

MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación de Profesorado y Educación / 16-17

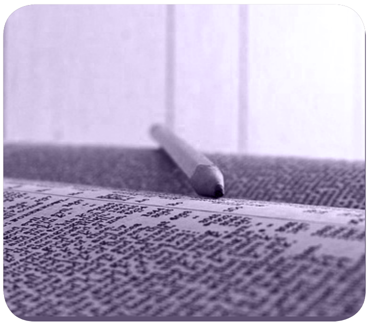
(MESOB)
Especialidad de Matemáticas

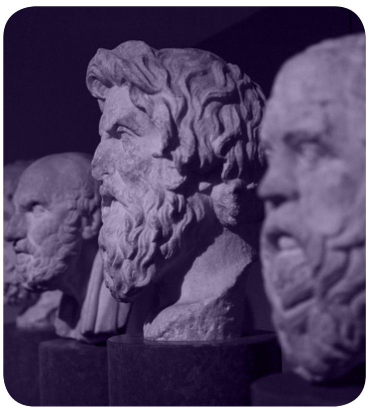
UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Campus Internacional excelencia UAM CSIC+

Consideraciones sobre la didáctica de las fracciones a través de la mirada de R. Siegler

Ricardo Español González





UAM EDICIONES

978-84-8344-6215

UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID

Máster en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato 2016-2017

Consideraciones sobre la didáctica de las fracciones a través de la mirada de R. Siegler

TFM realizado por: Ricardo Español González

Dirigido por: César Sáenz

Tabla de contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

1 Introducción

Durante la realización de las prácticas del módulo genérico en la International School SEK el Castillo pedí a los profesores del departamento de Matemáticas ideas sobre temas para trabajar en el TFM que pudieran ser de su interés. Entre los temas que me propusieron, varios de ellos (comprensión de las fracciones según la forma de leerlas en distintas lenguas, métodos de aprendizaje de las fracciones o la correlación entre la estimación de magnitudes y la habilidad en matemáticas) estaban relacionados en mayor o menor medida con las investigaciones sobre el aprendizaje de las fracciones llevadas a cabo por el equipo de investigadores dirigido por Robert S. Siegler, psicólogo americano profesor de Psicología Cognitiva en la Carnegie Mellon University (Siegler, Robert S.; *Página web personal*).

En la vida diaria uno se encuentra en muchas ocasiones con las dificultades enormes que niños y adultos encontramos para realizar un cálculo aparentemente sencillo relacionado con fracciones, proporcionalidad o ratios: la receta me indica la cantidad de harina que debo añadir para preparar este plato para 6 personas, pero ¿cuánta debo poner si lo estoy preparando para 11?; ¿tienen todos los vendedores claro cómo afecta la dimensión del margen de un producto a la sensibilidad de ese mismo margen ante una rebaja en el precio? ¿Cuánta gente tiene claro que si añado un 10% y al resultado le resto un 10% no llego al mismo punto de partida? ¿Cuántos errores produce este malentendido? Durante las prácticas del máster en una clase de primero de bachillerato no resultaba evidente para algunos alumnos que, puesto que una determinada diferencia de temperaturas disminuía un 30% al cabo de un tiempo dado, la diferencia inicial debía ser multiplicada por 0,7 para conocer la nueva diferencia al cabo de ese tiempo.

Antes de emprender este TFM ya era yo de la opinión de que las fracciones constituyen el aspecto de la matemática elemental que más dificultades nos crea a los adultos en la vida diaria y que estas dificultades aparecen no tanto cuando la fracción significa la realización de una simple división entre números naturales, como cuando va unida a magnitudes reales que hay que operar, comparar, relacionar u ordenar. Los trabajos del profesor Siegler parecían en una primera lectura rápida abonar esta tesis, y como a todos nos gusta que nuestro ego disfrute al ver cómo sus intuiciones se ven confirmadas por los expertos, decidí elegir entre los temas propuestos algún aspecto de las investigaciones del profesor mencionado.

Señalaré que sigo a Freudenthal (Freudenthal, Hans 1983) hablando de fracciones y no de números racionales; aunque matemáticamente es el número racional el "*objeto que importa*", las fracciones son "*la fuente fenomenológica del número racional*" y "*fracción es la palabra por la que entra el número racional*". No obstante, como se verá más adelante, R. Siegler, que también habla de fracciones – *fractions* – cuando se refiere a su didáctica, señala la importancia de ligar este concepto al de número racional desde las primeras etapas del aprendizaje construyendo un desarrollo numérico continuo desde los números naturales hasta los reales.

Finalmente no quiero acabar esta introducción sin agradecer a los profesores del máster y en especial a César Sáenz, inspirador de este trabajo, las nuevas puertas abiertas, al propio Siegler y a Aryn Pyke por la rapidez de sus respuestas a mis preguntas seguro que a veces un tanto ingenuas, a mi hija Laura por la experiencia en Excel puesta a mi disposición y al colegio SEK-El Castillo por las facilidades dadas que han sido todas.

2 Objetivos del TFM

El objetivo de este TFM es acercarme a la didáctica de las fracciones desde una mirada que me parece poco conocida en la escena española. Esta escena me parece muy dominada por la fenomenología de Freudenthal (Freudenthal, 1983) y, particularmente en el caso de las fracciones, por el capítulo sobre las mismas del referido libro, así como por las teorías sobre los obstáculos y las situaciones didácticas de Brousseau.

Sin embargo apenas he encontrado referencias en España a la teoría integrada del desarrollo numérico de Siegler (Siegler, Robert S.; Lortie-Forgues, Hugues, 2014) que nace de su interés por las dificultades de aprendizaje de las fracciones y cuyo autor está entre los más citados de forma general en este campo.

Así pues este TFM pretende ser un acercamiento al trabajo de Siegler y la teoría ya mencionada y a su análisis del aprendizaje de las fracciones a través de la réplica de uno de sus estudios (Siegler, Robert S.; Pyke, Aryn A. 2013) y la comparación de los resultados obtenidos con los del trabajo original. La réplica será una réplica parcial; no obstante, en la medida en que el tiempo y los recursos disponibles o la disponibilidad del SEK lo han permitido se ha procurado realizar una réplica que, aunque parcial, pueda tener un cierto aroma a trabajo completado.

Dado el ámbito y el tiempo disponible, este trabajo no pretende ir más allá de una aproximación a la investigación en el campo de la didáctica hecha por alguien que se asoma a ella por primera vez y por tanto con una mirada quizás algo naïve pero que procuraré destile también un poco de inteligencia.

3 La dificultad de las fracciones

Hay mucha literatura sobre los aspectos de las fracciones más susceptibles de producir errores y los errores más comunes cometidos por los alumnos y sus causas inmediatas; un buen resumen aparece en el librillo sobre el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones del Professional Development Service for Teachers (PDST) irlandés que en su apartado *Fractions: Background Knowledge For Teachers* establece, desde una perspectiva fenomenológica, los hechos fundamentales a tener en cuenta a la hora de explicar fracciones y los errores más comunes cometidos por los alumnos que se resumen a continuación:

Hechos fundamentales sobre las fracciones:

- Las particiones representadas por fracciones son reparticiones iguales o porciones de igual tamaño de un todo. Estos números no enteros los encontramos principalmente en medidas que caen entre dos enteros o en repartición de cantidades.
- Las fracciones también pueden representar cantidades mayores que uno.

- Las fracciones representan un número, pero también una razón.

- Las fracciones pueden presentarse como:
    - Parte de un todo.
    - Un lugar en la línea numérica.
    - La respuesta al cálculo de una división.
    - Una forma de comparar dos conjuntos o medidas.

- Las fracciones pueden considerarse de forma general dentro de tres categorías:
    - Fracciones racionales como una forma de representar medidas que no son números enteros.
    - Las fracciones como operadores que nos dicen que debemos hacer algo con números enteros (por ejemplo $\frac{3}{8}$ de 24 nos dice que debemos dividir 24 en 8 grupos iguales y tomar tres de esos grupos). Aquí el numerador es el multiplicador y el denominador el divisor.
    - Fracciones equivalentes que representan la misma cantidad con numeradores y denominadores de distinto tamaño, es decir, que el mismo ratio entre dos cantidades distintas produce distintas representaciones de la misma fracción. Se enfatiza aquí la importancia de llenar de contenido significativo este concepto desde los primeros momentos para facilitar su uso posterior en la adición y sustracción de fracciones.

- Para poder ser sumadas o restadas, las fracciones deben pertenecer a la misma “familia”, deben tener el mismo denominador lo que implica una transformación que, de acuerdo con el punto anterior, debe preservar el ratio entre numerador y denominador. Por el contrario estas transformaciones no son necesarias en la multiplicación y división de fracciones.
- Es habitual expresar una fracción en la forma más simple posible (con el numerador y denominador lo menores posibles).

Errores conceptuales comunes de los alumnos en torno a las fracciones

- Incluso cuando el concepto básico de fracción está entendido, pueden todavía creer que $6/14$ es mayor que 4/8 simplemente porque los números son mayores.

- La experiencia previa con los números enteros interfiere en la comprensión de las fracciones ya que estas se comportan de forma muy diferente a aquellos y, en principio, de forma no intuitiva; por ejemplo, cuanto mayor es el denominador, menor es la cantidad representada por la fracción; o la multiplicación de dos fracciones puede dar un número menor que ellas lo que contradice el concepto de multiplicación como suma repetida.

- La misma interferencia de los números naturales dificulta la comprensión de que una misma fracción pueda representarse de una gran cantidad de formas diversas, cosa que no ocurre en los números naturales.

- Las convenciones sociales pueden restringir la elección de fracciones en una situación determinada. Por ejemplo, se tiende a pensar que en un diagrama visual el todo representa el número 1.

- Los alumnos pueden sumar o restar fracciones con distinto denominador simplemente sumando los numeradores y los denominadores en lugar de convertirlas previamente en fracciones "de la misma familia" y sumar numeradores después.

- Del mismo modo en la multiplicación los alumnos pueden utilizar el proceso de la suma buscando denominadores comunes[1].

Durante las prácticas he podido comprobar de primera mano las dificultades que tienen los alumnos de 2º de la ESO para manejar con soltura las fracciones e incluso el algoritmo de la división con decimales en las que ha sido habitual ver comas decimales bailando dos o tres puestos desde su posición correcta sin que esto provocara la percepción, que podría parecer obvia, de que el resultado de un problema era totalmente inviable dados los datos de partida (por ejemplo vallas alrededor de un campo que medían 0,003Km).

Por otro lado, cuando en alguna ocasión en problemas relacionados con el teorema de Pitágoras en los que no podían usar calculadora se explicó a los alumnos que podían dejar el resultado en forma de raíz cuadrada sin calcular el resultado en números decimales, se produjeron algunas protestas porque una raíz cuadrada no es, se objetaba, un resultado viable; no les resultaba claro que la raíz cuadrada de un número fuera realmente un número que pudiera medir una magnitud, sino que lo veían como una entidad matemática (un *noumenon* en terminología fenomenológica) que sólo se hace real (se convierte en *phainomenon*) cuando es resuelta.

---

[1] Realmente el PDST que tomo como guía cita aquí la posibilidad de que los alumnos multipliquen fracciones igual que realizan la suma errónea mencionada antes ($\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{8}$). Siegler cita con frecuencia cómo el hecho de que las operaciones de suma y resta de fracciones requieran denominadores comunes y no así las de multiplicación y división, crean a menudo confusión sobre cuándo deben buscarse los denominadores comunes y cuándo no; este error me parece más relevante que el mencionado por el PDST por lo que me permito sustituir aquí uno por otro. De hecho, en el estudio realizado este último error es muy prevalente entre los alumnos de 6º de primaria en la multiplicación de fracciones con igual denominador mientras que el error mencionado por el PDST no se ha encontrado en ningún caso.

Estos dos fenómenos parecen abonar la tesis que veremos de Siegler sobre la necesidad de establecer un continuo en el desarrollo numérico desde los enteros a los números reales desde las primeras etapas del aprendizaje matemático de forma que el concepto de número como una entidad que mide magnitudes no se pierda en un largo paréntesis entre el estudio de los números enteros y el de los reales (Siegler, Robert S.; Thompson, Clarissa A; Schneider, Michael 2011).

