de diferentes documentos de investigación, cuál es la mejor teoría para analizar los tipos de tareas y técnicas propuestos en los libros de texto.
- Plantear, a partir de las teorías encontradas, otras propuestas didácticas del álgebra diferentes a la del sistema educativo actual.
- Saber las posibles ventajas o inconvenientes que se presentan en estas nuevas propuestas de enseñanza del álgebra escolar.

2.2. Metodología

Se detalla, a continuación, la metodología llevada a cabo en este trabajo.

- Primera fase: Análisis de libros de texto.

Teniendo en cuenta que una práctica generalizada es la utilización de los libros de texto, a lo largo del curso escolar, a modo de guía, tanto por el profesor como por los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se ha seleccionado el libro de texto *MATEMÁTICAS 2º ESO. Savia*, de la editorial SM, cuyos autores son Miguel Nieto, Alberto Díaz, Fernando Alcaide y Nelo Maester (2016), para realizar una descripción de las unidades dedicadas al álgebra, esto es, de la actividad matemática que se propone en torno a este ámbito de conocimiento matemático, y la propuesta didáctica consiguiente.

- Segunda fase: Análisis de otros libros de texto.

Con el objetivo de observar que la descripción realizada, a lo largo de la primera fase, no es una descripción específica sino representativa. Se procede a detallar, de una forma más general, los libros de texto (Colera y Gaztelu, 2016) y (García y Martín, 2016) de las editoriales de Anaya y editex, respectivamente.

- Tercera fase: Análisis de diferentes documentos de investigación didáctica.

Una vez descrito el libro de texto, se pasa al análisis de diferentes documentos de investigación didáctica (tesis, libros…) en busca de una nueva teoría (en este caso, la TAD) que permita estudiar, desde una perspectiva epistemológica e institucional, la actividad matemática que este se presenta.

- Cuarta fase: Propuesta didáctica de introducción al álgebra en secundaria.

Tras averiguar el modelo epistemológico-didáctico del algebra dominante en la institución escolar. Se propone, a través de la TAD, una propuesta didáctica que permita introducir la actividad matemática del álgebra en la enseñanza secundaria como un proceso de algebrización y no como una "aritmética generalizada".

3. Desarrollo de la investigación

3.1 Descripción detallada de un libro de texto

En primer lugar, con el objetivo de saber cómo se trabaja la enseñanza del álgebra en la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria, se va a realizar una descripción detallada de las unidades didácticas 5, 6 y 7 de un libro de texto de secundaria (Nieto et al., 2016). Pues, según el artículo (Ramírez, 2002), este es el principal mediador entre docente y alumno dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.

3.1.1. Unidad didáctica 5: Expresiones algebraicas

- <u>Introducción de la unidad didáctica</u>

La unidad didáctica se introduce con un fragmento del libro *El hombre que calculaba*:
El Príncipe Cluzir, al llegar con su porte señorial, saludó al Calculador con un amistoso *salam*, y le dijo:
—El peor sabio es aquel que frecuenta a los ricos; el mayor rico es aquel que frecuenta a los sabios. […] Mi visita, ¡oh Calculador!, empezó el Príncipe, se debe más al egoísmo que al interés en la ciencia. […]Deseo nombrarte mi secretario o bien director del observatorio de Delhi. ¿Aceptas? […]

—Desgraciadamente, ¡oh Príncipe generoso!, respondió Beremiz, no puedo salir ahora de Bagdad. […] Sólo podré ausentarme de aquí cuando la hija del ilustre Iezid haya aprendido las bellezas de la Geometría.

—El jeque Iezid me dijo que la joven Telassim, dados los progresos realizados, estará dentro de pocos meses en condiciones de enseñar a los ulemas el famoso problema de "las perlas del Rajá". […]

—Se trata menos de un problema que de una mera curiosidad aritmética. Su enunciado es el siguiente:

> "*Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que la división se hiciese del siguiente modo: la hija mayor se quedaría con una perla y un séptimo de las que quedaran; la segunda recibiría dos perlas y un séptimo de las restantes; la tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de las que quedaran. Y así sucesivamente*". (Nieto et al., 2016, p. 95)

Las hijas más jóvenes presentaron demanda ante el juez alegando que por ese complicado sistema de división resultaban fatalmente perjudicadas.

El juez, que según reza la tradición, era hábil en la resolución de problemas, respondió […] que la división propuesta por el viejo rajá era justa y perfecta. […]

Hecha la división, cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas.

Se pregunta: ¿Cuál es el número de perlas?, ¿Cuántas las hijas del Rajá?

A continuación, bajo el encabezado *Analiza y contesta*, se plantean las preguntas: "¿Se puede resolver el problema utilizando únicamente propiedades aritméticas, múltiplos, divisores, etc.? ¿Cómo lo resolverías utilizando el álgebra?".

Aparentemente, con el problema planteado se pretende que el alumno se interese por encontrar una solución, aunque la forma en la que está redactada la cuestión da más bien a entender que no es posible resolver el problema con los conocimientos aritméticos disponibles (por parte del alumno) y que es el álgebra la que puede proporcionar la solución. Evidentemente, es una pregunta retórica la que se plantea ya que con este tema se introduce a los alumnos en el álgebra.

Podemos decir que es la técnica didáctica que se emplea por parte de los autores para mostrar el interés del tema que se va a dar, aunque no se volverá a lo largo del tema sobre el problema de las perlas.

- <u>Desarrollo de la unidad didáctica:</u>

El desarrollo de esta unidad didáctica empieza con “las expresiones algebraicas” y “el valor numérico”. La introducción de las expresiones algebraicas se realiza a partir de un “cálculo” relativo al número de triángulos de mecano posibles que se pueden añadir a uno dado inicial, como a continuación se muestra.

Figura 1. Introducción a las expresiones algebraicas. Fuente (Nieto et al., 2016, p. 96).

Finalmente, a partir de la pregunta ¿cuántas piezas de mecano se necesitan para añadir “*n*” triángulos al inicial?, se da como respuesta “3 + 2*n*”.

Este ejemplo da lugar a las siguientes definiciones:

Una ***expresión algebraica*** *es una expresión matemática en la que intervienen letras, números y los signos de las operaciones aritméticas.*

Las letras reciben el nombre de ***variables o incógnitas*** *y representan números o cantidades desconocidas.*

A continuación, se presentan “expresiones algebraicas” a partir de enunciados verbales:

La mitad de mi edad dentro de 10 años => $\frac{(x+10)}{2}$

El 30% de los espectadores => $\frac{30}{100} \cdot x$

Y se continúa con la definición de valor numérico de una expresión algebraica como el resultado obtenido al sustituir cada una de las variables por un número determinado.

Para “afianzar y entrenar” los conocimientos introducidos, se plantean distintos enunciados verbales para que los alumnos escriban las expresiones algebraicas correspondientes, y distintas expresiones algebraicas para que los alumnos calculen sus respectivos valores numéricos (para valores determinados de las incógnitas).

De alguna manera, el lenguaje algebraico es el lenguaje “verbal” donde son referidos datos desconocidos junto a otros conocidos y algún tipo de relación entre ellos. Este lenguaje es el que, en su expresión escrita, dará lugar a las denominadas expresiones algebraicas. En este sentido, el álgebra elemental se construye en un contexto numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de la traducción de expresiones numérico-verbales.

La unidad continúa introduciendo los “monomios”, como caso particular de “expresión algebraica”: *Un **monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número por una o varias variables elevadas a exponentes naturales.*
Las definiciones formales de sus componentes: parte literal, coeficiente y grado, así como la de semejanza.

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$-5x^2y^3$	-5	x^2y^3	$2+3=5$
$\frac{3}{4}x^2y$	$\frac{3}{4}$	x^2y	$2+1=3$
5	5	No tiene	0

Figura 2. Ejemplo de las partes que componen un monomio. Fuente (Nieto et al., 2016, p. 98).

Y las definiciones de las operaciones posibles con estos objetos matemáticos: suma y resta, producto de un número por un monomio, producto de dos monomios, potencia de un monomio y división de monomios, siempre seguidas de ejemplos.

Bajo el epígrafe de ACTIVIDADES se proponen distintas expresiones algebraicas para que el alumno practique las operaciones que se acaban de definir y solo en los dos últimos ejemplos se “vuelve” a lo concreto, a una realidad geométrica, como justificación de la utilidad de estos objetos matemáticos particulares.

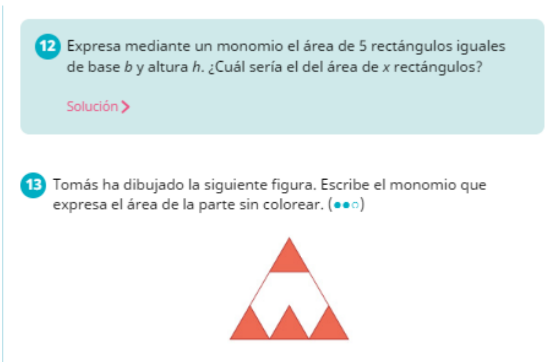


Figura 3. Ejemplo de actividades contextualizadas en una realidad geométrica. Fuente (Nieto et al., 2016, p. 99).

Se pasa ahora a los “polinomios” y a su suma y diferencia. Se define así “polinomio” como una expresión algebraica formada por la suma de varios monomios no semejantes llamados “términos”. Y, a partir de ahí, se define “término principal”, “coeficiente principal”, “grado” y “término independiente”. Todo ello se presenta en un ejemplo.

Ejemplo

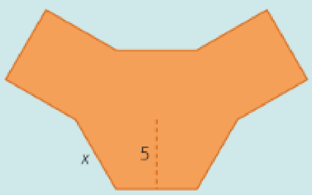
Polinomio	Término principal	Coeficiente principal	Grado	Término independiente
$3x^5-2x^2-7$	$3x^5$	3	5	-7
$5x^2-\frac{1}{3}x+4$	$5x^2$	5	2	4
$\frac{x^2}{2}+3x$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	0
$-6x^3+9x$	$-6x^3$	-6	3	0

Figura 4. Ejemplo de los "términos" que forman un polinomio. Fuente (Nieto et al., 2016, p. 100).

Asimismo, se definen “binomio”, “trinomio”, “polinomio completo” y “polinomio incompleto” acompañados de varios de ejemplos. Y, posteriormente, se presenta la suma y diferencia de polinomios como la suma o resta de los monomios semejantes que los forman, acompañados de un ejemplo.

Para la práctica de suma y resta de polinomios se proponen varios ejercicios, de los cuales dos son con figuras geométricas para que el alumno construya el polinomio que indica su área.

21 Observa la siguiente figura y expresa su área mediante un polinomio.



Solución >

22 Observa la figura formada por triángulos rectángulos isósceles e indica el polinomio que expresa su área. (●●○)

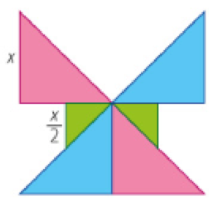


Figura 5. Ejercicios de suma y resta de polinomios con figuras geométricas. Fuente (Nieto et al., 2016, p. 101).

En el producto, potencia y división de polinomios, se dan las definiciones acompañadas de ejemplos, teniendo en cuenta que la división es con relación a un monomio en lugar de un polinomio. Además, se define la “extracción del factor de un polinomio”. Todo ello se lleva a la práctica a través ejercicios, aunque ninguno de ellos en contexto.

El siguiente apartado trata las identidades notables empezando con el “cuadrado de una suma” (¿una suma de qué? ¿de monomios?), que se introduce como:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

donde desaparece la “x” y aparecen la “a” y la “b” (¿qué son a y b?). Así, se define “cuadrado de una suma” a partir de las definiciones de “potencia” y de “productos de polinomios”. Lo mismo ocurre para el "cuadrado de una diferencia". Además, en ambos casos, se ilustran con comprobaciones geométricas donde a y b representan “medidas” de lados.

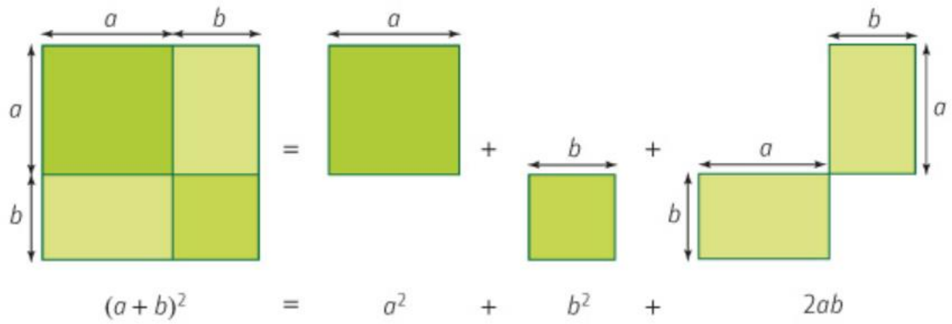


Figura 6. Ilustración de la comprobación geométrica de "cuadrado de una suma".
Fuente (Nieto et al., 2016, p. 104).

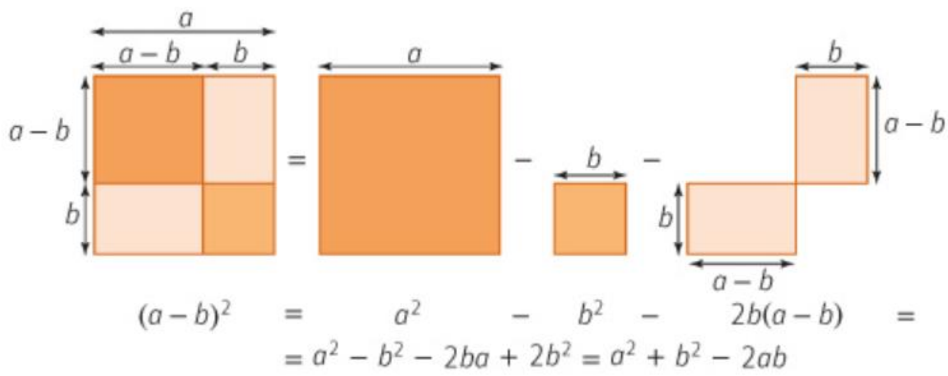


Figura 7. Ilustración de la comprobación geométrica de "cuadrado de una diferencia".
Fuente (Nieto et al., 2016, p. 104).

Y ambas se presentan, a modo de ejemplo, como polinomios (con "*x*").

Ejemplo

Desarrolla la siguiente identidad notable.

$(5x^2 + 4x)^2 = (5x^2)^2 + (4x)^2 + 2 \cdot 5x^2 \cdot 4x = 25x^4 + 16x^2 + 40x^3 =$
$= 25x^4 + 40x^3 + 16x^2$

Ejemplo

Opera y simplifica.

$(5x^2 - 4x)^2 = (5x^2)^2 + (4x)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 4x = 25x^4 + 16x^2 - 40x^3 =$
$= 25x^4 - 40x^3 + 16x^2$

Figura 8. Presentación de las identidades notables en el libro de texto. Fuente (Nieto et al., 2016, p. 104).

En la "suma por diferencia" ya se especifica que es de "binomios" y se introduce como:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

donde, al igual que antes, en lugar de "*x*" aparecen "*a*" y "*b*". Así, se define "suma por diferencia" a partir de la definición de "productos de polinomios", y se ilustra a través de su comprobación geométrica.

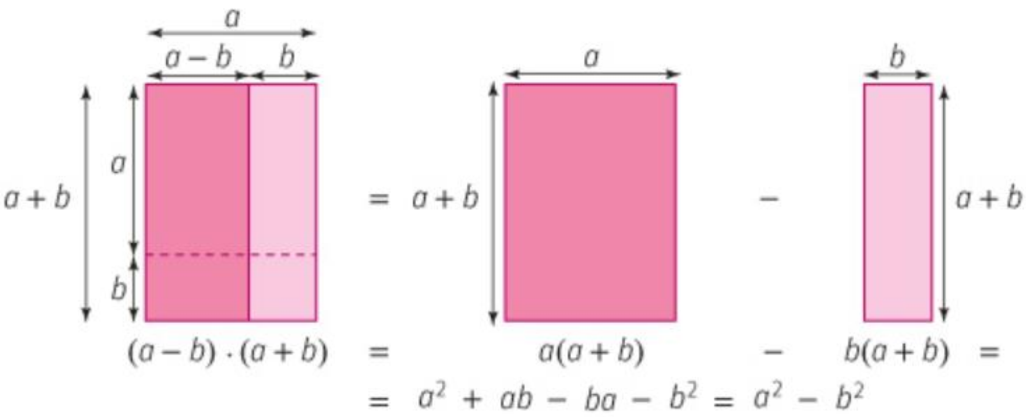


Figura 9. Ilustración de la comprobación geométrica de "suma por diferencia".
Fuente (Nieto et al., 2016, p. 105).

Asimismo, se presenta, a modo de ejemplo, como un polinomio (con "*x*").

Ejemplo

Opera.

$$(5x^2 + 4x)(5x^2 - 4x) = 25x^4 - 16x^2$$

Figura 10. Presentación de la identidad notable "suma por diferencia".
Fuente (Nieto et al., 2016, p. 105).

