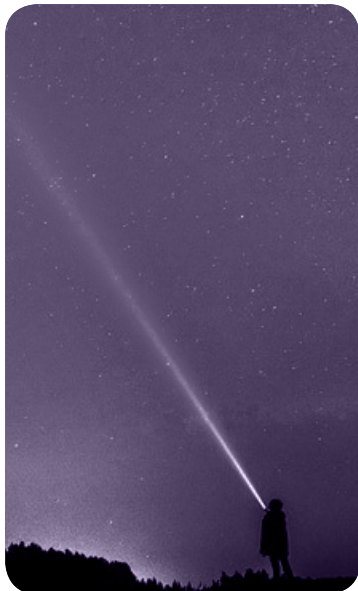




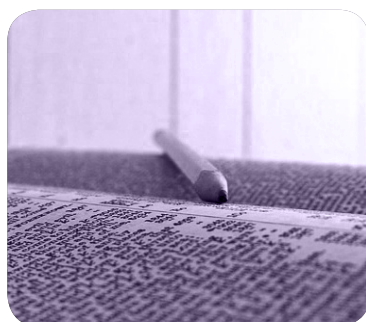
MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación
de Profesorado
y Educación / 16-17

(MESOB)
Especialidad
de Matemáticas



Campus Internacional
excelencia UAM
CSIC+



Diagnóstico y tratamiento de dificultades en el aprendizaje de funciones

*Andrea María Álvarez
Ares*

978-84-8344-6215



MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN
SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO

ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

DIAGNÓSTICO Y TRATAMIENTO DE DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES

Autora:

Andrea María Álvarez Ares

Tutor:

César Sáenz

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Curso 2016/2017

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	3
2. MARCO TEÓRICO	5
2.1. Algunas ideas de la Teoría de las Situaciones Didácticas.....	6
2.2. La teoría de los registros de representación semiótica	7
3. REVISIÓN DE ESTUDIOS SOBRE DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES.....	9
4. PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA EL TRATAMIENTO DE DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES	21
4.1. Contexto de la intervención didáctica	21
4.2. Contenido curricular y metodología de la experiencia.....	22
4.3. Actividades complementarias	31
4.3.1. Juego “El burro de las funciones”	31
4.3.2. Trabajo grupal	31
5. EVALUACIÓN REALIZADA Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.....	33
6. CONCLUSIONES	55
BIBLIOGRAFÍA	59
ANEXOS.....	61
Anexo I: Modelos de exámenes de ambas clases	61

RESUMEN

El estudio del concepto de función y el análisis e interpretación de funciones es, sin lugar a dudas, extremadamente relevante en el sistema educativo actual. El presente documento es, por un lado, una síntesis de trabajos realizados por expertos sobre dificultades de aprendizaje de dicha noción, y por otro, una serie de propuestas (algunas llevadas a la práctica durante mis prácticas docentes del Máster) para mejorar la enseñanza de las funciones, propuestas que surgen evidentemente del análisis exhaustivo de las investigaciones expuestas. La última parte del trabajo es un análisis de las respuestas dadas y de los errores cometidos por los alumnos de dos grupos de 4º de la ESO en el examen que realizamos sobre funciones, cuyos resultados además pueden ser útiles para investigaciones futuras.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de este Trabajo de fin de Máster se sitúa, sin lugar a dudas, en el marco de la Didáctica de la Matemática, campo de investigación científica que se dedica a identificar, a explicar y a tratar de resolver los problemas que se producen en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así, las áreas de estudio de la Didáctica de las Matemáticas son, como consecuencia, entre otras cosas, de una sociedad que cambia a pasos agigantados (informatización, globalización,...), cada vez más numerosas y más variadas. Ejemplos de éstas son las concepciones erróneas de estudiantes y profesores, los obstáculos de aprendizaje de las matemáticas, el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas, el talento y la creatividad matemática, la estructura y características de los libros de texto de matemáticas, el uso de las matemáticas en culturas y grupos no privilegiados... entre otros temas. En nuestro caso, tal y como indica el título del trabajo, vamos a centrarnos en estudiar, analizar, describir e intentar solucionar algunas de las dificultades que surgen de la noción de función y sus características, así como del tratamiento de las distintas funciones elementales que se estudian en el último curso de Educación Secundaria Obligatoria, curso en el que he impartido docencia durante mis prácticas del Máster.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En esta primera sección, nuestro principal objetivo es exponer algunos de los fundamentos teóricos que nos han sido de utilidad a la hora de realizar este Trabajo de Fin de Máster.

De modo evidente, en el ámbito de estudio de la Didáctica nos encontramos con tres componentes fundamentales que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: los propios conocimientos matemáticos o saberes que se deben enseñar, los alumnos y el profesor. Si consideramos el enfoque sistémico que es claramente necesario en la Didáctica de la Matemática, pues un hecho didáctico no puede explicarse mediante el estudio de sus componentes por separado (Ruiz Higuera, 1998), esos tres componentes mencionados son los tres principales subsistemas del sistema didáctico, así como las interacciones entre ellos.

Sin embargo, el sistema de enseñanza no queda únicamente influido por los sistemas didácticos, sino también por una compleja red o sistema formado por «todas las personas que, en la sociedad, piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza, influyendo, por tanto, de una manera directa o indirecta sobre ella (formadores de profesores, escritores de textos y materiales curriculares, investigadores, asociaciones de profesores, padres de alumnos, diseñadores del currículum, políticos, directores y administradores de centros de enseñanza, ...)» (Ruiz Higuera, 1998, p. 19). Este sistema está a su vez influido y condicionado por su entorno social, cultural, tecnológico y científico más próximo. Un claro ejemplo de esta enorme influencia lo encontramos hace muy poco tiempo: hace veinte años, las asignaturas relacionadas con la informática y las nuevas tecnologías que se impartían en las aulas, o el uso de las TIC en las diferentes materias del currículum, por ejemplo en Matemáticas, eran escasas o incluso nulas. Actualmente, en nuestra sociedad, la enseñanza y el uso de la tecnología (ordenadores, tabletas, etc.), es extremadamente relevante.

Así, teniendo en cuenta todo lo que acabamos de comentar, es evidente que para estudiar correctamente las dificultades de aprendizaje que surgen en la enseñanza de un área y

un contenido concreto, sería necesario analizar, entre otras cosas, los múltiples factores que, como hemos dicho, influyen en la enseñanza y aprendizaje del mismo. Nosotros utilizaremos las aportaciones de dos enfoques teóricos de la didáctica de las matemáticas para analizar este proceso.

2.1. La Teoría de las Situaciones Didácticas

Teniendo en cuenta que nuestro trabajo gira en torno a las dificultades de aprendizaje del concepto y del tratamiento de las funciones, hemos realizado un estudio previo tomando como guía un trabajo de Ruiz Higuera (1998). Esta autora utiliza una de las nociones nucleares de la teoría de las situaciones, la idea de *obstáculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje*.

Tal y como comentábamos en la introducción de este trabajo, las áreas de estudio de la Didáctica de la Matemática son múltiples. Entre ellas, destaca la investigación de las dificultades y los fracasos en la enseñanza, que intenta analizar qué tipo de errores cometen los estudiantes, por qué los cometen, qué hay detrás de los mismos y, por supuesto, cuáles de ellos deben ser investigados, pues existen múltiples errores que son naturales y que se dan de forma aleatoria, formando parte del propio proceso de aprendizaje de las matemáticas. En palabras de Ruiz Higuera (1998) «no todos los errores han de investigarse, la Didáctica se interesa principalmente por aquellos cuyas manifestaciones no son fortuitas, sino repetidas y resistentes y cuyo origen puede escapar al sujeto. En este último caso se hablará de obstáculo cognitivo» (p. 27). En Didáctica de la Matemática, la introducción de la noción de obstáculo es debida a Brousseau (1983):

El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se releva falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos (p.173).

Por ejemplo, bastantes alumnos creen que al multiplicar dos números el producto es un número mayor. O que la mitad de un número es siempre menor que el número. Éstas son generalizaciones abusivas de las propiedades de las operaciones con números naturales que no se conservan en la ampliación del campo numérico.

A la luz de esta definición, los obstáculos cognitivos se caracterizan por ser conocimientos (y no ausencia de los mismos) que, por un lado, permiten al alumno dar respuestas correctas en ciertos problemas, pero que también producen respuestas erróneas en otros dominios de problemas. Además, son errores que se presentan de manera continua y persistente y cuya corrección supone una tarea realmente complicada.

Según Brousseau (1989), los obstáculos cognitivos que se presentan entre el alumnado pueden ser, según su origen o procedencia, de tres tipos:

- Obstáculos de origen ontogenético: son aquellos que se deben a las propias limitaciones del alumno en un momento determinado de su desarrollo. Estos obstáculos no se pueden evitar mediante la formación de docentes, pero el conocimiento de los mismos es necesario para intentar paliarlos en la medida en que sea posible.
- Obstáculos de origen didáctico: son los que resultan de un proyecto del sistema educativo o de las elecciones didácticas establecidas en el sistema de enseñanza o seleccionadas por el profesor. Como resulta lógico, son obstáculos que deben estudiarse y superarse.
- Obstáculos de origen epistemológico: son los relacionados con el propio concepto o conocimiento mismo, es decir, causados por la naturaleza de las matemáticas, de modo que no son responsabilidad ni del profesor, ni del sistema educativo, ni de los propios alumnos. Este tipo de obstáculos deben enfrentarse, no evitarse, pues su importancia en la adquisición de los nuevos conocimientos es extremadamente relevante.

En cualquiera de los casos, reiteramos la necesidad de conocer cuáles son los obstáculos que se producen en el área de Matemáticas que a nosotros nos concierne, bien sea para evitarlos, para intentar mitigarlos o simplemente para ser conscientes de que existen y tratar de enfrentarlos cuando sea preciso.

2.2. La teoría de los registros de representación semiótica

Los objetos matemáticos no son reales, no son tangibles ni se pueden percibir a través de los sentidos. Es decir, no existen, como tal, en el mundo físico. En consecuencia, para poder interactuar con ellos, es necesario recurrir a signos concretos que permitan representarlos. Por tanto, se puede establecer que las representaciones semióticas son el conjunto de todos los

signos que permiten interaccionar y trabajar con los objetos matemáticos. No debemos confundir este término con el de registro semiótico, aunque estén relacionados muy íntimamente y en la literatura se encuentren múltiples casos en los que se tratan ambos conceptos de manera prácticamente indiferente. Se puede definir un registro semiótico como el conjunto de representaciones semióticas del mismo tipo. Veámoslo con un ejemplo. Consideremos el concepto de número fraccionario y el registro semiótico del lenguaje común. Podemos considerar, entre otras, dos representaciones semióticas diferentes: un cuarto o la mitad de la mitad. Aunque son diferentes, el registro es el mismo de manera evidente. Por tanto, es claro que si se cambia de una representación semiótica a otra, no necesariamente cambia el registro, mientras que si el proceso es el contrario, es decir, si se produce un cambio de registro, entonces se modificará también la representación semiótica.

En Matemáticas, existen, generalmente, muy diversas representaciones para un mismo objeto (distintos sistemas de escritura, diferentes notaciones simbólicas, algebraicas, funcionales y lógicas, figuras geométricas, desarrollos planos, gráficos cartesianos, diagramas, etc.). Según numerosos autores, entre los que destaca Raymond Duval, en el aprendizaje de la matemática es fundamental dominar las distintas representaciones de un mismo objeto matemático, distinguiendo por supuesto el objeto en sí de sus representaciones, las cuales, como ya hemos dicho, son solo medios que ayudan a su comprensión y que permiten su estudio. Además, no solo es necesario conocer y reconocer dichas representaciones, si no también ser capaz de realizar conversiones entre las mismas, así como entre los distintos registros semióticos. En resumen, la utilización de todas las representaciones semióticas posibles es de extrema relevancia para que la actividad matemática se desarrolle de manera correcta. Por ello, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es fundamental hacer hincapié en las diferentes representaciones y registros de un conocimiento, así como en la conversión entre los mismos, algo que no es nada evidente para los alumnos, a quienes les cuesta mucho reconocer un mismo objeto a través de sus representaciones en distintos registros semióticos.

Capítulo 3

REVISIÓN DE ESTUDIOS SOBRE DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES

Resulta claro que el estudio de funciones y el análisis del comportamiento de las mismas son requisitos fundamentales para poder desarrollar correctamente tanto el pensamiento como el lenguaje variacional, por lo que su importancia es realmente considerable. Gracias a la adquisición de estos conocimientos podremos, entre otras cosas, interpretar de manera crítica la realidad y modelizar el mundo que nos rodea. Además, el aprendizaje de las funciones constituye un proceso largo y que debe producirse de manera continua, pues requiere interiorizar de manera adecuada no solo la noción de función, sino también los múltiples conceptos, características, formas de representación, etc., asociados a la misma. Como consecuencia de la trascendencia de esta noción matemática y también de la complejidad de la misma, los estudios e investigaciones realizados en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje de funciones son muy numerosos. En el presente capítulo, nuestro principal objetivo es realizar una síntesis de algunas de esas investigaciones, especialmente de aquellas que hemos considerado más relevantes en nuestro estudio o que nos han resultado útiles en el desarrollo de nuestra actividad docente durante el periodo de prácticas, periodo en el que impartimos el tema de Funciones Elementales de Matemáticas Académicas de 4º de la ESO.

Tal y como hemos comentado en el marco teórico del presente documento, la correcta enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos está ligado al dominio de los diversos registros de representación semiótica de los mismos. Si nos centramos en las funciones, eje en torno al que gira nuestro trabajo, podemos concretar lo anterior afirmando que el aprendizaje de las mismas depende en gran medida de la capacidad de conversión entre las distintas representaciones semióticas que admite el concepto de función. En palabras de González Astudillo, López Esteban y Sierra Vázquez (1998):

Un aspecto esencial en la enseñanza-aprendizaje de las funciones es la traducción entre diferentes formas de representación. Estas traducciones pueden hacer que el alumno

capture el comportamiento de una función desde diversos ángulos enriqueciendo de esta manera su comprensión (p. 90).

Se pueden distinguir los cuatro siguientes registros de representación semiótica de una función: el registro algebraico, el tabular, el gráfico y el lenguaje natural.

- El registro algebraico son precisamente las fórmulas o expresiones que relacionan las dos variables que intervienen en una función.
- El registro tabular o tabla es una lista ordenada en dos filas o columnas de los valores que toma la variable independiente y los correspondientes valores de la variable dependiente.
- El registro gráfico son las evidentemente las gráficas, es decir, la representación en el plano mediante una línea recta o curva, dependiendo de la función, que expresa la relación entre las variables.
- El registro del lenguaje natural o descripción verbal es precisamente un enunciado en el que se describe el comportamiento de un fenómeno que implica una relación entre variables.

