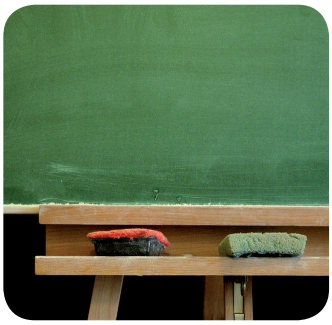
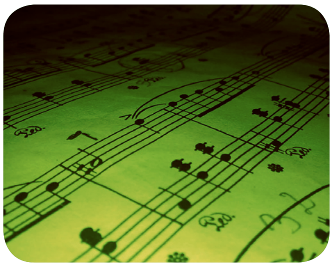
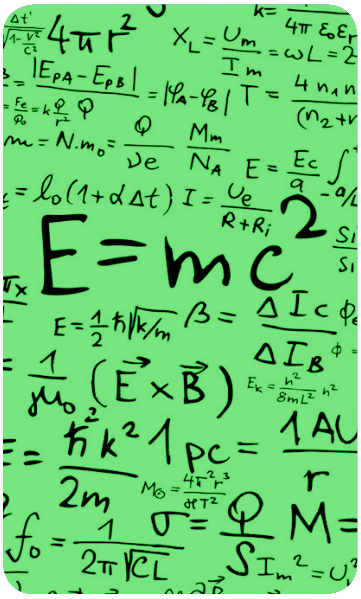






MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación de Profesorado y Educación / 15-16

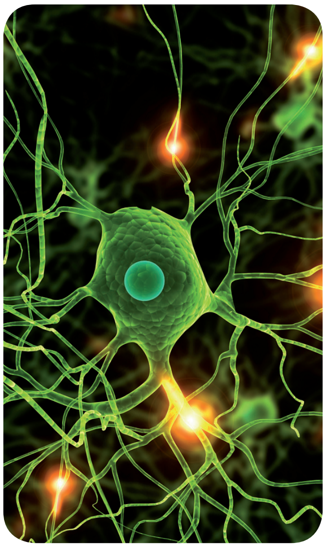
(MESOB)
Especialidad de Matemáticas

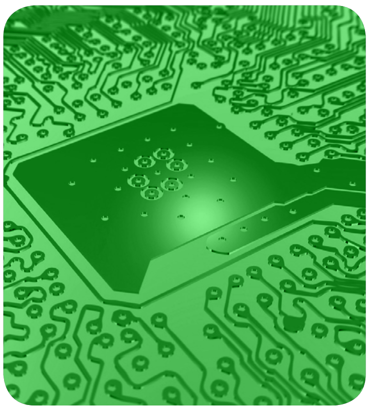
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Campus Internacional excelencia UAM CSIC+

Aprendizaje de la probabilidad a partir de ejemplos concretos: Taller de probabilidad

Aitor Hontoria Abecia





UAM EDICIONES

MÁSTER EN FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Título: **Aprendizaje de la probabilidad a partir de ejemplos concretos: Taller de probabilidad**

Autor: Aitor Hontoria Abecia

Tutor: Adolfo Quirós Gracián

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Curso: 2015/2016

"En el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a una interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico"

Efraim Fischbein

Agradecimientos.

A Isabel Grávalos y Adolfo Quirós, por darme libertad para realizar todo el trabajo, y por confiar en mí.

Y a Pepi, por toda su ayuda y su apoyo.

Indice

1. Sinopsis

En el presente Trabajo de Fin de Master[1] se exponen una serie de análisis, propuestas y reflexiones acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Probabilidad, y más concretamente de las posibles aplicaciones en el ámbito de la enseñanza secundaria.

En él se incluye gran parte del trabajo que realicé impartiendo la unidad didáctica[2] de Probabilidad para 1º de Bachillerato en el Colegio Cardenal Spinola de Madrid, como parte de las prácticas del módulo específico del Master en Enseñanza Secundaria Obligatoria[3] y Bachillerato[4]. El trabajo realizado se recoge en forma de propuesta didáctica basada en problemas de probabilidad.