Me gustaría mencionar también la dificultad observada en algunos alumnos al estudiar el concepto de semejanza en 2º de la ESO para calcular la razón de semejanza cuando el original es mayor que la copia y por tanto esta razón es menor que uno; esto ocurrió incluso cuando los ejemplos iniciales para explicar el concepto (cuadros originales del Museo del Prado frente a reproducciones) tenían razón de semejanza inferior a uno; pero en aquella ocasión dicha razón fue presentada con números decimales mientras que en los ejercicios, al menos en los iniciales, tenemos tendencia a utilizar relaciones enteras o en fracciones con numerador igual a uno (multiplicar por tres o, en sentido contrario, dividir por tres que implica una razón de $1/3$), lo que pudiera incentivar la interferencia ya mencionada de los enteros (o, alternativamente, constituir una oportunidad no aprovechada de combatir dicha interferencia). Esto muestra que, aunque quizá aquí de forma menos virulenta porque los alumnos están más acostumbrados a la visualización no simbólica del valor de una fracción, se produce la misma percepción que con los radicales: una fracción todavía no es en la mente de los alumnos un *phainomenon* que mide una magnitud, es todavía un *noumenon* quizá no muy bien entendido que sólo toma vida cuando se opera y se convierte en un número decimal; de ahí que el ejemplo inicial con decimales se comprenda pero no se traslade inmediatamente al ejercicio con datos en forma de fracción.

Es interesante también traer aquí el panel realizado en 2007 por la Universidad de Chicago para el Departamento de Educación de los EEUU (Hoffer, Thomas B. et al. 2007). Este panel se realiza entre profesores de álgebra de escuelas de 8º grado (equivalente a 2º de la ESO) en adelante y muestra cómo los números racionales y las operaciones en las que intervienen fracciones y decimales están, según su opinión, entre las áreas en las que los alumnos llegan peor preparados, sólo superadas por la capacidad (o más bien su falta) para resolver problemas con enunciados literales.

Finalmente en el resumen del estudio *Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de magisterio* (Gutiérrez Gutiérrez, Araceli; Gómez, Pedro; Rico Romero, Luis 2016) puede leerse lo siguiente:

> *Encontramos que los futuros maestros mostraron tener un conocimiento suficiente de los contenidos previstos para primaria y los primeros cursos de secundaria con excepción del trabajo con los conceptos razón/proporción/porcentaje y la traducción de una resta de fracciones sencillas en problemas verbales.*

Algo que parece indicar que los problemas en el aprendizaje de las fracciones no están a día de hoy en una vía de solución rápida en España.

4 ¿Una escuela europea y otra americana?

No es un objetivo de este TFM hacer un análisis de las escuelas de pensamiento en torno a la didáctica de la Matemática o de las fracciones, pero sí me interesa señalar la impresión sacada de la consulta de la bibliografía de que sí hay una diferente aproximación en Europa y Estados Unidos. No se pretende que estas dos realidades sean impermeables e incluso puede que la idea sea objetable desde un conocimiento más detallado del estado del arte, pero la impresión en una primera aproximación como la que representa este TFM es suficientemente fuerte como para que me parezca reseñable.

Europa aparece a mis ojos marcada por el análisis minucioso y detallado del ámbito de estudio, quizá influida por los análisis exhaustivos sobre los conceptos matemáticos y su adquisición mediante la experiencia vital y el aprendizaje formal de Freudenthal que continua con las teorías de los obstáculos al aprendizaje y las situaciones didácticas de Guy Brousseau.

De alguna manera pareciera que el procedimiento principal aquí es la expresión de una teoría didáctica completa como hipótesis de trabajo y su puesta en práctica en un entorno didáctico real con vistas a su confirmación o no. Como ejemplo bien pudiera valer el libro Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment (Brousseau, Guy 2014; 2013) que describe una serie de lecciones utilizadas para enseñar fracciones de acuerdo con los principios de la didáctica de las situaciones de Brousseau y que en su primer párrafo (Brousseau, Guy 2014; 2013. Pág 1) dice:

> *The lessons came into existence to validate the Theory of Situations, a basic tenet of which is that children can best learn a mathematical concept by being put into a very carefully designed situation where achieving some goal requires them to invent or discover the concept, and their prior knowledge enables them to do so.*

Otro aspecto de este libro sugiere también un cierto distanciamiento entre Europa y Estados Unidos: dos de sus autores son franceses, la tercera, Virginia Warfield proviene de la universidad de Washington; inmediatamente después de la introducción al primer capítulo del libro aparece bajo el epígrafe A Few Words by the Anglophone Author (Brousseau, Guy 2014; 2013. Pag. 3) el siguiente párrafo seguido de unas pocas páginas con las explicaciones de V. Warfield en él anunciadas centradas principalmente en las experiencias y teorías de Brousseau:

> *The content of this book is completely international. The activities of the children, the decisions of the teachers and the explorations of the researchers are part of a fabric of mathematics education that increasingly is spreading worldwide. However, a certain amount of the background for the teaching project that is central to the book is unfamiliar to most readers outside of France, and knowing the background of the book itself may help enrich the reading of it, so as a lead-in to a book that is very much a joint effort we will present a few paragraphs that are specifically a Warfield production.*

No me parece probable que un coautor europeo no francés sintiera esta necesidad imperiosa de explicar cómo las teorías de Brousseau permean el libro.

Estados Unidos, donde R. Siegler es, al menos en lo que respecta a la enseñanza de fracciones, uno de los autores más citados, parece menos dado a la creación de teorías didácticas partiendo de la experiencia y la reflexión sobre ella para su posterior cotejo con la realidad y más al establecimiento de hipótesis de trabajo menos ambiciosas (por ejemplo, las capacidades requeridas para trabajar con números enteros y racionales no difieren en esencia) que son confirmadas o no por experimentos enfocaos en la hipótesis concreta (se estudian las áreas cerebrales que se activan al operar con números enteros y racionales para comprobar si son las mismas). Varias de estas hipótesis parciales forman quizá parte de una teoría inicial de rango superior que las contiene y que se va corrigiendo, ampliando o abandonando a medida que las hipótesis parciales se van confirmando o no.

De alguna manera pareciera que Europa tiende a partir de la experiencia y la reflexión para construir teorías más o menos completas que posteriormente se cotejan con la práctica real mientras que en Estados Unidos las teorías tienden a construirse mediante la observación de esa práctica real, experimento a experimento, evidencia a evidencia.

Aunque desde la mentalidad de ingeniero del autor de este TFM el "método americano" pareciera más legítimo, no se pretende declarar aquí la superioridad de uno frente a otro, sobre todo teniendo en cuenta que nos movemos en una ciencia en la que el control de variables es complejo y, como veremos, las evidencias tienden a ser objeto de controversia más o menos inmediata.

5 Robert Siegler

Robert Siegler (Siegler, Robert S., *Página web personal*) es un psicólogo norteamericano profesor de psicología en la Carnegie Mellon University de

Pennsylvania especializado en el desarrollo cognitivo del razonamiento y la resolución de problemas en niños; ha escrito más de 250 artículos y 10 libros traducidos a numerosos idiomas.

Él mismo explica su evolución desde el conductismo y la influencia de las teorías de Piaget (aunque, afirma, nunca pensó que fueran certeras), pasando por las teorías del proceso de información a las que se vio expuesto al llegar a Carnegie Mellon hasta la influencia creciente de la teoría evolucionista en la última década "*in the sense that I believe that generation of variation, selection among the variants, and increasing dominance of the successful variants are key contributors to cognitive change, as they are to biological change*" (Siegler, Robert S., *How I got into Psychology)*.

En este sentido es notable su descubrimiento a principios de los 80 de que cuando los niños se enfrentan a un problema matemático (suma o resta de números de un solo dígito) no usan una sola estrategia (como defenderían las teorías piagetianas o el modelo del proceso de información), sino que utilizan una variedad de estrategias, y que esta variedad de estrategias es adaptativa en el sentido de que es más frecuente usar aquéllas estrategias que son más efectivas para solucionar un problema dado y de que un problema se resuelve de forma más efectiva cuando más estrategias están disponibles.

En el año 1996 (Siegler,Robert S. 1996) introduce la teoría de las ondas superpuestas (Overlapping Waves Theory) que se basa en tres principios (Chen,Zhe; Siegler,Robert S. 2000):

1) Sobre la mayoría de los fenómenos los niños piensan en un momento dado de una variedad de maneras.
2) Estas formas de pensar compiten unas con otras no sólo a corto plazo, sino también durante largos periodos de tiempo.
3) El desarrollo cognitivo implica cambios graduales en la frecuencia con que se utilizan dichas formas de pensar y se adquieren otras nuevas.

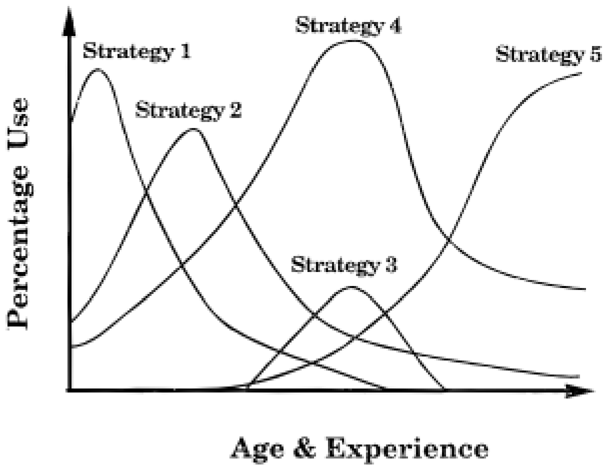


FIGURE 1.—Schematic depiction of the overlapping waves model. NOTE. From *Emerging Minds: The Process of Change in Children's Thinking*, by Robert S. Siegler, 1996, Oxford: Oxford University Press. Copyright 1996 by Oxford University Press. Reprinted with permission.

Fig. 1.- Tomada de (Chen,Zhe; Siegler, Robert S. 2000)

Gran parte de sus investigaciones están enfocadas a entender teóricamente el desarrollo matemático en los niños y cómo aplicar este conocimiento a la mejora de su aprendizaje matemático. Por ejemplo ha estudiado la influencia de las representaciones que los niños tienen de los números en su habilidad para aprender aritmética de los números enteros, las fracciones u otros aspectos de la matemática (ver por ejemplo Booth,Julie L., Siegler, Robert S. 2008). Así, uno de los resultados menos previsibles del citado estudio es que presenta evidencias que apoyarían la hipótesis de que en la etapa preescolar y primeros años de la enseñanza primaria las representaciones pictóricas precisas (diagramas, gráficos, etc.) de las relaciones matemáticas son más útiles para su aprendizaje que la manipulación de objetos: como los objetos manipulables, las representaciones aportan una conexión precisa con el significado de las operaciones matemáticas pero, al contrario que ellos, no tienen el atractivo tentador de objetos con los que jugar que dificulta su asociación con objetos matemáticos simbólicos.

En los últimos años ha extendido su interés a la investigación sobre el aprendizaje de las fracciones del que forma parte el estudio que aquí se replica. Consecuencia de estas investigaciones publica un artículo en 2011 (Siegler, Robert S.; Thompson, Clarissa A; Schneider, Michael 2011) donde establece su teoría integrada del desarrollo numérico que resumo más adelante. En 2013 recibe junto a otros colegas de la Universidad de Delaware una financiación de 10M$ del Institute of Education Sciences (IES), dependiente del U.S. Department of Education, para analizar durante un periodo de 5 años cómo mejorar la instrucción en matemáticas y más específicamente en fracciones de los niños de la escuela elemental y secundaria creándose el Center for Improving Learning of Fractions (University of Delaware; Shellenbarger, Sue 2013; Sparks, Sarah D. 2013). Previamente ya había dirigido la edición de la guía Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten Through 8th Grade (Siegler, Robert S. 2010) realizada por el IES y preparada por un panel de profesores universitarios y profesores de la escuela elemental y secundaria. Es interesante reseñar las recomendaciones realizadas y el nivel de evidencia que el propio panel otorgaba a cada una de ellas en ese momento (en el apéndice E de la propia guía puede verse el significado preciso de cada nivel de evidencia):

Review of Recommendations

Recommendation 1.