Para poner en práctica las identidades notables, se proponen varias actividades en las que se pide “desarrollar utilizando las identidades notables”, “utilizar las identidades notables y desarrollar”, “corregir y comprobar las identidades erróneas”, etc. En ellas, además de “a” y “b” aparecen “x”, “m” y “n” sin ningún tipo de enunciado en contexto real (¿qué es la m? ¿qué es la n?).

Para finalizar el desarrollo de la unidad didáctica, se introducen los “números poligonales” como aquellos números que se pueden representar geométricamente utilizando polígonos regulares. Y, a continuación, se pasa a su presentación con el siguiente ejemplo

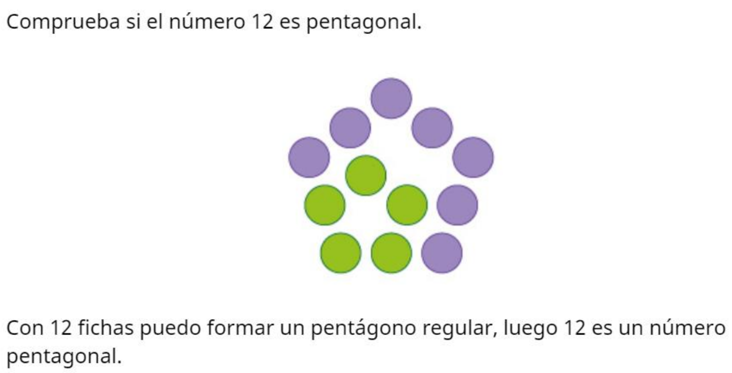


Figura 11. Presentación de los “números poligonales”. Fuente (Nieto et al., 2016, p. 106).

Un ejemplo que “no se entiende”, pues, ¿de qué manera se forma el pentágono regular con las 12 fichas? ¿qué significado tienen las fichas verdes? ¿y las moradas?... Y que, además de que no se entiende, de él se deduce que para construir cualquier “número poligonal” se utiliza la siguiente expresión algebraica:

$$P(d,n) = n + \frac{n\,(n-1)(d-2)}{2}$$

donde n es la “longitud” del lado, y d, es el número de lados del polígono.

Como práctica de “número poligonal” se plantean dos actividades,

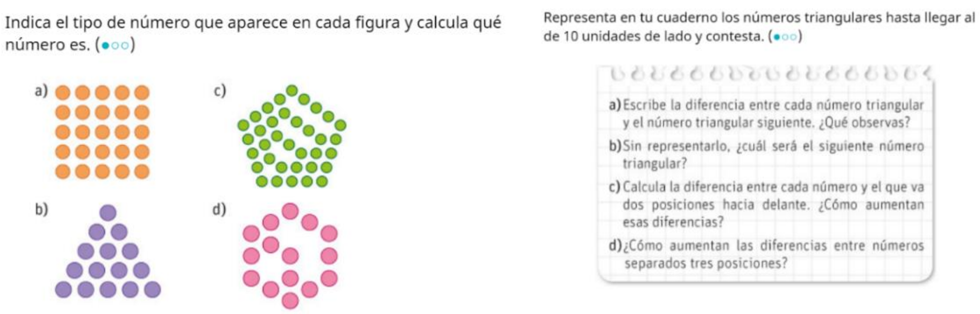


Figura 12. Actividades de “números poligonales”. Fuente (Nieto et al., 2016, p. 110).

3.1.2. Unidad didáctica 6: Ecuaciones

- Introducción de la unidad didáctica

Se introduce el tema con un fragmento del libro "Las matemáticas explicadas a mi hija" de Denis Guedj. En este fragmento, se identifica a las personas de una novela policíaca "el culpable", "el asesino", "el sospechoso" … con las incógnitas "*x*" de un problema matemático ("¿una incógnita puede ser una persona"?). Y, tras su lectura, se plantea la pregunta: *En álgebra,* ¿qué tipo de identidad se esconde tras las incógnitas?

Por otra parte, en la introducción también se propone el problema: "Si el tercio de un número es 54, ¿cuál es ese número?". Un problema aritmético resoluble mediante el patrón de análisis-síntesis: si un tercio del número es 54, tres veces 54 será el número. Y, después del problema se plantea la pregunta "¿qué pasos sigues para resolver problemas con ecuaciones?". Una pregunta que, si el alumno aún no conoce la noción de ecuación (su definición viene en la página siguiente), no tiene mucho sentido ¿cómo va a ser que conozca los pasos a seguir para resolverla? Además, como siguiente paso, se plantea otro problema *La base de un rectángulo de 840 cm^2 mide 4cm más que la altura.* ¿Qué dimensiones tiene? que no transmite la necesidad de utilizar el álgebra para su resolución ya que es posible resolverlo fácilmente mediante tanteo o el método clásico de "regula falsi". En conclusión, la resolución de este tipo de problemas con instrumentos algebraicos solo complica la situación problemática.

Al margen de esto, aparece un apartado *Analiza y resuelve* donde se menciona: *"*En el papiro Rhind (1650 a.C.) aparecía el siguiente problema: Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24. ¿Cómo se designa en este problema a la incógnita? ¿Qué información o pistas nos da el problema para poder resolverlo? ¿Puedes encontrar la solución?*"*. En este caso, por la unidad didáctica anterior, se sabe que las letras reciben el nombre de variables o incógnitas y representan números o cantidades desconocidas. Así que se podría deducir que la incógnita se designa por el montón. Sin embargo, a la hora de escribir la expresión algebraica, no se precisa de ninguna técnica para encontrar su solución (simplificación o cancelación), de modo que lo normal sería utilizar el tanteo y decir que si se puede encontrar la solución. Si el objetivo de este ejemplo era utilizar el álgebra y no operaciones aritméticas, desde luego que no era un buen ejemplo.

Posible resolución:

En la notación moderna, la ecuación sería: $x + \frac{1}{7}\,x = 24$

Se empieza probando por un número, si se toma el 7, al sustituir en la x nos daría: $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$, y como la solución es 24, es decir 8·3, la solución es 21 = 3·7, ya que 3·($7 + \frac{1}{7} \cdot 7$) = 24.

- <u>Desarrollo de la unidad didáctica</u>

En el desarrollo de esta unidad didáctica se empieza con las definiciones de: igualdad algebraica, identidad y ecuación, para, posteriormente, explicar las ecuaciones equivalentes y dar algoritmos de resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. En este sentido, destaca la ejemplificación que existe después de cada definición o explicación. La presentación de ejemplos resueltos en los libros de texto es importante, a menos que ésta se reduzca a servir como guía a los alumnos, como ocurre en este caso. Además, cada dos caras existen una serie de actividades relacionadas con la teoría dada en esas caras. Es decir, las tareas y los problemas se plantean después de la presentación de los procedimientos. Algo que, a mi parecer, lo único que consigue es aumentar el uso memorístico del alumnado.

Por otro lado, es llamativo el ejemplo que se propone en la definición de ecuación (p. 118). Donde se plantea la siguiente igualdad algebraica: 20 *x* + 4 = 44 que se resuelve por l técnica de tanteo.

Y en el apartado de soluciones de una ecuación, donde se dice*:* “una ecuación puede tener ninguna, una, varias o infinitas soluciones” se pone a modo de ejemplo la ecuación *x* + *y* = 3 y se dice que tiene infinitas soluciones, pero ¿infinitas soluciones dónde? ¿en que dominio? ¿en los naturales? ¿en los enteros? ¿en los racionales? ¿en los reales? ¿en los complejos?

Siguiendo con el libro de texto en la página 120, se definen las ecuaciones equivalentes y se explican las técnicas de las reglas de la suma y del producto. Pero, si el objetivo de estas técnicas es la obtención de ecuaciones equivalentes ¿Cómo se va a ver su necesidad si se definen con anterioridad? En cuanto al ejemplo que se plantea sobre las reglas de la suma y del producto: 3 *x* + 6 = *x* + 16, no se ve el sentido que estas tienen “¿qué quiere decir en este caso la letra *x*?” “¿para que resto 6 y luego *x*?” “¿para que divido entre 2?”. Asimismo, en las actividades propuestas: “Aplica la regla de la suma para encontrar la solución de estas ecuaciones”, “utiliza la regla del producto para despejar la x en las ecuaciones”, “utiliza las reglas de la suma y del producto para despejar el valor de x” se sigue sin ver su sentido. ¿Cómo va a ser así posible que el alumno utilice esta técnica en otro tipo de contexto diferente? ¡Es imposible! El proceso memorístico no tiene ningún tipo de utilidad fuera de ese tipo de ejercicios.

Respecto a las ecuaciones de primer grado (pp. 122-125), aparece un apartado en una esquina "ten en cuenta" que indica el tipo de solución que puede aparecer al resolver una ecuación (solución única, infinitas soluciones o no existe solución). Sin embargo, esto no se tiene en cuenta. Pues, en los ejemplos solo aparecen soluciones únicas y en las actividades (a excepción de dos o tres apartados) también. Además, las actividades que se proponen, ninguna conduce de manera implícita o explícita a la utilización de las propiedades del álgebra. De modo que, los alumnos tienden a utilizar, como modo de resolución, el tanteo. Por ejemplo, una actividad que se propone es: *Ricardo ha pensado un número, le ha sumado 8, ha multiplicado el resultado por 2, ha restado 4 y ha restado el doble del número inicial. Al final ha obtenido 12*. ¿Puedes decir qué número eligió? que ya es un poco difícil de resolver de manera retórica (verbal) por su extensión de operaciones. Así, escrito quedaría como $(x + 8) \cdot 2 - 4 - 2x = 12$. Ahora bien, ¿el alumno utilizaría la técnica de simplificación para su resolución? Está claro que no, empezaría a dar valores a x hasta dar con su solución. Algo que podría desencadenar un procedimiento muy costoso. Pues, sería tan simple como operar y llegar a $16 = 16$ pero ¿Qué significa esto? ¿Qué eligió el numero 16?... el alumno seguramente no sabría interpretar ese tipo de soluciones.

En lo que se refiere a las explicaciones de las ecuaciones de primer y segundo grados estas son puramente "monumentalistas", no se justifica en ningún momento por qué esta manipulación de las ecuaciones permite obtener las soluciones buscadas.

Por último, destaca el número de actividades que hay del tipo: "resuelve estas ecuaciones", "encuentra la solución de las siguientes ecuaciones", "comprueba"…, etc. que, claramente no tienen ningún tipo de sentido si no se saben utilizar en otro tipo de contexto. De ahí que el alumno se pregunte: *¿Para qué sirven resolver ecuaciones?* En definitiva, sólo se manejan expresiones algebraicas a través de la aplicación de logaritmos (procedimientos mecánicos), sin tener en cuenta su procedencia y su relación con otras situaciones. Además, ni siquiera hay una asociación entre la letra que se utiliza y lo que dicha representa, lo que provoca por parte del alumnado una pérdida de significado de las ecuaciones.

- Finalización de la unidad didáctica

Para finalizar la unidad didáctica se proponen tanto actividades de refuerzo y de ampliación como problemas de "contextualización" real. Sin olvidarnos de la autoevaluación. Aunque todos ellos no aportan nada nuevo.

En el caso de la autoevaluación, esta consta de siete ejercicios y representa un simulacro de examen. Ahora bien, de esos siete ejercicios, cuatro son de tipo mecánico "comprueba, resuelve, calcula…" y el resto son de contexto real como, por ejemplo, *a un número se le suman 6 unidades se le eleva al cuadrado y se resta el triple del número inicial. El resultado obtenido es 148. ¿Cuál era el número?* En cualquiera de los casos no se transmite la necesidad de utilizar las operaciones algebraicas.

En conclusión, veo normal que los alumnos decidan resolver aritméticamente los problemas, aun siendo estos muy complejos. Pues, generalmente los profesores elaboran sus clases guiados casi totalmente por los libros de texto (sin analizarlos antes). Y, como hemos visto, este saber a enseñar es eminentemente "expositivo": no se plantean cuestiones relativas al porqué se obtiene el tipo de resultado que se obtiene, ni se interpretan resultados obtenidos. De esta manera, desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se proponen los Programas de Cálculos Aritméticos (PCA) que, en este caso, llegarían hasta la segunda etapa de algebrización con la técnica de cancelación.

3.1.3. Unidad didáctica 7: Sistema de ecuaciones

- Introducción de la unidad didáctica

Como en la unidad didáctica anterior la introducción se produce con un texto. En este caso, se trata de "La navegación a estima" de Lewis Carroll. Donde, se pide el peso de cada saco sabiendo que hay cinco y que los números 1 y 2 pesan 12 libras; los números 2 y 3, pesan 13.5 libras; los números 3 y 4, pesan 11.5 libras; los números 4 y 5, pesan 8 libras y los números 1,3 y 5, pesan 16 libras.

De esta manera, el libro de texto pretende que el alumno sea capaz de llegar a lo siguiente:

Sea x el peso del saco 1; y el peso del saco 2; z el peso del saco 3; t el peso del saco 4; y u el peso del saco 5.

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ y + z = 13.5 \\ z + t = 11.5 \\ t + u = 8 \\ x + z + u = 16 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 6.5 \\ x = 5.5 \\ z = 7 \\ t = 4.5 \\ u = 3.5 \end{array}\right\}$$

y como pista se da: *Plantea, a partir de las pesadas que se han realizado, las ecuaciones que creas necesarias para resolver el problema.* ¿Cuántas hay?

Pero, teniendo en cuenta que son ecuaciones lineales de dos e incluso tres incógnitas, es ilógico pensar que un alumno, que jamás ha trabajado con ellas, sea capaz de plantearlas. Pues, las ecuaciones lineales con dos incógnitas al igual que los sistemas de ecuaciones lineales se dan en la siguiente página. ¿Qué sentido tiene entonces?

También se plantea otro problema: ¿qué representa el punto donde se cortan las rectas $y = x$ e $y = 2 - x$?, mediante el cual el autor intenta introducir el sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, el alumno ni sabe cómo son las ecuaciones de las rectas ni sabe su representación. La unidad didáctica donde se explica es la siguiente.

- Desarrollo de la unidad didáctica

En esta unidad didáctica se comienza definiendo la noción de ecuaciones lineales con dos incógnitas para después introducir los sistemas de ecuaciones lineales; a continuación, se explican los sistemas de ecuaciones equivalentes y la solución gráfica (por medio de tabulación) de un sistema; finalmente, se muestran los métodos de resolución (sustitución, igualación y reducción) de sistemas de ecuaciones y se presentan algunos problemas de aplicación a resolver con sistemas de ecuaciones lineales.

Ahora bien, a pesar de explicar los sistemas equivalentes como aquellos que tienen el mismo conjunto solución, en los procedimientos de resolución por igualación y por sustitución opera reduciendo el sistema a una única ecuación. Por lo que, en este caso, la conservación del conjunto solución resulta un concepto inaplicable para justificar este tipo de transformación. Además, los distintos métodos de resolución se presentan, más bien, como pasos a realizar que al final proporcionan la solución. Es decir, algoritmos.

En cuanto a la solución gráfica de un sistema, se presentan sistemas con una única solución (si las rectas se cortan en un punto), sistemas con infinitas soluciones (si las rectas coinciden) y sistemas sin solución (si las rectas son paralelas). En este sentido resalta que no se haga ningún tipo de mención a los métodos algebraicos aplicados a estos sistemas. Pues, podría ser que, de esta manera, los alumnos interpretasen que dichos métodos solo son utilizables para sistemas con una única solución. De hecho, en el último paso de la resolución de sistemas se dice que *sustituyendo este valor en la ecuación despejada, se obtiene el valor de la otra incógnita*, dando a entender que siempre va a haber una única solución del sistema.

Respecto a las actividades planteadas, son todas de tipo "monumentalista", no se ven su utilidad. Así, como ejemplo, en las actividades relacionadas con las técnicas de resolución de sistemas lo único que se fomenta es la memorización de estos procesos para dar con la solución automática del problema planteado.

- <u>Finalización de la unidad didáctica</u>

Para finalizar la unidad didáctica se proponen tanto actividades de refuerzo y de ampliación como problemas de contextualización real. Sin olvidarnos de la autoevaluación. Aunque todos ellos no aportan nada nuevo.

En la autoevaluación se plantean 8 ejercicios, de los cuales 4 son mecánicos y los otros 4 son de contextualización real. Pero que, en ningún caso, no transmiten la necesidad de utilizar los sistemas de ecuaciones lineales (ni sus propiedades) para su resolución.

Algo que me gustaría destacar de esta unidad didáctica es la resolución gráfica de sistemas lineales sin tener noción de funciones y gráficas (que se da en una unidad didáctica más tarde). No tiene sentido dar todo por separado. Pues, el alumno pensará que se tratan de bloques de contenido sin sentido alguno entre sí.