2. Introducción

Recuerdo que en el tercer año de mi carrera de Físicas, cuando tuvimos nuestro primer contacto con la temida mecánica cuántica, me enfadé bastante. No sólo tenía que entender la dualidad onda-partícula, resolver ecuaciones en derivadas parciales y trabajar con espacios vectoriales complejos, sino que también tenía que dominar conceptos de probabilidad. Las tres primeras cuestiones, naturalmente, no se daban por conocidas y constituían gran parte de la(s) asignatura(s) de cuántica. Pero la probabilidad no, la probabilidad se obvia. Al llegar el tercer año de carrera nos descubren que la física no es tan determinista como creíamos y resulta que casi nadie domina la herramienta matemática que mejor describe lo no determinista.

Evidentemente no se me pasó por la cabeza exigir que en asignaturas de física cuántica se estudien las leyes de la probabilidad –suficiente tienen con lo suyo– pero ya entonces creía necesario reforzar su aprendizaje en la enseñanza secundaria. Y estoy seguro que la mayoría de estudiantes universitarios, muchos de los cuales se enfrentan a materias con fuerte carga estadística y probabilística en sus respectivas carreras –mucho más que en física–, estarían de acuerdo con estos postulados.

Me atrevería a afirmar que la visión general de los estudiantes que terminan la secundaria –yo mismo también tenía ésta sensación en su día, por qué negarlo– es que la Estadística y la Probabilidad son las materias menos importantes y más prescindibles del estudio de las

[1] En adelante TFM
[2] En adelante UD
[3] En adelante ESO
[4] En adelante MESOB

matemáticas. ¿Qué razones podrían tener para pensar algo así? ¿Acaso no han echado un vistazo a los currículos de alguno los grados universitarios que tienen en mente cursar? ¿O no son conscientes –o al menos se imaginan– que en la sociedad en la que vivimos la estadística y probabilidad tienen una importancia capital en sectores como los seguros, finanzas, pensiones, etc. e incluso en los medios de comunicación? No lo creo.

Visto que un alumno de secundaria no tiene ningún poder de decisión sobre lo que tiene que estudiar y lo que no, es natural que para crear su jerarquía de importancia sobre una materia utilice un razonamiento temporal. Es decir, 'cuanto menos tiempo le hemos dedicado, menos importante es. Los profesores sabrán por qué, que para algo llevamos haciéndoles caso toda la vida'. Pocos estudiantes encontraremos que consideren más importante la Probabilidad que el Álgebra, la Geometría o el Análisis. Efectivamente, el tiempo que se suele dedicar a la Estadística y la Probabilidad en la secundaria es estrictamente limitado. No es una obviedad, aunque estén incluidos en el currículos como cualquier otra rama, es bien sabido que normalmente son las primeras sacrificadas a reducirse –o incluso a eliminarse– si los calendarios no se cumplen, cosa que lamentablemente ocurre bastante a menudo. De hecho, en 1º de Bachillerato de Ciencias la Probabilidad suele reducirse al mínimo –como ocurrió en mi caso– y en algunas carreras universitarias –como en físicas, por ejemplo– se pasa 'de puntillas'. Consecuentemente, con frecuencia nos encontremos con la paradoja de que un estudiante de 1º de Bachillerato en la modalidad de Ciencias Sociales conoce más conceptos de estadística y probabilidad que muchos de los que hayan terminado una carrera científica, como era mi caso.

Por otra parte, es evidente que los universitarios españoles tienen un déficit de aprendizaje de muchos de los conceptos estadísticos y probabilísticos, como suceso aleatorio, equiprobabilidad, independencia, etc., y que, por consiguiente, desarrollan sesgos o heurísticos no estadísticos cuando se enfrentan a problemas cuya resolución en probabilística, como muestran algunos estudios, como los de Sáenz (1998) o Guisaola y Barragués (2002), entre otros.