Build on students' informal understanding of sharing and proportionality to develop initial fraction concepts.

- Use equal-sharing activities to introduce the concept of fractions. Use sharing activities that involve dividing sets of objects as well as single whole objects.
- Extend equal-sharing activities to develop students' understanding of ordering and equivalence of fractions.
- Build on students' informal understanding to develop more advanced understanding of proportional reasoning concepts. Begin with activities that involve similar proportions, and progress to activities that involve ordering different proportions.

Recommendation 2.

Help students recognize that fractions are numbers and that they expand the number system beyond whole numbers. Use number lines as a central representational tool in teaching this and other fraction concepts from the early grades onward.

- Use measurement activities and number lines to help students understand that fractions are numbers, with all the properties that numbers share.
- Provide opportunities for students to locate and compare fractions on number lines.
- Use number lines to improve students' understanding of fraction equivalence, fraction density (the concept that there are an infinite number of fractions between any two fractions), and negative fractions.
- Help students understand that fractions can be represented as common fractions, decimals, and percentages, and develop students' ability to translate among these forms.

Recommendation 3.

Help students understand why procedures for computations with fractions make sense.

- Use area models, number lines, and other visual representations to improve students' understanding of formal computational procedures.
- Provide opportunities for students to use estimation to predict or judge the reasonableness of answers to problems involving computation with fractions.
- Address common misconceptions regarding computational procedures with fractions.
- Present real-world contexts with plausible numbers for problems that involve computing with fractions.

Recommendation 4.

Develop students' conceptual understanding of strategies for solving ratio, rate, and proportion problems before exposing them to cross-multiplication as a procedure to use to solve such problems.

- Develop students' understanding of proportional relations before teaching computational procedures that are conceptually difficult to understand (e.g., cross-multiplication). Build on students' developing strategies for solving ratio, rate, and proportion problems.
- Encourage students to use visual representations to solve ratio, rate, and proportion problems.
- Provide opportunities for students to use and discuss alternative strategies for solving ratio, rate, and proportion problems.

Recommendation 5.

Professional development programs should place a high priority on improving teachers' understanding of fractions and of how to teach them.

- Build teachers' depth of understanding of fractions and computational procedures involving fractions.
- Prepare teachers to use varied pictorial and concrete representations of fractions and fraction operations.
- Develop teachers' ability to assess students' understandings and misunderstandings of fractions.

Tabla 1.- Recomendaciones al IES para mejorar el aprendizaje de las fracciones

Recommendation	Levels of Evidence: Minimal Evidence	Moderate Evidence	Strong Evidence
1. Build on students' informal understanding of sharing and proportionality to develop initial fraction concepts.	◆		
2. Help students recognize that fractions are numbers and that they expand the number system beyond whole numbers. Use number lines as a central representational tool in teaching this and other fraction concepts from the early grades onward.		◆	
3. Help students understand why procedures for computations with fractions make sense.		◆	
4. Develop students' conceptual understanding of strategies for solving ratio, rate, and proportion problems before exposing them to cross-multiplication as a procedure to use to solve such problems.	◆		
5. Professional development programs should place a high priority on improving teachers' understanding of fractions and of how to teach them.	◆		

Tabla 2.- Niveles de evidencia de las recomendaciones al IES

Es interesante señalar cómo ya en 2010 se presentaba la recomendación de utilizar la recta numérica como una herramienta central para la enseñanza de las fracciones, algo que está posteriormente en el centro de la teoría integrada del desarrollo numérico.

6 La teoría integrada del desarrollo numérico

Esta teoría se propone en el año 2011 en un artículo (Siegler, Robert S. et al. 2011) en el que se describe un estudio realizado entre alumnos de 6º y 8º grados del que el que aquí se replica es una actualización posterior. Más tarde, en 2014 un nuevo artículo (Siegler,Robert S.; Lortie-Forgues. Hugues 2014) actualiza la teoría resumiendo el estado del arte hasta ese momento. Las ideas aquí expuestas están extraídas de estos dos artículos.

Las principales teorías sobre el desarrollo numérico hasta 2011 se enfocaban en el desarrollo del conocimiento de los números naturales y cualquier extensión hacia otro tipo de números como los racionales ponía el énfasis en sus diferencias con los números naturales y en cómo los conocimientos previos sobre estos influían en el desarrollo de aquellos dificultándolo; algunos ejemplos de estas interferencias de los números naturales sobre las fracciones han sido ya mencionadas en este trabajo.

Estas teorías tienden a considerar los números naturales como sicológicamente primarios y por tanto aprehensibles de una forma natural ya que su funcionamiento así se considera, frente a los números racionales que deben ser duramente aprendidos a pesar de funcionar de un modo extraño al concepto natural de número. Así, las características “naturales” de los números naturales (cada número tiene un sucesor, sirven para contar objetos y definir así cardinales de conjuntos, …) suponen una barrera para entender otro tipo de entidades que no comparten estas características “primarias”. Así, se produce una discontinuidad entre el número natural fácilmente aprehendido y otro tipo de números secundarios que, por poseer características que contradicen las que se suponen comunes a los números “de verdad” deben ser aprendidos con gran esfuerzo y en lucha continua contra los impulsos naturales.

Frente a estas teorías que ponen el énfasis en la discontinuidad y las diferencia cualitativas entre el desarrollo temprano y “natural” de los números naturales y el posterior duramente ganado desarrollo de las fracciones, la teoría integrada del desarrollo numérico propone poner el énfasis tanto en la continuidad esencial del desarrollo numérico como en las diferencias entre las adquisiciones de los números enteros y las fracciones. Esta teoría propone que el desarrollo numérico es esencialmente un proceso continuo y progresivo de ensanchamiento del tipo de números de los que se comprende que poseen magnitudes y de aprendizaje de las funciones que ligan dichos números a sus magnitudes. Esto implica que el desarrollo numérico completo consistiría en llegar a entender que todos los números reales tienen una magnitud que puede ser ordenada y a la que se le puede asignar una posición en la recta numérica (se entiende mejor ahora la recomendación 2 de la guía del IES vista en el apartado anterior).

Desde esta perspectiva es una parte esencial del desarrollo numérico el comprender que muchas de las propiedades de los números naturales (tener un sucesor único, ser contables, contener un número finito en un intervalo dado, aumentar o permanecer igual con la suma y multiplicación y disminuir con la resta y división, etc.) no lo son de los números en general. Las teorías previas ponen el foco en esta dificultad y en las consecuencias de su no aprendizaje; la teoría integrada entiende estas dificultades, pero no se para en ellas.

Así, se propone un cambio gradual desde la inicial caracterización de los números por ciertas características hasta más tarde distinguir entre características definitorias de todos los números, en particular el tener magnitud y el poder ser ordenados y representados en una recta numérica, y aquellas que lo son sólo de un cierto tipo de números como las ya comentadas de los números naturales. Así la novedad fundamental de esta teoría es el énfasis puesto en la adquisición de conocimientos sobre las magnitudes de los números como vía básica que unifica el desarrollo numérico de todos los números reales.

De ahí la importancia de las fracciones, que dejan de ser un elemento secundario en el desarrollo numérico: son la primera oportunidad de que los alumnos aprendan cómo las características de los números naturales no son las que definen el concepto de número, aprendizaje que, como ya hemos visto a lo largo de este trabajo, no es sencillo, pero que debe incentivarse desde la escuela.

Esta teoría realiza algunas predicciones no deducibles desde las teorías previas (Siegler, Robert S. et al. 2011):

1. Las diferencias individuales en el conocimiento de las magnitudes de las fracciones correlacionan fuertemente con la precisión en su aritmética.

2. Las diferencias individuales en el conocimiento de las magnitudes de las fracciones correlacionan fuertemente con los resultados generales en matemáticas.

3. Una alta correlación entre las diferentes tareas que miden el conocimiento de las magnitudes de las fracciones.

En este y otros estudios posteriores Siegler y sus seguidores parecen confirmar estas hipótesis y añaden que la correcta comprensión de las fracciones es un predictor del futuro éxito de los alumnos en su formación matemática y que, por tanto el conocimiento de las fracciones como números que implican una magnitud (por ejemplo practicando la transposición de fracciones a su posición en líneas numéricas) debería ser central en los curricula de primaria y secundaria, algo ya intuitivamente afirmado por el National Mathematics Advisory Panel americano en 2008 (Booth,Julie L.; Newton, Kristie J 2012. Torbeyns,J. et al. 2015 2014).

Finalmente en 2016 Siegler en su artículo Magnitude knowledge: the common core of numerical development (Siegler,Robert S. 2016) actualiza su teoría a la luz de los nuevos estudios realizados resumiéndola de la siguiente manera;

1. *The magnitudes of all rational numbers are represented on a mental number line, a dynamic structure that begins with small whole numbers and over the course of development expands rightward to include larger whole numbers, leftward to include negative numbers, and interstitially to include fractions and decimals.*

2. *Within specific ranges of whole numbers (e.g. 0 – 10, 0 –100, 0 – 1000), magnitude representations progress from a compressive, approximately logarithmic distribution to an approximately linear one. Transitions occur earlier for smaller than for larger numerical ranges, corresponding to when children gain experience with the numbers in the range.*

3. *Development of rational numbers involves learning that many properties of whole numbers do not characterize other types of numbers but that all real numbers have magnitudes and can be represented on number lines.*

4. *Numerous processes influence development of numerical magnitude knowledge, but two that play especially large roles are association and analogy.*

5. *Because magnitude knowledge is central to numerical development, as posited by the theory, knowledge of the magnitudes of both whole and rational numbers should be both correlated with and causally related to other aspects of mathematics, including arithmetic and mathematics achievement test scores.*

6. *Because magnitude knowledge is central to numerical development, interventions designed to improve knowledge of both whole and rational number magnitudes should have substantial positive effects on a wide range of mathematical outcomes.*

No quiero dejar de constatar que esta teoría no se presenta aquí como algo cerrado y sin discusión. Hay estudios que ponen en cuestión algunos de sus fundamentos como el de Jo-Anne Lefevre y otros (LeFevre,JA et al. 2013) que pone en cuestión por ejemplo que las mejoras en las tareas de transposición de números a la línea numérica estén ligados casualmente a la mejora de otras habilidades matemáticas; la habilidad con la línea numérica sería más bien una medida de la habilidad del niño para poner en marcha una conjunto de conocimientos (numéricos y de visión espacial) para resolver una tarea nueva.

7 El ensayo original y la réplica

Por razones evidentes de tiempo y recursos, la réplica aquí realizada no puede tener la amplitud ni ambición del estudio original (Siegler,RS; Pyke, Aryn 2013). No obstante, se ha procurado mantener su “espíritu” y, dentro de las posibilidades de un TFM, comprobar si las conclusiones del estudio serían las mismas o diferentes al cambiar de contexto y, en la medida de lo posible, extraer si no consecuencias cerradas sí al menos preguntas pertinentes.

En este apartado vamos describir brevemente el estudio original y cómo se ha adaptado para la realización de este TFM.

7.1 Los objetivos

Dentro del contexto de la teoría integrada del desarrollo numérico descrita, el estudio original declara dos objetivos principales:

- **Describir el desarrollo de las fracciones entre los niños con mejor y peor rendimiento**, para lo que se realiza el mismo test a alumnos de 6º y 8º grado. Este test trata de estudiar aspectos conceptuales mediante pruebas de comparación de magnitudes y precisión en las estimaciones sobre líneas numéricas de 0 a 1 y de 0 a 5; cinco aspectos de la aritmética de fracciones (precisión, estrategia usada, variabilidad de la estrategia, confianza y errores de cálculo) más dos procesos que posiblemente facilitan la habilidad con las fracciones, la división de números enteros y las funciones ejecutivas. De especial interés es estudiar si las diferencias en el conocimiento de las fracciones entre 6º y 8º grado son mayores o menores entre los niños con mejores resultados (alumnos M"R" de ahora en adelante) y los de peores resultaos (alumnos "PR" de ahora en adelante).

- **Identificar las fuentes de las diferencias individuales en el conocimiento de las fracciones** entre cuatro potenciales: debilidad en las funciones ejecutivas, no dominio de la división de enteros, conocimiento limitado de magnitudes fraccionales y una mala autoevaluación del conocimiento de la aritmética de las fracciones.