3.2 La enseñanza del álgebra en otros libros de texto

Con el fin de ver que el análisis detallado del libro de texto (Nieto et al., 2016) es representativo, se han examinado otros dos libros más: uno de la editorial Editex (García y Martín, 2016) y otro de la editorial Anaya (Colera y Gaztelu, 2016). En ellos, al igual que en el anterior, predomina una presentación explicativa de las unidades didácticas, que se acompaña con ejemplos. Además, ambos siguen una misma estructura: empiezan con las expresiones algebraicas, continúan con los monomios y los polinomios, pasan a las ecuaciones y terminan con los sistemas de ecuaciones. En cuanto a los tipos de tareas que se plantean son, principalmente, de tipo algorítmicas, pues se basan en la manipulación formal de expresiones algebraicas y en la resolución de ecuaciones (ver *Figura 13*).

13 Quita paréntesis y reduce.

a) $(3x^2 - 5x + 2) + (x^2 - 2x + 1)$

b) $(5x^2 - 2x - 3) - (4x^2 + 3x - 1)$

c) $(x - 3) + (x^2 + 2x + 1)$

d) $(6x^2 - x) - (3x^2 - 5x + 6)$

12. Sean los siguientes polinomios:

$A(x) = -5x^3 + 4x^2 - 6x + 3$ $\quad B(x) = -4x^3 - 3x + 8$ $\quad C(x) = -2 + 3x$

Realiza las siguientes operaciones:

a) $3 \cdot A$	e) $A \cdot B \cdot C$	i) $4 \cdot A + 5 \cdot C$	m) C^2
b) $5 \cdot B$	f) $4 \cdot (B + C)$	j) $A \cdot C + B$	n) $A \cdot B + 2 \cdot C$
c) $B \cdot C$	g) $C \cdot (A + B)$	k) $2 \cdot B - 3 \cdot C$	ñ) $A \cdot B - 2$
d) $A \cdot B$	h) $-3 \cdot B + B$	l) $C \cdot (B + C)$	o) B^2

Figura 13. Ejemplos de tareas algorítmicas. Fuente (Colera y Gaztelu, 2016, p. 108) y (García y Martín, 2016, p. 102).

Por otro lado, como pudo verse en la editorial SM, las variables son usadas como incógnitas, pues representan cantidades desconocidas que sólo verifican para un posible conjunto de valores (ver *Figura 14*).

5 Traduce en tu cuaderno a lenguaje algebraico las edades de los miembros de esta familia:

	EDAD
SARA Tiene x años	x
ROSA (hermana mayor) Le saca 2 años a Sara.	
ANA (madre) Tenía 25 años cuando Sara nació.	
JOAQUÍN (padre) Cuadruplica la edad de Sara.	

1. Escribe los siguientes enunciados en lenguaje algebraico:
   a) Un número menos su cuarta parte.
   b) Un número par.
   c) Un número múltiplo de tres.
   d) La suma de dos números pares consecutivos.
   e) El triple de sumar a un número diez unidades.

Figura 14. La variable como incógnita. Fuente (Colera y Gaztelu, 2016, p. 85) y (García y Martín, 2016, p. 96).

Respecto a la utilización de la generalización como proceso de algebrización, en el libro de Anaya aparece un ejercicio de series numéricas (ver *Figura 15*).

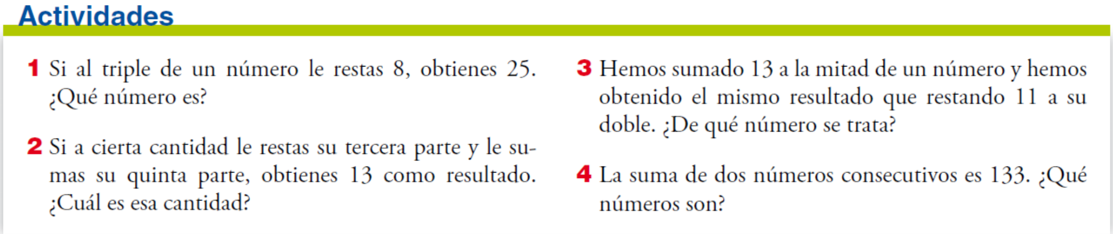
3 Escribe el término general de estas series:

a) 1 - 4 - 9 - 16 - 25 - … $\rightarrow a_n = ?$

b) 0 - 3 - 8 - 15 - 24 - … $\rightarrow b_n = ?$

Figura 15. Ejercicio de generalización. Fuente (Colera y Gaztelu, 2016, p. 85).

Y en lo que refiere a problemas contextualizados, hay apartados como *Resolución de problemas con ecuaciones* y *Resuelve problemas con sistemas de ecuaciones* que plantean problemas “contextualizados” (de la vida real, geométricos…) que se pueden resolver con el uso del tanteo como técnica (ver *Figuras* 16 y 17).



Actividades

1 Si al triple de un número le restas 8, obtienes 25. ¿Qué número es?

2 Si a cierta cantidad le restas su tercera parte y le sumas su quinta parte, obtienes 13 como resultado. ¿Cuál es esa cantidad?

3 Hemos sumado 13 a la mitad de un número y hemos obtenido el mismo resultado que restando 11 a su doble. ¿De qué número se trata?

4 La suma de dos números consecutivos es 133. ¿Qué números son?

Figura 16. Problemas “contextualizados”. Fuente (Colera y Gaztelu, 2016, p. 107).

7 Se han necesitado 150 metros de alambrada para cercar una finca rectangular que es el doble de larga que de ancha. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?

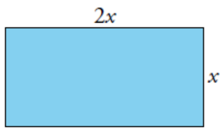


Figura 17. Problema “geométrico”. Fuente (Colera y Gaztelu, 2016, p. 109).

Finalmente, cabe decir que los contenidos se encuentran presentados de forma aislada sin conexión o relación entre sí.

4. Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Como el presente trabajo intenta estudiar el problema didáctico de la enseñanza del álgebra en secundaria, se va a enmarcar dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), desde un enfoque epistemológico que tiene como objeto de estudio el proceso de transposición didáctica del saber sabio al saber aprendido, pasando por saber enseñado. Dicho objeto de estudio incluye además todas las instituciones que participan en este proceso, entre las que se cuentan la Educación Secundaria Obligatoria como institución y también aquellas que intervienen en su enseñanza-aprendizaje.

4.1 Introducción a la TAD

La teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), iniciada a finales de los años 1980 por el investigador francés Yves Chevallard, es publicada en el año 1992 en la revista RDM (Recherches en Didactique des Mathématique) y premiada en el año 2009, por su *"influencia y originalidad"* en el desarrollo de la investigación didáctica de las matemáticas, con la medalla Hans Freudenthal.

Esta teoría asume que las matemáticas son un saber que debe existir fuera de sus lugares de creación, en toda la sociedad. Por ello, con el objetivo de introducir ese saber en otros lugares de la sociedad, es necesario realizar una "transposición didáctica" entendida como: "el conjunto de las transformaciones que sufre un saber con el fin de ser enseñado" (Chevallard, 2005, p. 45), en cuatro etapas: la primera *saber sabio* formada por la comunidad "sabia" (matemáticos profesionales e investigadores); la segunda *saber a enseñar* formada por la noosfera (profesores, padres de alumnos, representantes de los organismos políticos, etc.); la tercera *saber enseñado* formada por el docente; y la cuarta *saber aprendido* formada por el grupo de alumnos. A modo de esquema,

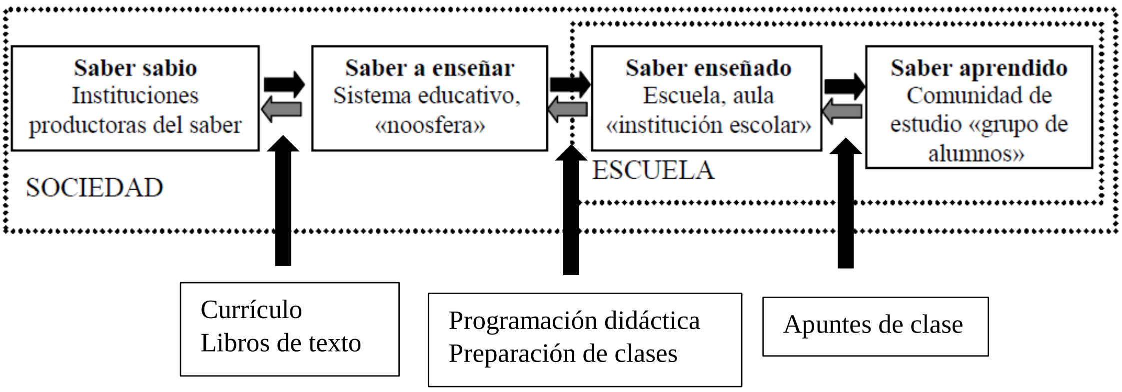


Figura 18. Resumen de la transposición didáctica de Chevallard. Adaptado de (Ruiz-Munzón, 2010, p. 22).

donde, las transformaciones del saber sabio al saber aprendido hacen que el saber sabio se adapte, para poder ser usado, a las condiciones y restricciones de la enseñanza secundaria.

Por otro lado, en esta teoría es esencial, como herramienta de modelización de la actividad matemática, la noción de Praxeología [T, τ, θ, Θ] u Organización Matemática (OM). En este sentido, Chevallard asegura que toda actividad humana puede describirse en términos de praxeologías y, por tanto, que todo proceso de enseñanza puede escribirse como un conjunto de praxeologías didácticas. Desde el punto de vista antropológico, la praxeología está formada por los términos *praxis* (o «saber hacer») [T, τ] y *logos* (o «saber») [θ, Θ]. Es decir, tanto por el bloque práctico-técnico [T, τ]: los tipos de problemas o tareas T que se estudian y las técnicas o los procedimientos τ que se construyen para su resolución, como por el bloque tecnológico-teórico [θ, Θ]: las explicaciones o la tecnología θ que permiten entender estas técnicas τ y los componentes teóricos Θ que, por un lado, dan sentido a los problemas planteados T, por otro lado, permiten interpretar las técnicas τ y, finalmente, fundamentan las descripciones tecnológicas θ.

Las praxeologías [T, τ, θ, Θ] u organizaciones matemáticas (OM) surgen como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones problemáticas "cuestiones generatrices" y no tienen sentido en una enseñanza "monumental" donde el saber enseñado se presenta como un conjunto de obras acabadas, incuestionables, de las que se desconocen sus orígenes, y el porqué y para qué de sus conocimientos. Con el objetivo de que estas praxeologías [T, τ, θ, Θ] tengan sentido y los saberes no sean "monumentos", sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas, existen herramientas didácticas: Actividades de Estudio y de Investigación (AEI) y Recorridos de Estudio y de investigación (REI), proporcionadas por la TAD.

Respecto a los REI, su objetivo principal es introducir una nueva epistemología que dé sentido y funcionalidad al estudio escolar de las matemáticas, sustituyendo a los saberes monumentalistas. El REI está formado por un sistema didáctico $S(X,Y,Q_o)$ en el que un conjunto de alumnos (X) investigan y estudian, con ayuda de uno o más profesores (Y) una cuestión generatriz (Q_o) de interés real cuya respuesta no aparece directamente accesible. Para dar respuesta (R) a esta cuestión generatriz (Q_o), se requiere la construcción de herramientas matemáticas (técnicas, nociones, propiedades, etc.), que aparecen con el estudio de diferentes cuestiones (Q_i) derivadas de (Q_o). Así, en el REI, el estudio de Q_o se centra en un recorrido compuesto por varias cuestiones Q_i.

En cambio, en las AEI, la situación es inversa, no se le da tanta importancia a la cuestión generatriz Q_o, sino a su respuesta R (el <<saber a enseñar>>). Así, el profesor establece de antemano la praxeología $[T, \tau, \theta, \Theta]$ "objetivo" y en base a ella formula la cuestión generatriz Q_o.

Para diseñar un REI o una AEI es preciso apoyarse en un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) que reformula y determina los distintos contenidos por enseñar, es decir, permite, observar, analizar y juzgar los diferentes saberes que forman parte del proceso de la transposición didáctica. Este MER, elaborado por investigadores con base en estudios previos de algún fenómeno didáctico relacionado con alguno de estos contenidos, tiene un carácter provisional y se revisa constantemente. Además, no necesariamente coincide con la praxeología $[T, \tau, \theta, \Theta]$ de la que proviene, aunque se formula en términos próximos a ésta y a la praxeología a enseñar (Bosch y Gascón, 2010).

4.2 Análisis de los libros de texto desde la TAD

Teniendo en cuenta que el libro de texto es el mediador más influyente entre el diseño curricular y la práctica docente en el aula, con el objetivo de analizar el saber a enseñar, se va a estudiar su descripción (3.1) desde el enfoque de la TAD.

De esta manera, en las unidades didácticas 5, 6 y 7 del libro de texto se tratan todos los contenidos que aparecen en el currículo:

- Iniciación al lenguaje algebraico.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.
- Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.

Sin embargo, es un contenido en el que el conocimiento matemático aparece como un conjunto de enunciados, reglas y procedimientos aislados. Además, su estructura es prescriptiva: parte de las definiciones de los conceptos con la concreción de algún ejemplo y, a continuación, plantea ejercicios para que se practique lo que se acaba de exponer. Esta estructura, no hace sino más que incitar a la exposición magistral y al aprendizaje memorístico, dando a entender que la comprensión de los conocimientos no tiene ningún tipo de sentido.

Dicho lo anterior, está claro que las matemáticas no se conciben como un instrumento con el que se pueda interpretar la realidad. Pero, ¿serán factibles, en este sentido, los objetivos generales del currículo?, teniendo en cuenta el *REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*, los objetivos de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria vienen dados por:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Ahora bien, para determinar si se han alcanzado o adquirido estos objetivos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el mismo decreto se dispone de los siguientes criterios de evaluación:

1. Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.

2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.

3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.

4. Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada.

5. Interpretar relaciones funcionales sencillas dadas en forma de tabla, gráfica, a través de una expresión algebraica o mediante un enunciado, obtener valores a partir de ellas y extraer conclusiones acerca del fenómeno estudiado.

6. Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas.

7. Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.

Para poder relacionar estos criterios de evaluación con los objetivos anteriormente propuestos, se va a realizar la siguiente Tabla,

Tabla 1

Relación entre los objetivos generales y los criterios de evaluación

Objetivos de matemáticas en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria	**Criterios de evaluación**
1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.	**1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7**
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.	**1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7**
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.	**1, 2, 4, 5, 6 y 7**
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.	**1, 2 y 5**
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida diaria, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad e imaginación.	**5**
6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.	**1, 2, 5, 6 y 7**
7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.	**1, 2 y 7**

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.	**7**
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.	**7**
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.	**1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7**
11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad entre los sexos o la convivencia pacífica.	**1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7**

Nota. Elaboración propia.

Donde, desde el punto de vista del álgebra, destacan los criterios 3 y 7 de evaluación, que no permiten alcanzar los objetivos generales 4 y 5. Pero, ¿permiten alcanzar al resto? Para ello, se procede a los criterios de evaluación específicos del bloque de contenidos 1 *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* y 2 *Números y Álgebra* propuestos en el *Real Decreto* 1105/2014, *de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.*

Criterios de evaluación del bloque de contenidos 1:

1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema.

2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.

6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.

8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.

9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.

10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.

11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas.

12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.

Que se concretan más en los estándares de aprendizaje:

1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.

2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas.

Observación: La estructura de los enunciados de los problemas es totalmente rigurosa y clásica, sin dar lugar a la interpretación.

2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.

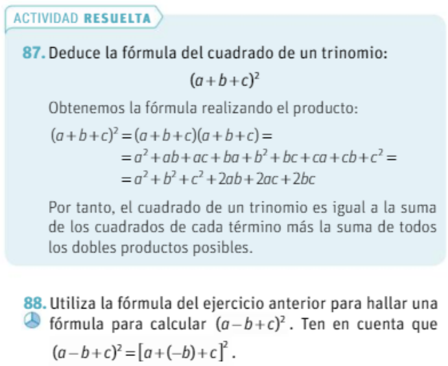
Observación: Se incluyen contextos referidos a áreas distintas a las matemáticas, aunque en mucho menor medida que aquellas que se refieren exclusivamente a ámbitos propios de las matemáticas. No obstante, en cualquiera de los casos, no se utiliza ningún tipo de proceso de razonamiento en la resolución de problemas.

4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.

Observación: Los problemas se resuelven siguiendo algunos pasos de Polya pero sin hacer interpretaciones de resultados obtenidos, ni planteando problemas que supongan un verdadero reto.

4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad.

Observación: A partir de una actividad resuelta, se plantea una nueva actividad variando una operación '+' por '-'


ACTIVIDAD **RESUELTA**

87. **Deduce la fórmula del cuadrado de un trinomio:**

$$(a+b+c)^2$$

Obtenemos la fórmula realizando el producto:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c) = \\ &= a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2 = \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\end{aligned}$$

Por tanto, el cuadrado de un trinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término más la suma de todos los dobles productos posibles.