No voy a entrar a valorar en profundidad las razones de la a mi juicio poca importancia curricular que tienen la estadística y la probabilidad en la secundaria –no es esa la finalidad de este TFM– pero sí que me gustaría poner de relieve algunas de las razones por las que sí están incluidos en el currículo y de por qué son de interés para la enseñanza:

- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva; hemos de ser capaces de usar los datos cuantitativos para controlar nuestros juicios e interpretar los de los demás; es importante adquirir un sentido de los métodos y razonamientos que permiten transformar estos datos para resolver problemas de decisión y efectuar predicciones.

- La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.

- Ayuda a comprender otros temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos (Batanero, 2000).

Y la que más me gusta a mí….

- La probabilidad y la estadística contribuyen a aportar una imagen mucho más equilibrada de la ciencia, que tradicionalmente ha presentado ante el alumno un carácter marcadamente determinista, en la cual todo era explicable en términos de causas y efectos (Guisaola y Barragués, 2002).

Me temo que el alcance de este trabajo no es suficiente para justificar o proponer una modificación curricular que eventualmente reforzaría la enseñanza de estas materias. No obstante, sí que considero necesario contextualizar su aprendizaje dentro de las circunstancias curriculares y remarcar sus potencialidades. Bajo mi punto de vista, es importante que los docentes –y también los alumnos– sean conscientes del contexto en el que enseñan/aprenden sus materias, ya que esto influirá positivamente en lograr un aprendizaje más significativo.

Asumir y conocer este contexto es fundamental para entender mejor el principal objetivo del presente TFM, que no es otro que una **propuesta didáctica para el estudio de la probabilidad en secundaria, basado en problemas.** Para ello, he considerado interesante incluir en el marco teórico un pequeño análisis histórico, unas reflexiones acerca del concepto de aleatoriedad y una revisión del marco curricular teórico, si bien en este último también incluyo alguna propuesta.

Todo el trabajo gira en torno a mi experiencia como docente en el Colegio Cardenal Spinola, donde tuve la oportunidad de diseñar e impartir parte de la UD de *Probabilidad,* con un grupo de 1º de Bachillerato.

3. Objetivos del Trabajo

Ante la realización del presente trabajo, me propongo los siguientes objetivos:

- Realizar un **Análisis Histórico** sobre la Teoría de la Probabilidad, remarcando problemas o discusiones que considero interesantes para la acción docente.
- Analizar y **reflexionar sobre el concepto de *Aleatoriedad*,** y de por qué este concepto es fundamental para trabajar con los principios de la Probabilidad.
- Realizar un **análisis del Marco Curricular teórico** que incluirá también alguna propuesta, que nos ayude a hacer más efectiva el trabajo con problemas.
- Realizar una **propuesta didáctica basada en problemas de probabilidad,** que incluirá reflexiones, comentarios o consejos acerca de cada problema.
- Evaluación de la propuesta, añadiendo eventuales mejoras y analizando los posibles errores de aplicación.

Como ya he mencionado, el núcleo del trabajo está basado en mi experiencia como docente de secundaria –que todavía es escasa– con todas las dificultades y contradicciones que eso conlleva. Con esta salvedad, y siendo consciente de que mi visión puede ser incompleta, considero que la finalidad ulterior de este trabajo es que **pudiese servir como herramienta útil para cualquier docente de secundaria.**

4. Marco Legal

Desde la entrada en vigor de la llamada Ley Orgánica Para la Mejora de la Calidad Educativa[5] en 2013 (BOE, 2013), la comunidad educativa se encuentra ante el difícil reto de perseverar en un cambio de modelo que en cierto sentido ya comenzó con la anterior ley de 2006 (Ley Orgánica de Educación[6]). La introducción de las competencias básicas y el trabajo para su desarrollo son ahora el principal objetivo educativo. Competencias como la lingüística, la matemática y las de ciencia y tecnología son preferenciales en su desarrollo. Además, aparece la Competencia Digital

[5] En adelante LOMCE
[6] En adelante LOE

(las famosas TIC's) como competencia propia. En este sentido, sólo con nuestra propuesta didáctica podemos desarrollar varias de estas competencias básicas.