En la réplica nos vamos a centrar en el primer objetivo ya que el segundo exige un nivel de capilaridad en los datos y en su análisis estadístico que, pienso, sale fuera del ámbito de un TFM y el tiempo y los recursos disponibles para su realización. Además el tamaño de la muestra, elegida más en función de su disponibilidad que de su real pertinencia estadística, hace que de los análisis de correlación no siempre puedan deducirse consecuencias plausibles.

Por otro lado, algunas de las variables estudiadas exigirían también una disponibilidad de tiempo o recursos más allá del ámbito de este TFM por lo que no se van a abordar. Las funciones ejecutivas requerirían la realización de un programa de ordenador, mayor tiempo para pasar las pruebas a los alumnos y, muy posiblemente, la necesidad del permiso paterno para la realización de las pruebas por lo que no formarán parte de la réplica. Del mismo modo, el estudio en la aritmética de fracciones de la variabilidad de la estrategia utilizada en las operaciones y de los errores de cálculo exigiría un conocimiento más preciso del proceso seguido por los alumnos que en el estudio original se consigue mediante grabaciones de audio analizadas posteriormente en las que los alumnos explican el procedimiento seguido en las operaciones, algo que no podemos reproducir aquí.

7.2 El contexto

Uno de los aspectos a tener en cuenta a la hora de comparar los resultados del ensayo original y la réplica es la diferencia de contexto evidente, no sólo por estar un estudio hecho en Pensilvania y el otro en Madrid, sino también porque el ensayo original está hecho en una escuela con alumnos de familias de bajo poder adquisitivo, situación opuesta al colegio de Madrid en el que se realiza la réplica.

7.3 El método

Aquí de nuevo se producen algunas diferencias entre ambos estudios debido fundamentalmente a las diferencias de tiempo y recursos.

7.3.1 Participantes

Mientras que el estudio original cuenta con una muestra de 60 alumnos de cada curso elegidos entre tres escuelas públicas con alumnos de familias de bajo poder adquisitivo cerca de Pittsbourgh (PA), la réplica realizada se hace sobre una clase de 6º de primaria y otra de 2º de la ESO (equivalentes a los grados del estudio original) del colegio de prácticas (SEK-El Castillo) con unos 25 alumnos cada clase. Evidentemente esto resta valor estadístico a la réplica frente al original; no obstante, dado que la muestra del estudio original sólo sería útil desde el punto de vista de la generalización de sus resultados dentro del contexto de una batería de estudios más amplia, no nos produce esta limitación una especial preocupación en el contexto de una comparación estudio/réplica.

Para seleccionar a los alumnos PR y MR el estudio original analiza los resultados en matemáticas de las pruebas PSSA (Pennsylvania System of School Assessment) y define como MR al 65% de alumnos con mejores calificaciones en la prueba y como PR al 35% restante (este umbral lo avala por estudios previos (Hanich,Laurie B. et al., 2001)). No tenemos accesibles datos semejantes de nuestros alumnos ni, por no romper reglas de confidencialidad, hemos pedido al colegio datos de las notas de los alumnos participantes por lo que, en lugar de acudir a notas escolares suponemos que dichas notas correlacionan con los resultados de estos tests, cosa que, además de parecer razonable, parece confirmarse en los resultados del estudio original. Así pues, consideraremos alumnos MR a aquéllos que, en el global de los resultados de todas las pruebas realizadas, están en el 65% superior, y alumnos PR al 35% restante.

7.3.2 Tareas

7.3.2.1 Estimación en la línea numérica

Se presentan a los alumnos 10 fracciones entre 0 y 1 y otras 10 entre 1 y 5 que deben situar en las rectas numéricas correspondientes; en ambos casos dos de las fracciones corresponden a cada quinta parte de la recta.

En el estudio original la tarea se presenta en un ordenador individualmente a cada alumno con un primer ejemplo para que aprenda el método. En la réplica (ver anexo) se usan las mismas fracciones pero las realizan con lápiz y papel todos los alumnos juntos en la clase (un ejemplo simula la primera fracción de muestra). Este método es menos preciso que el original ya que puede haber interacciones entre alumnos, cosa que se ha intentado minimizar organizando la clase como si de un examen se tratara. Por otro lado, la disponibilidad de papel y lápiz permite afinar más la resolución al permitir al alumno realizar subdivisiones en la línea como en el ejemplo que se muestra en la Figura 2.

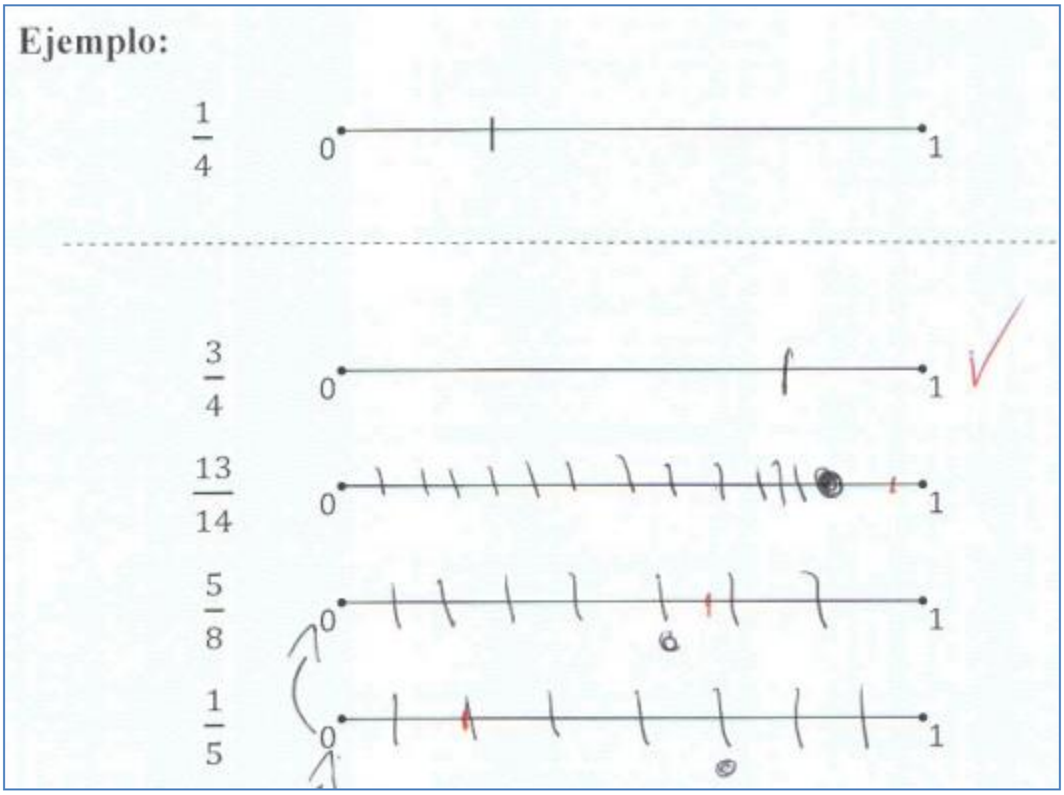


Fig. 2.- Ejemplo de uso del lápiz para ajustar la respuesta (imposible con el ordenador)

Este aspecto podría haberse evitado en parte indicando a los alumnos que no pueden realizar líneas adicionales, pero realmente esto puede aumentar la precisión general de los resultados, pero no supone diferencia en cuanto a mostrar errores conceptuales que es lo que se pretende en esta prueba; así pues, se dejó que los alumnos utilizaran el lápiz como elemento de ayuda. Es de señalar que, ante las dudas producidas por alguna frase del informe original, se confirmó con R. Siegler que las líneas no debían llevar originalmente ninguna subdivisión.

7.3.2.2 Comparación de magnitudes

Los alumnos deben señalar si un conjunto de fracciones son mayores o menores que $3/5$ (ver anexo). De nuevo aquí el estudio original utiliza el ordenador, pero no creemos que esto suponga en esta prueba una diferencia fundamental.

7.3.2.3 Aritmética de las fracciones

Se pide a los alumnos que resuelvan 4 ejemplos de cada una de las cuatro operaciones con fracciones, en todos los casos combinando 3/5 con otras cuatro fracciones, dos con denominador 5 y dos con denominador distinto de 5. Para la resta y la división la fracción mayor va siempre la primera. Además se pide a los alumnos que indiquen en una escala de 1 a 5 su nivel de confianza en que la respuesta es correcta. De nuevo aquí la realización con papel o con el ordenador es irrelevante ya que en el estudio original se proporciona lápiz y papel para la posible realización de operaciones y únicamente el resultado final se teclea. Los alumnos de 6º de primaria no habían estudiado aun la división de fracciones en el momento de realizar los test por lo que n realizaron estas divisiones.

En el estudio original tras realizar la prueba se pide a los alumnos que expliquen qué método han seguido para la resolución de las operaciones y su explicación se graba en audio para posterior análisis. Evidentemente esto no se ha hecho en la réplica pero creemos que su influencia no es muy determinante de forma global; en general la estrategia seguida por el alumno es clara viendo los resultados apuntados (por ejemplo, $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{10}$ indica claramente una estrategia de operación independiente con numerador y denominador). De haberse contado con las explicaciones de los alumnos, es posible que algunas estrategias erróneas que resultan oscuras y entran por tanto dentro de “otras” pudieran haber sido definidas dentro de las otras dos (operaciones independientes en numerador y denominador y estrategia equivocada para la operación realizada).

7.3.2.4 División de números naturales

Se presentan tres divisiones (ver anexo), dos que dan un resultado entero y otra que da un resultado decimal. Se puntúa un punto por cada resultado entero correcto, y, en el resultado decimal, medio punto por la parte entera correcta y otro medio por el primer decimal. De nuevo no se ven diferencias relevantes entre el proceso original y el de la réplica.

7.3.2.5 Nivel de resultados en las pruebas estándar de matemáticas y lectura

Se trata, como ya se ha comentado de pruebas estándar que se realizan en Pennsylvania y que no tienen su contraparte en España. Se utilizan para definir los estudiantes MR y PR, cosa que aquí haremos simplemente comparando los resultados en las propias pruebas.

7.3.2.6 Funciones ejecutivas

No se reproducen aquí estas pruebas por las razones ya mencionadas.

8 Los resultados

A continuación se van a detallar los resultados obtenidos comparándolos con los del ensayo original. En la medida de lo posible se intentarán adelantar posibles conclusiones que parezcan razonables o posibles preguntas que surjan de los mismos y que, a juicio del autor, pudiera resultar relevantes.

El estudio original realiza un análisis de varianza completo incluyendo pruebas de esfericidad y las oportunas correcciones cuando la esfericidad es violada. De nuevo aquí la limitación de recursos y el objetivo más modesto de la réplica hace que nos limitemos a la comparación de los resultados obtenidos entre la réplica y el original sin realizar el análisis completo de varianza.

8.1 Tareas de fracciones con magnitud

8.1.1 Estimaciones en la línea numérica

La precisión de la estimación se mide mediante un parámetro de error, el error absoluto porcentual (EAP) que se define así:

$$EAP = \frac{|Respuesta\ del\ alumno - Respuesta\ correcta|}{rango\ numérico} \times 100$$

En nuestro test las líneas utilizadas tenían una longitud de 80mm por lo que se tabularon en Excel las respuestas correctas frente a las de cada alumno calculándose la media de los EAP, dato que se incorpora como resultado de esta prueba. Así por ejemplo si la fracción a localizar en la recta 0-1 es ¾, su posición correcta será (distancia desde el cero, punto más a la izquierda) $\frac{3}{4} * 80\ mm = 60\ mm$; si un alumno marca un punto en la posición 67,5 el EAP correspondiente será:

$$EAP = \frac{|67.5 - 60|}{80} * 100 = 9{,}38\%$$

En el caso de la línea numérica 0-5 el proceso es el mismo teniendo en cuenta que el cálculo de la posición correcta debe incluir el rango; así la respuesta correcta para la misma fracción $3/4$ sería ahora $\frac{3}{4} * \frac{80\ mm}{5} = 12\ mm$.