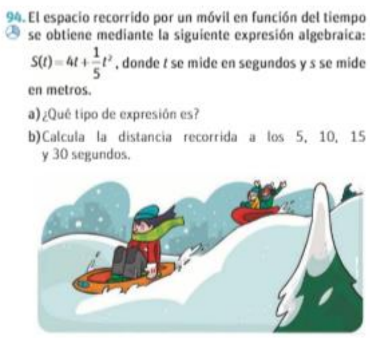
88. **Utiliza la fórmula del ejercicio anterior para hallar una fórmula para calcular $(a-b+c)^2$. Ten en cuenta que $(a-b+c)^2=[a+(-b)+c]^2$.**

Figura 19. Actividad resuelta. Fuente (Nieto et al., 2016, p. 111).

6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

Observación: No se identifican situaciones problemáticas de la realidad, se traducen las situaciones que se plantean en los enunciados verbales.

6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.


94. **El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo se obtiene mediante la siguiente expresión algebraica: $S(t)=4t+\frac{1}{5}t^2$, donde t se mide en segundos y s se mide en metros.**

a) ¿Qué tipo de expresión es?

b) Calcula la distancia recorrida a los 5, 10, 15 y 30 segundos.

Observación: No se establecen conexiones entre un problema del mundo real y del mundo matemático.

Por ejemplo, en este ejercicio, en el apartado a) se especifica el tipo de conocimiento matemático necesario para resolver el problema del mundo real.

Figura 20. Problema. Fuente (Nieto et al., 2016, p.112).

8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.

8.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.

<u>Observación</u>: ¿Se proponen retos? ¿los problemas son de interés?

9.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.

<u>Observación</u>: ¿Hay en algún momento investigación o modelización en los procesos de resolución de problemas?

Por ejemplo, en este ejercicio, donde el objetivo es llegar a la expresión algebraica que permite hallar el consumo de gasolina según los kilómetros recorridos x (apartado c)), se establece un camino a seguir (apartado a) y b)).

Figura 21. Problema. Fuente (Nieto et al., 2016, p.112).

10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares.

<u>Observación</u>: No se reflexiona sobre los problemas resueltos.

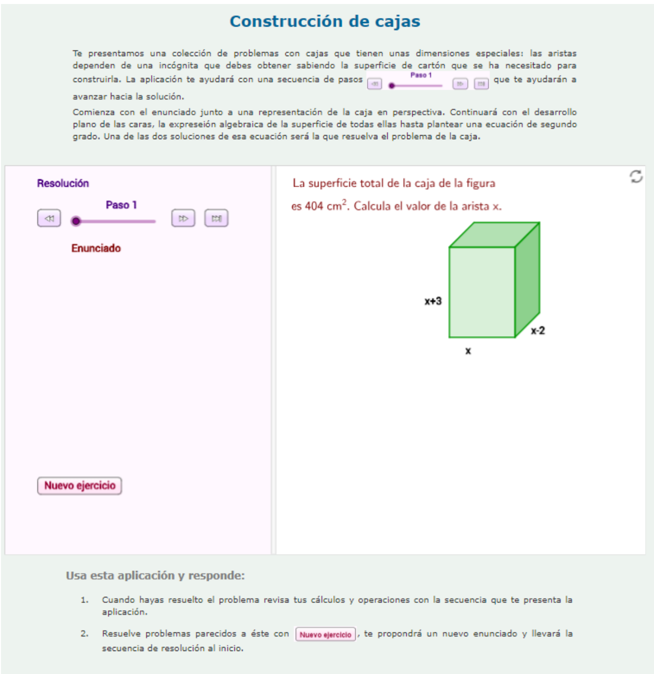


Figura 22. Fuente (Nieto et al., 2016, versión digital).

11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas.

Resolución de sistemas. Método gráfico

En esta aplicación podrás representar gráficamente un sistema de dos ecuaciones lineales para calcular su solución, aunque este método no es tan preciso como los métodos de sustitución, igualación o reducción.

El método consiste simplemente en dibujar las rectas y ver en qué punto se cortan. Las coordenadas (x, y) de ese punto serán la solución del sistema.

Instrucciones de uso:

- Debes usar coeficientes enteros. Si hay denominadores multiplica toda la ecuación por ellos para eliminarlos.
- Para introducir la primera ecuación del sistema escribe **e1: ecuación** en la barra de Entrada. Por ejemplo: e1: $2x - 3y = 3$
- Haz lo mismo con la segunda ecuación, pero esta vez utiliza **e2: ecuación**. Por ejemplo: e2: $3x - y = 1$
- Para recuperar las ecuaciones introducidas en la barra de Entrada, sitúate en ella y utiliza las teclas ↑ y ↓.

Entrada:

Usa la aplicación y responde:

1. Comprueba que las coordenadas del punto de corte cumplen las dos ecuaciones del sistema. ¿Por qué?
2. Introduce otras ecuaciones y comprueba que, en todos los casos, el punto de corte cumple las dos ecuaciones del sistema.
3. Introduce el sistema e1: $x + 2y = 1$ e2: $2x + 4y = 2$ ¿Qué sucede? ¿Por qué?
4. Introduce el sistema e1: $x + 2y = 1$ e2: $x + 2y = 3$ ¿Qué sucede? ¿Por qué?

Figura 23. Fuente (Nieto et al., 2016, versión digital).

12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

<u>Observación</u>: En el libro se proponen recursos interactivos de autoaprendizaje para el alumno como, por ejemplo,

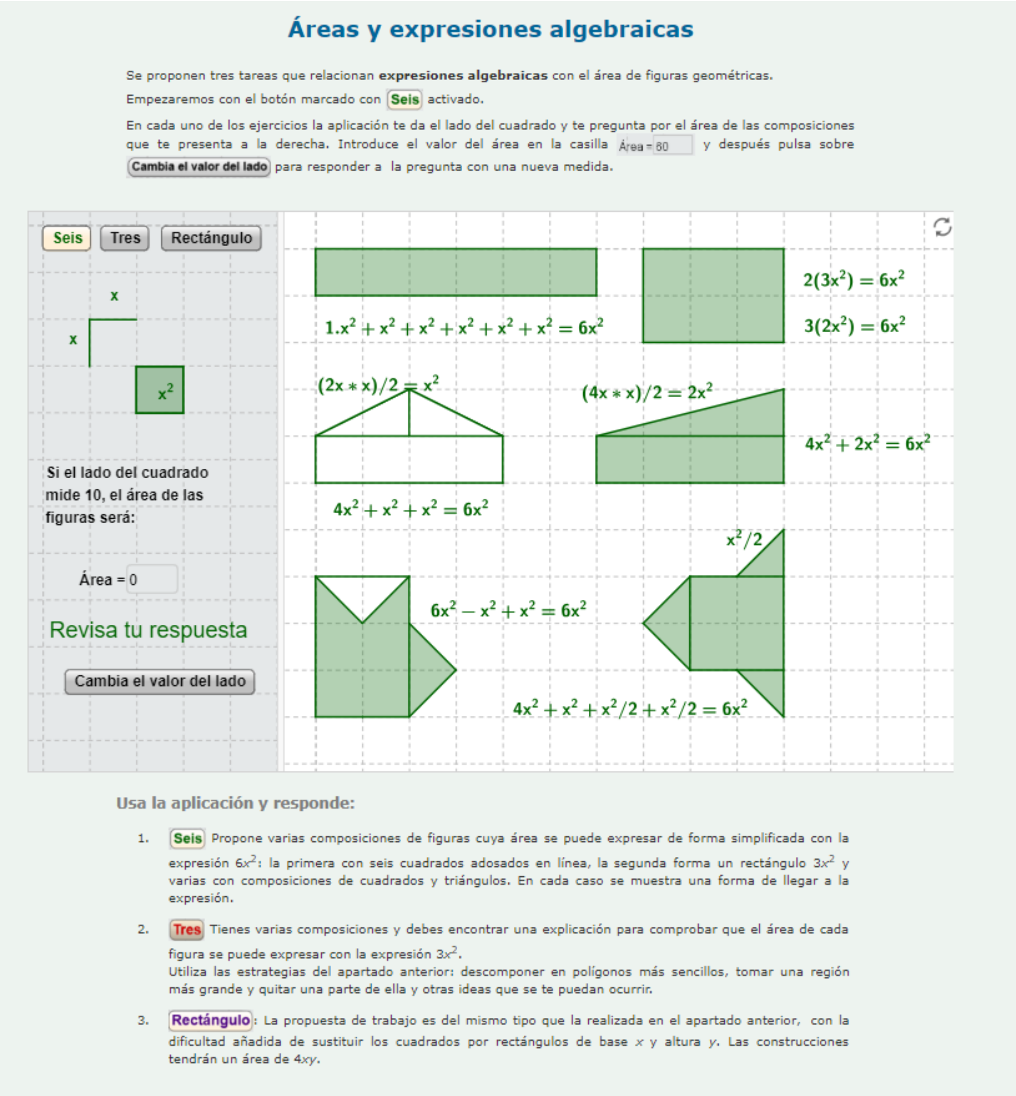


Figura 24. Fuente (Nieto et al., 2016, versión digital).

¿Se mejora así el proceso de aprendizaje?

Criterios de evaluación del bloque de contenidos 2:

6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.

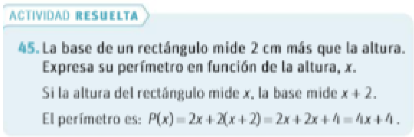
7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.

Que se concretan más en los estándares de aprendizaje:

6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.

<u>Observación</u>: No se describen situaciones, se traducen los enunciados al lenguaje algebraico. Tampoco hay actividades relacionadas con secuencias lógicas.

¿Opera con las expresiones algebraicas?...


ACTIVIDAD RESUELTA

45. La base de un rectángulo mide 2 cm más que la altura. Expresa su perímetro en función de la altura, x.

Si la altura del rectángulo mide x, la base mide $x+2$.

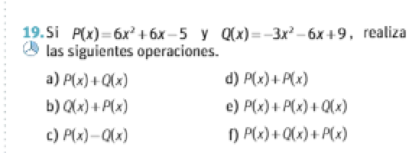
El perímetro es: $P(x)=2x+2(x+2)=2x+2x+4=4x+4$.

Se realizan los cálculos correspondientes

Figura 25. Fuente (Nieto et al., 2016, p.108).

6.2. Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.

<u>Observación</u>: No se identifican propiedades ni leyes generales.


19. Si $P(x)=6x^2+6x-5$ y $Q(x)=-3x^2-6x+9$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x)+Q(x)$

b) $Q(x)+P(x)$

c) $P(x)-Q(x)$

d) $P(x)+P(x)$

e) $P(x)+P(x)+Q(x)$

f) $P(x)+Q(x)+P(x)$

Se deducen propiedades en casos concretos.

Figura 26. Fuente (Nieto et al., 2016, p.101).

Por ejemplo, en este ejercicio,

a) $P(x)+Q(x)=(6x^2+6x-5)+(-3x^2-6x+9)=3x^2+4$

b) $Q(x)+P(x)=P(x)+Q(x)=3x^2+4$

c) $P(x)-Q(x)=(6x^2+6x-5)-(-3x^2-6x+9)=9x^2+12x-14$

d) $P(x)+P(x)=(6x^2+6x-5)+(6x^2+6x-5)=12x^2+12x-10$

e) $P(x)+P(x)+Q(x)=[P(x)+P(x)]+Q(x)=12x^2+12x-10+(-3x^2-6x+9)=9x^2+6x-1$

f) $P(x)+Q(x)+P(x)=P(x)+P(x)+Q(x)=9x^2+6x-1$

se tiene que P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x) y que P(x) + P(x) + Q(x) = P(x) + Q(x) + P(x)

y, por tanto, en este caso en concreto, se cumple la propiedad asociativa de polinomios.

Pero, ¿de manera general? ¿se cumple siempre la propiedad asociativa de polinomios?

6.3. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.

<u>Observación</u>: No se utilizan las identidades notables, se desarrollan. Tampoco se utilizan las propiedades de las operaciones, se opera y simplifica.

38. Desarrolla, opera y simplifica.

a) $(2x+3)^2-(2x-3)^2$

b) $(5x^2+2x)(5x^2-2x)-(5x^2-2x)^2$

c) $(a+b)^2-(a-b)^2+(a+b)(a-b)$

Figura 27. Fuente (Nieto et al., 2016, p.105).

7.1. Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.

<u>Observación</u>: Se comprueba, dada una ecuación, si un número (también dado) es solución de la misma.

3. Comprueba, en cada caso, que el valor de *x* propuesto es solución de la ecuación.

a) $3x^2-5x+2=0$, para $x=1$

b) $2(3x-5)-4x=-6$, para $x=2$

c) $\frac{x-1}{3}-2x=-7$, para $x=4$

d) $3x^2+x-2=0$, para $x=\frac{2}{3}$

Figura 28. Fuente (Nieto et al., 2016, p.97).

7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.

<u>Observación</u>: Se traducen al lenguaje algebraico enunciados verbales de la vida real en los que intervienen ecuaciones de primer y segundo grado, no se formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado.

29. Marisa tiene 43 años y tres hijos. El pequeño tiene 2 años menos que el mediano y este, tres años menos que la mayor. Calcula sus edades sabiendo que dentro de 3 años la suma de las edades de los hijos será igual a la edad que tendrá la madre.

Figura 29. Fuente (Nieto et al., 2016, p.103).

En lo visto, los libros de texto no ayudan a la consecución de los objetivos generales, pues, son unos objetivos generales flexibles que requieren experimentación y enseñanza por descubrimiento. Permitiendo de esta manera un aprendizaje de las matemáticas en relación con otros contenidos que pueden ser matemáticos o no.

4.3 Un modelo epistemológico de referencia (MER) del álgebra como instrumento de modelización

La introducción al álgebra y su estudio en la enseñanza secundaria se sigue abordando, hoy en día, como una *aritmética generalizada*, esto es, un cálculo con letras, si atendemos a las propuestas que aparecen en los libros de texto, considerados fuente de los saberes matemáticos: “el libro de texto ofrece una concepción legitimada del saber a enseñar” (Chevallard, 1991, p.11).

No obstante, según Bolea, Bosch y Gascón (2001), el álgebra debería de ser interpretado como un instrumento de modelización de praxeologías u organizaciones matemáticas (OM), o como un instrumento de modelización de sistemas intra-matemáticos o extra-matemáticos (Ruiz-Munzón et al., 2010). De esta manera, con base en la TAD, se construye un modelo epistemológico de referencia (MER) del álgebra con el fin de hacer posible la génesis escolar del instrumento algebraico. Este MER se construye en torno a los problemas aritméticos y a las sucesivas praxeologías [T, τ, θ, Θ] de complejidad creciente, distinguiendo tres etapas o niveles del proceso de algebrización elemental de la actividad matemática. Se describe, a continuación, las tres etapas propuestas de dicho proceso (Ruiz-Munzón et al. 2010).

4.3.1 Primera etapa del proceso de algebrización

Se consideran inicialmente los problemas aritméticos, en su acepción más clásica, como aquellos que partiendo de los datos, normalmente medidas de magnitudes, se pueden resolver ejecutando una cadena de operaciones aritméticas (+, -, x, /, etc.) y que, siguiendo la propuesta de Chevallard (2004), denominamos *programa de cálculo aritmético* —PCA—, para expresar la secuencia de operaciones que permiten calcular la cantidad incógnita.

Así, se va a identificar la primera etapa del proceso de algebrización como aquella que requiere pasar de un sistema inicial **S** a un sistema $\mathbf{M_1}$, donde **S** es el sistema formado por los problemas aritméticos que se pueden resolver mediante la ejecución de un PCA en forma verbal (retórica) y el patrón de análisis-síntesis (τ), considerando tanto las propiedades de las magnitudes y de los diferentes sistemas de números utilizados para su medida como las operaciones y relaciones entre ellos (θ) y $\mathbf{M_1}$ es el sistema formado por problemas que se pueden resolver mediante la ejecución de un PCA del tipo $P(x, a_1, \ldots, a_k)$ en forma escrita (simbólica) con la necesidad de nuevas técnicas (τ), esencialmente de “simplificación”.

S: OM en torno a los problemas aritméticos + PCA (en forma retórica) + patrón análisis-síntesis

→

M_1: Problemas que requieren la manipulación escrita de PCA del tipo P (x, $a_1,\ldots, a_k$) + técnicas de escritura y de simplificación de expresiones algebraicas.

Figura 30. Primera etapa del proceso de algebrización. Adaptado de (Ruiz-Munzón, 2010, p. 22).

El paso de un PCA en formulación retórica a un PCA en formulación simbólica requiere escribir la cadena de operaciones en una única línea, explicitando su estructura de forma global y, por tanto, considerando su jerarquía de operaciones, sus reglas del uso de paréntesis y sus propiedades de relación (θ).

Un ejemplo de un problema aritmético en el sistema inicial **S**, resoluble mediante el patrón de análisis-síntesis es:

> *Inés piensa un número, le suma 2000, divide su resultado por 10, le resta 200 y multiplica su resultado por 20. Si su resultado final es 60, ¿qué número había pensado Inés*?

Este problema se puede resolver de manera verbal como: antes de llegar al resultado final 60, el resultado era 60 / 20 = 3; antes de restar 200, el resultado era 3 + 200 = 203; antes de dividir entre 10, el resultado era 203 · 10 = 2030; y antes de sumar 2000 el número pensado era 2030 – 2000 = 30. De modo que, el número que había pensado Inés era 30.