La LOMCE no deroga la LOE sino que la modifica. Por consiguiente el marco legal al que nos tenemos que someter lo establecen las dos leyes. Además, si tenemos en cuenta que la LOMCE todavía no está plenamente desarrollada en la mayoría de los centros educativos del estado, y que la inestabilidad política amenaza con su posible derogación, podríamos de hecho haber utilizado como referencia legal la LOE. No obstante, toda la información curricular se ha extraído de la LOMCE.

El currículo de la ESO en la Comunidad de Madrid se establece en el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, publicado en el Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid el 20 de Mayo de 2015 (BOCM, 2015a). En él, para cada una de las materias, encontramos una introducción con orientaciones específicas de carácter metodológico y su contribución a la adquisición de las competencias básicas, los objetivos que deben ser alcanzados por los alumnos, los contenidos de los cursos que se imparten y los criterios de evaluación, que precisan el alcance de los contenidos y permiten valorar su grado de adquisición por los alumnos.

A pesar de que en el Decreto 52/2015, de 21 de mayo, en el BOCM se supone que se establece el currículo del Bachillerato para la Comunidad de Madrid (BOCM, 2015b), no encontramos el desarrollo curricular completo de las asignaturas de Matemáticas, por lo que en el presente TFM se tomará como referencia los contenidos básicos recogidos por el Boletín Oficial del Estado en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, publicado el 3 de Enero de 2015 (BOE, 2015).

5. Marco Teórico

Para enmarcar nuestra propuesta didáctica realizaremos una serie de consideraciones sobre la historia de la probabilidad, el estudio conceptual de 'lo aleatorio' y el análisis del marco curricular de probabilidad.

5.1 Algunos Problemas Históricos

Como ocurre con cualquier otra ciencia, **la historia de la probabilidad es la historia de su aprendizaje.** Para un docente echar un vistazo a las situaciones y problemas a los que se enfrentaron los pioneros de las matemáticas constituye un ejercicio de reflexión necesaria pero también supone una fuente de recursos didácticos muy interesantes. Por todo ello, considero que es importante incluir en este trabajo alguno de los hechos y problemas que se tradujeron en avances de la teoría de la probabilidad.

Naturalmente, la moderna teoría de la Probabilidad es el resultado de la unión de muchos esfuerzos materializados en continuos trabajos de cientos de autores a lo largo de los siglos, pero parece claro que las primeras soluciones de problemas que se basaban en conceptos probabilísticos se dieron durante el Renacimiento (s. XV – XVI). Grandes figuras, como **Luca Pacioli** (1445 – 1509), **Tartaglia** (alrededor de 1500 – 1557), **Gerolamo Cardano** (1501 – 1576) y, posteriormente **Galileo Galilei** (1564 – 1642), resolvieron diversos problemas concretos planteados por participantes en **juegos de azar,** sobre todo juegos con dados. Muchos de los problemas que estos hombres resolvieron son perfectamente trasladables al contexto del aula, y suponen un ejercicio de combinatoria básica y de aplicación de la regla de Laplace (véase la discusión en la propuesta didáctica de *La paradoja de los 3 dados* resuelto por Galileo) (Perero, 1994).

En esta época fue abordado por primera vez uno de los problemas históricos que, bajo mi punto de vista, refleja mejor el desarrollo de la teoría de la probabilidad y que puede tener un interesantísimo enfoque didáctico: *El Problema del Reparto de la Apuesta o del Juego Interrumpido.* El primero en abordarlo fue el fraile italiano Luca Pacioli en su obra *Summa de la arithmetica, geometría, proportioni, et proportionalitá* (1494), donde aparecía la siguiente versión del problema (García Cruz, 2000):

> *"Un grupo juega a la pelota de modo tal que se necesita un total de 60 tantos para ganar el juego. La apuesta es de 22 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando se queda con 50 tantos y el otro con 30. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando".*