Janvier (1987, citado por González Astudillo et al., 1998) esquematiza por medio de una tabla los procesos que intervienen en la traducción entre los diferentes registros de representación de una función que acabamos de comentar:

	Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Expresiones algebraicas
Descripción verbal		Medida	Croquis	Modelo
Tablas	Lectura de relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste numérico
Gráficas	Lectura de relaciones gráficas	Tabulación		Ajuste gráfico
Expresiones algebraicas	Lectura de relaciones simbólicas	Tabulación	Croquis	

A la luz de todo lo comentado, se puede afirmar que los alumnos no aprenden correctamente la noción de función hasta que no dominan esos cuatro registros y hacen conversiones entre unos y otros sin mayor dificultad. Además, la traducción entre las distintas formas de representación potencia la capacidad crítica de los alumnos, pues deben elegir correctamente qué forma es la más adecuada en cada situación concreta: no todos los registros ponen en evidencia las mismas características, luego deberá elegirse uno u otro en función de las propiedades que se deseen estudiar. Sin embargo, tal y como comenta Bagni (2004), en el proceso de enseñanza y aprendizaje es también necesario hacer hincapié en que los alumnos no confundan en ningún caso el objeto matemático, las funciones en este caso, con sus representaciones, pues la identificación total de las mismas con uno de sus registros puede suponer grandes obstáculos en el aprendizaje de este concepto.

A razón de todo lo anterior, son muchos los autores que han realizado investigaciones con el objetivo de determinar precisamente si existe tal dominio de registros o si por el contrario los alumnos recurren con frecuencia o evitan alguno determinado. Por ejemplo, algunos estudios elaborados sobre la enseñanza y aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato desvelan que se hace especial hincapié en el aspecto algebraico de los mismos, dejando de lado en muchas ocasiones los aspectos geométrico y analítico, de modo que «los alumnos se convierten en manipuladores competentes que a menudo tienen dificultades para realizar interpretaciones geométricas y que sólo tienen vagas nociones analíticas» (González Astudillo et al., 1998, p. 90). En consecuencia, los alumnos recurren con asiduidad al registro algebraico de una función, incluso cuando éste no es el más adecuado en absoluto, y se muestran confusos cuando la obtención de la expresión algebraica de una función no es para nada trivial.

Dreyfus y Vinner (1989) consideran que ese abuso de la expresión algebraica de una función da lugar a que los alumnos tengan concepciones erróneas del concepto pues, a pesar de que se les haya presentado la definición moderna de función (correspondencia entre dos conjuntos no vacíos que asigna a cada elemento del primer conjunto un único elemento del segundo), en la práctica los estudiantes trabajan prácticamente siempre con funciones que se pueden expresar algebraicamente, por lo que muchas veces tienen una concepción de función como fórmula, algo que es erróneo en todo caso. Esta idea también es apoyada por Sfard (1992, citado por Ruiz Higuera, 1998), quien concluye de su trabajo que la mayoría de los estudiantes

tienden a asociar las funciones con expresiones algebraicas, hecho que puede dar lugar a obstáculos en el aprendizaje de las funciones.

Por su parte, otros investigadores han mostrado que en la enseñanza de las funciones se hace especial hincapié en el registro gráfico, y que el énfasis puesto en el mismo también puede acarrear consecuencias negativas: en diversas ocasiones, los alumnos vinculan directamente el concepto de función a una gráfica cartesiana. Esta asociación conlleva una idea totalmente errónea pero interiorizada por muchos alumnos, quienes consideran que sin la presencia de una curva no se puede concebir una función (Bagni, 2004). De esta forma, surgen obstáculos en el aprendizaje de funciones que no se pueden representar por medio de una gráfica cartesiana.

Relativo también al dominio de los registros de representación, Ismenia Guzmán, en su trabajo *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*, publicado en 1998, revela, entre otras cosas, que cuando se solicita a los alumnos que respondan por medio del lenguaje natural, los alumnos muestran un manejo del lenguaje (matemáticamente hablando) muy pobre y nada preciso, lo que hace que las respuestas dadas no puedan considerarse correctas en absoluto. La autora considera que esto no se debe meramente a que los estudiantes no entiendan el concepto, si no a que no saben traducirlo ni detallar explicaciones en el registro del lenguaje natural, hecho que provoca que los alumnos no logren dominar los conceptos. Además, de su trabajo deduce que las tareas de traslación del registro algebraico al gráfico suponen grandes dificultades para los alumnos, quienes no son capaces de ajustar las expresiones generales de las funciones a las gráficas dadas. Por último, aunque no es relativo a la traducción entre registros, la autora establece que uno de los problemas que presentan la mayoría de los alumnos es que no verifican las respuestas dadas debido probablemente a que la revisión de resultados y justificación de los mismos no se contempla como una práctica habitual en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En resumen, de las diversas investigaciones que se centran en la traducción entre los registros semióticos de representación, se extrae que se priorizan unos frente a otros y que los alumnos muestran grandes dificultades en la conversión y coordinación entre dichos registros, lo que provoca, entre otras cosas, que los estudiantes no sólo no comprendan el concepto de función, sino tampoco las múltiples nociones y características asociadas al mismo, algo que puede constituir un obstáculo en el aprendizaje de esta rama de las matemáticas.

Otra de las cosas que ha despertado el interés de muchos investigadores en Didáctica de la Matemática es el estudio de las concepciones que tienen los alumnos acerca de la noción de función. Trataremos a continuación de presentar al lector algunas de esas investigaciones.

En 1989, Vinner, en colaboración con Dreyfus, publica un trabajo titulado *Images and definitions for the concept of function* en el que exponen los resultados obtenidos en un estudio realizado a 271 estudiantes de primer curso de universidad de diferentes carreras (química, biología, física, economía, agricultura, educación tecnológica y diseño industrial) y 36 profesores (no matemáticos) de «junior high school» (escalón educacional que existe en algunos países entre la escuela primaria y la secundaria). Los objetivos del cuestionario realizado eran, entre otras cosas, examinar las definiciones que daban profesores no especializados en matemáticas y alumnos del concepto de función, así como determinar las imágenes conceptuales relacionadas con dicha noción. A la luz de los resultados, clasifican las definiciones observadas en seis categorías, es decir, establecen que los alumnos conciben la definición de función de las seis siguientes formas:

1. Como una correspondencia entre dos conjuntos, por la que a cada elemento del primero de ellos se le asigna un único elemento del segundo (definición de función según Dirichlet).
2. Como una relación de dependencia entre dos variables, x e y (donde y depende de x).
3. Como una regla que mantiene una cierta regularidad. En este tipo de definiciones, según los autores, no se mencionan los conceptos dominio ni imagen, a diferencia de las definiciones del primer grupo, que sí lo hacían.
4. Como una operación o manipulación (dado un número, a través de unas operaciones se obtiene su imagen).
5. Como una fórmula, expresión algebraica o ecuación.
6. Como una representación, bien gráfica o bien simbólica (es decir, conciben las representaciones semióticas de las funciones como el propio conocimiento del concepto).

Además encuentran que, en la práctica, cuando los encuestados están trabajando con funciones o se les pregunta algo de las mismas, más allá de la mera definición, muchas respuestas revelan la existencia de cuatro tipos de imágenes conceptuales:

1. Si existe unicidad, es decir, si la correspondencia asigna, para cada elemento del dominio, un único valor, es una función; en caso contrario, no lo es.
2. Si una función es discontinua en algún punto del dominio, entonces no es considerada una función.
3. Si la función está “definida a trozos”, es decir, que en cada subdominio el criterio de correspondencia es diferente, no se identificará como función.
4. Si la función tiene puntos diferentes, excepcionales, en los que el criterio general no es válido, tampoco se admitirá como función.

Otra de las investigaciones que consideramos preciso señalar es *Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato*, realizada por Crisólogo Dolores (2004). Este trabajo es realmente interesante bajo nuestro punto de vista pues estudia, como bien indica su título, las concepciones que tienen los alumnos sobre las funciones cuando las estudian desde su registro gráfico. Las aportaciones del mencionado autor en este trabajo son realmente interesantes y sobre todo necesarias si, como en nuestro caso, tienes que introducir algunas funciones y estudiarlas desde su gráfica porque el nivel de los alumnos no permite otra cosa (por ejemplo, en 4º de la ESO el estudio de las asíntotas de una función debe realizarse desde su gráfica porque estos alumnos aún no han estudiado el cálculo de límites). De ahí la gran utilidad de la investigación: la lectura y análisis de la misma permite saber a qué concepciones erróneas te enfrentas en el aula cuando trabajas las funciones a partir de su representación gráfica, pudiendo de este modo hacer especial hincapié en corregir esas imágenes y evitar que terminen constituyendo un obstáculo en el aprendizaje del alumno.

Según este autor, entre otros, para comprender los fenómenos de cambio y poder así interpretar la realidad es necesaria la correcta lectura de gráficas. Sin embargo, el análisis de funciones a través de su representación gráfica provoca muchos conflictos cognitivos en los estudiantes. Por todo ello, el principal objetivo del trabajo mencionado anteriormente es, como ya habíamos adelantado, investigar qué concepciones alternativas tienen los alumnos cuando analizan funciones desde su registro gráfico. Para llevar esto a cabo, se diseñó un cuestionario con preguntas de opción múltiple en el que no se empleó el lenguaje analítico para evitar interferencias relacionadas con el lenguaje simbólico y en el que, como bien indica el autor, el planteamiento de preguntas cerradas probablemente haya limitado la variedad de concepciones alternativas detectadas. Dicho cuestionario fue pasado a 40 estudiantes de entre 17 y 18 años que cursaban el bachillerato orientado a las ciencias computacionales y la contabilidad, quienes

además habían trabajado previamente de manera bastante amplia la graficación de funciones. Obtienen, del análisis de las respuestas dadas por los alumnos, las siguientes conclusiones y concepciones alternativas:

- Signo de una función: más de la mitad de los estudiantes piensan que una función es positiva cuando sus abscisas lo son, sin importarles en absoluto el signo de las ordenadas. De la misma forma, conciben que una función es negativa también cuando sus abscisas son negativas, haciendo de nuevo caso omiso al signo de las imágenes. Se observa, por tanto, que tienen una concepción totalmente errónea del signo de una función, pues lo asocian al signo de la x en vez de al signo que toma la variable y . Esto puede indicar, según el autor, que los alumnos centran su atención en las abscisas, sin observar ni atender lo que ocurre con las ordenadas, debido quizás a una incapacidad para coordinar información relativa a dos variables y , consecuentemente, a dos ejes.
- Función creciente o decreciente: en las respuestas a algunas cuestiones se aprecia también una tendencia a asociar que una función es creciente cuando sus imágenes u ordenadas son positivas y, por el contrario, que es decreciente cuando sus imágenes son negativas. De nuevo, estamos ante una concepción errónea pues las características mencionadas, crecimiento y decrecimiento, nada tienen que ver con el signo de una función. Según el autor de este trabajo, estas concepciones se deben a que los alumnos confunden el comportamiento de una función con la ubicación de su gráfica. Además, considera que la concomitancia entre la monotonía (crecimiento o decrecimiento) y el signo (positivo o negativo respectivamente) de las imágenes de una función constituye para los alumnos un metateorema: «si la gráfica de $f(x)$ está en el primer o segundo cuadrante, entonces es creciente» (p. 213).
- Para indagar en las concepciones sobre la estabilidad de funciones, se cuestionó a los alumnos dónde una función, dada mediante su gráfica evidentemente, no crecía ni decrecía. Es decir, se preguntaba por los máximos y los mínimos de una función dada. Muchos alumnos tienden a responder que en el punto $x = 0$ ocurre tal cosa; otra parte de las respuestas indican una propensión a elegir los puntos en los que la gráfica corta al eje de las x y, por último, varios alumnos contestan que los puntos en los que no crece ni decrece la función son aquellos en los que la gráfica corta al eje de las y . Según Dolores, esa confusión entre los puntos estacionarios y los puntos que cortan a alguno de los ejes puede deberse a tres razones diferentes: en primer lugar, por una confusión de nuevo entre el comportamiento de una función y la

ubicación de su gráfica; en segundo lugar, por el significado que los alumnos han atribuido al término *función que no crece ni decrece*, el cual han podido asociar a los puntos de corte con los ejes porque en dichos puntos o bien las abscisas son cero (luego no son ni positivas ni negativas), o bien las ordenadas son cero (ni positivas ni negativas de nuevo); en tercer y último lugar, la explicación se relaciona con las concepciones que se han mostrado antes, pues si los estudiantes consideran que una función es creciente cuando sus imágenes son positivas (es decir, cuando su gráfica está por encima del eje de las x) y que es decreciente cuando éstas son negativas (es decir, cuando su gráfica está por debajo del eje de las x), puede parecer lógico que piensen que una función no crece ni decrece precisamente en los puntos que cortan a dicho eje.

Dolores señala también en este artículo que muchos errores de los estudiantes cuando interpretan gráficas se debe a que estos hacen una lectura puntual y no global, conclusión a la que habían llegado otros investigadores en publicaciones previas.

Con todo esto, se puede observar que la mayoría de las concepciones detectadas constituyen errores bastante graves en aspectos y características elementales, y pueden ocasionar muchos problemas, por ejemplo, en lo que a nosotros nos ocupa, en el estudio de las funciones de valor absoluto.

Por otra parte, teniendo en cuenta la amplia gama de dificultades y concepciones relativas a funciones que se pueden analizar, hay investigadores que han centrado algunos de sus estudios en el aprendizaje de funciones concretas. Este es el caso de, por ejemplo, un trabajo de M^a Teresa González Astudillo y Ernesto Martín Hernández publicado en el año 2006: *Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas*. En él, los autores tratan de diagnosticar qué dificultades tienen los alumnos al hacer conversiones entre los registros de representación semiótica gráfico y algebraico de, concretamente, funciones lineales y cuadráticas. Para llevar esto a cabo, elaboraron primeramente un precuestionario cuyo objetivo era detectar las concepciones de los alumnos y los errores que cometen, el cual fue contestado por veintiún alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tras analizar las respuestas al mismo y revisarlo debidamente, elaboraron la versión definitiva del cuestionario, que fue respondido por alumnos de 4º de Educación Secundaria Obligatoria. Así, este

cuestionario final constó de exactamente diez preguntas: en siete de ellas se cuestionaban tareas relativas a la transformación de la representación gráfica a la algebraica, y en las tres restantes debían analizar, dada la expresión algebraica de una función, las características de la misma o señalar cómo resulta su gráfica. Concretando un poco más, de entre las diez preguntas del cuestionario, seis se correspondían a funciones lineales y las otras cuatro, a funciones cuadráticas.

El análisis de las respuestas y justificación de las mismas dadas por los alumnos, hace que los autores de este trabajo deduzcan que:

- Los alumnos recurren con asiduidad a las tablas de valores como medio para hacer transformaciones entre las representaciones gráfica y algebraica. Esto se debe probablemente a que, además de que conciben la tabla de valores como un intermediario entre los dos registros comentados, tienen dificultades para relacionar los coeficientes de las expresiones algebraicas con las características de su representación gráfica.
- Dada la gráfica de una función, los estudiantes no son capaces en muchas ocasiones de asociarla con su expresión algebraica debido a que no son capaces de relacionar las características de la representación gráfica con los coeficientes de la expresión algebraica o incluso porque ni siquiera reconocen de qué tipo de función se trata.
- Muchos alumnos no justifican sus respuestas, y los que lo hacen suelen recurrir siempre al mismo tipo de justificación (ya sean tablas de valores, coeficientes de las expresiones algebraicas o características de la gráfica). Esto muestra de nuevo que los alumnos manejan habitualmente un solo registro, y justifican sus respuestas a través del mismo, incluso aunque no sea el más apropiado, quedando en evidencia que no dominan el resto de representaciones.
- Aunque parezca extraño, los alumnos encuentran más dificultades con las funciones lineales que con las cuadráticas, a pesar de que estas son más “sencillas” y han trabajado con ellas durante varios años, pues las funciones lineales forman parte del currículo de todos los cursos de educación secundaria obligatoria, tal y como se puede ver en el Decreto 48/2015 del Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid por el que se establece el currículo de Educación Secundaria.