Además, este problema se puede escribir como un PCA:

$$\text{PCA }(60, 20, 200, 10, 2000) = (((60 / 20) + 200) \cdot 10) - 2000 =$$

$$= ((3 + 200) \cdot 10) - 2000 = (203 \cdot 10) - 2000 = 2030 - 2000 = 30.$$

donde, la respuesta del problema es el resultado que se obtiene al ejecutar el PCA.

La escritura del patrón de análisis-síntesis sería:

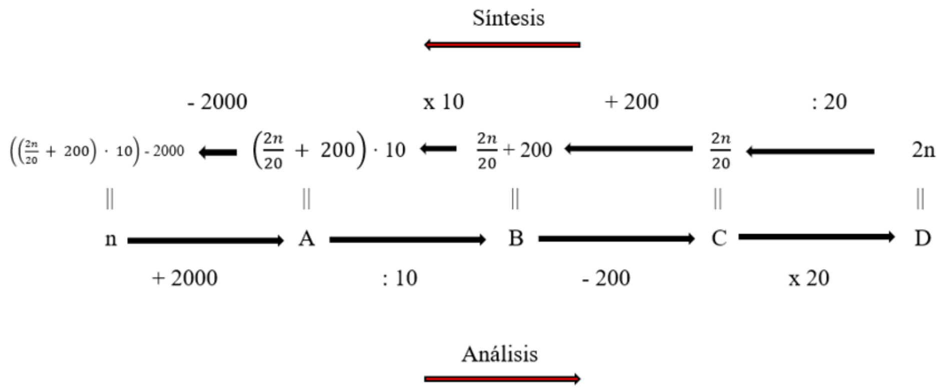


Figura 31. Patrón análisis-síntesis. Nota: elaboración propia.

donde, C = 3, B = 203, A = 2030 y n, el número pensado por Inés, es 30.

Ahora, si a este problema se le plantean cuestiones de naturaleza tecnológica como:

> *Inés piensa un número, le suma 2000, divide su resultado por 10, le resta 200 y multiplica su resultado por 20. ¿Qué relación hay entre el número inicialmente pensado por Inés y el resultado obtenido después de realizar todas las operaciones*?

Observamos que ahora el resultado no es un número, sino una relación, y también los datos se expresan mediante una relación, por lo que ya no es posible una resolución aritmética. Esto es lo que caracteriza, esencialmente, a los problemas que se sitúan en la primera etapa del proceso de algebrización y en la organización matemática designada con $\mathbf{M_1}$.

Por otra parte, es dentro de este nivel $\mathbf{M_1}$ donde se encuentran aquellos problemas cuya resolución requiere resolver una ecuación para la que la incógnita se encuentra, solamente, en uno de los dos miembros. En estos casos, normalmente se necesitarán las técnicas de simplificación, pero no las de cancelación, que supondrán el paso al segundo nivel de modelización algebraica.

4.3.2 Segunda etapa del proceso de algebrización

El paso a la segunda etapa del proceso de algebrización se identifica con la necesidad de igualar dos PCA con los dos mismos argumentos no numéricos x_1 y x_2:

$$\mathrm{P}_1\,(x_1, x_2, a_1, \ldots, a_k) = \mathrm{P}_2\,(x_1, x_2, b_1, \ldots, b_s)$$

Para su resolución, hay que manipular una igualdad como un nuevo objeto matemático (ecuación), lo que requiere nuevas técnicas, las “técnicas de cancelación”, con las que obtener *ecuaciones equivalentes* y no únicamente PCA equivalentes como ocurría con las “técnicas de simplificación” de la primera etapa.

$\mathbf{M_1}$: OM en torno a problemas que requieren un PCA en forma simbólica + nuevas técnicas (simplificación).	$\longrightarrow$	$\mathbf{M_2}$: OM en torno a problemas que requieren una igualdad entre dos PCA con los mismos argumentos no numéricos + técnicas de cancelación.

Figura 32. Segunda etapa del proceso de algebrización. Adaptado de (Ruiz-Munzón, 2010, p. 22).

Un caso particular en $\mathbf{M_2}$ surge cuando los PCA sólo tienen un mismo argumento no numérico (x_1), esto es, cuando los problemas son resolubles mediante *ecuaciones con una incógnita*.

$$P_1\,(x_1, a_1\ldots a_k) = P_2\,(x_1, b_1\ldots b_s)$$

Y es esta OM donde se encuentra la razón de ser del álgebra elemental, según el currículo oficial.

Por tanto, la actividad matemática en torno a las ecuaciones con una incógnita se sitúa entre la primera etapa —ecuaciones con una incógnita que no requieren del uso de técnicas de cancelación—, y la segunda etapa. Dicha actividad se considera como un caso muy particular de la actividad en torno a las ecuaciones con dos incógnitas que se sitúa plenamente en la segunda etapa del proceso de algebrización.

Un ejemplo de problema situado en este segundo nivel se puede conseguir a partir de algunas modificaciones del problema anterior:

> *Inés piensa dos números diferentes y realiza dos cálculos. En primer lugar, al número menor lo multiplica por 2000, al mayor lo multiplica por 10 y al resultado de la resta de esas dos multiplicaciones le suma 200. En segundo lugar, multiplica por 20 la diferencia entre ambos números. Si el resultado de las dos secuencias de operaciones coincide, ¿qué relación es posible entre ambos números*?

En este caso ya no será suficiente con escribir un PCA de forma simbólica y utilizar técnicas de simplificación, pues, se tienen dos PCA con dos mismos argumento no numéricos n y m. Así, se necesitarán nuevas técnicas del sistema $\mathbf{M}_2$ que se situarán en la segunda etapa del proceso de algebrización.

Escribiendo en forma simbólica cada uno de los PCA y tomando n como el número menor y m como el número mayor, se tiene,

$$PCA_1\,(n, 2000, m, 10, 200) = 2000n - 10m + 200$$

$$PCA_2\,(20, n, m) = 20\,(m - n) \equiv 20m - 20n.$$

De esta manera, no conocemos el resultado numérico de ejecutar cada uno de los programas de cálculo pero sí se puede expresar la condición del problema *si el resultado de las dos secuencias de operaciones coincide,* como una igualdad entre dos PCA:

$$2000n - 10m + 200 = 20m - 20n$$

que para responder a la cuestión *sobre la posible entre ambos números* necesita nuevas técnicas “de cancelación”. En consecuencia,

$$2000n - 10m + 200 + 20n = 20m - 20n + 20n \;\;\Rightarrow\;\; 2020n - 10m + 200 = 20m;$$

$$2020n - 10m + 200 + 10m = 20m + 10m \quad \Rightarrow \quad 2020n + 200 = 30m;$$

$$2020n + 200 - 200 = 30m - 200 \quad \Rightarrow \quad 2020n = 30m - 200;$$

$$\frac{2020n}{2020} = \frac{30m - 200}{2020} \Rightarrow n = \frac{30m - 200}{2020}$$

se obtiene una relación entre las variables *n* y *m* que permite dar respuesta a la pregunta planteada en el problema.

4.3.3 Tercera etapa del proceso de algebrización

Finalmente, la tercera etapa del proceso de algebrización se identifica con el momento en el que aparece, a través de cuestiones relacionadas tanto con el estudio sobre la variación conjunta de dos o más variables sobre el PCA, como con la existencia y unicidad de soluciones o con la razón de ser alternativa del álgebra elemental en secundaria como instrumento de modelización, la necesidad de no limitar el número de variables y de no hacer distinción entre incógnitas y parámetros.

M2: OM en torno a problemas que requieren una igualdad entre dos PCA con los mismos argumentos no numéricos + técnicas de cancelación

$\longrightarrow$

M3: Problemas que requieren el uso de una *fórmula algebraica* + técnicas para estudiar cómo depende cada variable de la fórmula de las restantes.

Figura 33. Tercera etapa del proceso de algebrización. Adaptado de (Ruiz-Munzón, 2010, p. 22).

Ahora se requiere una fuerte generalización del cálculo ecuacional y, dependiendo del problema, o del PCA que lo simboliza, aparecen fórmulas difíciles de analizar si solo se dispone de las técnicas algebraicas, por lo que no abordaremos ahora el estudio en este nivel de modelización algebraica.

5. Una propuesta didáctica de introducción al álgebra en Secundaria.

En Ruiz-Munzón (2010) se plantea un dispositivo didáctico, en particular una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) para la introducción del instrumento algebraico basada en el MER que, brevemente, se acaba de describir. Se parte del sistema relativo a los problemas aritméticos, en concreto a una parte **S** de este sistema como es la de los problemas cuya estructura se puede asociar a un programa de cálculo aritmético (PCA) y que, después de simplificado, toma la forma:

$$\text{PCA}\ (n, a_1 \ldots a_k) = a \cdot n + b$$

La puesta en funcionamiento de la AEI se plantea a partir de juegos que propone un mago en torno a “las adivinanzas”, y se desarrolla en distintas sesiones que se realizan en las clases de matemáticas de segundo de ESO: los juegos de *matemagia* (ver ANEXO I). A partir de los juegos que “el mago” plantea, se va a posibilitar que los alumnos realicen un proceso de estudio donde el instrumento algebraico va a emerger como necesario para poder resolver diferentes cuestiones que surgen a lo largo de la elaboración de las respuestas por parte de los alumnos. De aquí en adelante se detallarán cada una de las sesiones que se plantean como propuesta didáctica para la introducción del álgebra en secundaria, en las que el profesor hará de mago.

6.1.1. Primera sesión

El objetivo de esta primera sesión (en el aula normal de clase, sin calculadora) es que los alumnos, mediante la adivinanza de los trucos de magia (hoja 1 y 2, ANEXO I), escriban las operaciones realizadas. Para ello, el profesor les da como indicación: *escribid las operaciones “paso a paso” utilizando el signo* = (en este caso, los alumnos comprobarán con los números elegidos por ellos, ya que no pueden hacerlo de otra manera). Y, tras un trabajo de comprobación y de escritura, el profesor, con la intención de que los alumnos adivinen el truco, les ayuda diciendo: *para adivinar el truco debeis de escribir las operaciones “en línea” pero sin realizarlas*.

6.1.2. Segunda sesión

En la segunda sesión, con el fin de realizar escrituras en “una sola línea” con el software matemático *Wiris*, se va a ir al aula de informática. Allí, el alumno con la utilización de *Wiris* se dará cuenta de la importancia que tiene el uso del paréntesis en la jerarquización de operaciones: sin los paréntesis no se pueden explicar los trucos.

6.1.3. Tercera sesión

En la tercera sesión el objetivo es que los alumnos sean capaces de explicar, para cualquier número, cómo funciona el truco de magia (emergiendo la noción de “variable”). Así, aparece la posibilidad de “no operar” con el número pensado para poder adivinar el truco. En este sentido, los alumnos empiezan por “encuadrar” el número que han pensado y más tarde escriben sólo el símbolo del cuadrado vacío “ $\square$ ”.

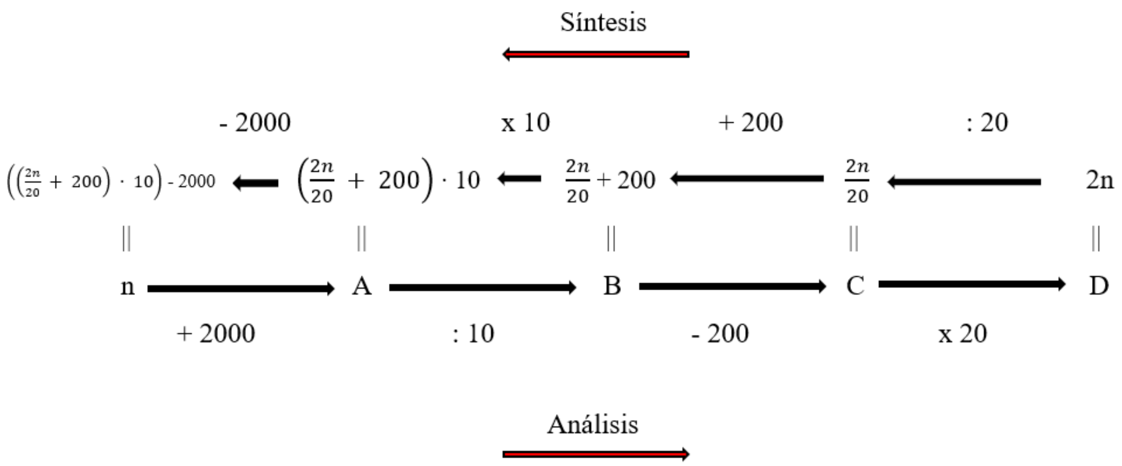
6.1.4. Cuarta sesión

En la cuarta sesión, debido a las dificultades que presentan los alumnos con la propiedad distributiva, con el manejo del símbolo “ □ ” y con los números negativos, se continúa trabajando en las hojas 1 y 2 (ver ANEXO I), pero de una manera más exhaustiva.

Tras estas cuatro primeras sesiones, donde se trabaja la hoja 1 y 2 de problemas (ver ANEXO I), lo que se pretende es el paso de un PCA verbal a un PCA escrito válido para cualquier número, es decir, la organización matemática $\mathbf{M_1}$. Un ejemplo de ello es:

> *Piensa un número, súmale 2000, divide el resultado por 10, réstale 200 y multiplica el resultado por 20. ¡Te da el doble del número pensado!*

donde la utilización del patrón análisis-síntesis,



requiere, además de nuevas técnicas, una manipulación escrita que responda a la pregunta ¿cómo se explica el truco de magia que utiliza el mago? En este sentido, ya no sirve el sistema inicial considerado, se necesita una nueva OM, en la cual, será interesante recurrir a la escritura del truco de magia como PCA “expresión algebraica”, pues, permite realizar la síntesis directa del problema, sin tener que recurrir al análisis:

$$n \xrightarrow[+\,2000]{} n+2000 \xrightarrow[:\,10]{} \frac{n+2000}{10} \xrightarrow[-\,200]{} \left(\frac{n+2000}{10}\right)-200 \xrightarrow[x\,20]{} \left(\left(\frac{n+2000}{10}\right)-200\right)\cdot 20$$

se obtiene así la igualdad PCA (n, 2000, 10, 200, 20) = (((n + 2000) / 10) – 200) · 20. Cuya resolución aritmética, por ejemplo:

si el número pensado es el 3, PCA (3, 2000, 10, 200, 20) = $\left(\left(\frac{3+2000}{10}\right) - 200\right)$ · 20 = 6;

si el número pensado es el 10, PCA (10, 2000, 10, 200, 20) = $\left(\left(\frac{10+2000}{10}\right) - 200\right)$ · 20 = 20,

proporciona siempre el mismo resultado numérico, el doble, independientemente del número pensado inicialmente. Aparece, por tanto, una cuestión tecnológica ("¿por qué se obtiene siempre el doble independientemente del número pensado?") que no se puede responder fácilmente con las técnicas aritméticas. De esta manera, se requieren nuevas técnicas. Entonces, utilizando técnicas de simplificación,

$$\text{PCA}\ (n, 2000, 10, 200, 20) = (((n + 2000) / 10) - 200) \cdot 20 \equiv 2n$$

se obtiene un PCA equivalente donde la variable n (o como ponen los alumnos "☐") actúa como parámetro y la incógnita $2n$ corresponde con el resultado de ejecutar el PCA.

En cuanto a la praxeología [T, τ, θ, Θ] llevada a cabo en estas cuatro primeras sesiones, se encuentra formada por un conjunto de juegos de magia (T), en los que el mago intenta adivinar el resultado sin conocer el número pensado. Así, estos tipos de juegos (T) se pueden agrupar en:

▪ PCA (n, a_1, …, a_k) = $a \cdot n$, donde n es el número pensado y a es un número real.

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = $2 \cdot n$ (Truco de magia 1(1))

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = n (Truco de magia 2(1), 7(1) y 1(2))

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = $(1/4) \cdot n$ (Truco de magia 5(1))

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = $(1/2) \cdot n$ (Truco de magia 6(1))

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = $4 \cdot n$ (Truco de magia 8(1))

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = $100 \cdot n$ (Truco de magia 4(2))

▪ PCA (n, a_1, …, a_k) = a, donde a es un número real.

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = 75 (Truco de magia 3(1))

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = 120 (Truco de magia 3(2))

▪ PCA (n, a_1, …, a_k) = $a \cdot (n + 1)$, donde a es un número real y n es el número pensado.

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = $n + 1$ (Truco de magia 4(1))

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = 12 · (n + 1) (Truco de magia 2(2))

▪ PCA (n, a_1, …, a_k) = $n - a$, donde a es un número real y n es el número pensado.

✓ PCA (n, a_1, …, a_k) = n - 4 (Truco de magia 5(2))

que necesitan técnicas (τ) de simplificación para su resolución, justificadas por la jerarquía y las propiedades de las operaciones y por el uso de paréntesis (tecnología (θ)).