Una formulación más general del mismo problema sería la siguiente:

> *Dos jugadores compiten por un premio que se asigna después de que uno de ellos haya ganado "n" partidas en un juego. En un determinado momento, se tiene que parar el juego, y un jugador lleva mayor número de partidas ganadas que el otro. ¿Cómo debe dividirse la apuesta entre los dos jugadores?*

La solución que propuso Pacioli fue la siguiente:

- La apuesta de cada bando es de 11 ducados => $\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{8}{11}$
- Luego $\frac{8}{11}$ equivalen a 22 ducados.

- Por lo tanto al bando ganador le corresponden $\frac{5}{8} * 22$= **13.75 Ducados**

Observemos que en la formulación del problema no se explicita que intervenga el azar, y la solución simplemente se basa en los puntos anotados por cada bando en el momento de la interrupción. El argumento de Pacioli sólo tiene en cuenta lo que ha ocurrido mientras se ha podido jugar.

Medio siglo después Tartaglia aborda el problema en su obra *Trattato generale di numeri et Misuri (1556).* En ella, recogía la solución de Pacioli y le hacía la siguiente objeción (Garcia Cruz, 2000):

“Supongamos que en un juego, un bando ha ganado 10 punto y el otro 0 puntos. En esta situación el bando que tiene 10 puntos debería recibir toda la apuesta, lo cual no tiene sentido.”

Tartaglia ofrece una solución alternativa que se basa en **la ventaja (o diferencia de puntos)** que lleva el bando que va ganando en el momento de la interrupción. En la formulación de Pacioli el bando A (el que va ganando) le lleva 20 puntos de ventaja al bando B.

- Total Puntos: 60. Diferencia: 20 => $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}; \frac{22}{3} = 7.33$
- El bando A recibe => $11 + 7.33 = \mathbf{18.33}$ **Ducados**
- El bando B recibe => $11 - 7.33 = \mathbf{3.66}$ **Ducados**

Con el método de Tartaglia el jugador que lleva ventaja recibe su apuesta más la parte remanente proporcional a su ventaja. Una vez más, en la resolución no interviene ningún razonamiento estocástico.

El problema también fue abordado por Girolamo Cardano en su obra *Practica arithmeticae generalis (1539).* En ella, critica la solución de Pacioli y observa que no se ha tenido en cuenta el número de tantos que a cada jugador le quedan por ganar, en la eventualidad de que continuara la partida. Aunque no fue capaz de proporcionar una solución satisfactoria, por primera vez señala un razonamiento basado en ‘lo que podría pasar’ y no en lo que ya ha sucedido. Además, Cardano fue el primero en tratar el problema de cómo deben establecerse las apuestas en los juegos de azar, en la obra *Liber de ludo aleae (1560).* En dicha obra, que básicamente se centra en el juego de los dados, aparecen por primera vez conceptos como *probabilidad, suceso elemental o esperanza matemática.* Aunque no los define con claridad, sí que establecía el significado de ‘juego justo’ –él hablaba de ‘dado honesto’ (García Cruz, 2000) – y señalaba que las apuestas variarán en proporción a la desviación (diferentes probabilidades) respecto de la igualdad (equiprobabilidad). Como menciona el propio Cardano (Basulto y Camuñez 2007):

"En todo juego el principio más fundamental es simplemente la igualdad de condiciones, esto es, de los contrincantes, de los mirones, del dinero, de la situación, del cubilete y del mismo dado. En la medida en que usted se aparte de la igualdad, si es a favor de su contrincante, usted es tonto, y si es al suyo propio, usted es injusto".