A la luz de todo esto, concluyen los autores que los estudiantes no conciben las funciones como el objeto matemático que son, sino más bien como un proceso, una noción con

la que se trabaja a través de operaciones, algo que, tal y como cometan los mencionados autores, apoya la teoría de un trabajo publicado por Sfard en 1991, en el que realiza un análisis histórico-epistemológico de las definiciones y representaciones de la noción de función.

Remontémonos ahora por un instante al marco teórico del presente documento. En este habíamos expuesto que los elementos que influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje no son solamente los propios conocimientos, los alumnos y los profesores, si no también todo el sistema que los rodea así como su entorno social, cultural, tecnológico y científico más próximo. Por este motivo, también son diversos los investigadores que han dedicado algunos estudios a analizar, por ejemplo, la metodología y los contenidos de los libros de texto. Podemos destacar en este sentido el trabajo de tesis doctoral de Ruiz Higuera (1998), en el que se dedica todo un extenso capítulo a analizar los programas oficiales, los libros de texto y los apuntes de los alumnos relativos a la noción de función. También podemos mencionar dos trabajos de González Astudillo y Sierra: *La enseñanza del Análisis Matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX* y *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX*, ambos publicados en el año 2004. En el primero de ellos, los autores realizan un estudio de la evolución que han sufrido los conceptos del Análisis Matemático en los libros de texto de nuestro país desde 1934 hasta finales del siglo XX, distinguiendo diversos periodos e incluso diversos tipos de libros dentro de cada periodo, y analizando las características más relevantes de cada periodo. En el segundo trabajo, los autores se centran en la evolución de los conceptos concernientes a los puntos críticos de funciones en los libros de texto de España a lo largo del siglo XX, tomando como base el trabajo mencionado justo antes y profundizando después en los puntos críticos. Consideramos preciso a la vez que honesto reconocer que no hemos profundizado en el estudio de estas investigaciones, a diferencia de todas las mencionadas con anterioridad, puesto que el principal objetivo del análisis de los diversos estudios que hemos realizado en el presente capítulo era mejorar nuestra actividad docente en el aula durante nuestro periodo de prácticas. En dicho periodo hemos tenido una libertad parcial, es decir, podíamos completar actividades y alterar el orden de nuestras explicaciones pero, a su vez, debíamos ceñirnos a los contenidos del libro de texto, motivo por el cual no hemos ahondado, como decíamos, en el análisis de estudios relativos a la metodología y contenidos de los libros de texto. Aun así, en la práctica docente sí que hemos tratado de analizar si el libro de texto abarcaba los contenidos oportunos y si las actividades propuestas en el mismo eran las adecuadas, llegando a las siguientes conclusiones:

- Los ejercicios de los manuales de texto de Matemáticas Académicas de 4º de la ESO relativos, concretamente, al estudio de las funciones elementales, no son completos en absoluto. Las actividades que se proponen no propician en absoluto el trabajo de conversión entre los distintos registros de representación semiótica de una función, pues se centran en su gran mayoría en tan solo dos registros, el gráfico y el algebraico. En consecuencia, es totalmente lógico que la traducción entre registros sea una tarea que suponga gran dificultad para los estudiantes.
- Las actividades de interpretación de gráficas que modelicen situaciones de la vida real son, bajo nuestro punto de vista, insuficientes.
- Las tablas de datos parecen un registro de representación semiótico totalmente olvidado en los libros, donde se conciben más bien como un recurso aclaratorio que permite la conversión entre los demás registros. Teniendo esto en cuenta, no es de extrañar que, tal y como hemos comentado en varias de las investigaciones expuestas, los alumnos no conciban que la tabla de valores es una forma más de representar una función y que para ellos sea un trámite, un paso necesario para llegar a representaciones de otros tipos.
- A pesar de la existencia de software matemático extremadamente útil para la enseñanza y aprendizaje de funciones, las explicaciones y los ejercicios de los libros de texto son extremadamente similares a los que se proponían hace unos años, cuando todavía los programas como GeoGebra y Wiris no existían.

Capítulo 4

PROPUESTAS DIDÁCTICAS PARA EL TRATAMIENTO DE DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS FUNCIONES

4.1. Contexto de la intervención didáctica

He desarrollado una parte del este Trabajo de Fin de Máster a lo largo de las prácticas del Máster en Educación Secundaria obligatoria y Bachillerato. El centro escolar donde desarrollé mis prácticas fue el Colegio Chamberí de Madrid, colegio concertado de confesionalidad católica, perteneciente a la Congregación de los Hermanos Maristas, que oferta Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Está situado en el número 12 de la calle Rafael Calvo, la cual se ubica en el distrito de Chamberí, en el centro de la ciudad. Se trata de una zona con un nivel tanto económico como social elevado en general, y esto se ve reflejado directamente en el perfil del alumnado del colegio, que procede mayoritariamente de un sector social de clase media-alta de funcionarios y empresarios y, generalmente, de familias tradicionales con un estatus económico acomodado, que dirigen sus expectativas académicas a la obtención de un título universitario, lo que se refleja en la oferta de asignaturas y en la planificación didáctica del centro. Además, se trata de un colegio que pretende una educación lo más personalizada posible, motivo por el cual las aulas cuentan con un máximo de veinticinco alumnos, lo que facilita bastante el poder prestar mayor atención a cada alumno, con sus distintas capacidades, dificultades, intereses, etc.

Concretamente, he aplicado parte de este trabajo en dos grupos de 4º de la ESO, uno del itinerario de Sociales que contaba con tan solo diecinueve alumnos (4ºA) y otro con veinticuatro alumnos de los itinerarios de Ciencias y de Artes (4ºD). Ambos grupos cursaban Matemáticas Académicas y el nivel era similar, aunque por regla general a los alumnos de 4ºA les costaba más entender las explicaciones y, sobre todo, interiorizar los conceptos. El desarrollo del análisis que he realizado ha tenido como principal instrumento el método de observación durante las tres sesiones en las que mi tutora impartió el tema de Características de funciones (que más adelante concretaré) y también durante las diez sesiones en las que yo misma impartí el tema de Funciones Elementales, así como una prueba final de ambos temas que realicé a los

alumnos de las dos clases. El objetivo de dicha prueba era doble: por un lado, obtener algunas conclusiones sobre la efectividad de la metodología empleada (a la luz de las investigaciones analizadas) y, por otro lado, analizar las respuestas dadas y los errores cometidos por los estudiantes, a fin de mostrar las dificultades observadas en el tratamiento de las funciones.

En definitiva, tras el análisis de las investigaciones expuestas en el capítulo anterior, traté de mejorar la enseñanza de las funciones, intentando solventar en la medida de lo posible las múltiples dificultades que surgen en el aprendizaje de las funciones elementales.

4.2. Contenido curricular y metodología de la experiencia

De manera lógica, resulta conveniente comenzar indicando los contenidos de los que constaba dicha lección y, en consecuencia, los contenidos que fueron impartidos en el aula. El tema de funciones elementales posee, tal y como nos comentaron algunos docentes del centro de prácticas, una estructura común en la mayoría de los libros de texto: se presentan los tipos de funciones consideradas fundamentales, normalmente en sus registros algebraico o gráfico, y se estudian sus características más relevantes (dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, monotonía, puntos extremos, curvatura, periodicidad, asíntotas, etc.). En nuestro caso, las funciones estudiadas fueron las siguientes:

- Funciones afín, lineal y constante
- Función cuadrática
- Función definida a trozos
- Funciones de valor absoluto
- Función irracional
- Función de proporcionalidad inversa
- Función exponencial
- Función logarítmica
- Funciones trigonométricas: función seno, función coseno y función tangente

En cada sesión estudiamos un tipo de función y sus características, excepto en la primera de ellas, en la que estudiamos tanto las funciones afines como las cuadráticas ya que los alumnos las conocían de años anteriores y habían trabajado con ellas en múltiples ocasiones. Sin embargo, teniendo en mente las investigaciones analizadas, la presentación de cada uno de

estos tipos de funciones no siguió la metodología preestablecida en el libro de texto, sino que llevamos a cabo una técnica diferente. Como ya hemos mostrado, múltiples expertos en la materia consideran fundamental la traducción y el trabajo de los distintos registros de representación semiótica. Así, para trabajar las distintas representaciones de las funciones y además evitar que los alumnos concibieran las funciones tan solo como expresiones algebraicas o tan solo como gráficas, decidimos que un recurso efectivo podía ser presentar cada día, cada tipo de función, en un registro diferente: a veces desde su representación gráfica, en otras ocasiones desde su expresión algebraica, en otros momentos desde una tabla de valores y algunas veces a través del lenguaje natural. Veamos algún ejemplo para clarificar este método y para mostrar cómo se llevó a cabo en el aula:

- La función afín (y sus casos particulares, es decir, las funciones constante y lineal) fueron introducidas mediante el lenguaje natural. Para ello, al empezar la clase, puse algunos ejemplos como “función que asocia a cada número su doble, y al resultado le suma una unidad” o, variando un poco, “función de pendiente nula y cuya ordenada en el origen vale 3”. Ambas formas, aunque distintas gracias a la riqueza de nuestra lengua, representan una relación entre variables, una función dada a través del lenguaje natural. Gracias a que los alumnos han estudiado y trabajado este tipo de funciones toda la educación secundaria, y gracias también a la gran participación de los mismos, no resultó difícil que reconocieran de qué tipo de funciones hablábamos, aunque se apreciaba una fuerte tendencia a identificarlas con su expresión algebraica:

$$y = mx + n$$

y con su representación gráfica, las rectas. De hecho, la respuesta a la pregunta “¿De qué tipo de función estamos hablando?” fue, en algún caso, literalmente: “de rectas”. Por tanto, se podía observar que las concepciones de funciones como expresiones algebraicas o como gráficas eran más comunes de lo deseado entre los estudiantes. Tras el reconocimiento adecuado de las funciones, las formulamos en sus registros algebraico, gráfico y tabular, tratando en todo momento de hacer hincapié en que una función no es ni una fórmula, ni una gráfica, ni una tabla, ni una descripción verbal, sino una relación entre variables que se puede representar de las formas mencionadas y estudiadas.

- La función cuadrática la introdujimos a través de su representación gráfica, la parábola. Comenzamos con casos simples, parábolas estándar con vértice en el origen de coordenadas, y después aumentamos el nivel ejerciendo traslaciones verticales y horizontales a las anteriores. De nuevo, dado que es un tipo de función que también conocían de cursos anteriores, el reconocimiento de las mismas, en su versión más sencilla, no fue complicado, aunque cuando el nivel aumentó mi ayuda resultó totalmente imprescindible para los alumnos. Después, igual que antes, hicimos las conversiones al resto de los registros de representación. Gracias a todo esto y en particular a la traslación de las parábolas, los alumnos también aprendieron a identificar qué relaciones existían entre los coeficientes a , b y c de la expresión algebraica de la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

y sus características gráficas, como la orientación de las ramas (que depende del signo de a) o el punto de corte de la parábola con el eje Y (que es precisamente el punto $(0, c)$).

- Para introducir la función de proporcionalidad inversa, recurrimos al registro tabular. Consideramos que podía ser útil este tipo de representación dado que los alumnos conocían ya el concepto de proporcionalidad tanto directa como inversa y habían trabajado previamente con magnitudes directa e inversamente proporcionales, por lo que, de los pares ordenados de valores que se presentan en una tabla, podrían deducir qué tipo de correspondencia o relación había entre ellos. Los casos expuestos fueron sencillos, del tipo siguiente:

x	1	2	4	8	16
$f(x)$	2	1	0,5	0,25	0,125

Una vez establecido el tipo de función del que se trataba, tarea que resultó más complicada de lo esperado debido probablemente a que, como ya hemos comentado, los alumnos tienden a ver la tabla de valores tan solo como un paso intermedio entre las expresiones algebraica y gráfica de una función, presentamos, igual que en los casos anteriores, la función de proporcionalidad inversa en los otros tres registros semióticos. Es decir, de nuevo trabajamos todas las representaciones posibles y a su

vez fomentamos que los alumnos empezaran a concebir la tabla de valores como una forma más de representación de una función.

- La función logarítmica la presentamos al alumnado en primer lugar mediante su expresión algebraica

$$f(x) = \log_a x$$

ya que el resto de registros de representación, dado el bajo grado de asimilación del concepto de logaritmo que mostraban los alumnos, no nos parecían demasiado oportunos. Por ejemplo, si hubiésemos presentado en primera instancia esta función mediante una tabla de valores o mediante su representación gráfica, muy probablemente los estudiantes no hubieran logrado determinar la relación existente entre las variables y, por consiguiente, el tipo de función ante el que nos encontrábamos. Sin embargo, una vez presentada la expresión algebraica, sí trabajamos, igual que en el resto de casos, el resto de registros de representación.

La presentación del resto de funciones que no hemos detallado se efectuó de manera similar, tomando en casa caso el registro más oportuno: las funciones de valor absoluto y las funciones definidas a trozos mediante su representación gráfica, las funciones irracionales a través de su expresión algebraica, las exponenciales mediante el lenguaje natural debido a la multiplicidad de problemas y situaciones que son modelizadas por este tipo de funciones, y las trigonométricas mediante tablas de valores. De esta forma, como ya hemos dicho, trabajamos la conversión entre los diversos registros de representación y evitamos la incorrecta pero típica concepción de función como gráfica o como expresión algebraica.

Una vez detallada la forma en que presentamos al alumnado las funciones elementales que, según el currículo y la programación del centro, había que impartir, vamos a pasar a comentar cómo explicamos a los estudiantes las características de cada una de ellas. Llegado este punto, resulta necesario mencionar a Carmen Azcárate y a Jordi Deulofeu, investigadores muy conocidos en el campo de la didáctica de las funciones por sus interesantes aportaciones, y quienes nos han servido de guía a lo largo de todo nuestro trabajo, pero especialmente en esta parte. En su obra *Funciones y gráficas*, publicada en 1990, comentan varias ideas extremadamente interesantes, entre las que vamos a destacar las siguientes:

- Es necesario que los alumnos adquieran la capacidad para leer, interpretar y construir gráficas dado que, en nuestro mundo actual, una gran cantidad de información viene dada por medio de gráficos.
- El registro gráfico permite obtener una visión general y completa de la función, a diferencia de los lenguajes natural y tabular, y a su vez hace posible la obtención de modelos.
- Las gráficas permiten «ver» las características de las funciones de una forma más sencilla que las expresiones algebraicas por dos motivos: en primer lugar porque el cálculo de las mismas a través del lenguaje algebraico exige conocer diversas técnicas analíticas como, por ejemplo, el cálculo de límites, y en segundo lugar porque interpretar esos resultados, que se basan en conceptos abstractos, es más complicado a través del lenguaje algebraico que a través del gráfico, desde el que se intuye de forma más asequible.

Por todo esto, y además teniendo en cuenta que nuestros alumnos son, en su gran mayoría, estudiantes que no quieren enfocar su futuro hacia las ciencias, consideramos que el estudio de las características de las funciones (dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, monotonía, puntos extremos, curvatura, periodicidad, asíntotas, etc.), era muy aconsejable realizarlo desde la representación gráfica de cada una de las funciones elementales. Cabe mencionar también la importancia que adquirió en este momento el programa GeoGebra, que usamos para graficar dichas funciones y para hacer modificaciones en las mismas, de modo que los alumnos pudieran observar y razonar qué características se mantenían constantes y qué características variaban cuando se producían los mencionados cambios en las funciones.