Dicho esto, esta primera etapa de algebrización está representada por aquellos problemas que se traducen a una formulación escrita (simbólica) de una secuencia de operaciones en una única línea, considerando la jerarquía de las operaciones y el uso de paréntesis. Además, los datos ya no son todos numéricos, aparece alguna incógnita. Así, este tipo de problemas puede ser traducido como una igualdad del tipo,

PCA (x, a_1, …, a_k), con a_i (i =1, …, k) argumentos numéricos concretos y x incógnita

cuya resolución requiere técnicas de simplificación.

Finalmente, como en este tipo de juegos (T) para descubrir el truco de magia, es imprescindible el manejo del PCA a través de la técnica de simplificación, esta se convierte en una herramienta útil para un propósito determinado, antes que un formalismo matemático.

6.1.5. Quinta sesión

Esta quinta sesión se realiza en el aula de informática con los problemas de la hoja 3 (ver ANEXO I). Los alumnos, a través de números particulares y de diferentes técnicas, trabajan los ejercicios que, más tarde, ponen en común. Es en esta puesta, donde verifican que los números elegidos son diferentes ¿Cómo es posible? Para entenderlo, utilizan Wiris. El software impone la necesidad de reemplazar el símbolo “☐”, puesto que no es reconocido. Surge así, la necesidad de sustituirlo por una letra, que es elegida por cada estudiante.

Además, se sigue trabajando la simplificación y, sobre todo, el uso de paréntesis y la posible eliminación de algunos de estos, ya que su uso llega a ser excesivo e innecesario.

Por tanto, en esta sesión, se pretende continuar con la escritura simbólica en línea de los PCA, aunque más complicados y con adivinanzas equivocadas sobre los resultados esperados. Esto hará que ellos averigüen si es verdad o no. El nuevo tipo de problema (T) viene dado por: PCA (n, a_1, …, a_k) ≠ número del mago, por ejemplo,

Piensa un número súmale el consecutivo, súmale 3, multiplica el resultado por 2 y réstale 8, ¡Te da 15!

que planteado como un PCA sería:

$$\text{PCA}\ (n, 3, 2, 8) = ((n + (n + 1) + 3) \cdot 2) - 8 \equiv 4n + 8 - 8 = 4n \neq 15.$$

De esta manera, el objetivo es que desaparezca esa sustitución de n por números concretos. Es decir, que se sepa interpretar el juego de magia como un PCA con una incógnita y que se sepa utilizar la técnica de simplificación para su resolución.

6.1.6. Sexta sesión

En esta sexta sesión, el objetivo es reforzar la técnica de simplificación. Para ello, sin la utilización del software *Wiris*, se continúa trabajando con los ejercicios de la hoja 3 (ver ANEXO I), donde aún se observa a estudiantes usando: algún número concreto, el símbolo del cuadrado (la mayoría) o una letra.

Además, como deberes para la próxima sesión los estudiantes deberán de inventar nuevos trucos de magia.

6.1.7. Séptima y octava

El profesor, con el objetivo de reforzar la técnica de simplificación y el uso de paréntesis, propone un juego: divide a los alumnos en seis grupos y cada grupo elige dos juegos de los que han preparado. Cada vez que un grupo es capaz de explicar el truco propuesto por otro grupo obtiene un punto y si ninguno es capaz de explicar el propio truco propuesto por el grupo, también este grupo gana un punto.

Durante el juego, algunos trucos son imposibles de explicar (requieren la introducción de técnicas desconocidas) mientras que otros se explican sin dificultad. Además, un grupo propone un juego que ninguno de sus miembros sabe cómo explicar (parece ser que lo han sacado de Internet o de algún libro).

En esta sesión cabe destacar que todos los alumnos, para indicar el número esperado, aún utilizan el símbolo del cuadrado.

6.1.8. Novena y décima sesión

En la novena y décima sesión, con la intención de dar respuesta a la pregunta *Si* $PCA_1(n)$ *y* $PCA_2(n)$ *son dos programas de cálculo aritmético con las mismas operaciones presentadas en orden diferente, ¿en qué casos estos dos PCA son equivalentes?* se trabaja con la hoja 4 de problemas del ANEXO I.

Así, en la novena sesión, se intentan resolver, mediante la escritura "en línea" y la técnica de simplificación, los siguientes siete trucos de magia:

(1) Piensa un número, súmale 3, réstale 12, multiplica por 2 y divide el resultado por 4.

(2) Piensa un número, multiplica por 2, súmale 3, réstale 12 y divide el resultado por 4.

(3) Piensa un número, réstale 12, súmale 3, multiplícalo por 2 y divide el resultado por 4.

(4) Piensa un número, réstale 12, súmale 3, divide el resultado por 4 y multiplícalo por 2.

(5) Piensa un número, multiplícalo por 2, réstale 12, súmale 3 y divide el resultado por 4.

(6) Piensa un número, réstale 12, multiplícalo por 2, súmale 3 y divide el resultado por 4.

(7) Piensa un número, multiplícalo por 2, súmale 3, divide el resultado por 4 y réstale 12.

que se pueden escribir como PCA:

(1) PCA $(n, 3, 12, 2, 4) = ((n + 3 – 12) \cdot 2) / 4 \equiv (n – 9) / 4$

(2) PCA $(n, 2, 3, 12, 4) = (2n + 3 – 12) / 4 \equiv (2n – 9) / 4$

(3) PCA $(n, 12, 3, 2, 4) = ((n – 12 + 3) \cdot 2) / 4 \equiv (n - 9) / 2$

(4) PCA $(n, 12, 3, 4, 2) = ((n – 12 + 3) / 4) \cdot 2 \equiv (n – 9) / 2$

(5) PCA $(n, 2, 12, 3, 4) = (2n – 12 + 3) / 4 \equiv (2n – 9) / 4$

(6) PCA $(n, 12, 2, 3, 4) = (((n -12) \cdot 2) + 3) / 4 \equiv (2n – 21) / 4$

(7) PCA $(n, 2, 3, 4, 12) = ((2n + 3) / 4) – 12 \equiv (2n – 45) / 4$

Una vez escritos como PCA y aplicando la técnica de simplificación, se verá que algunos presentan el mismo resultado, por ejemplo, el (3) y el (4). En este sentido, el objetivo es conocer las explicaciones o la tecnología (θ) que justifican las técnicas (τ) de simplificación.

Llegados aquí, en la décima sesión, se propone que los alumnos, con el objetivo de que conozcan las propiedades de los PCA cuando se cambia el orden de sus argumentos, den respuesta a la pregunta *¿Cuántos juegos y trucos diferentes obtendrá? ¿Podéis escribirlos todos?* Entonces, para poder conocer los diferentes trucos, se deberá tener en cuenta aquellos que den el mismo resultado. Pero, ¿cuántos trucos de magia hay? ¿cuántos se repiten? Como se tienen cuatro opciones: multiplicar por 2, sumar 3, dividir por 4 y restar 12, para el primer argumento del PCA será posible cualquiera de las 4 opciones; en cambio, para el segundo argumento del PCA sólo quedarán 3 opciones (todas menos la elegida para el primer argumento); de la misma manera, para el tercer argumento del PCA quedarán 2 opciones; y, finalmente, para el cuarto argumento del PCA sólo quedará una opción. Así, habrá un total de 24 posibilidades. No obstante, de todas esas posibilidades (24) de PCA, se tendrán que descartar las que den el mismo resultado (pues, corresponderán con el mismo truco de magia).

Buscando todas las combinaciones posibles de los argumentos de los PCA, se tiene que (además de los anteriores),

PCA (n, 3, 12, 2, 4) = PCA (n, 3, 12, 4, 2) = PCA (n, 12, 3, 2, 4) = PCA (n, 12, 3, 4, 2) ≡ (n – 9) / 2

PCA (n, 2, 3, 12, 4) = PCA (n, 2, 12, 3, 4) ≡ (2n – 9) / 4

PCA (n, 4, 12, 3, 2) = PCA (n, 4, 12, 2, 3) = PCA (n, 4, 3, 12, 2) ≡ (n – 36) / 2

PCA (n, 12, 2, 4, 3) = PCA (n, 12, 4, 2, 3) ≡ (n – 6) / 2

PCA (n, 4, 2, 12, 3) = PCA (n, 4, 2, 3, 12) = PCA (n, 2, 4, 12, 3) = PCA (n, 2, 4, 3, 12) ≡ (n – 18) / 2

PCA (n, 2, 12, 4, 3) = PCA (n, 12, 4, 3, 2) ≡ n / 2

PCA (n, 12, 2, 3, 4) ≡ (2n – 21) / 4

PCA (n, 2, 3, 4, 12) ≡ (2n – 45) / 4

PCA (n, 3, 4, 12, 2) ≡ (n – 45) / 2

PCA (n, 3, 4, 2, 12) ≡ (n – 21) / 2

PCA (n, 3, 2, 12, 4) ≡ (n – 3) / 2

PCA (n, 3, 2, 4, 12) ≡ (2n – 42) / 4

PCA (n, 4, 3, 2, 12) ≡ (4n – 21) / 2

Por último, con el fin de dar respuesta a la cuestión tecnológica *¿por qué se repiten algunos resultados?*, se analizará la jerarquía de operaciones y el uso de paréntesis de los PCA.

Decimoprimera y decimosegunda sesión

A partir de la decimoprimera sesión, los estudiantes comenzarán a trabajar con una nueva técnica "marcha atrás". Así, en la hoja 5 del ANEXO I, se proponen como nuevos problemas aquellos en los que el mago, a través del resultado final, adivina el número inicial. Como, por ejemplo,

> *Al doble del número pensado le he sumado 10. El resultado obtenido ha sido 50, ¿cuál es el número que he pensado?*

este problema se puede resolver con la "técnica inversa": Para obtener el resultado final (50), antes se tenía 10 unidades menos (50 – 10 = 40) que es igual al doble del número "*n*" pensado ($2 \cdot n = 40$). De modo que, el número pensado por el mago es el 20 ($n = 40 / 2 = 20$).

Pero también se puede plantear como un PCA,

$$\text{PCA}(n, 2, 10) = 2n + 10 = 50 \;\Rightarrow\; n = 20.$$

De esta manera, tras realizar los problemas (T) de la hoja 5, se pudo observar que estos eran del tipo:

> PCA (n, a_1, …, a_k) = $a \cdot n + b$ (con $a \neq 0$) y PCA (n, a_1, …, a_k) = b (con $a = 0$) donde a_1, …, a_k, a y b son números enteros y n es la incógnita.

y que las cuestiones tecnológicas (θ) que se planteaban *¿se puede adivinar el número inicial? ¿Por qué?* Justificaban la realización de las técnicas de simplificación.

6.1.9. **Decimotercera y decimocuarta sesión**

Durante la decimotercera y decimocuarta, a través de la hoja 6 y 7 del ANEXO I, el profesor introduce la técnica de cancelación. Así, introduce problemas donde se dan *dos PCA, cuyo resultado final no se conoce, pero se sabe que coinciden para un determinado número inicial.*

El objetivo que se pretende en estas dos últimas sesiones es alcanzar la segunda etapa del proceso de algebrización. Para ello, los problemas (T) que se plantean son:

> PCA_1 (n, a_1, …, a_k) = $a \cdot n + b$ y PCA_2 (n, a'_1, …, a'_k) = $c \cdot n + d$ con a_1, …, a_k, a'_1, …, a'_k, a, b, c y d números enteros y n la incógnita.

que son una ampliación de los anteriores puesto que para su resolución, para simplificar cada uno de los dos PCA por separado, utiliza técnicas de simplificación. No obstante, el paso de la simplificación de los dos PCA al cálculo ecuacional (cuando se igualan los dos PCA) requerirá nuevas técnicas (τ) de cancelación para su resolución. A modo de ejemplo,

> *Puede ser que a un número, le sumamos 2, lo multiplicamos por 3, le sumamos tres veces el número pensado inicialmente y le sumamos 35.* ¿Dé lo mismo que si al número lo multiplicamos por 6, le restamos 12, le sumamos 1 y le restamos 5?

Sea *n* el número pensado, aplicando la técnica de simplificación a cada PCA hasta llegar a una expresión canónica del tipo $a \cdot n + b$, se tiene que:

$$\text{PCA}_1(n, 2, 3, 3, 35) = ((n + 2) \cdot 3) + 3n + 35 \equiv 6n + 41,$$

$$PCA_2(n, 6, 12, 1, 5) = 6n - 12 + 1 - 5 \equiv 6n - 16.$$

En este caso, no se conoce el resultado de ejecutar estos PCA y, por tanto, no se obtiene ninguna respuesta aplicando el patrón de análisis-síntesis. La condición del problema *dé lo mismo* se expresa como una igualdad entre dos PCA, $PCA_1(n, 2, 3, 3, 35) = PCA_2(n, 6, 12, 1, 5)$, que (supuestamente) se cumple para un cierto valor n, donde el signo "=" simboliza una especie de equivalencia entre los dos PCA.

Para determinar el valor de n donde los dos PCA tienen el mismo valor numérico, se necesitan nuevas técnicas (τ) de cancelación. Así, al igualar las dos PCA, $PCA_1(n, 2, 3, 3, 35) = PCA_2(n, 6, 12, 1, 5)$ se forma una ecuación de primer grado con una incógnita n, $6n + 41 = 6n - 16$, que a través de técnicas de cancelación se transforma en otra ecuación equivalente $6n + 41 - 6n = 6n - 16 - 6n$ y simplificando $41 \neq - 16$. Luego, no puede darse la relación mencionada en el truco de magia.

6. Otros enfoques

La TAD es la única teoría que, teniendo en cuenta todas las instituciones, tiene como objeto de estudio la transposición didáctica del saber sabio al saber aprendido. No obstante, en la investigación didáctica de las matemáticas existen otros enfoques.

6.1 La generalización como enfoque cognitivo

En un libro donde se habla sobre el desarrollo del pensamiento matemático y algebraico (Masón, 1985), se afirma que un elemento fundamental para poder llegar a la abstracción matemática es la generalización. Así que, como parte de este trabajo que trata el problema didáctico de la enseñanza del álgebra en secundaria, parece interesante indagar el estudio del álgebra generalizada.

Tras buscar información en diferentes libros de investigación Mason, Graham y Johnston-Wilder (2005), Lee (1987) y Lee y Wheeler (1987), resalta la idea de proceso de generalización como división de cuatro fases: ver un patrón, decir cuál es, registrarlo y probar su validez (Masón, 1985). De esta manera, se propone como ejemplificación la siguiente ilustración.

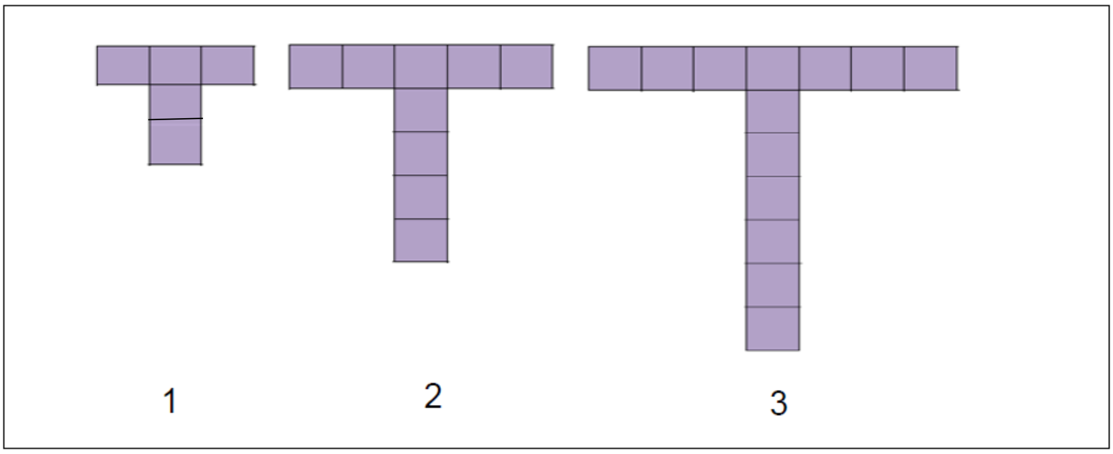


Figura 34. Ejemplificación de las cuatro fases de generalización.

La primera fase *ver un patrón* que pretende visualizar la regularidad de una figura con respecto a otra, se identifica en este caso con la variación de los cuadrados, de cuatro en cuatro, de las figuras 1, 2 y 3, así, la figura 1 tiene 5 cuadrados, la figura 2 tiene 5 + 4 = 9 cuadrados y la figura 3 tiene 4 + 9 = 13 cuadrados.

En cuanto a la segunda fase *decir cuál es el patrón* que pretende reflexionar sobre la primera, se identifica en este caso con el razonamiento de que la posición de cada figura (1, 2 o 3), multiplicada por 4 y sumada 1, coincide con su número total de cuadrados: en la figura 1, $(1 \cdot 4) + 1 = 5$ cuadrados; en la segunda figura, $(2 \cdot 4) + 1 = 9$ cuadrados; y en la tercera figura, $(3 \cdot 4) + 1 = 13$ cuadrados.