La resolución correcta del problema de la repartición de la apuesta lo encontramos en la célebre correspondencia entre los matemáticos franceses del siglo XVII **Blaise Pascal** (1623 – 1662) y **Pierre de Fermat** (1608 – 1665). Aunque se perdió la carta que contenía la formulación específica, en la solución hacían referencia a 'tiradas' o 'lances'. Este hecho me parece remarcable. En las anteriores formulaciones del problema se hace referencia a 'un juego' (en el caso de Pacioli, un 'juego de Pelota') pero en ningún momento se dice que dicho juego fuese azaroso. El razonamiento de Pascal fue el siguiente:

"*Para conocer el valor del reparto, cuando participan dos jugadores en tres tiradas cada uno 32 monedas en la apuesta. Supongamos que el primero de ambos tiene 2 puntos y el otro 1. Si ahora vuelven a lanzar (…) y el primero gana, 64 monedas le pertenecerán y si pierde, entonces sólo le pertenecerán 32 monedas. Si no desearan jugar en este punto, y desearan separarse, el primero podría argumentar "Tengo 32 seguras monedas, pues incluso si pierdo las recibiré. Las 32 restantes,* ***quizás las gane o quizás no, el riesgo es el mismo.*** *Por lo tanto, dividamos esas 32 restantes por la mitad, y dadme además las 32 que tengo seguras."*

El primero tendrá 48 monedas y el segundo 16."

Fermat aportó otro método de resolución, basándose exclusivamente en el número de lances que le falta a cada jugador para ganar. Si al primero le falta un lance, y al segundo dos lances, harán falta como mucho dos lances para el final de la partida, luego habrá que ver cómo se distribuyen los dos lances entre los dos jugadores. Esto es, cuántas ***combinaciones*** harán ganar al primero, cuántas al segundo, y dividir la apuesta de acuerdo con tal proporción (García Cruz, 2000). Las combinaciones posibles son AA, AB, BA, BB. 3 favorecen a A y sólo una a B, con lo cual el reparto se hará en proporción 3:1, llegando así a la misma solución que Pascal.

La correspondencia entre Pascal y Fermat suele considerarse como el punto de partida de la moderna *Teoría de la Probabilidad.* Es en estas cartas donde se empezaron a construir criterios analíticos sistemáticos que permitiesen medir con validez universal el concepto de probabilidad. La correspondencia comenzó cuando el **Caballero de Mere** (de nombre Antoine Gombaud (1607 – 1684), hombre de mundo, gran aficionado al juego y mejor observador (Corberán y Montes, 2000)), propuso a Pascal dos problemas relacionados con los juegos de azar. Uno era el del reparto de la apuesta y el otro, también adecuado para una clase de secundaria, se conoce directamente como *El Problema de los Dados del Caballero de Mere:*

En un juego consistente en lanzar repetidamente un par de dados, encontrar el menor número n de lanzamientos para que la probabilidad de obtener al menos un doble seis sea mayor que 0.5

La pregunta del caballero De Mere se justificaba por la discrepancia observada entre la realidad, deducida de su larga experiencia como jugador, y una antigua regla muy extendida entre los jugadores que afirmaba que n = 24 (Corberán y Montes, 2000).

A la hora de plantear este problema para alumnos de secundaria, quizás es mejor empezar calculando lo que el Caballero de Mere sabía por experiencia, esto es, *es más ventajoso (p>0.5) apostar por el resultado de obtener al menos un seis en una serie de cuatro lanzamientos de un dado.*

Comprobémoslo:

- Primero calculamos los posibles resultados de lanzar 4 veces un dado=> $6 * 6 * 6 * 6 = \mathbf{1296}$
- Calculamos todos los resultados que **no contienen ningún 6** => $5 * 5 * 5 * 5 = \mathbf{625}$
- Los que contienen un 6 serán: **1296 - 625 = 671**
- 671 > 625, con lo cual es más ventajoso apostar a obtener al menos un seis.

A partir de aquí Mere suponía que era igual de probable obtener un doble seis en 24 tiradas de dos dados. Razonaba así: "*apostar por 1 resultado de 6 en 4 lanzamientos será como hacerlo por 1 resultado de 6 x 6 = 36 en 4 x 6 = 24 lanzamientos*". ¿Es esto cierto?