En la Tabla se muestra un ejemplo del cálculo de la media del error para un alumno dado: se compara la distancia al origen correcta con la del punto señalado por el alumno para cada función y se calcula la media de los errores.

	Alumno 1	
Datos (mm)	Resultados	Error
60,00	67,5	9%
74,29	76,5	3%
50,00	46	5%
16,00	12	5%
34,29	28,5	7%
46,67	38	11%
26,67	17,5	11%
4,21	1,5	3%
70,00	73,5	4%
12,31	7	7%
	Error medio:	7%

Tabla 3.- Ejemplo de cálculo de errores

La comparación de resultados entre ambos estudios se muestra en la Tabla en la que puede observarse que hay una mayor precisión en los resultados españoles que en los americanos; esto ya se había de algún modo previsto dado el efecto ya comentado de la facilidad adicional que supone la realización de la prueba con papel y lápiz. Es difícil saber hasta qué punto esto es debido a este factor o a un mejor conocimiento conceptual en el caso español.

	EAPs	
	Siegler	**Español**
6º de primaria	22%	16%
2º de ESO	17%	12%
Alumnos MR	13%	12%
Alumnos PR	26%	19%
línea 0-1	16%	9%
Línea 0-5	23%	20%

Tabla 4.- Errores en las líneas numéricas

Aunque la tendencia general de los resultados originales se mantiene en la réplica, hay dos diferencias cuantitativas significativas:

- Hay una menor distancia entre los alumnos de mayor y menor rendimiento en el caso español que en el caso americano; en principio pudiera parecer que esto viniera motivado por tratarse en el caso español de un colegio privado de alto poder adquisitivo lo que pudiera implicar una cierta selección previa de alumnos que elimina a aquéllos que tenderían a hacer disminuir las puntuaciones de los alumnos PR. Sin embargo, una lectura más atenta de los datos teniendo en cuenta el aumento general de precisión ya mencionada, parece indicar que realmente se produciría un nivel inferior relativo en España de los alumnos MR y no un nivel superior en los PR.

- La diferencia de precisión entre los dos rangos de las líneas numéricas es mucho mayor que en el caso americano; la dificultad para situar fracciones en la línea 0-5 podría abonar la idea de una peor comprensión conceptual de las fracciones. El estudio original no da datos de la precisión por curso y rango, pero este análisis en el caso español (Tabla) da resultados sorprendentes:

  A priori pensábamos que los alumnos de primaria tendrían dificultades mucho mayores que los de la ESO en situar las fracciones en la línea 0-5 dado el efecto señalado en el PDST (ver página 8) de las convenciones sociales que tienden a hacer pensar que el todo es la unidad. Sin embargo, aun cuando la distancia entre ESO y primaria en la línea 0-1 es del 36%, en el caso de la línea 0-5 se reduce al 10% (Tabla). Esta situación se hace más visible si se considera que aquéllos alumnos que no han realizado la prueba (y que por tanto debe pensarse que no saben cómo hacerla) no se han considerado a la hora de calcular errores por la dificultad de su cuantificación, pero que esto se produce para la línea 0-5 en cinco caso en la ESO y sólo en tres en primaria, lo que ampliaría la diferencia.

	línea 0-1	**Línea 0-5**
6º de primaria	11%	21%
2º de ESO	7%	19%

Tabla 5.- Errores en primaria y ESO

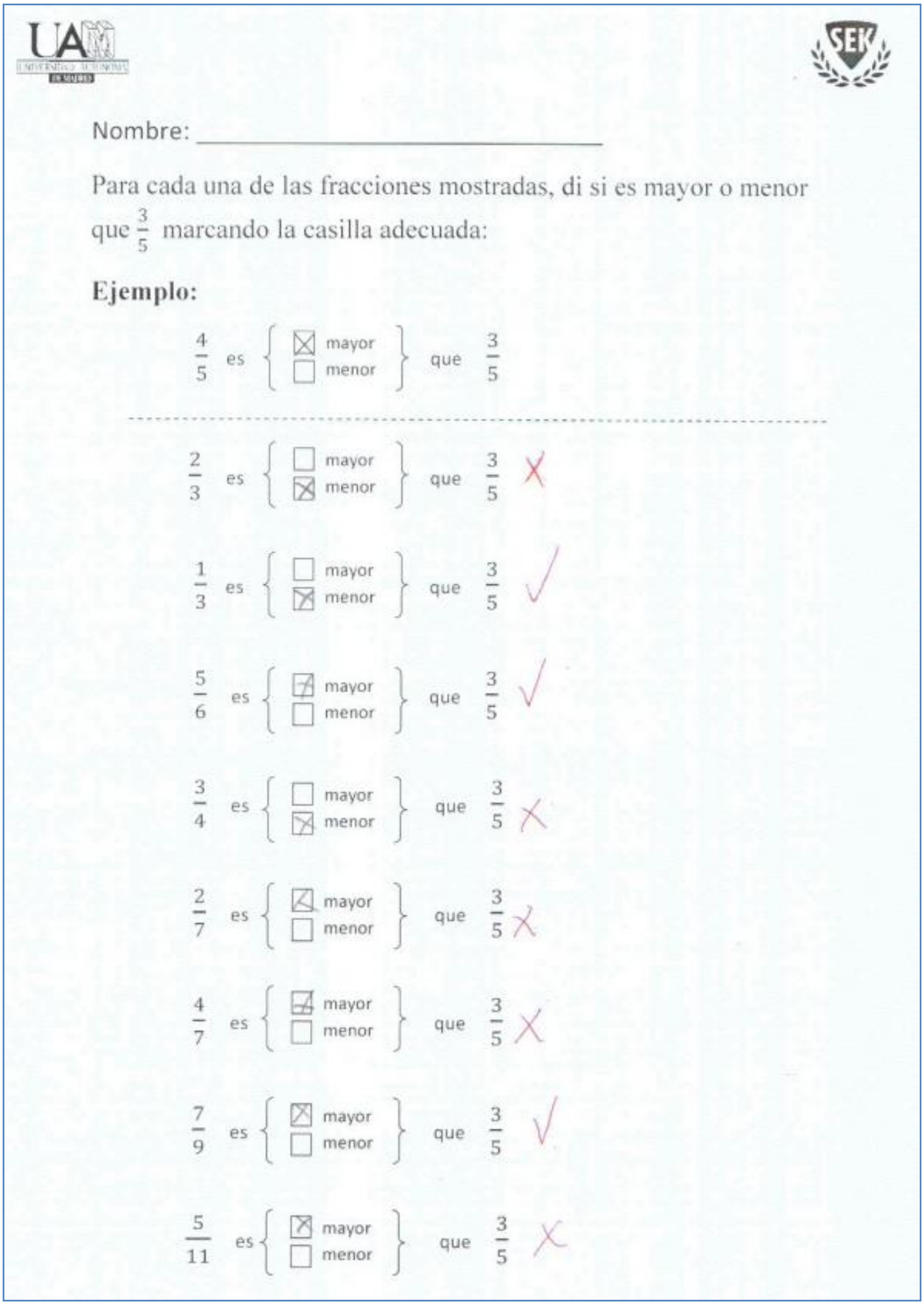
Dado que esta prueba es una de las que mide el conocimiento conceptual de las fracciones, se trata de un resultado preocupante que, a falta de su confirmación por estudios más rigurosos, indicaría una pérdida de dicho conocimiento en los dos años entre 6º y 2º. Si damos validez a la teoría integral del desarrollo numérico de Siegler, esto es aún más preocupante dada la importancia de dicho conocimiento conceptual en la capacidad matemática general de los alumnos en el futuro.

Evidentemente este resultado podría verse matizado en un estudio más riguroso (por ejemplo con una muestra más amplia y diversa) o deberse a factores específicos del colegio, el momento elegido para hacer el test, etc. no contemplados en este estudio, pero la magnitud de los números obtenidos parecería merecer un análisis más detallado.

8.1.2 Prueba de comparación de fracciones

De inicio y antes de ningún análisis de los datos, ya aparece un resultado sorprendente en la réplica que, cuando menos, no se menciona en el de Siegler y Pyke; en la prueba de 6º de primaria se observó que un cierto esquema (Figura 3) se repetía de forma consistente entre los alumnos: el resultado mostrado en esta figura aparece de forma exacta en 11 de los 24 niños que hicieron el cuestionario; otros dos niños dieron exactamente la mismas respuestas con la excepción de una de ellas (en ambos casos marcaron correctamente $\frac{2}{7} < \frac{3}{5}$). Al principio se pensó en la posibilidad de copia, descartada al aparecer la magnitud del fenómeno.

La respuesta puede estar en el PDST irlandés que menciona (ver página 6) cómo uno de los errores frecuentes el considerar una fracción mayor que otra únicamente porque los números que la forman son mayores; este error, a menudo obviado en otros textos, parece estar en el origen de esta asombrosa repetición de patrones.


Nombre: ______________________________

Para cada una de las fracciones mostradas, di si es mayor o menor que $\frac{3}{5}$ marcando la casilla adecuada:

Ejemplo:

$\frac{4}{5}$ es ☒ mayor / ☐ menor que $\frac{3}{5}$

$\frac{2}{3}$ es ☐ mayor / ☒ menor que $\frac{3}{5}$

$\frac{1}{3}$ es ☐ mayor / ☒ menor que $\frac{3}{5}$

$\frac{5}{6}$ es ☒ mayor / ☐ menor que $\frac{3}{5}$

$\frac{3}{4}$ es ☐ mayor / ☒ menor que $\frac{3}{5}$

$\frac{2}{7}$ es ☒ mayor / ☐ menor que $\frac{3}{5}$

$\frac{4}{7}$ es ☒ mayor / ☐ menor que $\frac{3}{5}$

$\frac{7}{9}$ es ☒ mayor / ☐ menor que $\frac{3}{5}$

$\frac{5}{11}$ es ☒ mayor / ☐ menor que $\frac{3}{5}$

Fig. 3.-- Patrón de respuesta prevalente en primaria

En la Tabla 6 se comparan los resultados de este test con los del estudio original:

	% respuestas correctas	
	Siegler	**Español**
6º de primaria	69%	54%
2º de ESO	75%	90%
Alumnos MR	81%	80%
Alumnos PR	63%	53%

Tabla 6.- Respuestas correctas por curso y tipo de alumno

Aquí se produce el efecto contrario a la prueba anterior con una diferencia mucho mayor que en el caso americano en este caso a favor del grupo de la ESO. Dos razones podrían estar detrás de estos resultados.

1) Todas las fracciones utilizadas aquí están en el rango 0-1 donde los alumnos de la ESO se desenvuelven mejor.

2) El efecto descrito para primaria al inicio de este apartado disminuye claramente el ratio de respuestas correctas; si consideramos únicamente los alumnos que no presentan este efecto la media de respuestas correctas pasa a ser del 67%, ratio muy próximo al del estudio americano. Si este es un efecto específico de este grupo o puede ser generalizado es algo que no podemos deducir, pero que, dada la claridad de los números, quizá convendría analizar posteriormente. Este error afecta en mayor medida a los alumnos PR (6 de 8) que a los MR (5 de 16) lo que también pudiera explicar la mayor diferencia entre ambos tipos de alumnos en el caso español que en el americano.

De forma general, el efecto citado al inicio de este apartado es tan prevalente que enmascara cualquier otro análisis comparativo entre ESO y primaria que pudiera efectuarse. Este patrón de respuestas no ocurre en ninguno de los 9 alumnos con mejores puntuaciones y sí en 11 de los 15 restantes, lo que indicaría la conveniencia de una acción didáctica que corrigiera este error.

8.2 Aritmética de las fracciones

8.2.1 *Precisión*

Ya se ha comentado que en el momento de hacer esta prueba los alumnos de primaria no habían estudiado aún la división de fracciones por lo que no realizaron esta prueba. Esto explica el excesivamente alto porcentaje de acierto en la división (marcado en amarillo en la tabla) ya que solo incluye a alumnos de 2º de la ESO (Tabla).