Una vez presentada la función (del tipo que tocara en la sesión correspondiente) y expuestas y analizadas sus características, la tercera parte de la clase la dedicábamos al estudio de las traslaciones horizontal y vertical. Tal y como hemos comentado, en los resultados de algunas investigaciones se expone que los alumnos, por regla general, no asocian las representaciones gráficas de las funciones con sus expresiones algebraicas en cuanto estas no se corresponden con el modelo más simple de las mismas. Por ello, consideramos fundamental que los alumnos conocieran y supieran determinar las traslaciones de las funciones, con lo que consecuentemente también trabajamos la traducción entre los registros algebraico y gráfico, sin tener que recurrir, como suelen hacer los estudiantes, a la tabla de valores. Para llevar esto a cabo, realizamos en todas las ocasiones unos esquemas que logran clarificar cómo se

identifican las mencionadas traslaciones. Por ejemplo, en el caso de la función de proporcionalidad inversa, cuya expresión algebraica es del tipo

$$f(x) = \frac{k}{x},$$

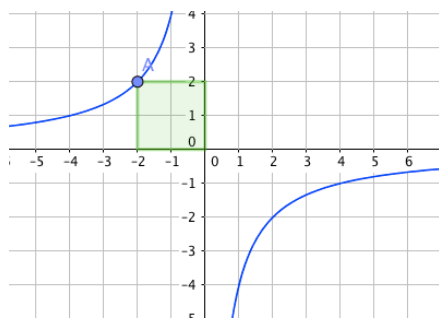
estudiamos sus traslaciones, con expresión algebraica del tipo

$$f(x) = \frac{k}{x + q} + p.$$

Así, les mostramos a los alumnos, de nuevo ayudándonos de GeoGebra, que:

- El valor de q hace que la gráfica de la función $f(x) = \frac{k}{x}$ se traslade q unidades horizontalmente:
 - Si $q > 0$, la gráfica de $f(x) = \frac{k}{x}$ se traslada q unidades a la izquierda.
 - Si $q < 0$, la gráfica de $f(x) = \frac{k}{x}$ se traslada q unidades a la derecha.
- El valor de p hace que la gráfica de la función $f(x) = \frac{k}{x}$ se traslade p unidades verticalmente:
 - Si $p > 0$, la gráfica de $f(x) = \frac{k}{x}$ se traslada p unidades hacia arriba.
 - Si $p < 0$, la gráfica de $f(x) = \frac{k}{x}$ se traslada p unidades hacia abajo.

Además, en este caso concreto, enseñamos a los alumnos una técnica para determinar la expresión algebraica de una función de proporcionalidad inversa cuando esta viene dada mediante su representación gráfica, propiciando así de nuevo la traducción entre los registros gráfico y algebraico de una función (y haciendo hincapié de nuevo en que la tabla de valores no es un medio de conversión entre ambos). Esta técnica, evidentemente conocida, consiste en observar en primer lugar en qué cuadrantes se encuentran las ramas de la hipérbola, que es la representación gráfica de la función de proporcionalidad inversa como es sabido, para poder determinar el signo del coeficiente k de la expresión algebraica. En segundo lugar, para hallar su valor, basta tomar un punto de la hipérbola y analizar cuántas unidades cuadradas determina con los ejes de la hipérbola. Pongamos un ejemplo para aclarar lo que estamos diciendo. Dada la gráfica:



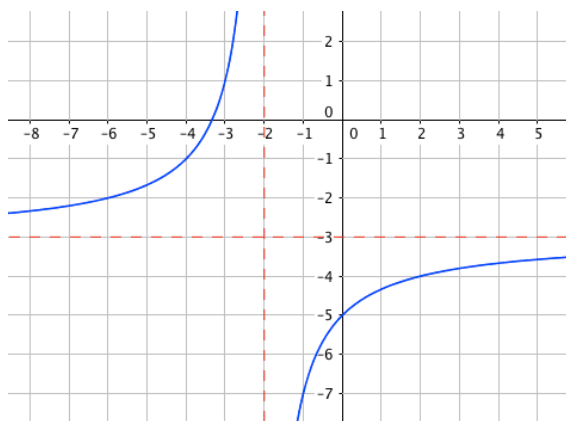
1º) Observamos en qué cuadrantes se encuentran las ramas de la hipérbola. Como vemos, están en el 2º y el 4º cuadrante, luego k es un número negativo.

2º) Tomamos un punto de la hipérbola, por ejemplo el $(-2, 2)$. Como vemos, dicho punto determina con los ejes de la hipérbola un cuadrado de cuatro unidades cuadradas.

Con todo esto, ya podemos establecer la expresión algebraica de la función dada gráficamente, que es:

$$f(x) = \frac{-4}{x}.$$

En el caso en que la hipérbola no tenga su eje sobre los ejes de coordenadas, es decir, que esté trasladada horizontalmente, verticalmente, u ambas a la vez, también les explicamos a los alumnos el procedimiento a seguir, que es similar al anterior. De hecho, los dos primeros pasos son exactamente iguales a los recién comentados. Después, lo único que falta es determinar el valor de p y de q . Para ello, basta observar cuántas unidades se encuentra la hipérbola desplazada horizontal y verticalmente, y seguir las reglas de traslación que previamente hemos comentado. Es decir, dada por ejemplo la hipérbola:



Los dos primeros pasos se razonan igual que antes, luego sabemos que $k = -4$. Ahora:

3º) La hipérbola está trasladada 3 unidades hacia abajo, luego $p = -3$.

4º) La hipérbola está trasladada 2 unidades hacia la izquierda, luego $q = 2$.

Por tanto, la expresión algebraica de la función anterior es:

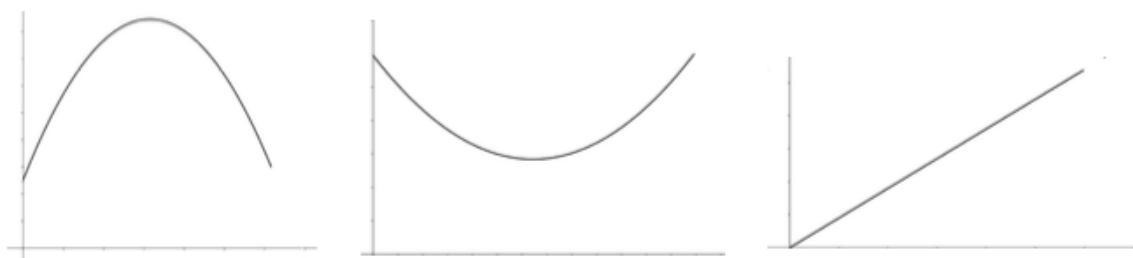
$$f(x) = \frac{-4}{x+2} - 3.$$

En la última parte de la clase, siempre que el tiempo nos lo permitía, realizábamos ejercicios de traducción entre los distintos registros de representación semiótica y resolvíamos problemas que se pudieran situar en contextos de la vida real (facturas de teléfono, tiro parabólico, crecimientos de poblaciones, etc.). Por ejemplo, uno de los ejercicios realizados en el aula con el objetivo de interpretar gráficas y relacionarlas con contextos reales fue el siguiente:

Actividad: En el baloncesto, un tiro a canasta desde la línea de 6,25 metros mantiene el balón unos dos segundos en el aire. Cuando sale lanzado de las manos del jugador, a una velocidad de 3 m/s, el balón se encuentra aproximadamente a unos dos metros y medio de altura. Hasta que se cuela por la canasta, situada a 3,05 metros del suelo, describe una trayectoria parabólica. Considera ahora:

- 1) La distancia horizontal desde la línea de tiro hasta el balón en cada instante de su recorrido por el aire.
- 2) La altura respecto del suelo a la que se encuentra el balón en cada momento.
- 3) La velocidad que lleva el balón a lo largo de su recorrido.

Observa a continuación las siguientes gráficas:



- a) Identifica cuál se corresponde a cada caso y escribe lo que se está representando en cada eje. Para completar la gráfica, asigna en cada eje los valores numéricos que les correspondan.
- b) Descríbelas indicando su dominio de definición, el crecimiento o decrecimiento, si tienen máximos o no, etc.

Otro de los objetivos perseguidos a lo largo de todas las sesiones fue el fomento del uso de un lenguaje matemático correcto y preciso, y de verbalizar conceptos y razonamientos. Esto es debido a que, como hemos comentado en el capítulo anterior, las investigaciones revelan los múltiples problemas que presenta el alumnado a la hora de explicar conceptos y razonar resultados, algo que incide directamente en el aprendizaje no solo de las funciones sino de la matemática en general. Además, dando mayor relevancia a esto, logramos que los alumnos trabajen en mayor medida la competencia lingüística, algo realmente importante si tenemos además en cuenta el actual sistema de educación por competencias. Podemos comentar en este sentido uno de los ejercicios realizados en una de las sesiones, en el que el objetivo era construir gráficas a partir del significado de refranes. Tomamos, por ejemplo, el conocido refrán: “Quien mucho abarca, poco aprieta”. Tras razonar el significado del mismo con los alumnos, les pedimos que pensaran si existiría una forma de representar gráficamente dicho significado. Aunque la graduación de los ejes resultó una tarea complicada para algunos, pues muchos tienen dificultades en cuanto las funciones no relacionan variables numéricas, una gran cantidad de alumnos resolvieron de manera más o menos rápida que la representación gráfica sería una rama de una hipérbola, pues identificaron la situación con una función de proporcionalidad inversa: cuántas más cosas quieres hacer, peor puedes hacer cada una de ellas. Así, entre todos, establecimos que la variable independiente x podía ser el número de tareas que se quieren realizar (1, 2, 3, 4, ...), y la variable dependiente sería entonces el nivel de perfección con el que se realizan, que graduamos ascendientemente con un lenguaje bastante coloquial (para que así incluso los alumnos menos aventajados pudieran comprender el ejercicio): “muy poco”, “poco”, “medio”, “bastante” y “mucho”. De esta forma, tomando unos ejes y graduándolos como hemos comentado, representamos gráficamente el significado del refrán dado. Gracias a esta actividad logramos que los alumnos no concibieran las funciones como relaciones meramente numéricas, trabajamos la competencia lingüística, fomentamos los razonamientos verbales (pues tuvieron que pensar y dialogar entre ellos, al tratarse de una actividad grupal, para graduar los ejes de la misma forma) y, además, conseguimos que la participación de los

alumnos fuera casi absoluta, ya que para ellos configuró una forma de escapar de la rutina de las clases de matemáticas y les resultó, tal y como me comentaron, una actividad muy divertida.

4.3. Actividades complementarias

Para finalizar este capítulo, vamos a exponer dos propuestas adicionales que, debido a la falta de tiempo, no pudieron ser aplicadas en el aula, pero que consideramos atractivas para el alumnado y muy útiles en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones.

4.3.1. Juego “El burro de las funciones”

Esta actividad es un juego similar al conocido juego de cartas que tiene por nombre “El burro”. Como es sabido, el objetivo de este juego es recopilar las cuatro cartas del mismo número de los diferentes palos (espadas, bastos, oros y copas). Cuando se consigue esto, el jugador que las tenga debe poner rápidamente la mano boca abajo en el centro de la mesa, a la vez que dice la palabra “burro”. El último que lo hace, es quien pierde la partida.

En nuestro caso, el juego es similar, solo que lo que se debe conseguir es tener una misma función en sus cuatro registros de representación semiótica. Por tanto, de manera evidente, nuestra baraja estará compuesta de cartas en las que encontraremos funciones dadas mediante sus cuatro registros de representación. Las reglas del juego también cambian un poco, pues en vez de considerar “jugadores que pierden” vamos a tomar “jugadores que ganan”, pero ganar no es tan sencillo como en el juego tradicional. En nuestro “burro de las funciones”, el jugador (o jugadores) que hagan “burro”, deberán salir a la pizarra y exponer a sus compañeros las cuatro representaciones de su función. Con todo ello, además de trabajar todos los registros semióticos de representación, logramos que los alumnos detallen explicaciones y traduzcan al lenguaje oral sus razonamientos, lo que es realmente beneficioso e incide positivamente en el dominio de dichos registros y consecuentemente de la noción de función.

4.3.2. Trabajo grupal

Esta segunda propuesta, aunque menos innovadora y divertida que la anterior, puede ser también útil en el aprendizaje de las funciones. Teniendo en cuenta que no solo los alumnos si no todas las personas en general, a lo largo de nuestra vida, aprendemos mejor aquello que nos

resulta útil, podría ser interesante que los alumnos realizaran un trabajo en grupos en el que estudiaran, de manera práctica, el papel de las funciones elementales en la vida real: situaciones que modelizan, contextos en los que aparecen, etc. Para ello, podríamos dividir la clase en grupos de cinco o seis personas y adjudicar, a cada grupo, un tipo de función: un grupo debería estudiar las aplicaciones de las funciones lineales o las situaciones en que aparecen, otro grupo las funciones cuadráticas, un tercer grupo las exponenciales, etc. Además, para hacer la actividad un poco más atractiva para el alumnado, les proponemos que sean originales en la presentación de los resultados (que hagan un vídeo, una canción, un poema, etc.), fomentando así también el trabajo de otras competencias.

Capítulo 4

EVALUACIÓN REALIZADA Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En el presente capítulo vamos a exponer un análisis de los resultados obtenidos en el examen que realizamos a los alumnos de las clases en las que impartimos docencia. Es importante mencionar que dicho examen constituyó una prueba de evaluación de todo el bloque de funciones de Matemáticas Académicas de 4º de la ESO, no solo de la unidad didáctica de funciones elementales. Por ello, a pesar de que el diseño del examen fue responsabilidad mía, tuve que seguir las pautas de mi tutora, integrando preguntas diversas y en consonancia con las realizadas por los demás profesores de matemáticas que impartían docencia en otras clases del mismo curso. En consecuencia, la prueba no fue realizada simplemente con el objetivo de analizar la efectividad de la metodología empleada en el aula, aunque varias preguntas sí que ofrecen información de ello, sino para averiguar si los alumnos habían adquirido los conocimientos necesarios relativos al mencionado bloque de funciones. Por tanto, los resultados obtenidos nos informan de dos cosas: por un lado, como he adelantado, de la efectividad de la metodología y, por otro lado, de los problemas que surgen al alumnado en el estudio de funciones y de errores que cometen. Estos resultados, a su vez, pueden ser útiles en investigaciones futuras.