- Dos dados en una tirada => $6 * 6 = 36$ resultados, de los cuales sólo uno es doble 6.
- Dos dados en 24 tiradas => $36 * 36 * \ldots .* 36 = 36^{24}$ posibles resultados
- Posibles resultados **sin ningún doble 6** => $35 * 35 * \ldots .* 35 = 35^{24}$
- Probabilidad **no doble 6** => $P = (\frac{35}{36})^{24} = 0.508$
- Probabilidad **sí doble 6** => $1 - 0.508 = 0.492 < 0.5$ Mere estaba equivocado…
- ¿Para 25 lanzamientos? $P = (\frac{35}{36})^{25} = 0.494$ Para 25 sí que es una apuesta ventajosa…

En el año 1656, un científico holandés admirador de Pascal y Fermat llamado **Cristiaan Huygens** (1629 – 1695) publicó lo que podríamos considerar el primer tratado sobre el cálculo de probabilidades de la historia, *De ratiociniis in ludo aleae* (El razonamiento en el Juego de Dados). Huygens resuelve el problema del Caballero de Mere y el del reparto de la apuesta, llegando a las mismas soluciones de Pascal y Fermat, pero añadiendo un concepto que resultará de vital importancia y cuya expresión es válida para cualquier cálculo que se pueda presentar, el llamado **expectatio.** De forma genérica lo definía así en la *Proposición III* de su tratado:

> "Sea p el número cualquiera de casos para a, sea q el número cualquiera de casos para b, tomando todos los casos igualmente posibles (proclivi), mi **expectatio** es $\frac{pa+qb}{p+q}$ "

El resto de las proposiciones las dedica a exponer situaciones y calcular su expectatio correspondiente. Huygens es el primero que introduce, en la historia de las matemáticas, la noción de **esperanza matemática,** a partir de la noción de juego equitativo (García Cruz, 2000). La esperanza matemática es tanto lo que espero ganar como el valor de la apuesta para tal ganancia.

En el siglo XVIII fue publicado el gran tratado de probabilidad *Ars Conjectandi* (El Arte de la Conjetura) por el matemático suizo **Jacob Bernouilli** (1655 – 1705). En la obra discute los trabajos de Huygens con la incorporación de comentarios propios, define la función de cuantía para un esquema dicotómico con "r" repeticiones (*Distribución Binomial*) y enuncia por primera vez la **Ley de los grandes Números.** También explica y amplía conceptos de **combinatoria** e insiste en su aplicación al cálculo de probabilidades.

En el año 1763 el inglés **Thomas Bayes (**1702 – 1761) publica *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of chances*, descubre un modelo que le permite expresar y demostrar el teorema que hoy denominamos de Bayes. Además se le considera el fundador de la probabilidad inversa, según la cual, a partir de cierta información muestral es posible conocer lo mucho o poco probable que es que la probabilidad de un suceso desconocido esté comprendido entre ciertos límites (García, 2000).

Durante los siglos XVIII - XIX muchos de los grandes matemáticos de la época hicieron contribuciones decisivas a la teoría de la probabilidad. Así, muchos conceptos y procedimientos como el de *Regresión Lineal, Mínimos Cuadrados (***Legendre),** *Distribución de Probabilidad Continua* **(Gauss)**, o la *demostración del Teorema Central del Límite* **(Laplace)** (García, 2000) fueron desarrollados en esta época, así como exposiciones más sencillas y sistemáticas de las teorías y problemas de siglos anteriores.

En el siglo XIX-XX la Teoría de la Probabilidad se asentó definitivamente, gracias a multitud de trabajos de diferentes autores (Edgeworth, Galton, Pearson, etc.). Destaca la llamada *Escuela Rusa de San Petersburgo,* con autores como **V.Y Buniakouskii** (1804 – 1889), introdujo la terminología que utilizamos hoy en día) o **A.N Kolmogorov** (1903 – 1987), que hizo la sistematización definitiva de la teoría axiomática de la probabilidad en 1933.