	% respuestas correctas	
	Siegler	**Español**
6º de primaria	41%	52%
2º de ESO	57%	81%
Alumnos MR	61%	79%
Alumnos PR	36%	44%
Suma	60%	66%
Resta	68%	66%
Multiplicación	48%	69%
División	20%	76%
Igual denominador	55%	76%
Distinto denominador	43%	62%

Tabla 7.- Respuestas correctas en aritmética de fracciones

Sorprenden los porcentajes tan altos de respuestas correctas, en todos los apartados muy por encima de los resultados americanos sobre todo en 2º de la ESO, así como la escasa diferencia entre los resultados para distintas operaciones, lo que parece confirmar algo que es comentario habitual entre los profesores: tendemos a incentivar el conocimiento procedimental sobre el conceptual. Esto parece ser más así si se toma en cuenta el retroceso que se ha visto se produce entre primaria y la ESO en la precisión de la colocación de fracciones en la recta numérica.

En las siguientes tablas (Tabla) se pueden ver los resultados cruzados por nivel de alumno, operación e igualdad de denominadores en España y EEUU. La comparación de ambas tablas establece una ventaja muy considerable de los alumnos españoles en cuanto a conocimiento procedimental que se observa tanto en los mayores porcentajes de aciertos como en su mucho mayor consistencia a través de las operaciones.

		Nivel alumno	
Operación	**Denominador**	**PR**	**MR**
Suma	Igual	60%	85%
	Distinto	23%	70%
Resta	Igual	57%	88%
	Distinto	23%	67%
Multiplicación	Igual	40%	76%
	Distinto	50%	82%
División	Igual	57%	88%
	Distinto	50%	82%

Operation	**Denominators**	**Achievement Status**	
		LA	**HA**
Addition	Equal	63	87
	Unequal	12	74
Subtraction	Equal	75	91
	Unequal	28	77
Multiplication	Equal	40	34
	Unequal	55	61
Division	Equal	12	36
	Unequal	6	27

Tabla 8.- Respuestas correctas por operación y tipo de alumno en ambos estudios

Pero también se muestran algunas tendencias comunes como la mucho mayor influencia de la igualdad o desigualdad de los denominadores entre los alumnos PR que entre los MR o, quizá más interesante, que tanto entre los alumnos MR como entre los PR la multiplicación invierte la tendencia general de tener un mayor porcentaje de aciertos en las operaciones con igualdad de denominadores. Siegler y Pyke achacan este efecto a que los alumnos extienden el efecto del igual denominador hacia la respuesta (por ejemplo $\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$), sin embargo en el caso español las causas parecen ser más variadas y se presentan fenómenos interesantes:

- Este fenómeno de inversión de la multiplicación se produce únicamente entre los alumnos de primaria: en la ESO los porcentajes de respuestas correctas para la multiplicación con denominadores iguales o distintos son prácticamente coincidentes (83% frente a 81%).

- El error más prevalente en primaria es utilizar el algoritmo de la división (54% de los errores), seguido de el error planteado por Siegler y Pyke (31%) y por “Otros” (15%). Sin embargo, sí ocurre que el primer tipo de error tiende a reproducirse en las multiplicaciones con distinto denominador mostrando un desconocimiento general del algoritmo, mientras que el error señalado por Siegler y Pyke es específico y, cuando se produce, convive siempre con multiplicaciones correctas o con otro tipo de error.

8.2.2 Los árboles y el bosque

En un epígrafe con este mismo título establecen Siegler y Pyke que el resultado más chocante del estudio (“the most striking finding”) es el diferente patrón de cambio en el conocimiento de la aritmética de las fracciones entre los alumnos MR y los PR que se ilustra en la Tabla :

Operation	Denominators	% Accuracy Gain (8^{th} minus 6^{th})	
		LA	HA
Addition	Equal	6	12
	Unequal	4	22*
Subtraction	Equal	10	13
	Unequal	3	20*
Multiplication	Equal	6	20*
	Unequal	9	31*
Division	Equal	11	36*
	Unequal	11	40*

Note: Gains = 8^{th} grade – 6^{th} grade percent correct.

Tabla 9.- Evolución en USA

Se aprecia cómo las mejoras en el porcentaje de respuestas correctas entre 6º y 8º grado son notablemente mayores para los alumnos MR (HA en inglés) que para los alumnos PR (LA en inglés); es decir que los alumnos PR ya obtenían peores resultados en 6º grado, pero las diferencias con los MR se amplían considerablemente en 8º grado.

Aunque caben diversas interpretaciones a este fenómeno, esto puede indicar un sistema educativo que tiende a potenciar a los mejores alumnos en detrimento de los menos dotados, por lo que la posible reproducción de este patrón en el SEK era uno de los aspectos que presentaba un mayor interés a priori a la hora de replicar este estudio. La Tabla 1 es la equivalente a la anterior para el estudio de réplica (la división no es aplicable ya que los alumnos de primaria no han realizado esta operación):

		Incremento de precisión 2º ESO menos 6º Pr.	
Operación	**Denominador**	**PR**	**MR**
Suma	Igual	21%	19%
	Distinto	10%	63%
Resta	Igual	28%	13%
	Distinto	10%	57%
Multiplicación	Igual	45%	38%
	Distinto	27%	13%
División	Igual	N/A	N/A
	Distinto	N/A	N/A

Tabla 1.- Evolución en la réplica

En el caso español las cifras no son tan elocuentes pero sí indican en cierta medida un efecto similar si bien menos espectacular: en aquéllas operaciones que podemos considerar más fáciles en el sentido de que los alumnos han obtenido mejores resultados y que son algorítmicamente más sencillas (suma y resta con igual denominador y multiplicación con distinto), se produce, al contrario que en el caso americano, una aproximación entre los alumnos PR y MR; sin embargo en el caso de la suma y resta con diferente denominador, las operaciones algorítmicamente más complejas, sí se produce, en una medida muy amplia, ese efecto de ensanchamiento de las diferencias entre ambos tipos de alumnos. Este efecto no se da en el caso de la multiplicación con igual denominador, quizá porque al ser un procedimiento algorítmico sencillo, el error se corrige de forma más natural o porque la estrategia de operar independientemente con el numerador y el denominador (ver siguiente apartado) que produce errores habituales en la suma y la resta, da resultados correctos en la multiplicación aun cuando su uso no obedezca a un uso conscientemente correcto en esta operación.

8.2.3 Estrategias

Se consideran cuatro tipos de estrategias:

1. *Estrategia correcta*

2. Estrategia consistente en *operar los dos números como si fueran independientes*. ($\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{4}{9}$).

3. Estrategia errónea consistente en *importar todo o parte del algoritmo de otra operación* (por ejemplo mantener denominadores iguales en una multiplicación: $\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$).

4. Ninguna estrategia (operación no resuelta u *otro tipo de error*.

Quizá en este apartado es en el que hay que ser más cuidadosos en la comparación entre los resultados del estudio original y la réplica ya que el estudio original incluye la grabación de audio por el alumno de una explicación sobre cómo ha realizado la operación, grabación que no se produce en la réplica. En la réplica se ha considerado que toda respuesta correcta obedece a una estrategia correcta y viceversa, cosa que no necesariamente es cierta. El tipo de estrategia incorrecta utilizada en las operaciones erróneas se ha deducido de las respuestas con resultados en general claros, pero que pueden dar lugar a algún error de tabulación, por ejemplo se pueden enmascarar algunas estrategias correctas que producen resultados incorrectos por ejemplo por un error de cálculo y que podrían haberse tabulado como “otra”. Siegler y Pyke comentan que a pesar de que un 9% de estrategias correctas han dado resultados incorrectos, el análisis de las frecuencias de las estrategias correctas es muy similar al de las respuestas correctas; de hecho estos dos parámetros – estrategia y respuesta correcta – tienen un coeficiente de correlación de 0.96 en el estudio de Siegler y Pyke, no muy diferente del coeficiente 1 que asumimos aquí: si esto es así podemos estimar que nuestra asunción de que una respuesta correcta implica una estrategia adecuada es factible.

La Tabla 2 presenta una igualdad total en la presencia de ambas estrategias en el caso español, mientras que en el estudio original es claramente prevalente la elección de una estrategia errónea. Un dato que es similar entre ambos estudios es la mayor frecuencia de la estrategia de números independientes en primaria que en la ESO (25% vs 16% en el estudio original, 20% vs 7% en la réplica) y entre alumnos PR que MR (32% vs 10% y 26% vs 7%).

	Siegler	Español
Estrategia correcta	54%	68%
Números independientes	14%	13%
Estrategia errónea	26%	13%
Otras	7%	6%

Tabla 2.- Estrategias utilizadas en ambos estudios

El estudio original realiza un análisis detallado de las interacciones entre estas estrategias y las diferentes operaciones o la igualdad o desigualdad de denominadores con objeto de tratar de explicar el origen de los errores y su propagación de 6º a 8º grado. Dado el exhaustivo análisis de datos que esto requiere, no lo vamos a reproducir en esta réplica de ámbito menos ambicioso, pero sí merece la pena detenerse en las dos operaciones en las que se ha visto que las diferencias se ensanchan para los alumnos PR y MR entre 6º de primaria y 2º de la ESO, la suma y la resta con distinto denominador (Tabla 3).

Lo más significativo de estos datos es el muy diferente reparto de errores con respecto al conjunto de las operaciones: allí (Tabla 2) prácticamente se igualan ambos tipos de errores mientras que aquí hay una prevalencia de la operación con numerador y denominador de forma independiente, especialmente marcada en los alumnos PR. Es de señalar que en la multiplicación esta estrategia da resultados correctos lo que podría indicar que un buen número de las multiplicaciones correctas, especialmente en los alumnos PR de primaria podrían no obedecer a un uso consciente de una estrategia correcta. Por otro lado, mientras que en los alumnos MR prácticamente se corrigen estos errores de forma absoluta, en los alumnos PR permanecen prácticamente inalterables

	Suma con distinto denominador				Resta con distinto denominador			
	Correcta	**Oper. Indep.**	**Estrat. Incorr.**	**Otras**	**Correcta**	**Oper. Indep.**	**Estrat. Incorr.**	**Otras**
Primaria								
MR	34%	34%	28%	3%	38%	28%	25%	13%
PR	19%	50%	6%	25%	19%	56%	13%	13%
ESO								
MR	100%	0%	0%	0%	94%	0%	3%	3%
PR	29%	50%	14%	7%	29%	36%	14%	21%

Tabla 3.- Estrategias utilizadas en la suma y resta con distinto denominador

Es de observar que en la resta disminuye este tipo de errores pero aumenta el de “Otros”, donde prevalecen los casos de alumnos que no han sabido realizar la operación y que de haberse visto forzados a realizarla (como en el estudio original hecho en el ordenador) probablemente hubieran elegido la operación independiente de forma mayoritaria. Es posible también que el alto porcentaje de “otros” en la suma entre alumnos PR de primaria enmascare lo que sería un aumento de las estrategias incorrectas ya que, en general los comportamientos globales de la suma y la resta con distinto denominador son similares.

Desde un punto de vista didáctico estos datos podrían indicar que para combatir el ensanchamiento de la brecha entre alumnos PR y MR lo más eficiente sería insistir en una adecuada comprensión de cuándo y por qué debe operarse de forma independiente con numerador y denominador y cuándo no.

8.2.4 Autoconfianza en la propia estrategia

De este análisis excluimos la división ya que esta operación no fue realizada por los alumnos de primaria. Cabría señalar que en el caso de los alumnos de la ESO la división es la operación que menor confianza genera (una media de 4,22 frente a una media global de 4,44) y que esto se debe fundamentalmente a la caída en la confianza de los alumnos PR que es mucho mayor (3.04 para la división frente a una media global de 3,48) que para los alumnos MR (4,71 para la división frente a un global de 4,83).

En la Tabla 4 puede verse cómo la confianza es globalmente mayor en la ESO que en primaria, entre los alumnos MR que entre los alumnos PR y en operaciones con igual denominador que en operaciones con distinto, todos ellos resultados esperables y tendencias similares, dentro de una mayor confianza general de los alumnos españoles, a las encontradas en el estudio original.