Respecto a la tercera fase *registrar un patrón* que pretende llegar a alguna expresión de tipo simbólica, se identifica con la expresión simbólica $c = (x \cdot 4) + 1$ donde "x" es la posición de la figura en la sucesión y "c" el número de cuadrados que forman esa figura.

Finalmente, como cuarta fase *probar la validez de las fórmulas* se pretende comprobar mediante cálculos aritméticos, dibujos o conteos que la expresión simbólica es correcta, así en este caso se tendría que ver que $c = (x \cdot 4) + 1$ se cumple para cualquier valor de "x".

No obstante, en este ejemplo planteado como proceso de generalización, un alumno de la etapa de educación secundaria podría pensar que este tipo de procesos se podrían aplicar a propiedades utilizadas en el aula.

6.2 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) es un sistema teórico que nace a principios de los años 90 gracias al matemático Juan Diaz Godino y que, con el objetivo de describir, explicar y valorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, parte de supuestos antropológicos (Bloor, 1983; Chevallard, 1992) y semióticos (Radford, Schubring y Seeger, 2008) sobre las matemáticas e integra diferentes modelos teóricos de investigación educativa de matemáticas.

Aunque este EOS ha sido aplicado en diferentes ámbitos como el de formación de profesorado, el de estadística y probabilidad, el de aritmética, el de cálculo o el de geometría, aquí interesa sólo estudiar el de álgebra. Así que, dentro de las investigaciones realizadas desde el EOS, se tienen en cuenta aquellas que tienen que ver únicamente con el álgebra (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2015). En ellas se proponen, como herramienta teórica del análisis de la actividad matemática del álgebra, un modelo del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en Educación Primaria y Secundaria. Un modelo que, a diferencia del propuesto por la TAD, identifica desde el punto de vista epistemológico, cognitivo e instruccional la actividad matemática con la configuración de objetos y con los procesos presentes en la práctica matemática, es decir, con «las expresiones (verbales, gráficas, gestuales, etc.) al resolver problemas matemáticos o al comunicar, validar o generalizar la solución en otros contextos y problemas.» (Godino y Batanero, 1994, p. 8). De esta manera, en las prácticas desde el EOS surgen diferentes tipos de objetos primarios: lenguajes, situaciones (intra o extra-matemáticas), conceptos, proposiciones, procedimientos (algoritmos, operaciones o técnicas de cálculo), argumentos (enunciados que justifican las proposiciones o procedimientos), que están relacionados entre sí, formando configuraciones (epistémicas o cognitivas), como se muestra en la *Figura 35*.

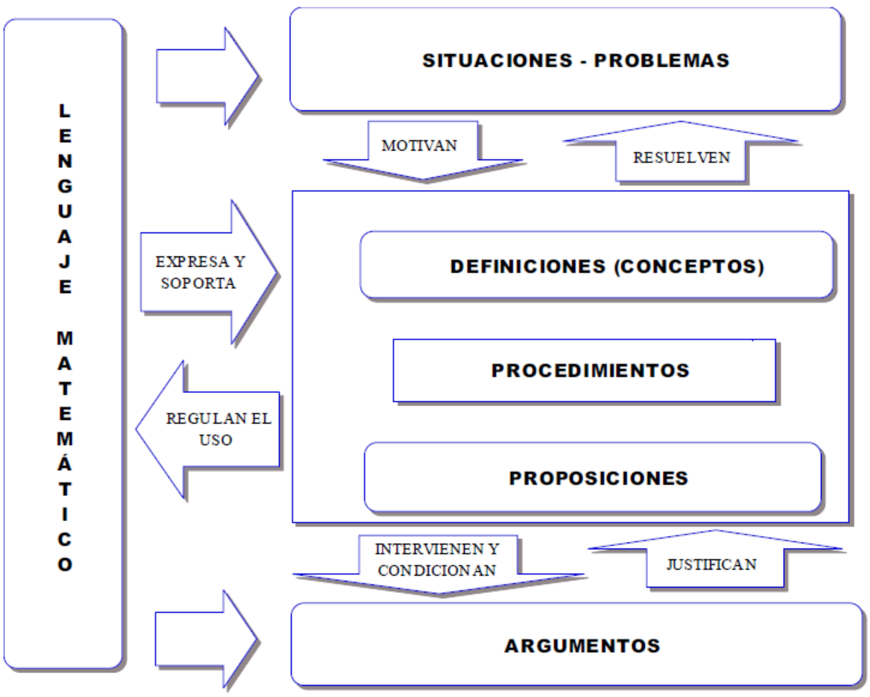


Figura 35. Relación entre los objetos primarios (configuración de los objetos).

Además, cada uno de estos objetos primarios que forma parte de la práctica matemática puede ser clasificado desde distintos puntos de vista, según los contextos y el juego de lenguaje en que participe, en un objeto secundario:

a) *Ostensivo*, material.
no ostensivo, inmaterial.

b) Extensivo, concreto.

intensivo, abstracto.

c) Personal, perspectiva individual.

institucional, perspectiva compartida por un grupo de individuos.

d) Significante, expresión.

Significado, contenido.

e) Elemental, considerado globalmente como un todo.

Sistémico, formado por componentes estructuradas.

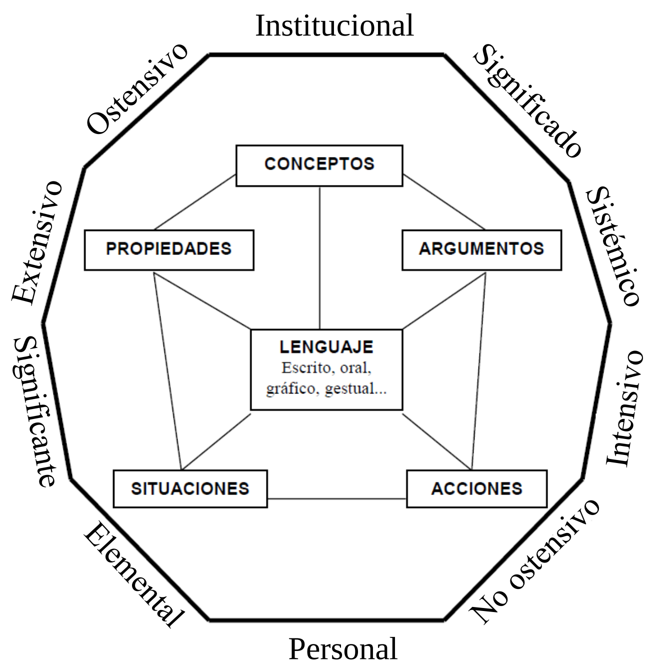


Figura 36. Adapta de Godino et al. (2015).

Dicho esto, en el EOS con el objetivo de desarrollar RAE, es decir, un Razonamiento Algebraico Escolar que permita por un lado representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades (procesos de representación, generalización y formalización) y por otro lado conocer y operar con diferentes parámetros y variables, se proponen diferentes niveles de algebrización. Los cuatro primeros (nivel 0, 1, 2 y 3), que consideran los tipos de representación, los procesos de generalización y el cálculo analítico, para un nivel de educación primaria (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014); y los tres últimos (nivel 4, 5 y 6), que consideran el uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones y el estudio de las estructuras algebraicas (Godino, Neto, Wilhelmi, Ake, Etchegaray y Lasa, 2015).

6.2.1 Nivel 0: Aritmético

En este nivel intervienen *objetos extensivos* expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual y también, en referencia a valores desconocidos, pueden intervenir símbolos.

Ejemplo. *Calcula el término que falta: 1500 – 925 =* **____**

En este ejemplo interviene como valor desconocido el símbolo **___** , que puede obtenerse fácilmente con la operación del primer miembro de la igualdad 1500 – 925. Se trata pues de una actividad aritmética en la que hay que calcular un número particular "575" asignado con el símbolo **___** .

6.2.2 Nivel 1: Proto-algebraico incipiente

En este nivel intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual y también, en referencia a valores desconocidos, pueden intervenir símbolos.

Ejemplo. *Calcula el término que falta: 15 + 11 = 11 + [ ]*

En este ejemplo interviene como valor desconocido el símbolo [ ], que puede obtenerse, en lugar de operando sobre los números particulares que intervienen como en el nivel 0, utilizando la propiedad conmutativa de los números naturales. Se trata pues de una actividad matemática que puede ser resuelta mediante las propiedades algebraicas de sus operaciones con los números naturales.

6.2.3 Nivel 2: Proto-algebraico intermedio

En este nivel intervienen objetos intensivos expresados como variables en un lenguaje simbólico. Además, se opera con ellos a través de ecuaciones del tipo $AX \pm B = C$.

Ejemplo. *Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?*

Este ejemplo puede resolverse por un alumno a través de un *Nivel 0,* tomando valores particulares de la variable *número de monedas que tenía Juan al principio* y haciendo cálculos (operando aritméticamente). Así, sea n la variable, si n = 2 entonces Juan al principio tenía 2 monedas, las cuales mete en la máquina y se duplican, obteniendo 4. Pero al volver a intentarlo, como debe pagar 4 monedas, se queda sin ellas y ya no puede jugar más. En el caso de n = 3, Juan al principio tenía 3 monedas, las cuales mete en la máquina y se duplican, obteniendo 6. Al volver a intentarlo, como debe pagar 4, se queda con 2, las cuales se duplican al meterlas en la máquina obteniendo 4. No obstante, si Juan lo quiere intentar de nuevo, como debe pagar 4 monedas, se queda sin dinero. Dicho esto, se deduce que Juan al principio tenía 3 monedas.

Pero también es un ejemplo que puede resolverse por un alumno a través de un *Nivel 2,* representando la variable *número de monedas que tenía Juan al principio* como incógnita en un lenguaje simbólico n y operando a través de una ecuación $2\ (2n - 4) - 4 = 0$.

6.2.4 Nivel 3: Algebraico consolidado

En este nivel intervienen objetos intensivos representados de manera simbólica y, además de operar con ellos, se realizan transformaciones equivalentes de las expresiones.

Ejemplo. *Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?*

Este ejemplo puede resolverse por un alumno a través de un *Nivel 0,* tomando valores particulares de las variables *número de sillas* y *número de taburetes* y haciendo cálculos (operando aritméticamente). Así, sean S y T las variables *número de sillas* y *número de taburetes,* si S = T = 3 hay 3 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 = 21 patas y no sirve. Pero si S = 4 y T = 2 entonces hay 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 4 = 20 patas. De donde se deduce que hay 2 sillas y 4 taburetes.

Pero también es un ejemplo que puede resolverse por un alumno a través de un *Nivel 3,* representando las variables *número de sillas* y *número de taburetes* en un lenguaje simbólico S y T y operando con ellas de acuerdo con ciertas reglas y transformaciones equivalentes. Así, como el total de taburetes y sillas deben sumar 6 entonces T + S = 6 y como el número total de patas entre taburetes y sillas es 20 entonces 3T + 4S = 20. Obteniendo de esta manera S = 2 y T= 4.

6.2.5 Nivel 4: Uso de parámetros

En este nivel se estudian familias de ecuaciones y funciones usando parámetros y coeficientes.

Ejemplo. *La función lineal y =* $a\,.\,x$ *con* $a \epsilon \mathfrak{R}$

En este ejemplo la letra a interviene como un parámetro que puede tomar diferentes valores particulares de $\mathfrak{R}$.

6.2.6 Nivel 5: Manipulación de parámetros

En este nivel se realizan cálculos analíticos que implican el uso de uno más parámetros, junto con variables.

Ejemplo. *Obtención de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado*

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}\,x = -\frac{c}{a} \iff$$

$$\iff x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \iff x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \iff$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \iff x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \iff$$

$$\iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este ejemplo se tienen los parámetros a, b y c, junto con la variable x. Donde el parámetro a se supone distinto de 0, pues, de no ser así la ecuación no sería de segundo grado. En cuanto a la resolución de la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ para la obtención de la fórmula general de su resolución, se realiza a través de cálculos analíticos mediante la manipulación simbólica y las equivalencias sucesivas.

6.2.7 Nivel 6: Tareas estructurales

En este nivel se comienzan a estudiar las estructuras algebraicas, sus definiciones y sus propiedades estructurales.

Ejemplo. *Composición de funciones*

Dadas dos funciones, f y g, se llama función compuesta de f con g a la función $(f \circ g)$ que cumple que $(f \circ g)\ (x) = f\ (g(x))$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

donde la función $f(g(x))$ es distinta que $g\big(f(x)\big)$, es decir, en la composición de funciones no se cumple la propiedad conmutativa.

En este ejemplo se estudian unas funciones cualesquiera f y g para producir otra nueva función $(f \circ g)$ y estudiar su propiedad conmutativa.

Finalmente, es interesante realizar una concordancia entre las *etapas de algebrización* propuestas por la TAD según los recorridos de estudio y los *niveles de Razonamiento Algebraico Escolar* propuestos por el EOS según la actividad desarrollada por el sujeto.

Tabla 2

Relación entre los niveles de Razonamiento Algebraico Escolar y las etapas de algebrización

EOS	TAD
Nivel 0: aritmético	PCA: programa de cálculo aritmético
Nivel 1: proto-algebraico incipiente	
Nivel 2: proto-algebraico intermedio	Etapa 1: necesidad de formulación simbólica de un PCA
Nivel 3: algebraico consolidado	Etapa 2: igualación de dos PCA
Nivel 4: uso de parámetros	Etapa 3: introducción de parámetros
Nivel 5: manipulación de parámetros	
Nivel 6: tareas estructurales	

*Nota***.** Adaptado de Godino, Neto, Wilhelmi, Ake, Etchegaray y Lasa (2015, p. 139).

7. Conclusiones

Para finalizar este trabajo, se exponen en las siguientes líneas las conclusiones a las que se ha podido llegar, tras diferentes análisis e investigaciones, en la elaboración del mismo.

En primer lugar, con la descripción realizada de los libros de texto como *saber enseñado*, se ha podido observar que la primera toma de contacto que tiene el alumno con el álgebra es a través de las expresiones algebraicas, en donde se le informa de que la letra "*x*" representa un valor desconocido que debe averiguar. Tras ello, se le proponen problemas “contextualizados” que debe de tratar de solucionar con estas expresiones algebraicas dadas. Sin embargo, son problemas que son resolubles a partir de la aritmética. Luego, ¿cómo va a ser capaz el alumno de observar la necesidad de estas “expresiones algebraicas”? En consecuencia, el aprendizaje del álgebra escolar que se realiza en el libro de texto es completamente formal, el alumno aprende a “operar”, “simplificar”, “desarrollar” … expresiones porque así se le pide y no porque ello le permita resolver tareas. Y, en consecuencia, el alumno, hace uso de técnicas algorítmicas sin justificación (la tecnología no existe). Por lo tanto, el autor con las “cuestiones” y tareas que plantea no da sentido al estudio escolar del álgebra, pues da una *aritmética generalizada*.

Por otro lado, según lo revisado en los libros de texto, se han analizado los objetivos por los que se rige la enseñanza actual, concluyendo que estos no son (en su mayoría) factibles, pues requieren de experimentación y de enseñanza por indagación en lugar de procesos memorización y de enseñanza por “monumentalización”. Un ejemplo de ello es:

> *Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.*

En segundo lugar, tras la búsqueda de diferentes documentos de investigación. Entre los que destacan, los del punto de vista cognitivo, pues determinan que el problema didáctico de la enseñanza del álgebra escolar se debe a los errores que cometen los alumnos en el desarrollo de su actividad matemática (Kieran y Filloy, 1989) o a la complejidad que el propio “lenguaje algebraico” conlleva consigo mismo (Kieran, 1992). El que más motivo a realizar el estudio de este trabajo fue el centrado en el enfoque epistemológico e institucional, en concreto el referido a la TAD, ya que permite cuestionar el propio conocimiento matemático y la transposición didáctica que de él se realiza en las instituciones escolares.

Respecto a la TAD, es interesante resaltar la idea que se realiza acerca de los juegos de matemagia (Ruiz-Munzón, 2010) como alternativa a ese *sin sentido* del algebra escolar. Se trata pues de una buena herramienta de modelización algebraica, útil en la resolución de problemas matemáticos o extra-matemáticos: aritméticos, geométricos, físicos, de la vida real, etc. De esta manera, a través de ella se propone llevar a cabo una propuesta didáctica de introducción al álgebra en Secundaria (ver ANEXO I). Por lastima, esta no pudo ser trasladada al aula durante mi periodo de prácticas. Sin embargo, si que se pudo ser estudiada durante el curso 2007-2008 a un curso de segundo de ESO (Ruiz-Munzón, 2010). Donde se observó una gran dificultad, por parte de los alumnos, en: el uso de paréntesis (solían poner de más), la jerarquía y propiedades de operaciones o la consideración de un número general. Aunque, con el paso de las sesiones y gracias al software matemático Wiris, el alumno era capaz de justificar por sí mismo las limitaciones que, en sí, suponían el truco de magia.