El examen fue realizado por concretamente 17 alumnos de 4ºA y por 21 estudiantes de 4ºD, dado que el día de realización del mismo se ausentaron algunos chicos/as (por motivos justificados en su gran mayoría). Aunque las pruebas efectuadas a los alumnos fueron distintas, pues realizamos dos modelos de examen (uno para 4ºA y otro para 4ºD), el patrón de ambos fue exactamente el mismo. Es decir, los datos de los ejercicios, de manera evidente, variaron, pero los contenidos que se evaluaban y el diseño de las preguntas era análogo. Los dos exámenes contaron concretamente con seis ejercicios o cuestiones, tal y como se puede ver en el Anexo I en el adjuntamos los dos modelos de examen realizados. En el primer ejercicio, se mostraba a los alumnos una gráfica extraída de una situación de la vida cotidiana, y se pedía una interpretación de la misma. Es decir, se trataba de una actividad de lectura e interpretación de gráficas. En el segundo ejercicio se evaluaba el dominio de las operaciones con funciones,

pues se requería calcular la inversa de una función, la composición de dos funciones y, por último, el valor del producto (en el examen de 4ºA) o del cociente (en el examen de 4ºD) de dos funciones en un punto dado. En el tercer ejercicio, los alumnos debían hacer una traducción entre el registro gráfico y el algebraico: dadas cuatro gráficas de funciones elementales estudiadas en clase (una función definida a trozos, una función logarítmica, una de proporcionalidad inversa y una trigonométrica), se pedía deducir la expresión algebraica de las mismas, tal y como habíamos trabajado en clase. En el cuarto ejercicio, se presentaba una situación en la que se producía un crecimiento (o decrecimiento) exponencial de una población. Es decir, se trataba de un problema que los alumnos debían interpretar, dado mediante el lenguaje natural y que modelizaba una situación de la vida real. En dicho ejercicio, se hacían tres cuestiones: una primera en la que se pedía identificar las variables del problema (para analizar si interpretan correctamente los datos) y deducir la expresión algebraica de la función que las relacionaba (es decir, una cuestión de traducción entre los registros del lenguaje natural y algebraico). En la segunda cuestión, se preguntaba el tamaño de la población transcurridos cuatro años, lo que requiere una correcta interpretación de la expresión algebraica de la función. En la última cuestión de este cuarto ejercicio se pedía indicar la expresión algebraica de la función inversa a la obtenida en la primera parte, de nuevo para evaluar las operaciones con funciones. En el quinto ejercicio, se daba al alumnado la expresión algebraica de una función de valor absoluto (concretamente, valor absoluto de una función cuadrática) y se preguntaban dos cosas: por un lado, la expresión algebraica de dicha función como una función definida a trozos y, por otro lado, representarla gráficamente (es decir, traducir del registro algebraico al gráfico). En la sexta y última cuestión, los alumnos debían analizar algunas características concretas de algunas funciones elementales: el dominio de una función irracional, el recorrido de una función cuadrática, la simetría (par o impar) de una función trigonométrica y los puntos de corte de una función de proporcionalidad inversa (trasladada horizontal y verticalmente).

Las tablas que presentamos a continuación muestran las calificaciones obtenidas por los alumnos en la prueba realizada. Se presentan en las mismas tanto las notas de cada ejercicio como las finales del examen y, también, la nota media y la desviación típica de las calificaciones de cada clase. En cuanto a la estructura de las tablas, cada fila indica las respuestas a los diversos ejercicios de cada alumno y la nota final del mismo, y en la parte inferior derecha se muestra la nota media y la desviación típica de las calificaciones finales de cada clase.

Comentar también dos observaciones: en primer lugar, la nota de cada ejercicio está puesta sobre el valor establecido para cada uno de ellos (el 1º, sobre 0,75 puntos; el 2º sobre 1,75 puntos; el 3º sobre 2 puntos; el 4º sobre 1,5 puntos; el 5º sobre 2 puntos y el 6º también sobre 2 puntos). De manera lógica, la suma del valor de cada ejercicio hace un total de los diez puntos sobre los que se evaluaba el examen. En segundo lugar, la aparición de casillas en blanco refleja que el alumno no contesta a la pregunta, mientras que cuando contestan de manera errónea completamente se califica con un 0. Es decir, no se debe confundir un 0 en la casilla de la nota de un ejercicio con una casilla vacía ya que, mientras una indica que ha respondido mal a la pregunta, la otra indica que no ha contestado a la cuestión.

	CALIFICACIONES 4ºA						
	P1 (0.75p)	P2 (1.75p)	P3 (2p)	P4 (1.5p)	P5 (2p)	P6 (2p)	TOTAL (10p)
Alumno 1	0,75	0,50	0,25	0,00	0,00	0,50	2,00
Alumno 2	0,25	0,00	0,50	0,50	0,50	0,50	2,25
Alumno 3	0,50	0,25	0,75			0,75	2,25
Alumno 4	0,50	0,60	0,75	0,25		0,25	2,35
Alumno 5	0,40	0,00	0,50	0,75		0,75	2,40
Alumno 6	0,75	0,75	0,75	0,50	0,00	0,75	3,50
Alumno 7	0,75	0,80	0,75	0,75	0,00	0,50	3,55
Alumno 8	0,75	0,50	0,75	0,50	0,50	0,75	3,75
Alumno 9	0,50	1,00	1,25	0,50	1,00		4,25
Alumno 10	0,60	1,00	1,50		1,75		4,85
Alumno 11	0,70	1,50	1,50	0,70	0,25	0,60	5,25
Alumno 12	0,75	1,25	1,75	0,25	0,20	1,50	5,70
Alumno 13	0,75	1,25	0,75		1,75	1,75	6,25
Alumno 14	0,40	1,00	2,00	1,20	0,50	1,25	6,35
Alumno 15	0,40	1,75	2,00	1,00	0,25	1,40	6,80
Alumno 16	0,75	0,75	1,50	1,50	1,75	1,30	7,55
Alumno 17	0,60	1,50	1,75	1,25	2,00	1,25	8,35
Media aritmética:							4,55
Desviación típica:							2,03

Tabla 1. Calificaciones de los alumnos de 4ºA en el examen. Fuente: Elaboración propia.

	CALIFICACIONES 4ºD						
	P1 (0.75p)	P2 (1.75p)	P3 (2p)	P4 (1.5p)	P5 (2p)	P6 (2p)	TOTAL (10p)
Alumno 1		0,25					0,25
Alumno 2	0,25		0,50			0,50	1,25
Alumno 3	0,25		0,50			1,00	1,75
Alumno 4	0,40	0,75	0,75				1,90
Alumno 5	0,45	0,50	0,75			0,30	2,00
Alumno 6	0,40	0,95	0,75	0,25	0,50	0,25	3,10
Alumno 7	0,75	1,75	0,90	0,00	0,25	0,75	4,40
Alumno 8	0,10	1,50	1,40		0,85	0,65	4,50
Alumno 9	0,75	1,25	1,25	0,00	0,00	1,25	4,50
Alumno 10	0,75	0,75	0,75		1,25	1,25	4,75
Alumno 11	0,65	0,50	0,85	1,00	1,00	1,00	5,00
Alumno 12	0,40	0,75	1,00	1,00	1,00	0,85	5,00
Alumno 13	0,50	1,25	1,00	0,75	1,50	0,25	5,25
Alumno 14	0,40	1,15	1,15	1,00	1,75	0,80	6,25
Alumno 15	0,50	1,00	1,50	1,30	1,00	1,40	6,70
Alumno 16	0,75	1,30	1,50	1,00	1,75	0,50	6,80
Alumno 17	0,50	1,25	1,50	1,00	2,00	1,75	8,00
Alumno 18	0,75	1,50	1,75	1,25	1,50	1,40	8,15
Alumno 19	0,75	1,75	1,75	0,50	2,00	1,50	8,25
Alumno 20	0,65	1,60	1,75	1,50	1,75	1,40	8,65
Alumno 21	0,30	1,75	1,75	1,25	1,85	2,00	8,90
Media aritmética:							5,02
Desviación típica:							2,61

Tabla 2. Calificaciones de los alumnos de 4ªA en el examen. Fuente: Elaboración propia.

Realizando, en primera instancia, un análisis global de los resultados, podemos extraer varias conclusiones. En primer lugar, la existencia de varias calificaciones (concretamente diez) inferiores al 3 muestran, en mi opinión, que las funciones constituyen un terreno muy pantanoso para algunos alumnos, a pesar de llevar años trabajando con ellas. Incluso en cuestiones muy básicas (que más adelante concretaremos) cometen errores que dejan clara evidencia de la dificultad que les supone y el dominio prácticamente nulo de las mismas. Por otra parte, el análisis de los resultados permite observar las diferencias existentes entre las dos clases en las que hemos impartido docencia. Por ejemplo, se puede ver que mientras que en 4ªA tan solo una alumna obtiene una calificación superior al 8, en 4ºD son cinco los alumnos que superan esa nota. Si, por el contrario, observamos las calificaciones más bajas, inferiores o iguales al 2, se

puede observar que en 4ºA tan solo un alumno obtiene esa nota, mientras que en 4ºD son cinco los estudiantes con notas inferiores o iguales a 2. De aquí se puede extraer que las calificaciones de 4ºA son más homogéneas que las de 4ºD, lo que se debe sin lugar a dudas a que los alumnos de la primera clase mencionada son todos del itinerario de Sociales, mientras que en 4ºD están combinados alumnos tanto del itinerario de ciencias (que obtienen calificaciones más altas) como del itinerario de artes (con notas más bajas). De hecho, de manera evidente, si comparamos la nota media y la desviación típica de las calificaciones de los estudiantes de ambas aulas, podemos observar que, aunque la nota media de 4ºD es casi medio punto superior a la de 4ºA, la desviación media también es más de medio punto más alta en 4ºD que en 4ºA, lo que indica que la dispersión, la diferencia entre unas notas y otras, es más elevada en 4ºD, algo que alude directamente a la heterogeneidad presente en la mencionada clase.

Para finalizar este análisis global de resultados, consideremos los siguientes gráficos en los que se muestra de manera clara el porcentaje de suspensos, el porcentaje de notas comprendidas entre el 5 y el 7, el de calificaciones entre 7 y 9 y el porcentaje de sobresalientes, es decir, el de notas iguales o superiores al 9.



Gráfico 1. Porcentajes según rangos de notas en 4ºA.
Fuente: elaboración propia

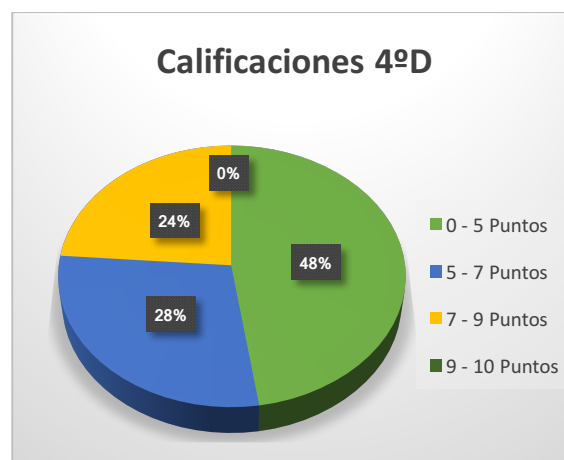


Gráfico 2. Porcentajes según rangos de notas en 4ºD.
Fuente: elaboración propia

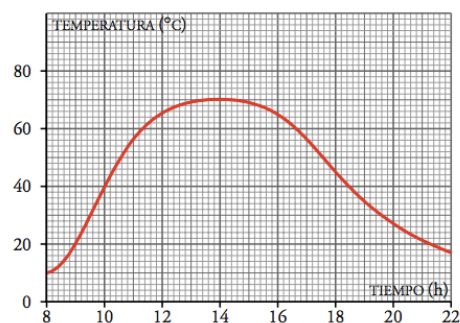
Como se puede observar, el porcentaje de suspensos es muy alto en ambas clases (aunque más en 4ºA), bajo mi punto de vista, y el porcentaje de notas sobresalientes es nulo en las dos aulas. Esto pone de manifiesto de nuevo la dificultad que supone para los alumnos el bloque de funciones. De hecho, del análisis del expediente de algunos estudiantes, se extrae que bastantes de ellos obtienen calificaciones más bajas en el estudio de funciones que en otras áreas de las matemáticas. Sin embargo, tal y como comentaremos más adelante, las

calificaciones obtenidas en este examen no implican, en mi opinión, un fracaso de la metodología llevada a cabo en el aula, ya que es precisamente en las preguntas relativas a traducción entre registros de representación e interpretación de funciones donde los alumnos se muestran más hábiles y competentes.

Una vez comentado todo esto, vamos a dedicarnos a exponer un análisis de las respuestas dadas por los estudiantes en cada una de las preguntas del examen. De este modo intentaremos, por un lado, poner de manifiesto los errores más comunes cometidos por nuestros alumnos, algo que puede resultar muy útil para investigaciones futuras. Por otro lado, también trataremos de analizar si la metodología empleada en el aula impartiendo la unidad de funciones elementales ha resultado beneficiosa para los alumnos.

Como ya habíamos adelantado, la primera pregunta del examen requería analizar una gráfica correspondiente a una situación de la vida real. Durante nuestras clases, habíamos intentado en todo momento traducir gráficos, describirlos, interpretarlos, relacionarlos con situaciones reales, etc. En consecuencia, no resulta extraño que las calificaciones obtenidas en esta pregunta hayan sido más elevadas que en otras. Casi la gran mayoría de los estudiantes obtienen, como poco, la mitad de la puntuación del ejercicio, y muchos de ellos interpretan la gráfica casi de manera perfecta. Sobre todo en 4ºD, donde las preguntas eran quizás menos precisas, algunos se olvidan de comentar algún máximo o mínimo, lo que provoca que no obtengan la puntuación completa, pero se observa que son descuidos puntuales y no errores que supongan trastornos en el aprendizaje.

En cuanto a los errores más observados en esta pregunta, podemos destacar tres respuestas que se repiten con asiduidad. En primer lugar, vamos a centrarnos en el examen de 4ºA, en el apartado en que se preguntaba por el dominio de la función de la gráfica que se muestra a la derecha. Son bastantes los alumnos que responden que el dominio de la misma son todos los números reales, en vez del intervalo $[8, 22]$. Es decir, “extienden” la gráfica a pesar de que la lectura del enunciado deja en clara evidencia que eso no es así. Esto se puede deber a dos motivos: que no interpreten correctamente cuál es la variable independiente de la función dada o, más probablemente, a que el estudio predominante de



Gráfica 1. Gráfica de la función del ejercicio 1 del examen de 4ºA.

funciones elementales en las que evidentemente solo se representa una parte de las mismas (aunque su dominio sea mucho mayor), hace que los alumnos consideren que toda función se extiende a ambos lados del eje X. Es interesante mencionar también que estos errores no fueron cometidos únicamente por alumnos con calificaciones bajas: incluso algunos estudiantes con buenas notas en el examen fallaron del modo comentado.

También en el examen de 4ºA varios alumnos responden a la primera cuestión, en la que se pregunta por la temperatura máxima y por el momento en que ésta se alcanza que, literalmente, «alcanza 70°C y los alcanza 14 horas después de que se encienda la calefacción» o, de manera similar, «alcanza 70°C y el tiempo que tarda son 14 horas». De nuevo, esto nos deja ver que no se interpreta correctamente la gráfica. Sería interesante focalizar en las concepciones de los alumnos que ofrecen respuestas similares de cara a investigaciones futuras porque en un primer momento, dada mi corta experiencia, no logro averiguar qué imagen tienen dichos estudiantes de la gráfica dada para contestar del modo en que lo hacen.

En ambas clases, varios alumnos indican los máximos o mínimos señalando tan solo o la coordenada x_p o la coordenada y_p del punto máximo (o mínimo), en vez de ambas, (x_p, y_p) . Cabe además mencionar que esto no es un error aislado, pues en varias de las respuestas (no solo de esta pregunta) dadas por los estudiantes en el examen se aprecia una comprensión parcial de las nociones relativas a funciones. De hecho, durante el desarrollo de las sesiones de la unidad concerniente a características de funciones, mi tutora tuvo que repetir en diversas ocasiones que, por ejemplo, la curvatura de una función se indica mediante “intervalos de la variable independiente x ”, algo que debería ser evidente si los estudiantes comprendieran correctamente la noción de función.