	Valor medio de la confianza		
	Igual denominador	Distinto denominador	Global
Primaria	4,34	3,97	4,15
MR	4,45	4,00	4,22
PR	4,09	3,92	4,00
ESO	4,55	4,47	4,51
MR	4,91	4,83	4,87
PR	3,67	3,60	3,63
Global	4,44	4,22	4,33
MR	4,69	4,43	4,56
PR	3,88	3,77	3,82

Tabla 4.- Confianza de los alumnos para igual y distinto denominador

No obstante cuando se pone el zoom, otros resultados menos obvios se hacen visibles. Ya en esta tabla se observa que, aunque globalmente la confianza es mayor en la ESO que en primaria, esto no es así entre los alumnos PR, que sufren una pérdida de confianza muy significativa en los dos años que separan ambos cursos; podría decirse que la ampliación de las diferencias en conocimientos ya vista entre los alumnos MR y PR entre primaria y la ESO se acompaña de una consciencia de dicha ampliación que hace disminuir la autoconfianza de los alumnos PR y aumentar la de los MR, algo que puede constituir un círculo vicioso a combatir.

Alguna sorpresa depara también el análisis por operaciones mostrado en la Tabla 5. En general se siguen las pautas marcadas en el párrafo anterior, pero con algunas diferencias notables. La resta con distinto denominador produce una caída de confianza entre los alumnos MR de primaria difícil de explicar y que no se corresponden con los resultados reales, de hecho mejores en la resta con distinto denominador que en la suma.

		Primaria		ESO		Global	
Operación	**Denominador**	**PR**	**MR**	**PR**	**MR**	**PR**	**MR**
Suma	Igual	4,38	4,69	3,43	4,88	3,93	4,79
	Distinto	4,00	4,25	3,57	4,85	3,80	4,56
Resta	Igual	4,14	4,34	3,86	4,97	4,00	4,67
	Distinto	4,06	3,78	3,57	4,85	3,83	4,33
Multiplicación	Igual	3,71	4,31	3,71	4,88	3,71	4,61
	Distinto	3,69	3,97	3,64	4,79	3,67	4,39
División	Igual	N/A	N/A	3,07	4,74	N/A	N/A
	Distinto	N/A	N/A	3,00	4,68	N/A	N/A

Tabla 5.- Tabla detallada de la confianza de los alumnos

La multiplicación sigue el mismo esquema de confianza que el resto de operaciones, lo que resulta chocante ya que en esta operación, como ya se ha visto, los resultados se invierten y son significativamente mejores con distinto que con igual denominador (72% frente a 65% de respuestas correctas). Es de señalar que esta inversión de los resultados y la confianza mostrada no se produce en el estudio original en el que la confianza es menor para la multiplicación con igual denominador (3,6 vs 3,8).

Pueden barajarse varias posibles causas para esta aparente contradicción, por ejemplo la tendencia ya vista a arrastrar el denominador común a la respuesta es una estrategia errónea que puede producir un alto grado de confianza; o, alternativamente, la estrategia correcta de operar independientemente con numerador y numerador, puede producir dudas al ser una estrategia que se usa de forma generalizada (e incorrecta) en otras operaciones; un análisis detallado (que no se ha realizado) de qué estrategias (correctas o erróneas) producen un mayor o menor índice de confianza podría quizá dar las claves de esta aparente contradicción lo que podría ayudar a combatir el problema.

8.3 División de números naturales

El efecto más significativo es quizá el hecho de que aquí la distancia entre PRs y MRs disminuye de primaria a la ESO en lugar de aumentar (Tabla 6). Puesto que estos ejercicios implican la ejecución de un algoritmo poco relacionado con el conocimiento conceptual de la división, este hecho podría avalar la idea de que la diferencia que realmente se amplía entre primaria y la ESO es la del conocimiento conceptual que ayuda a los alumnos MR a elegir la estrategia correcta en las operaciones con fracciones.

	Respuestas correctas
Primaria	63%
MR	74%
PR	42%
ESO	83%
MR	85%
PR	76%
Global	73%
MR	80%
PR	58%

Tabla 6.- Resultado de la división de números naturales

De hecho dos alumnos de primaria de entre los de mejores resultados globales dejaron las divisiones sin hacer; muy probablemente esto se debió a confusión con las divisiones de fracciones que, en efecto, se explicó que no debían hacerse. Si imaginamos, de acuerdo con la tendencia de alumnos similares, que habrían realizado correctamente todas las divisiones, el porcentaje se elevaría para los MRs de primaria del 74% al 82%, muy similar al de la ESO; esto podría indicar más un retraso en algunos alumnos en la adquisición del algoritmo que un problema de dificultad mantenida o incrementada en el tiempo.

Otro dato interesante es cómo los errores se concentran en la división que produce decimales: si comparamos el número de errores en divisiones enteras (dividiendo el número total por dos ya que hay dos preguntas de resultado entero por una de resultado decimal) obtenemos la Tabla 7:

	División entera	División decimal
6º de primaria	7,0	10,5
2º de ESO	2,0	8,5

Tabla 7.- la división entera frente a la decimal

Los errores en las divisiones enteras prácticamente desaparecen en 2º de la ESO, pero no ocurre lo mismo con las decimales en las que la reducción de errores es muy poco significativa; además, en segundo de la ESO los errores en divisiones decimales se producen muy mayoritariamente en alumnos de menor nivel: 8 de los 9 alumnos con menor nivel global cometen algún error mientras que apenas se producen errores en el resto de alumnos. Ya en la introducción se comentaron los errores observados durante las prácticas en la realización de divisiones con decimales en segundo de la ESO; estos datos parecen confirmar la mejora en el manejo de los algoritmos entre primaria y la ESO, pero las dificultades para mejorar el conocimiento conceptual especialmente de los alumnos PR, ya que muchos de los errores tienen que ver con dificultades en el manejo de la coma decimal.

9 Sobre la gestión de la calidad

No quisiera terminar la discusión de este estudio sin mencionar algo que, siendo ajeno a los objetivos iniciales del mismo, se ha presentado a mis ojos durante toda su realización como un efecto secundario que me es difícil esquivar.

Tras la segunda guerra mundial y especialmente en las principales potencias vencidas (Japón y Alemania) comenzó a tomar fuerza la gestión de la calidad y el control de procesos frente al control de la calidad taylorista previo. Aunque el fenómeno es complejo uno de los cambios de paradigma que se produce es relevante para lo que se quiere exponer aquí. El taylorismo hacía recaer el control de calidad en un departamento especializado que, fundamentalmente, controla las salidas (el producto final) lo que produce una gestión reactiva: tras producirse un problema que se hace visible en la realización de productos defectuosos, se para la producción y se analizan y corrigen las causas. El nuevo paradigma sustituye el control por la gestión de la calidad y el control a la salida por el control del proceso buscando una gestión proactiva: analizo los procesos para ver dónde se comienzan a producir desviaciones relevantes y actuó antes de que estas ocasionen la realización de productos defectuosos (Pérez Fernández de Velasco, José Antonio 2012).

Tomando como referencia esta evolución del mundo de la industria, pareciera que en educación estamos, de forma general, antes del control reactivo: evaluamos a los alumnos (la salida del proceso) al final de un determinado ciclo (unidad didáctica, trimestre, año escolar, ciclo educativo) y quizá hagamos ciertas estadísticas que inducen ciertas discusiones más o menos informales sobre qué modificaciones deberían realizarse en el proceso; en mi experiencia el feed-back de la evaluación del resultado del proceso hacia el proceso no está en general sistematizado. Pero además aquí hablamos de un servicio en el que “el producto” (el cambio del alumno) se termina mientras se produce y en el que no tenemos la capacidad de detener el proceso si el resultado final medido a la salida resulta ser preocupante; el control de calidad a la salida implica un desfase (el tiempo de inspección) entre la producción del bien y su entrega al cliente, cosa inviable aquí, lo que haría más acuciante la implantación de sistemas de gestión de la calidad del proceso que nos dieran información de qué errores pueden estar diseminándose entre los alumnos para poder corregirlos lo antes posible.

La realización de esta réplica ha mostrado cómo un estudio que ha ocupado entre media hora y 45 minutos de tiempo de clase ha podido identificar algunos conceptos erróneos que se están diseminando entre los alumnos y que se pueden quizá corregir en el momento en que se están produciendo. Incluso hay algunos casos particulares en las que se identifica claramente un error en un alumno que no es difícil de corregir antes de que se integre más fuertemente en su "caja de herramientas" (por ejemplo una alumna con excelentes resultados generales pero que claramente confunde los algoritmos de la multiplicación y la división de fracciones).

Midiendo únicamente la salida (¿ha operado bien un alumno dado con las fracciones?) y no el desempeño del proceso (¿qué errores se están diseminando entre los alumnos?) muchas de estas informaciones quedan ocultas y se dificulta la gestión de la calidad de los procesos didácticos. Evidentemente hay muchas preguntas que hacerse sobre cómo podría implantarse este tipo de gestión de procesos y muchos señalarán un gran número de dificultades que impiden llevarlo a cabo, pero sospecho que, con los matices que supone el trabajar con "productos sensibles", se trata de preguntas, dificultades y resistencias que ya han ocurrido en otros entornos en los que ya nadie pone en cuestión la superioridad de la gestión frente al control de la calidad.

10 Conclusiones

10.1 Generales

La intención de este TFM era estudiar brevemente las teorías de R. Siegler en torno al desarrollo numérico y en particular a la didáctica de las fracciones intentando ponerlas en contexto tanto dentro del espacio de las teorías didácticas relacionadas como de aquellos comportamientos observados durante las prácticas que pudieran relacionarse con dichas teorías. Adicionalmente se ha pretendido replicar, en la medida de lo posible dentro de un ámbito mucho más modesto, uno de los cuestionarios que ha contribuido a definir la posición de Siegler.

La propia definición a priori del TFM ponía una incógnita sobre su resultado final ya que, por un lado el tiempo disponible en un trabajo de este tipo hace muy difícil llegar a una saturación suficiente sobre lo ya publicado sobre el tema elegido y, por otro, existía el riesgo de que la réplica en unas condiciones mucho más modestas de un trabajo de cierta complejidad como el elegido pudiera no llegar a ninguna conclusión relevante.

Llegado al final del viaje creo que éste ha merecido la pena. Por un lado me ha permitido comprender cómo trabajan los investigadores en un campo muy diferente del que procedo y que, de alguna manera, me parece mucho más inasible: el número de variables es tan grande y estas son tan difícilmente controlables que el establecimiento de relaciones causales entre ellas más allá del análisis de correlaciones en un entorno dado abre, desde mi punto de vista, incógnitas que se traducen en multiplicidad de estudios que confirman o corrigen de forma bastante inmediata los resultados previos.

La réplica del estudio de Siegler/Pyke sin por su puesto pretender ser ni una confirmación ni una refutación del estudio original, sí ha proporcionado algunas enseñanzas que, si bien no directamente generalizables más allá de la coincidencia o no con el estudio inicial, sí pueden aportar cierta luz al menos en el entorno local en el que se produce.

10.2 Evolución del conocimiento procedimental versus el conceptual

Así, hay algunos datos que, si aceptamos la teoría de Siegler, parecen indicar una pérdida de conocimiento conceptual desde 6º de primaria hasta 2º de la ESO. Los alumnos de la ESO se desenvuelven mejor que los de primaria en la línea numérica 0-1, pero en la línea numérica 0-5 sorprendentemente son los alumnos de 6º de primaria los que parecen defenderse mejor; si consideramos que la línea 0-5 es posterior dentro del desarrollo numérico, pareciera que, aunque hay una leve mejora en los errores cometidos en la línea 0-1 (¿quizá indicando una consolidación del concepto limitado de fracción como relación parte-todo?), el sorprendente retroceso en la línea 0-5 indicaría esta pérdida de conocimiento conceptual.

Otro aspecto del estudio que parece indicar esta tendencia a mejorar el conocimiento procedimental sin que se acompañe de una mejora del conceptual se encuentra en la prueba de división de enteros: se produce una mejora significativa entre primaria y la ESO para las divisiones que dan un resultado entero, pero esta mejora es mucho menos perceptible cuando el resultado es decimal.

Aunque la comparación de fracciones parece contradecir esta conclusión, el hecho de que todas las comparaciones se realizan entre fracciones menores que 1 donde los alumnos de la ESO sí se desenvuelven mejor y la aparición de un error sistémico dentro de los alumnos de primaria que puede restar generalidad a los resultados no permiten proponer en este caso conclusiones generalizables fiables a partir de esta prueba.