Dicho esto, la principal ventaja que presenta esta nueva propuesta de enseñanza del álgebra escolar es: la realización de un estudio donde el instrumento algebraico surge como necesario para resolver las diferentes cuestiones tecnológicas que aparecen en la elaboración de las respuestas. Por el contrario, como desventaja presenta una serie de limitaciones (impuestas por el sistema de enseñanza actual), entre las que destacan: la necesidad de evaluar y el poco tiempo que se dispone en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

La verdad es que, por desgracia, pocos son los centros educativos que han puesto en práctica esta propuesta didáctica. Quizás, como he podido ver en mi centro de prácticas, sea una teoría poco conocida entre la mayoría de docentes. Y es una pena que, pudiendo ser una gran herramienta para afrontar el problema didáctico de la enseñanza del álgebra escolar, el docente ante tal desconocimiento continúe utilizando, sin tan siquiera cuestionarse su "razón de ser", el libro de texto como guía de práctica en el aula. Entiendo que por una parte fuerzas mayores como las editoriales no quieran ser partícipes de este gran cambio en la metodología, pero debería de tenerse en cuenta que los alumnos como, futuros ciudadanos, deberían de ser capaces de entender, comprender y ver la utilidad que las matemáticas tienen fuera de un simple libro de texto. Así, parece lógico pensar que, al igual que los médicos ante cualquier problema disponen de las ayudas del colegio profesional, los docentes ante la falta de recursos para afrontar diferentes tareas o problemas de su quehacer diario dispongan de una institución que también les aporte herramientas.

Para concluir, me gustaría resaltar que antes de empezar con este trabajo no tenía conocimiento alguno acerca de la existencia de herramientas que podían ser aportadas con las investigaciones didácticas, pero he de decir que una vez empecé a seguir los objetivos al principio propuestos me di cuenta de que la frustración por la que pasaban muchos docentes al ver que sus alumnos no acaban de entender lo que se les explicaba tenía solución, una lástima que esta no se ponga al alcance de nuestro sistema de enseñanza secundaria. Está claro que, desde hace ya varios años, sobre todo con la entrada de la gran revolución tecnológica, se habla de un gran cambio en nuestro sistema de enseñanza y se apuesta por la tecnología como motor de cambio para la educación del futuro. Así hoy en día no es raro hablar de las TIC's en cualquier ámbito de la enseñanza secundaria. Y mi pregunta es, ¿resuelven las TIC's el problema didáctico de la enseñanza del álgebra en secundaria? Pues, a mi modo de ver, cualquier docente que utilice, de manera tecnicista, el recurso innovativo, produce aprendizaje memorístico en el alumno. Luego, lo más importante no es la tecnología como tal, sino el enfoque que consiga dar el docente en el uso de los recursos didácticos.

8. Referencias bibliográficas

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. Londres: The Macmillan Press.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001): ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? *Educación Matemática*, 13 (3), 22-63.

Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 1-10). Montpellier: Université de Montpellier.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado* (1.ª ed.). Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), 73-112.

Chevallard, Y. (2005). *La trasposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado* (3.ª ed.). Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2016). *Matemáticas 2º ESO* (2.ª ed.). Madrid: Anaya.

García, F. J. y Martín, R. (2016). *Matemáticas 2º ESO (LOMCE)* (1.ª ed.). Madrid: Editex.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Ake, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrizacion de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Ake, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrizacion de las practicas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiotica y antropológica, *Avances de investigación en Educación Matemática*, *8*, 127-142.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra, in D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Lee, L. (1987). The status and understanding of generalisedalgebraic statements by high school, *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 316-323. Montreal, Quebec: PME

Lee, L. y Wheeler, D. (1987). *Algebraic thinking in highschool students: Their conceptions of generalisationand justification*. Montreal, Quebec: Concordia University, Mathematics Department.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, núm. 106, de 4 de mayo de 2006, pp. 17158 a 17207. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. Boletín Oficial del Estado, núm. 3, de 26 de diciembre de 2014, pp. 169 a 546. Recuperado de http://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2015-7662

Mason, J.; Graham, A.; Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Gran Bretaña: The Open University Press.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching (pp.65-86). London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Sage.

Nieto, M., Díaz, A., Alcaide, F. y Maester, N. (2016). *Matemáticas: 2 ESO. Savia* (1.ª ed.). Madrid: Grupo SM Educación.

Radford, L., Schubring, G. y Seeger, F. (Eds.) (2008). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture.* Rotterdam: Sense Publishers.

Ramírez, T. (2002b). El texto escolar como objeto de reflexión e investigación. *Docencia Universitaria*, *2* (3), 101-124.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Cataluña). Recuperado de http://www.atd-tad.org/wp content/uploads/2012/07/Volumen_1.pdf

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz-Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra: Centre de Recerca Matemàtica.

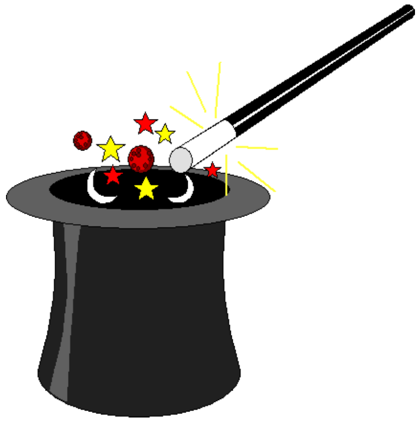
9. Anexos

ANEXO I: Juegos de matemagia llevados a cabo en el aula

Hoja 1

SESION 1: Adivina el truco del MaGo-Mático (1)

El MaGo-Mático ha decidido compartir con nosotros algunos de sus trucos de magia, ¿podrías explicar cómo puede saber el resultado?



1. Piensa un número,
súmale 2000,
divide el resultado por 10,
réstale 200 y
multiplica el resultado por 20.
¡Te da el doble del número pensado!

2. Piensa un número,
réstale 10,
multiplica el resultado por 10,
súmale 100 y
divide el resultado por 10. **¡Te da el número que habías pensado!**

3. Piensa un número,
súmale el doble del número,
divide el resultado por 3,
resta el número pensado y
súmale 75 al resultado
¡Te da 75!

4. Piensa un número,
al doble del número pensado,
súmale 10,
réstale 8 y
divide el resultado por 2.
¡Te da el consecutivo del número pensado!

5. Piensa un número,
súmale 572,
réstale 151,
réstale 189
divide el resultado por 4 y
resta 58 al resultado obtenido.
¡Te da un cuarto del número pensado!

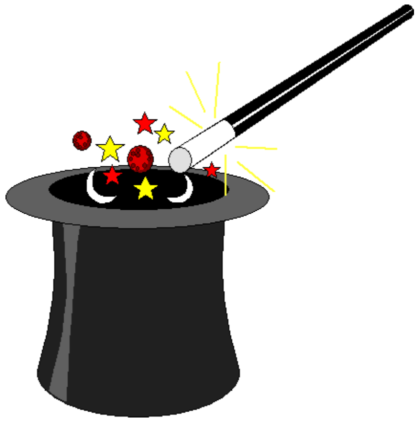
6. Piensa un número,
súmale 3,
multiplícalo por 2,
réstale 10,
súmale 4 y
divide el resultado por 4 y
¡Te da la mitad del número pensado!

7. Piensa un número,
divídelo por 100,
al resultado súmale 43,
réstale 56,
súmale 13,
divide el resultado por 100,
multiplica el resultado por 100,
multiplica de nuevo por 100.
¡Te da el número pensado!

Hoja 2

SESION 1: Adivina el truco del MaGo-Mático (2)

El MaGo-Mático ha decidido compartir con nosotros algunos de sus trucos de magia, ¿podrías explicar cómo puede saber el resultado?



1. Piensa un número,
súmale el consecutivo,
multiplica el resultado por 3,
réstale 3 y
divide el resultado por 6. **¡Te da el número pensado!**

2. Piensa un número,
multiplícalo por 4,
súmale 5 al resultado,
multiplica el resultado por 9,
divide el resultado por 3 y
finalmente réstale 3. **¡Te da doce veces el consecutivo del número pensado!**

3. Piensa un número,
multiplícalo por -15,
súmale 21,
súmale 324,
divide el resultado por 3 y
súmale 5 veces el consecutivo del número que habías pensado. **¡Te da 120!**

4. Piensa un número,
multiplícalo por 2,
súmale 2 al resultado,
multiplica el resultado por 5,
súmale 12,
multiplica el resultado por 10 y
finalmente réstale 220.
¡El número que obtienes empieza con el número que habías pensado!

5. Piensa un número,
súmale el consecutivo,
resta 9 al resultado,
multiplica el resultado por 4,
multiplica por 3 y
divide el resultado por 24.**¡Te da el número pensado disminuido en 4 unidades!**

Ahora que sabéis los trucos, jugad con los compañeros a adivinar el número que se han pensado a partir del resultado que obtengan de ejecutar los diferentes juegos de magia.

Hoja 3

SESION 2: Adivina el truco del MaGiC-EnRiC

El MaGiC-EnRiC ha empezado hace poco en el mundo de la magia y todavía no domina muy bien esto de hacer trucos. ¿Creéis que adivinará el número que hemos pensado? Ayudadlo a mejorar algunos de sus trucos.

1. Piensa un número,
multiplícalo por 4,
súmale 689,
divide el resultado por 2 y
resta el doble del número pensado.
¡Te da 349!

2. Piensa un número,
réstale el triple del número anterior del número que habías pensado y súmale el doble del consecutivo del número que habías pensado. **¡Te da 8!**

3. Piensa un número
multiplícalo por 3,
réstale 2,
súmale 8,
el resultado multiplícalo por 50,
divídelo por 75 y
réstale 4.
¡Te da el triple del número pensado!

4. Piensa un número
súmale el consecutivo,
súmale 3,
multiplica el resultado por 2 y
réstale 8,
¡Te da 15!

5. Piensa un número,
multiplícalo por 2,
súmale 9,
multiplica el resultado por 10 y
divide el resultado por 8.
¡Te da un número entero!

6. Piensa un número,
multiplícalo por 5
súmale 2,
divide el resultado por 2,
súmale el número pensado,
súmale 10,
súmale 25 y
réstale 36.
¡Te da 7/2 del número pensado!

7. Al triple del número pensado,
súmale 12
multiplícalo todo por 5,
réstale 9,
divide el resultado por 3,
súmale el doble del número pensado,
réstale 20 y
súmale 5.
¡Te da el cuádruplo de su consecutivo

Inventad nuevos juegos de matemagia y proponlos a tus compañeros

Hoja 4

SESION 3: Comparar juegos de matemagia:

Las mismas operaciones en orden diferente

Al MaGo-Mático le han encargado nuevos juegos de matemagia, ha pensado que una manera de inventar nuevos juegos seria cambiando las operaciones de orden. Ha empezado a hacer algunos intentos:

(1) Piensa un número,
súmale 3,
réstale 12,
multiplica por 2 y
divide el resultado por 4.

(2) Piensa un número,
multiplica por 2,
súmale 3,
réstale 12 y
divide el resultado por 4.

(3) Piensa un número,
réstale 12,
súmale 3,
multiplícalo por 2 y
divide el resultado por 4.

(4) Piensa un número,
réstale 12,
súmale 3,
divide el resultado por 4 y
multiplícalo por 2.

(5) Piensa un número,
multiplícalo por 2,
réstale 12,
súmale 3 y
divide el resultado por 4.

(6) Piensa un número,
réstale 12,
multiplícalo por 2,
súmale 3 y
divide el resultado por 4.

(7) Piensa un número,
multiplícalo por 2,
súmale 3,
divide el resultado por 4 y
réstale 12.

¿Cuántos juegos y trucos diferentes obtendrá? ¿Podéis escribirlos todos

Hoja 5

SESION 4: Adivina el número inicial a partir del resultado

La agencia de espectáculos GaaC necesita nuevos magos para el curso 2007/08, ha preparado un *casting* para seleccionar los candidatos, seríais capaces de ser los nuevos magos que buscan!?

1. Al doble del número pensado
   le he sumado 10.
   El resultado obtenido ha sido 50,
   ¿Cuál es el número que me he pensado?
2. Al número pensado,
   le he restado 5 y
   el resultado lo he multiplicado por 4.
   El resultado obtenido ha sido 40,
   ¿Cuál es el número que me he pensado?
3. Al doble del número pensado,
   le he sumado 15 y
   he divido el resultado por 3.
   El resultado obtenido ha sido 105,
   ¿Cuál es el número que me he pensado?
4. Al cuádruplo del número pensado,
   le he sumado 5,
   he multiplicado el resultado por 8 y
   he dividido el resultado por 3.
   El resultado obtenido ha sido 216,
   ¿Cuál es el número que me he pensado?
5. Al número pensado,
   le he sumado 25,
   le he restado 8 y
   he dividido el resultado por 6.
   El resultado obtenido ha sido un sexto del número pensado,
   ¿Cuál es el número que me he pensado?
6. Al cuádruplo del número pensado,
   le he sumado 6 y
   he dividido el resultado por 2.
   El resultado obtenido ha estado el doble del número pensado más 3,
   ¿Cuál es el número que me he pensado?
7. Al cuádruplo del número pensado,
   le he sumado 10 y
   he sumado el doble del número pensado.
   El resultado obtenido ha sido 88,
   ¿Cuál es el número que me he pensado?
8. Al número pensado,
   le he sumado el doble de este número y después he sumado el triple del número pensado inicialmente.
   El resultado obtenido ha sido 1995,
   ¿Cuál es el número que me he pensado?
9. Al número pensado,
   lo he multiplicado por 4,
   le he sumado 6,
   he dividido el resultado por 2 y
   he sumado el triple del número pensado.
   El resultado obtenido ha sido 10033,
   ¿Cuál es el número que me he pensado?
10. Al número pensado,
    le he sumado su consecutivo,
    le he sumado, de nuevo, el consecutivo,
    le he sumado el triple del número pensado y le he sumado finalmente 6.
    El resultado obtenido ha sido 1544,
    ¿Cuál es el número que me he pensado?

Hoja 6

SESION 5. Nuevos juegos de magia:

Adivina el número inicial conociendo alguna propiedad del resultado (1)

Contesta la pregunta formulada en cada uno de los juegos de matemagia. ¿Es verdad para cualquier número que te pienses? Justificar tu respuesta.

1. Puede ser que si a un número,
lo multiplicamos por 9,
le sumamos 2,
le sumamos 15 y
le restamos 30.
¿Dé lo mismo que el doble de ese número?

2. Puede ser que si a un número,
lo multiplicamos por 4,
le restamos 10,
le restamos 13 y
le sumamos 4.
¿Dé lo mismo que si a ese número le restamos 9, le sumamos 7, le sumamos 5 y le sumamos 11?

3. Puede ser que si a un número, lo dividimos por 6, le sumamos 2, le sumamos 8 y lo multiplicamos por 3.
¿Dé el doble de ese número?

4. Puede ser que si a un número, lo multiplicamos por 5, le sumamos 3, lo multiplicamos por 2, le sumamos el doble del número inicial y dividimos el resultado por 4.
¿Dé lo mismo que si al número le sumamos 10, el resultado lo multiplicamos por 2, le restamos 2, le sumamos 8 y lo dividimos todo por 2?

5. Puede ser que si a un número, le sumamos 2, lo multiplicamos por 3, le sumamos siete veces el número pensado y le sumamos 6.
¿Dé lo mismo que si al doble de ese número le sumamos 3, le restamos 10, le sumamos 8 y multiplicamos el resultado por 4?

Hoja 7

SESION 5. Nuevos juegos de magia:

Adivina el número inicial conociendo alguna propiedad del resultado (2)

Contesta la pregunta formulada en cada uno de los juegos de matemagia. ¿Es verdad para cualquier número que te pienses? Justificar tu respuesta.

1. Puede ser que si a un número, lo multiplicamos por 4, le restamos 8, lo multiplicamos por 5 y le sumamos 123.

¿Dé lo mismo que si al número le sumamos 10, le restamos 2, le sumamos 21 y lo multiplicamos todo por 9?

2. Puede ser que si a un número, le restamos 2, le sumamos 10, le sumamos el consecutivo del número inicial y le restamos el doble del número inicial.

¿Dé lo mismo que si al número lo multiplicamos por 5, le sumamos 10, le restamos el número inicial, lo dividimos todo por 2 y le restamos el doble del número inicial?

3. Puede ser que si a un número, le sumamos 2, lo multiplicamos por 3, le restamos 10, le sumamos 15, lo multiplicamos por 5 y le sumamos cuatro veces el número inicial.

¿Dé lo mismo que si al número lo multiplicamos por 3, le restamos 2, le restamos 8, lo multiplicamos todo por 4, lo dividimos por 2 y le restamos 3?

4. Puede ser que si a un número, le sumamos 10, le restamos 25, lo multiplicamos por 2, le restamos 3, lo dividimos por 3 y le sumamos 9.

¿Dé lo mismo que si al número lo dividimos por 3, le sumamos 18, le restamos 16, lo multiplicamos por 2 y le restamos 4?

5. Puede ser que si a un número, le sumamos 2, lo multiplicamos por 3, le sumamos tres veces el número pensado inicialmente y le sumamos 35.

¿Dé lo mismo que si al número lo multiplicamos por 6, le restamos 12, le sumamos 1 y le restamos 5?