En la segunda pregunta del examen, como ya habíamos dicho previamente, los alumnos debían realizar operaciones con funciones dadas mediante su registro algebraico. En ambas clases, dadas unas ciertas funciones, se pedía calcular la inversa de una de ellas y la composición de otras dos. Además, en 4ºA el tercer apartado requería calcular el valor en el punto 2 del producto de dos funciones dadas, y en 4ºD, de modo similar, se pedía hallar el evaluar el cociente de dos funciones en el punto -1. En las Tablas 1 y 2 se puede observar que los alumnos de 4ºD responden, en general, bastante mejor a esta pregunta que los alumnos de 4ºA, pues en la primera clase mencionada obtienen, de media, 1'13 puntos (sobre 1'75 que era el valor de

esta cuestión), mientras que en 4ºA la puntuación media es 0'85 puntos (sobre 1'75 de nuevo, evidentemente). Dado que las funciones eran sencillas, no se puede considerar que los resultados obtenidos sean satisfactorios en absoluto, especialmente en 4ºA, donde nueve alumnos (más de la mitad de la clase) no realizan bien ni la mitad del ejercicio. Sin embargo, también merece la pena destacar que bastantes alumnos fallan al operar con las funciones, lo que hace que su puntuación baje, pero muestran una buena comprensión de los conceptos, que es lo que nos ocupa realmente en esta investigación.

Para exponer los errores más cometidos por los estudiantes vamos a distinguir los distintos apartados de esta segunda cuestión. Para comentar el primer apartado, relativo al cálculo de la inversa de una función dada, es necesario mencionar previamente que en clase, cuando se impartió a los alumnos este contenido, se hizo especial hincapié en la necesidad de llevar a cabo tres pasos diferenciados:

1º) Comprobar que la función es inyectiva, es decir, que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces necesariamente $x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$.

2º) Calcular la inversa $f^{-1}(x)$.

3º) Comprobar que, efectivamente, la función obtenida es correcta. Es decir, comprobar que la composición de f con su inversa, f^{-1} , es precisamente la función identidad. Con ello intentamos que los alumnos desarrollaran habilidades de autoevaluación y autocorrección de los resultados, ya que algunos de los estudios analizados y expuestos en el segundo capítulo del presente trabajo mostraban la necesidad de fomentar este tipo de destrezas.

En las respuestas a este primer apartado se observa que una gran cantidad de alumnos se olvidan de realizar el primer paso, probablemente debido a que no comprenden ni qué significa, ni qué están comprobando en realidad ni, por supuesto, por qué deben realizarlo. Por todo ello, no lo consideran un paso necesario y no se acuerdan de hacerlo en el examen. También el tercer apartado se les olvida a muchos estudiantes, probablemente debido también a que les resulta eludible. Otros alumnos sí que realizan este paso, pero muchos de manera incorrecta: varios realizan el producto (en vez de la composición) de $f \cdot f^{-1}$ y otros se “inventan” una forma de comprobarlo que parece resultarles lógica, pues proceden de la siguiente forma:

2. a)

$$g(x) = 8x + 4$$

$$y = 8x + 4 \quad ; \quad 8x = y - 4 \quad ; \quad x = \frac{y-4}{8} \quad ; \quad f^{-1}(x) = \frac{y-4}{8}$$

Comprobación: $x = \frac{y-4}{8}$

$$8x = y - 4$$

$$y = 8x + 4 \rightarrow f(x) = 8x + 4$$

Ilustración 1. Respuesta de una alumna al ejercicio 2 (a).

Es decir, proceden “volviendo hacia atrás” sobre los pasos efectuados antes para calcular la inversa. No se dan cuenta en ningún momento de que las operaciones realizadas son totalmente redundantes ni de que ese procedimiento no permite comprobar que la función inversa calculada es correcta.

En cualquiera de los casos (alumnos que efectúan el producto $f \cdot f^{-1}$ y alumnos que proceden como acabamos de mencionar), es evidente bajo mi punto de vista que no comprenden realmente la noción de función inversa, y consecuentemente no comprenden el modo en que se comprueba que una función es inversa de otra (y viceversa).

Cabe destacar también que varios alumnos confunden la función inversa f^{-1} con la función $\frac{1}{f}$, error grave de concepto debido, casi sin lugar a dudas, a que relacionan o confunden esta noción con el inverso de un número.

En el segundo apartado del segundo ejercicio, en el que se pedía realizar la composición de dos funciones, vamos a destacar principalmente tres errores cometidos con frecuencia por los chicos y chicas de ambas clases. En primer lugar, varios alumnos confunden la composición con el producto de funciones, probablemente debido a que la notación es similar. En segundo lugar, algunos estudiantes escriben $(g \circ f)$ pero realizan $(f \circ g)$, de modo que el resultado es erróneo porque, como sabemos, la composición de funciones no verifica la propiedad conmutativa. En tercer lugar, y bajo mi punto de vista el error más grave cometido en este ejercicio, se aprecia una fuerte tendencia a igualar a cero la función obtenida tras realizar la composición, y a resolver la ecuación que queda determinada tras dicha igualación. De este modo, la respuesta que ofrecen los alumnos a este apartado es precisamente el valor (o valores) de x que verifican la ecuación que han establecido. Es decir:

b) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x+4) \neq f\left(\frac{3x-3}{2} + 4\right) =$
 $f\left(\frac{3x-3}{2} + 4\right) = \frac{3x-3+4}{2} = 0$ " $3x-3+4 = -2$ "
 $3x+1 = -2$ " $3x+1+2$ " $3x+3=0$ " $x = -\frac{3}{3}$ " $x = -1$
 la composición de funciones es otra función, no hay que resolver ninguna ecuación!
 c) $(f \circ g)(2) = f(2) \circ g(2) = x-1$ " $3x+4=7$

Ilustración 2. Respuesta de un alumno al ejercicio 2(b).

$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = (3x+4)^2 + 1 = 9x^2 + 24x + 16 + 1 =$
 $9x^2 + 24x + 17 \rightarrow \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 17}}{2 \cdot 9} = \frac{-24 \pm \sqrt{576 - 612}}{18}$
 No es una ecuación!!

Ilustración 3. Respuesta de otro alumno al ejercicio 2(b).

Este error constituye, en mi opinión, un fallo grave, pues parece que no comprenden que la composición de funciones es otra función ni comprenden lo que se les pregunta. Tal y como me comentó también mi tutora de prácticas, son muchas las ocasiones y múltiples los alumnos (en todos los cursos) que igualan las funciones a cero y resuelven ecuaciones porque sí, sin ninguna razón evidente. De acuerdo con las investigaciones señaladas en el segundo capítulo, esto se debe probablemente al dominio del registro algebraico en el manejo de funciones, y a que los estudiantes parece que relacionan casi directamente el álgebra con la resolución de ecuaciones.

En el último apartado de este segundo ejercicio, en el que se requería evaluar en un punto un cociente o un producto de funciones, el error más destacable es que varios alumnos realizan la operación pedida pero en una gran cantidad de ocasiones no entienden que deben evaluarlo en un punto. En esos casos, algunos multiplican por el número en el que se debía evaluar la función y otros simplemente no realizan nada, dejando como resultado otra función y no un punto como en realidad se pedía. Esto nos deja ver que, si bien los alumnos comprenden en su mayoría el significado de $f(2)$, por ejemplo, cuando la función se complica y es el producto o el cociente de otras dos, no son capaces de asimilar que el procedimiento a seguir y el significado es el mismo, o quizás no comprendan que al operar dos funciones, se obtiene una nueva función, con la que se trabaja de manera análoga.

En el tercer ejercicio, los alumnos debían deducir la expresión algebraica de cuatro funciones dadas gráficamente. Concretamente, el apartado (a) era una función definida a trozos, el apartado (b) una función logarítmica, el (c) una función de proporcionalidad inversa y el último apartado, el (d), una trigonométrica (función seno en el examen de 4ºA y función coseno en la prueba de 4ºD). Como consecuencia, probablemente, de la metodología llevada a cabo en el aula y la insistencia en la traducción entre los registros de representación, los resultados en este ejercicio son, aunque no extremadamente buenos, al menos satisfactorios teniendo en cuenta que en el resto de preguntas muchos alumnos cometieron bastantes fallos. De hecho, una gran cantidad de estudiantes identificaron correctamente el tipo de cada función, especialmente en los apartados (c) y (d).

En cuanto a los errores más observados, podemos comenzar mencionando que varios alumnos confunden la función definida a trozos del primer apartado con una función lineal. Esto se debe probablemente a que los alumnos observan en la gráfica dos rectas, sin darse cuenta de que en ningún caso la expresión algebraica de las mismas va a ser la misma. Sin embargo, parece que no reparan en ese detalle y, consecuentemente, responden de manera errónea.

Por otra parte, la función del apartado (b), función exponencial, es confundida por algunos estudiantes con una función irracional, $f(x) = \sqrt{x}$, quizás porque no observan que la función dada gráficamente tiene también imágenes negativas y su “forma” les recuerda a la gráfica de la función irracional. Otros alumnos identifican, de manera errónea también, la función de este apartado (b) con la función exponencial. Esto, bajo mi punto de vista, se debe probablemente a que se fijaron en que la gráfica pasaba por el punto (1, 0), punto por el que pasan todas las funciones logarítmicas, y lo confundieron con el punto (0, 1), que es por el que pasan todas las funciones exponenciales. Esto indica, bajo mi punto de vista, que los alumnos tienden muy frecuentemente a aprenderse cosas de memoria, y no a razonar el por qué de las mismas, algo que les lleva inevitablemente a cometer fallos como el anterior. Además, este tipo de error es, en mi opinión, una clara prueba de las escasas habilidades de autoevaluación que, según varios expertos, muestran los alumnos, y que expusimos en el capítulo segundo del presente trabajo.

En cuanto a los apartados (c) y (d), como ya habíamos adelantado, no se producen demasiados errores en la identificación del tipo de función. En ambos casos, los errores que se

producen son precisamente en la determinación de los parámetros. Especialmente en las funciones trigonométricas, varios alumnos parece que no se percatan o no identifican que el periodo de las funciones dadas gráficamente es π en vez de 2π . En consecuencia, responden erróneamente que la expresión algebraica de dichas funciones es $f(x) = \sin(x)$ (en el examen 4ºA) y $f(x) = \cos(x)$ (en el examen de 4ºD), en vez de $f(x) = \sin(2x)$ y $f(x) = \cos(2x)$.

El ejercicio 4 del examen era precisamente un problema de crecimiento (o decrecimiento) exponencial de unas poblaciones dadas. Los resultados obtenidos en esta pregunta son, bajo mi punto de vista, sorprendentemente bajos en ambas clases. A pesar de haber realizado al menos cinco problemas prácticamente iguales en clase, y a pesar de que la gran mayoría de los alumnos mostraron entender el procedimiento llevado a cabo, una gran cantidad de estudiantes o no resolvieron el problema del examen o lo hicieron de manera incorrecta. De hecho, en la clase de 4ºD, siete alumnos no respondieron absolutamente nada, y otros dos, aunque si intentaron contestar, no supieron ni identificar las variables del problema.

Tal y como se puede ver en el Anexo I donde se adjuntan los dos modelos de examen, tras el enunciado del problema se planteaban tres cuestiones a los alumnos. En la primera de ellas, se pedía indicar la variable independiente y la variable dependiente del problema, así como señalar la expresión algebraica de la función que las relacionaba. Las respuestas dadas a este apartado son, bajo mi punto de vista, alarmantes. De hecho, al menos dos alumnos indican que las variables son números; es decir, no entienden ni siquiera la noción de variable, algo que es bastante preocupante en estudiantes de 16 años que en unos meses comenzarán la educación no obligatoria.

4.
a) Exp. alg. $\left(\frac{24000}{2} + 1\right) = x$
variable independiente : 1
variable dependiente : $\frac{24000}{2}$
b) $\left\{ \frac{24000 + 2}{2} = x \right.$

Ilustración 4. Respuesta de una alumna al ejercicio 4 (a), en la que indica que las variables del problema son números fijos.

Otros, aunque afortunadamente no identifican variables como números fijos, tampoco lo hacen de manera correcta, y de hecho ofrecen justificaciones bastante extrañas. Podemos destacar el caso del siguiente alumno:

a) $f(x) = 350 \cdot 4x(4)$

la variable independiente es el tiempo cada más tiempo más abeja o menos abejas

la variable dependiente ~~en las abejas~~, ya que aunque no se cuadruplican, se seguirán haciendo abejas. ?

Ilustración 5. Respuesta de otro alumno al ejercicio 4 (a).

Como se puede observar en la Ilustración 5, uno de los estudiantes de 4ºA indica que la variable independiente es el número de abejas, y lo justifica explicando que pase el tiempo que pase, siempre va a haber abejas. Es decir, según su razonamiento, como las abejas no se van a extinguir (nunca va a ser nulo el número de abejas), el número de abejas es la variable independiente. Se deduce de su respuesta, de manera clara, que no comprende en absoluto por qué una variable es independiente o, en caso contrario, dependiente, algo que de nuevo considero bastante preocupante. Estos errores se deben, en mi opinión, a que la resolución de problemas no es una práctica habitual en el aula cuando se estudian las funciones, a pesar de ocupar un lugar preferente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de otras áreas de la matemática. En consecuencia, aunque los alumnos identifican las letras x e y como variables independiente y dependiente respectivamente, no son capaces de reconocer dichas variables cuando estas vienen dadas mediante el enunciado de un problema.

Otros muchos estudiantes, aunque sí señalan las variables del problema de manera correcta, indican expresiones algebraicas que nada tienen que ver con la función que modeliza la situación dada en el enunciado. Por ejemplo:

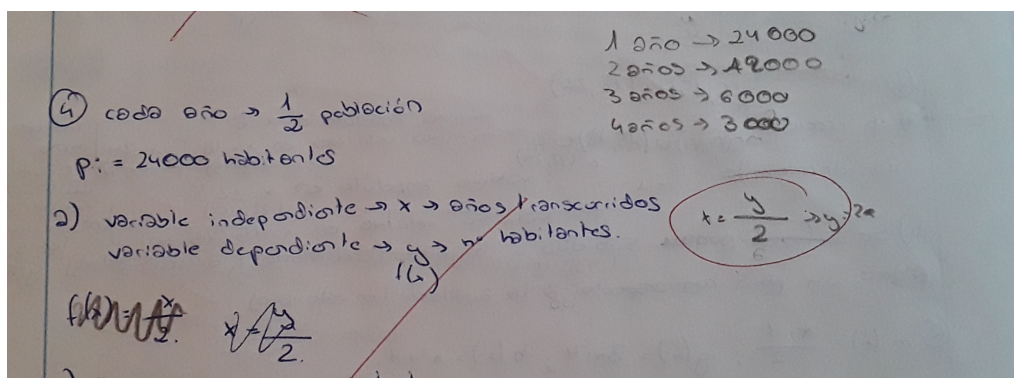


Ilustración 6. Respuesta de un estudiante de 4ºD al ejercicio 4(a), en la que ofrece una expresión algebraica completamente errónea.