Esta pérdida de conocimiento conceptual iría paralela a una mejora muy significativa del conocimiento procedimental con un avance enormemente significativo entre primaria y la ESO en la precisión de las operaciones con fracciones, precisión mucho mayor que en el caso americano y que, contrariamente a este, se produce prácticamente por igual en todas las operaciones.

10.3 Evolución de la separación entre alumnos PR y MR

El estudio americano llega a una conclusión preocupante: la distancia en la aritmética de fracciones entre los alumnos PR y los MR se agranda entre primaria y la ESO. Aunque un análisis superficial de los datos de nuestro estudio pudieran parecer más positivos, un análisis de detalle deja ver que en las dos operaciones con algoritmos más complejos (suma y resta con distinto denominador) la mejora de los alumnos MR es muy importante, mientras que es apenas perceptible entre los alumnos PR; es decir, sí se produce un distanciamiento entre ambos tipos de alumnos a lo largo de los dos años que separan a los cursos analizados.

Por otro lado, se produce entre los alumnos PR (al contrario que entre los alumnos MR) una pérdida significativa de autoconfianza a la hora de realizar operaciones con fracciones, cosa que muy posiblemente dificulta su mejora y constituye un cirulo vicioso entre esta falta de confianza y el empeoramiento de los resultados que habría que combatir.

10.4 ¿Es posible la gestión de la calidad del proceso didáctico?

Por otro lado, la realización de las pruebas ha supuesto el descubrimiento de tendencias que pudieran o no ser específicas de los grupos en estudio pero que, en cualquier caso, podrían permitir acciones didácticas inmediatas para evitar la consolidación de errores habituales en el grupo. Así por ejemplo la repetición de un patrón común de aciertos y errores en casi la mitad de los alumnos de primaria en la prueba de comparación de errores parece indicar un problema conceptual común a combatir; o los patrones de errores en la estrategia elegida para operar fracciones que indica que una posible medida para revertir la progresiva separación entre alumnos PR y MR sería combatir en primaria y especialmente entre los alumnos PR la estrategia errónea de operar independientemente con numerador y denominador.

Así, parecería factible e incluso sencillo establecer un sistema de gestión de la calidad de los procesos didácticos que, definiendo para un curso y asignatura dada los conceptos básicos a controlar, estableciera pruebas sencillas que permitieran detectar los errores más comunes que se están diseminando entre los alumnos para permitir su corrección temprana en el proceso didáctico global.

Normalmente ponemos el énfasis en la evaluación de los alumnos, máxime cuando nos vemos obligados a rellenar determinados formularios que indiquen el grado de cumplimiento de los objetivos de aprendizaje de cada uno de ellos para que los procesos burocráticos posteriores puedan generar las correspondientes salidas (promociones o no, certificados de niveles conseguidos, recomendación de itinerarios, consecución o no de determinadas ventajas como becas u otros premios, etc.). Los sistemas de calidad actuales cuando existen y al menos hasta donde yo tengo constancia utilizan estos datos para analizar determinados índices y proponer medidas. Menos habitual es cambiar el enfoque de raíz: además de realizar estas pruebas de medición individual, realizar otras enfocadas no al grado de adquisición de conocimientos de cada alumno individual, sino del grado de eficacia de los procesos didácticos para conseguir una mejora global del grupo.

Evidentemente queda mucho que pensar sobre cómo se puede conseguir esto; así por ejemplo, no parece que hacer descansar este proceso enteramente sobre las espaldas de los profesores, ya bastante cargadas en la actualidad fuera un procedimiento factible. Tampoco puede pensarse que saturar a los alumnos con un gran número de pruebas adicionales sea conveniente. Pero la realización de esta réplica, más allá de sus objetivos iniciales, me ha convencido de ambas cosas, la conveniencia de atacar estos procesos y su factibilidad si se cuenta con un enfoque adecuado. Pero, parafraseando a Michael Ende, “esa es otra historia” ... o alimento para otro TFM en cursos posteriores.

Referencias

Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? Contemporary Educational Psychology, 37(4), 247-253.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014; 2013). Teaching fractions through situations: A fundamental experiment (2014th ed.). Dordrecht; New York: Springer. doi:10.1007/978-94-007-2715-1

Chen, Z., & Siegler, R. S. (2000). II. overlapping waves theory. Monographs of the Society for Research in Child Development, 65(2), 7-11.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht [etc.]: D. Reidel Publishing Company.

Gutiérrez, A. G., Gómez, P., & Rico Romero, L. (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de magisterio. Educacion XX1, 19(1), 135-158.

Hoffer, T. B., Venkataraman, L., Hedberg, E. C., & Shagle, S. (2007). Final report on the national survey of algebra teachers for the national math panel Retrieved from https://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/final-report-algebra-teachers.pdf

LeFevre, J., Lira, C., Sowinski, C., Cankaya, O., Kamawar, D., & Skwarchuk, S. (2013). Charting the role of the number line in mathematical development. Frontiers in Psychology, 4, 641.

Pérez Fernández de Velasco,José Antonio, & Escuela Superior de Gestión Comercial y Marketing. (2012). Gestión por procesos (5ª, rev. y act. ed.). Madrid: ESIC.

Professional Development Service for Teachers (PDST). In PDST (Ed.), Fractions: Teacher's manual. A guide to teaching and learning fractions in irish primary schools

Shellenbarger, S. (2013, Sept. 24). New approaches to teaching fractions. The Wall Street Journal,

Siegler, R. S. How I got into psychology. Retrieved 7 de junio, 2017, from http://www.psy.cmu.edu/~siegler/bio-info.html

Siegler, R. S. Página web personal. Retrieved 06/05, 2017, from http://www.psy.cmu.edu/~siegler/

Siegler, R. S. (2010). In Institute of Education Sciences (Ed.), Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. Cognitive Psychology, 62(4), 273; 273-296; 296.

Siegler, R. S. (1996). Emerging minds the process of change in children's thinking. New York: Oxford University Press.

Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge: The common core of numerical development. Developmental Science, 19(3), 341-361.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. Child Development Perspectives, 8(3), 144-150.

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. Developmental Psychology, 49(10), 1994.

Sparks, S. D. (2013, July 18). Federal research suggests new approach to teaching fractions. Education Week,

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. (2015; 2014). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. Learning and Instruction, 37, 5-13.

University of Delaware. Center for improving *learning of fractions.* Retrieved 7 de junio, 2017,

Otros documentos y bibliografía consultada

Ahl, V. A., Moore, C. F., & Dixon, J. A. (1992). Development of intuitive and numerical proportional reasoning. Cognitive Development, 7(1), 81-108. doi:10.1016/0885-2014(92)90006-D

Ben-Shalom, T., Berger, A., & Henik, A. (2013). My brain knows numbers! - an ERP study of preschoolers' numerical knowledge. Frontiers in Psychology, 4

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. Child Development, 79(4), 1016-1031.

Del Río Serna, Karen T., & Ramírez Pérez, L. M. (2009). Las fracciones a partir de la fenomenología didáctica. trabajo de fin de grado. Universidad de Antioquía. Medellín (Colombia):

Error patterns in computation; using error patterns to help each student learn, 10th ed.(2009, Mar 2009). Scitech Book News, 33, n/a.

Fazio, L., Siegler, R. S., International Bureau of Education (IBE) (Switzerland), & International Academy of Education (Belguim). (2011). Teaching fractions. educational practices series-22UNESCO International Bureau of Education.

Frydman, O., & Bryant, P. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. Cognitive Development, 3(4), 323-339. doi:10.1016/0885-2014(88)90019-6

Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Jordan, N. C., et al. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. Journal of Educational Psychology, 105(3), 683-700.

GALLARDO, J., GONZÁLEZ, J. L., & QUISPE, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa, 11(3)

Gómez, P., & Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. Voces y Silencios, 2(3), 78-89.

Gutiérrez, A. G., Gómez, P., & Rico Romero, L. (2016). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de magisterio. Educación XX1, 19(1), 135; 135-158; 158.

Hanich, L. B., Jordan, N. C., Kaplan, D., & Dick, J. (2001). Performance across different areas of mathematical cognition in children with learning difficulties. Journal of Educational Psychology, 93(3), 615-626.

Hill, H. C., Rowan, B., & Deborah Loewenberg Ball. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. American Educational Research Journal, 42(2), 371-406.

Moeller, K., Klein, E., Willmes, K., & Kucian, K. (2015). Numerical development - from cognitive functions to neural underpinnings. Lausanne, Switzerland: Frontiers Media SA.

Moseley, B. J., Okamoto, Y., & Ishida, J. (2007). Comparing US and japanese elementary school teachers' facility for linking rational number representations. International Journal of Science and Mathematics Education, 5(1), 165-185.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 30(2), 122-147.

Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. Learning and Instruction, 18(1), 3-17.

Pruzzo de Di Pego, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza? Pilquen - Sección Psicopedagogía, (8)

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. Journal of Educational Psychology, 93(2), 346; 346.

Siegler, R. S., Carpenter, T., Fennel, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., et al. (2010). In U.S. DEPARTMENT OF EDUCATION (Ed.), Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade NCEE 2010-4039

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. Trends in Cognitive Sciences, 17(1), 13-19.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503; 503-518; 518.

Anexo. Ejemplo de páginas del cuestionario utilizado

Nombre: ________________________________

Marca en la línea el punto en el que crees que está la fracción mostrada:

Ejemplo:

$\frac{1}{4}$ 0 ——|—————————— 1

$\frac{3}{4}$ 0 ———————————— 1

$\frac{13}{14}$ 0 ———————————— 1

$\frac{5}{8}$ 0 ———————————— 1

$\frac{1}{5}$ 0 ———————————— 1

$\frac{3}{7}$ 0 ———————————— 1

$\frac{7}{12}$ 0 ———————————— 1

$\frac{1}{3}$ 0 ———————————— 1

$\frac{1}{19}$ 0 ———————————— 1

$\frac{7}{8}$ 0 ———————————— 1

$\frac{2}{13}$ 0 ———————————— 1

Nombre: ______________________________

Marca en cada línea el punto en el que crees que está la fracción mostrada junto a ella:

Ejemplo:

$\frac{7}{2}$ 0 5

$\frac{13}{6}$ 0 5

$\frac{19}{4}$ 0 5

$\frac{7}{3}$ 0 5

$\frac{9}{5}$ 0 5

$\frac{10}{3}$ 0 5

$\frac{11}{7}$ 0 5

$\frac{13}{4}$ 0 5

$\frac{1}{5}$ 0 5

$\frac{9}{2}$ 0 5

$\frac{7}{8}$ 0 5

Nombre: ______________________________

Para cada una de las fracciones mostradas, di si es mayor o menor que $\frac{3}{5}$ marcando la casilla adecuada:

Ejemplo:

$\frac{4}{5}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \boxtimes \text{ mayor} \\ \square \text{ menor} \end{array} \right\}$ que $\frac{3}{5}$

$\frac{2}{3}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ mayor} \\ \square \text{ menor} \end{array} \right\}$ que $\frac{3}{5}$

$\frac{1}{3}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ mayor} \\ \square \text{ menor} \end{array} \right\}$ que $\frac{3}{5}$

$\frac{5}{6}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ mayor} \\ \square \text{ menor} \end{array} \right\}$ que $\frac{3}{5}$

$\frac{3}{4}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ mayor} \\ \square \text{ menor} \end{array} \right\}$ que $\frac{3}{5}$

$\frac{2}{7}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ mayor} \\ \square \text{ menor} \end{array} \right\}$ que $\frac{3}{5}$

$\frac{4}{7}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ mayor} \\ \square \text{ menor} \end{array} \right\}$ que $\frac{3}{5}$

$\frac{7}{9}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ mayor} \\ \square \text{ menor} \end{array} \right\}$ que $\frac{3}{5}$

$\frac{5}{11}$ es $\left\{ \begin{array}{l} \square \text{ mayor} \\ \square \text{ menor} \end{array} \right\}$ que $\frac{3}{5}$

Nombre: ______________________________

Resuelve la operación y dinos cómo de seguro estás de que tu respuesta es correcta en una escala del 1 al 5 (1: nada seguro; 5: completamente seguro):

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} =$$

Nivel de seguridad: 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} =$$

Nivel de seguridad: 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