Se aprecia también una tendencia entre el alumnado a contestar que el problema queda modelizado por funciones lineales de expresiones algebraicas:

$$f(x) = 350 \cdot 4x \quad (\text{examen de 4ºA}),$$

$$f(x) = 24000 \cdot \frac{1}{2}x \quad (\text{examen de 4ºD}).$$

Otros, de manera similar, consideran que las variables del problema quedan relacionadas por medio de las funciones:

$$f(x) = 350 \cdot x^4 \quad (\text{examen de 4ºA}),$$

$$f(x) = 24000 \cdot x^{\frac{1}{2}} \quad (\text{examen de 4ºD}).$$

Estas respuestas no son extremadamente alarmantes, a diferencia de las mencionadas anteriormente, pues al menos muestran una ligera comprensión de los datos del problema, a pesar de que no sepan después extraer una relación generalizada. Sin embargo, tampoco son correctas en absoluto, tal y como podrían haber comprobado si hubieran razonado durante unos instantes las respuestas dadas.

Por otra parte, de algunas respuestas de este primer apartado se deduce también la concepción totalmente algebraica que tienen los alumnos de las funciones, tal y como indicaban algunas de las investigaciones revisadas en el segundo capítulo. De hecho, algunos de ellos consideran las funciones como ecuaciones algebraicas, tal y como se puede deducir de la respuesta dada por el siguiente alumno, que menciona incluso la palabra “incógnita”:

(4)
 $y =$
 $x = 350$
 $t = 350 \cdot 4$
 a) $x = 350$ abejas
 $y = \frac{350 \cdot 4}{\text{abejas} \quad \text{tiempo (1 año)}}$
 incógnita
 $y = x \cdot 4$
 $y = 350 \cdot 4^x$

Ilustración 7. Respuesta de un alumno al ejercicio 4(a) en el que, además de identificar la variable independiente con un número fijo, muestra una concepción totalmente algebraica de las funciones.

En la segunda cuestión de este cuarto ejercicio, se pregunta a los alumnos por el tamaño de la población del problema transcurridos cuatro años desde el instante inicial. Varios alumnos, a pesar de no haber deducido correctamente la expresión algebraica de la función en el primer apartado, responden correctamente a esta pregunta ya que, en vez de sustituir la x por 4 en la expresión algebraica, recurren a realizar cálculos desde los datos iniciales del problema. Es decir, por ejemplo en el examen de 4ºD, dividen cuatro veces los 24000 habitantes iniciales entre dos, de modo que obtienen la solución correcta. Esto nos deja ver que varios alumnos comprenden el enunciado del problema, pues saben lo que tienen que realizar cuando se les indican datos concretos, pero encuentran dificultades precisamente a la hora de generalizar ese proceso y, en consecuencia, a la hora de deducir la relación entre las variables. En el caso de estos estudiantes, se observa de nuevo que no revisan las respuestas dadas ni son críticos con las mismas: si hubieran sustituido en la expresión algebraica indicada, hubieran comprobado de manera inmediata que no se obtenía el mismo resultado y, con ello, quizás podrían haberlo corregido. Por ejemplo, la siguiente ilustración muestra la respuesta de una alumna que deduce mal la expresión algebraica porque no sabe generalizar el proceso seguido, pero sin embargo razona adecuadamente la respuesta a esta segunda cuestión:

~~a)~~ $350 = 4x$
~~b)~~ Si cada año se cuadruplica el número de abejas, en cuatro años se cuadruplica 4 veces.
 $350 \cdot 4^4 =$
 $4^4 = 1024$
 $350 \cdot 1024 =$
 358.400 abejas habrá dentro de 4 años.

Ilustración 8. Respuesta de una alumna al ejercicio 4, en la que deduce erróneamente la función que modeliza el problema pero realiza correctamente el apartado (b).

Por el contrario, son bastantes los alumnos que deducen mal la expresión algebraica y aun así hacen uso de la misma para responder a este segundo apartado. En estos casos, podemos llegar a interpretar que ni siquiera comprenden el enunciado del problema o que tienen asimilado que cuando les dan datos concretos, lo que deben hacer es sustituir en la expresión algebraica, sin ni siquiera pensar previamente si existe otra forma de hacerlo. Esto es, bajo mi humilde punto de vista, un problema que se repite en el aula con asiduidad: los alumnos tienden a aprender procedimientos y estrategias de memoria, sin razonar el por qué de las mismas, y las aplican de manera repetitiva sin saber, en muchas ocasiones, por qué se procede de esa forma. Es, por tanto, necesario hacer hincapié en que los alumnos comprendan siempre los procedimientos seguidos y el razonamiento de los mismos, así como mostrarles las alternativas que pueden existir para llegar a la resolución de un problema o de un ejercicio.

$(a) y = 350 \cdot 4x$ ~~$y = (350 \cdot 4)x$~~ $\xrightarrow{=x}$ los años que pasan
 $\nwarrow$ $\nearrow$
 n° de abejas $= y$ n° de abejas inicial
 $(b) f(x) = (350 \cdot 4)x$ " $f(4) = (350 \cdot 4) \cdot 4$
 $f(4) = 1400 \cdot 4$ " $f(4) = 5600$ abejas $\checkmark$
 Al pasar cuatro años el número de abejas es de 5600.

Ilustración 9. Respuesta errónea de un estudiante a los apartados (a) y (b) del ejercicio 4.

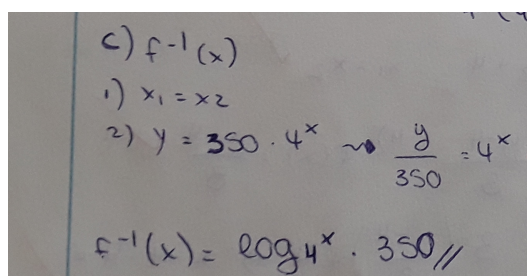
Para finalizar el análisis de este cuarto ejercicio, vamos a comentar los resultados del tercer y último apartado del mismo, en el que se pedía calcular la función inversa de la obtenida en el apartado (a). Si tenemos primeramente en cuenta que no muchos estudiantes habían deducido correctamente la expresión algebraica del primer apartado, es lógico que las respuestas a esta cuestión no fueran satisfactorias. Además, si nos centramos en las respuestas de los chicos/as que habían resuelto correctamente la primera parte, nos encontramos con que la inmensa mayoría se atasca al llegar a:

$$\frac{y}{350} = 4^x \quad (\text{en el examen de 4ºA})$$

o

$$\frac{y}{24000} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (\text{en el examen de 4ºD}).$$

Llegados a dicho punto, no son capaces de despejar la “x” para determinar la expresión algebraica de la función inversa de la original debido a un dominio bastante pobre de la noción de logaritmo, así como de la resolución de ecuaciones exponenciales. Parece que recuerdan, de las actividades realizadas en clase, que la inversa de la función exponencial es la función logarítmica, pero sin embargo no son capaces de establecer correctamente la expresión algebraica, de modo que se observan respuestas como la siguiente:



Handwritten student work for finding the inverse function. It shows the equation $y = 350 \cdot 4^x$, which is rearranged to $\frac{y}{350} = 4^x$. The student then incorrectly writes the inverse function as $f^{-1}(x) = \log_4 x \cdot 350$.

Ilustración 10. Respuesta de una alumna al ejercicio 4(c) en la que introduce logaritmos para resolver la ecuación y obtener la función inversa, pero lo hace de manera incorrecta por un bajo dominio del concepto de logaritmo.

En resumen, las bajas calificaciones en este ejercicio, como hemos detallado minuciosamente, se deben a los múltiples obstáculos que encuentran en el mismo. El mero hecho de tratarse de un problema de enunciado ya constituye una práctica complicada para los estudiantes, y más aún si trata de funciones e incluso de funciones recién conocidas por los alumnos. Sin embargo, la pregunta era necesaria en el examen por, principalmente, dos motivos: en primer lugar, porque no tiene sentido conocer funciones si no se identifican las situaciones reales en las que aparecen y, en segundo y último lugar, porque el análisis de las

respuestas y de los errores cometidos es una rica fuente de información para conocer las dificultades que encuentran los alumnos e intentar solventarlas.

En la quinta pregunta del examen, se daba una función de valor absoluto (de una función cuadrática) mediante su expresión algebraica y se pedía, en primer lugar, expresarla algebraicamente como una función definida a trozos y, en segundo lugar, esbozar su gráfica. Los resultados de esta cuestión son bastante diferentes entre las dos clases: mientras que en 4ºD más del 57% de los alumnos realizan, al menos, la mitad del ejercicio bien, en 4ºA no llega al 30%, a pesar de haber seguido las mismas explicaciones y realizado los mismo ejercicios en ambas clases.

Concretando un poco más, la cuestión que resultó más complicada para los alumnos teniendo en cuenta los resultados obtenidos, fue expresarla como una función definida a trozos. De hecho, muy pocos fueron los alumnos que resolvieron con éxito esta parte, especialmente en la clase de 4ºA. Entre los alumnos que responden a esta pregunta sin basarse en la representación gráfica de la función, se aprecia una tendencia generalizada a contestar que:

$$y = |-x^2 + 2x + 3| = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3, & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{en el examen de 4ºA}),$$

o

$$y = |x^2 - x + 2| = \begin{cases} x^2 - x + 2, & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 + x - 2, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{en el examen de 4ºD}).$$

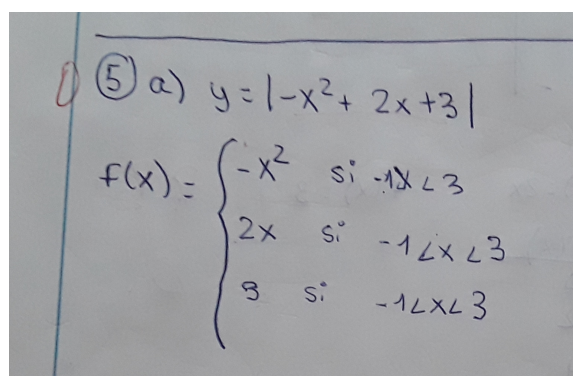
Es decir, no comprenden bien ni estudian adecuadamente el valor absoluto de una función desde su expresión algebraica: les suena que la función cambia de signo, pero no son capaces de comprender en qué valor lo hacen, y lo relacionan con la definición del valor absoluto de un número:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Sin embargo, aquellos alumnos que realizan primero la representación gráfica de la función y posteriormente la expresan como una función definida a trozos, no caen en el error que acabamos de comentar. De hecho, los alumnos que siguen este procedimiento son los que obtienen mayores calificaciones en el ejercicio, y los fallos que se observan se deben

simplemente a errores en la representación de las funciones cuadráticas, y no a errores conceptuales como en el caso anterior.

Por otra parte, en esta primera cuestión del quinto ejercicio, se encuentran un par de respuestas que carecen de cualquier tipo de coherencia, y que dejan claro que algún alumno no ha comprendido en absoluto la función de valor absoluto. Estas respuestas, que mostramos a continuación mediante un ejemplo, son del tipo siguiente:



Handwritten student response for exercise 5(a). The student has written the function $y = |-x^2 + 2x + 3|$ and then defined $f(x)$ as a piecewise function with three cases, all of which are incorrect:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x & \text{si } -1 < x < 3 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 3 \end{cases}$$

Ilustración 11. respuesta de una alumna de 4ºA al ejercicio 5(a) en la que se aprecia una comprensión nula de la función de valor absoluto

La segunda parte del ejercicio, en la que se pide representar gráficamente la función, parece resultar más asequible para los alumnos, tal y como era de esperar teniendo en cuenta que el registro gráfico supone un nivel de abstracción menor que el registro algebraico (Azcárate y Deulofeu, 1990). Sin embargo, debido al error que cometimos al enunciar primero la cuestión más complicada (expresión algebraica de la función como una función definida a trozos) en vez de la cuestión más sencilla (representación gráfica), bastantes alumnos se atascan en la primera parte y no intentan realizar la segunda. Por ello, consideramos que los resultados en esta parte son más bajos de lo que podrían haber sido, pues casi todos los estudiantes que se enfrentan al apartado (b) de este quinto ejercicio proceden de manera totalmente correcta y lo resuelven con éxito (a excepción de fallos en el cálculo del vértice de la parábola o de los puntos de corte con los ejes, que impiden después que la representación sea absolutamente correcta), y solo aquellos que no intentan realizarlo son los que obtienen calificaciones muy bajas en el apartado.

En el sexto y último ejercicio de la prueba se pedía analizar algunas características concretas de ciertas funciones elementales, todas ellas dadas mediante su expresión algebraica.

Constaba de cuatro apartados claramente diferenciados: en el primero de ellos, se pedía calcular el dominio de una función irracional; en el segundo, el recorrido de una función cuadrática; en el tercero, la simetría de una función trigonométrica y, por último, en el cuarto apartado, los puntos de corte con los ejes de una función de proporcionalidad inversa.

Bajo nuestro punto de vista, esta cuestión era bastante asequible, especialmente los apartados segundo y cuarto. Sin embargo, los resultados de la misma tampoco fueron muy satisfactorios en ninguna de las dos clases, ya que una gran cantidad de alumnos no resolvieron correctamente ni la mitad del ejercicio, en ocasiones debido a errores conceptuales graves (especialmente en los apartados primero y segundo) y en otras ocasiones debido a una impresionante cantidad de fallos operacionales.

Concretemos un poco los resultados y los errores cometidos en cada apartado. En el primero de ellos, en el que como ya hemos adelantado se requería calcular el dominio de una función irracional, el número de alumnos que no responden es elevado y el número de respuestas erróneas es bastante alto también, lo que hace que los resultados a esta cuestión no sean satisfactorios. Varios alumnos tienden a igualar el radicando a cero y a resolver esa ecuación, dando en consecuencia lugar a respuestas evidentemente erróneas. También algunos alumnos indican que el dominio de la función irracional dada son todos los número reales y muchos otros responden que son los reales positivos, ya que saben que el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ son precisamente los números reales mayores o iguales que 0, pero parece ser que no comprenden el por qué. Incluso algún estudiante responde, sorprendentemente, que la función no tiene dominio, lo que supone un error de concepto extremadamente grave bajo mi punto de vista. De estos tipos de contestaciones a la primera cuestión, se deduce que algunos estudiantes no tienen asimilado en absoluto la noción de dominio de una función, pues el procedimiento seguido para la resolución de este apartado es completamente erróneo.

En bastantes casos, sin embargo, proceden correctamente resolviendo la inecuación, y sin embargo después no saben interpretar el resultado obtenido, dando lugar a respuestas del tipo:

$$6) a) f(x) = \sqrt{-x-2}$$

$$-x-2 \geq 0 \Rightarrow -x \geq 2$$

$$x \leq -2 \Rightarrow D(f) = (-\infty, -2]$$

Ilustración 12. Respuesta de una alumna al ejercicio 6(a), en la que procede correctamente pero para no interpretar bien el resultado obtenido.

En otros casos, incurren en errores operacionales típicos en la resolución de inequaciones, lo que hace que no obtengan la puntuación completa de la cuestión, pero se observa que comprenden el concepto de dominio, que es lo que verdaderamente nos ocupa en nuestra investigación, y no los errores de cuentas que cometen los alumnos.

En la segunda cuestión de esta sexta pregunta, en la que se preguntaba a los alumnos el recorrido de una función cuadrática, es en la que peores resultados se obtuvieron. Sorprendentemente, casi un 70% de los alumnos respondieron erróneamente, a pesar de que durante nuestro periodo docente comprobamos que la gran mayoría sabía determinar el recorrido de una función cuadrática cuando esta venía dada mediante su representación gráfica. Sin embargo, tal y como se puede observar en los resultados del examen, cuando la función se da mediante la expresión algebraica, las dificultades que encuentran los alumnos aumentan de manera muy considerable.

En cuanto a los errores más cometidos por los estudiantes, podemos citar principalmente dos: en primer lugar, una gran cantidad de alumnos responden que el recorrido de la función cuadrática son todos los números reales, debido probablemente a que no reparan en el tipo de función ante el que se encuentran o quizás incluso a una confusión de los conceptos de dominio y de recorrido. Por el contrario, otros estudiantes calculan el vértice de la función cuadrática, $V = (x_v, y_v)$, pero sin embargo responden erróneamente que el recorrido de la función son los valores comprendidos en el intervalo $[x_v, +\infty)$ o $(-\infty, x_v]$, error que nos permite observar que, aunque les suena la noción de recorrido, no tienen el concepto asimilado completamente.

En la tercera cuestión del sexto ejercicio, en la que se pedía indicar la simetría de una función trigonométrica, no se pueden destacar observaciones ni errores importantes. Los tipos de simetría que conocen los alumnos son la simetría par y la simetría impar, por lo que las respuestas no son muy variadas, evidentemente. Además, la gran mayoría de los alumnos responden correctamente y en ningún caso se aprecian errores conceptuales importantes,

aunque en bastantes casos es cierto que no justifican la respuesta, por lo que la puntuación en la pregunta es más baja de lo que podría haber sido.

Para finalizar, en la cuarta y última cuestión del ejercicio, en la que los alumnos debían calcular los puntos de corte con los ejes de una función de proporcionalidad inversa, tampoco se detectan errores conceptuales o dificultades que merezca la pena señalar en este estudio. La gran mayoría de los estudiantes proceden de manera correcta en el cálculo de dichos puntos, por lo que se deduce que comprenden este concepto adecuadamente, aunque incurren en numerosos errores en las operaciones efectuadas, lo que influye en que de nuevo las calificaciones sean más bajas.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Tras realizar un análisis global del presente Trabajo de Fin de Máster, podemos dividirlo en dos partes claramente diferenciadas: una primera teórica, en la que se muestra una revisión de investigaciones y estudios relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las funciones, y una segunda parte práctica, llevada a cabo durante nuestro periodo de prácticas del Máster en el Colegio Chamberí de Madrid, que a su vez se puede dividir en otras dos partes, tal y como especificaremos más adelante.

Bajo nuestro punto de vista, ambas partes son necesarias y, además, se complementan mutuamente. Por un lado, el análisis de trabajos realizados por autores reconocidos en el ámbito de la didáctica permite que el desarrollo de la metodología se enfoque correctamente y, además, que los objetivos de la misma estén fundamentados en teorías sólidas. Por otro lado, el análisis de los resultados de la prueba realizada a los alumnos (en la parte práctica de este trabajo) aporta información a dichos estudios teóricos y además puede ser interesante de cara a investigaciones futuras.

Respecto a la parte teórica, nos gustaría realizar un pequeño comentario. Si bien es cierto que las investigaciones relativas a la didáctica de las funciones son múltiples y variadas debido tanto a la amplitud como a la complejidad de dicho área, consideramos que una gran mayoría de ellas carecen de verdaderas propuestas que los docentes puedan llevar a cabo en el aula. Además, durante mis periodo de prácticas, también he observado que muchos profesores no disponen del tiempo suficiente para revisar este tipo de investigaciones, necesarias si se quiere mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En consecuencia, bajo nuestro punto de vista, parece que existe una brecha entre las investigaciones teóricas y la práctica en el aula que es necesaria eliminar si queremos enriquecer la educación de las futuras generaciones.

Respecto a la parte práctica, tal y como habíamos adelantado, se puede dividir a su vez en otras dos partes diferenciadas: una primera en la que exponemos la metodología empleada en el aula para abordar la unidad didáctica de Funciones Elementales de 4º de la ESO, detallamos el desarrollo de las sesiones y presentamos dos propuestas para mejorar el aprendizaje de las funciones (particularmente, de las funciones elementales), y una segunda

parte en la que analizamos los resultados y las respuestas dadas por los alumnos en el examen de funciones realizado. El objetivo del análisis de dicha prueba, como ya hemos comentado a lo largo del trabajo, era doble: por un lado, a través del mismo, buscábamos averiguar, en la medida de lo posible, si la metodología empleada en el aula había sido efectiva, y, por otro lado, pretendíamos indagar en los errores cometidos por el alumnado. Si tenemos tan solo en cuenta los resultados globales obtenidos, podríamos considerar que la forma en que desarrollamos las sesiones no ha contribuido positivamente en el aprendizaje de las funciones por parte de los alumnos. Sin embargo, bajo nuestro punto de vista, esto no es así en absoluto por varios motivos. En primer lugar, porque analizar los resultados de un examen y sacar conclusiones de los mismos es una labor totalmente subjetiva: no es lo mismo que suspenda un gran porcentaje de alumnos en una clase en la que generalmente todos obtienen buenas notas que en una clase en la que múltiples alumnos suspenden asiduamente. Por otra parte, consideramos que efectuar un cambio en la metodología es una tarea complicada que da sus frutos pasado un largo tiempo, por lo que diez sesiones no son suficientes para determinar si esta es efectiva.

Por tanto, en nuestra opinión, los resultados del examen no indican un fracaso de la metodología empleada ni del desarrollo de las sesiones. De hecho, consideramos interesante que, a pesar de las múltiples dificultades que presentaban los alumnos en el tratamiento de las funciones, los ejercicios relativos a la traducción entre los diferentes registros semióticos de representación contaran con un porcentaje de respuestas erróneas menor que otras cuestiones más simples. Esto indica, sin lugar a dudas, que la forma en que introducimos cada tipo de función elemental favoreció la conversión entre registros, algo positivo según los múltiples estudios revisados.

Además, durante todo el periodo en que impartí docencia, percibí una actitud en el alumnado extremadamente buena, una participación activa y un creciente interés por las matemáticas. Aunque eso no se refleje, por desgracia, en los resultados del examen, es muy interesante y necesario a la hora de extraer conclusiones, pues creo que la motivación de los alumnos y el aprendizaje están íntimamente relacionados.

Para finalizar, este Trabajo de Fin de Máster me ha aportado una gran cantidad de cosas que me han hecho crecer como persona y como profesional. Realizar una revisión de investigaciones sobre un cierto contenido aporta indudablemente múltiples conocimientos sobre las dificultades de aprendizaje que tienen los alumnos, conocimientos que sin duda

contribuyen a mejorar como docente. Sin embargo, poder completar esa información teórica con la práctica en un aula, poder analizar en primera persona los errores que cometen los estudiantes, etc., conlleva una visión mucho más completa del tema y capacita para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. No obstante, realizar una investigación de este tipo conlleva una cantidad de trabajo y de tiempo que los docentes, tal y como he comprobado en las prácticas, no tienen, pues en contra de lo que mucha gente opina la labor del profesor no es sencilla en absoluto. Sería conveniente, bajo mi humilde punto de vista, solucionar ese problema, pues si no se conocen las dificultades que tienen los alumnos, sus concepciones alternativas, los obstáculos que se presentan, etc., difícilmente se va a poder incidir en su correcta corrección. Además, teniendo en cuenta que el mundo está en constante cambio, la educación lo está también, por lo que los docentes deben estar en continua formación y disponer del tiempo necesario para ello.

BIBLIOGRAFÍA

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.

Bagni, G.T. (2004) Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (1), 5-24.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problemes en Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 4 (2), 164-198.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des Mathématiques*. Thèse de Doctorat d'Etat. Université de Bordeaux.

Brousseau, G. (1989). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (Primera parte). *SUMA: enseñanza y aprendizaje de la Matemática*, 5, 5-12. Federación española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (3), 195-218.

Dreyfus, T. y Vinner, D. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal of Research in Mathematics Education*, 20 (4), 356-366.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

González, M.T., López, C. y Sierra, M. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, 10, 89-104.

González, M.T. y Sierra, M. (2004). La enseñanza del Análisis Matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia de la Educación*, 21, 153-198.

González, M.T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (3), 389-408.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1 (1), 5-21.

González, M.T. y Martín, E. (2006). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. En V. Aymerich y S. Macario (eds.) *Matemática para el siglo XXI*. Publicaciones Universitat Jaume I, pp. 197-205.

Oviedo, L. y Kanashiro, A.M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29-36. Recuperado de <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/AulaUniversitaria/article/download/4112/6207>

Ruiz Higuera, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, España.

ANEXOS

Anexo I: Modelos de exámenes de ambas clases

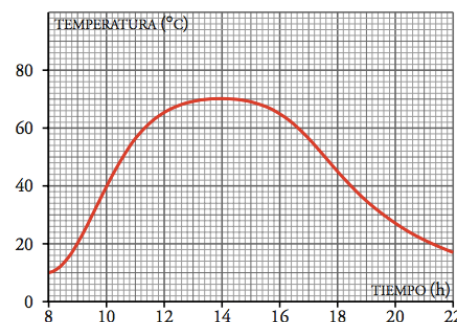
Control de FUNCIONES (Andrea)

ESO 4º A 12 – 5 – 17

APELLIDOS _____ NOMBRE: _____

1. (0.75p) La siguiente gráfica nos muestra la temperatura de un radiador desde que se enciende la calefacción (8h) hasta 14 horas más tarde.

- ¿Cuál es la temperatura máxima que alcanza y cuándo la alcanza?
- Calcula el aumento de temperatura entre las 8h y las 10h.
- ¿Cuál es el dominio de definición?
- Indica en qué intervalo es decreciente la función.

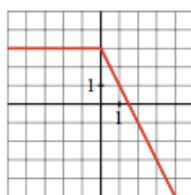


2. (1,75p) Dadas las funciones $f(x) = \frac{x}{2}$, $g(x) = 3x + 4$ calcular:

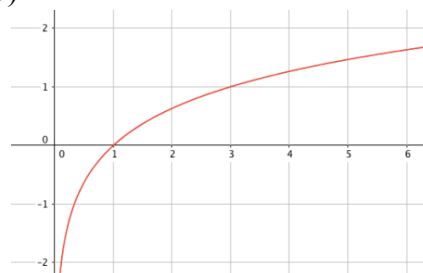
- $g^{-1}(x)$
- $(f \circ g)(x)$
- $(f \circ g)(2)$

3. (2p) Deducir la expresión algebraica de las siguientes funciones a partir de su gráfica:

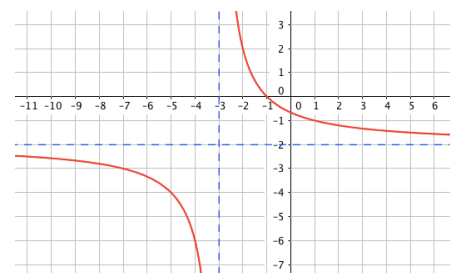
a)



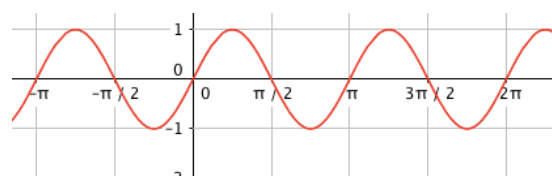
b)



c)



d)



4. (1.5p) Unos apicultores del norte de Madrid han realizado un estudio sobre la población de una de sus colmenas de abejas, llegando a la conclusión de que el

número de abejas se cuadruplica cada año que pasa. Si, inicialmente, la colmena contaba con 350 abejas:

- Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona el número de abejas con el tiempo transcurrido, indicando claramente cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
- ¿Cuántas abejas habrá en la colmena dentro de 4 años?
- Indica la función inversa a la obtenida en el apartado (a).

5. (2p) Dada la siguiente función:

$$y = |-x^2 + 2x + 3|$$

- Exprésala en forma de función definida a trozos.
- Esboza su gráfica.

6. (2p) Calcular solo lo que se indica:

- Dominio de $f(x) = 2\sqrt{-x+3}$
- Recorrido de $f(x) = -x^2 + 4x + 1$
- Simetría de $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
- Puntos de corte con los ejes de $f(x) = \frac{1}{x-2} + 2$

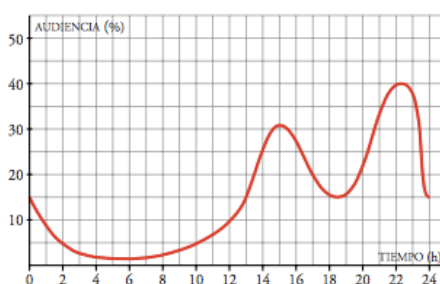
Control de funciones Andrea

E4ºD

12 de mayo de 2017

Apellidos: _____ Nombre: _____

1. (0.75p) La siguiente curva muestra la audiencia de televisión en España en un día promedio del mes de abril de 2017.



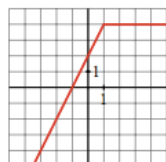
- Indicar la monotonía y los puntos más importantes de la misma explicando su significado.
- Cuando se habla de audiencia se dice que España, al igual que Francia, Italia o Portugal, pertenece al grupo de países “camello”, cuyas curvas de audiencia tienen dos “jorobas”. Otros países como Alemania y Dinamarca son del grupo dromedario con una sola “joroba”, que se produce alrededor de las 20h. ¿Qué quieren decir los técnicos cuando hablan de “jorobas”?

2. (1,75 p) Dadas las funciones $m(x) = \frac{x}{2}$, $g(x) = 3x + 4$, $h(x) = x^2 + 1$,

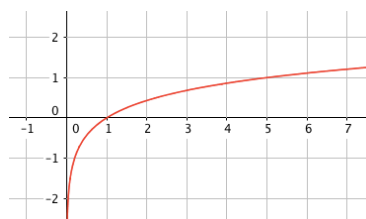
calcular: a) $m^{-1}(x)$ b) $(h \circ g)(x)$ c) $\left(\frac{h}{g}\right)(-1)$

3. (2p) Deducir la expresión algebraica de las siguientes funciones a partir de su representación gráfica:

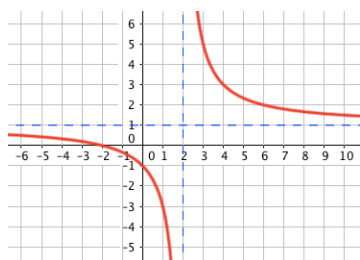
a)



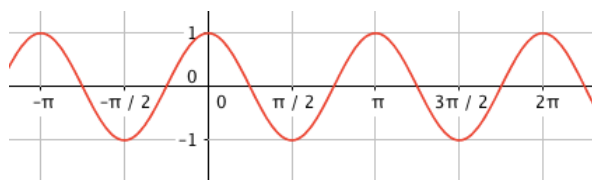
b)



c)



d)



4. Se sabe que la población de una pequeña ciudad del norte de España se reduce a la mitad cada año que pasa debido a la emigración a las grandes ciudades y a la alta tasa de mortalidad que se da en dicho lugar. Si, inicialmente, esta ciudad contaba con 24000 habitantes:

- Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona el número de habitantes con los años transcurridos, indicando claramente cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
- ¿Cuántos habitantes tendrá dentro de 4 años?
- Indica cuál es la función inversa de la obtenida en el apartado (a).

5. (2p) Dada la siguiente función:

$$y = |x^2 - x - 2|$$

- Exprésala en forma de función definida a trozos.
- Esboza su gráfica.

6. (2p) Calcular solo lo que se indica:

- Dominio de $f(x) = \sqrt{-x - 2}$
- Recorrido de $f(x) = x^2 - 2x + 3$
- Simetría de $f(x) = \sin(2x)$
- Puntos de corte con los ejes de $f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$