Durante el siglo XIX y XX se formularon algunos problemas cuyas **soluciones con claramente contrarias a la intuición.** Una posible herramienta didáctica es utilizar algunas de estas paradojas 'clásicas' para crear situaciones didácticas que sirvan para enfrentar a los estudiantes con sus intuiciones incorrectas y hacerlas evolucionar en forma positiva. El matemático francés **Joseph Bertrand** (1822 – 1900) escribió en 1889 *Calcul des probabilités,* donde encontramos números ejemplos de problemas de probabilidades en los cuales el resultado es contrario a la intuición. Por su posible adaptación a un nivel de secundaria, destacaría el siguiente problema, también llamado *Las cajas de Bertrand:*

> Tenemos tres cajas: una caja que contiene dos monedas de oro, una caja con dos monedas de plata, y una caja con una de cada tipo. Después de elegir una caja al azar se toma una moneda al azar, por ejemplo una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra también sea de oro?

No es un problema difícil para alguien que domine la probabilidad, pero creo es un problema muy interesante para plantear en un aula de secundaria y que la solución resultará paradójica para muchos alumnos (Batanero, Contreras, Díaz y Arteaga*, 2009).* Bertrand también propuso su famosa *Paradoja de Bertrand,* en la cual demostraba que las probabilidades pueden no estar bien determinadas si el mecanismo o método que produce la variable aleatoria no está claramente definido.

> Considere un triángulo equilátero inscrito en un círculo. Suponga que una cuerda del círculo es escogida aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que la cuerda sea mayor (en magnitud) que un lado del triángulo?

Las conclusiones de este problema son ciertamente sorprendentes y te invitan a reflexionar sobre 'lo aleatorio'. Aunque se pueda plantear una solución heurística a los alumnos con simuladores (las soluciones analíticas me parecen muy complicadas para secundaria, además de que se trata de probabilidades no discretas) creo que no es un problema demasiado adecuado para un aula de secundaria porque requiere un esfuerzo cognitivo quizás demasiado grande.

Otro gran ejemplo de paradoja probabilística es la llamada *Paradoja de Simpson* (1951), si bien fue estudiada antes por **George Udny Yule.** Los planteamientos del problema son puramente estadísticos pero creo que su reflexión se puede incluir en una clase de probabilidad (Contreras, Batanero, Cañadas y Gea, 2012). Su formulación clásica es la siguiente:

Supongamos dos hospitales A y B que realizan una cierta operación. El hospital B tiene mayor tasa de supervivencia. Sin embargo, si tenemos en cuenta los hombres y mujeres por separados, el hospital A tiene menor tasa de mortalidad en cada grupo. ¿Cómo es esto posible?

Este fenómeno muestra que en determinados casos se produce un cambio en la asociación o relación entre un par de variables, ya sean cualitativas o cuantitativas, cuando se controla el efecto de una tercera variable (Batanero et al*., 2009)*. El método más efectivo de plantear y trabajar este problema se basa en el estudio de una **tabla de contingencia.** Aunque el planteamiento se suele hacer sobre poblaciones (hombres-mujeres, mayores-jóvenes) el efecto de la paradoja de Simpson se puede observar en multitud de estadísticas. Un ejemplo de esta paradoja que sería adecuado para trasladar al aula sería el siguiente (que me perdonen los no futboleros):

Estadística de penaltis lanzados	Esta temporada			Otras temporadas		
Total	Lanz.	Goles	%	Lanz.	Goles	%
Frank Lampard	27	17	62,96%	16	14	87,50%
Fernando Torres	12	7	58,33%	31	26	83,87%

A la hora de decidir quién de estos dos jugadores tira el penalti decisivo, parece claro que a la vista de las estadísticas el entrenador se decidirá por Frank Lampard. Pero si sumamos los lanzamientos y goles totales de los dos subgrupos (esta temporada-otras temporadas) resulta que las conclusiones cambian:

Estadística de penaltis lanzados	Todas las temporadas		
Total	Lanz.	Goles	%
Frank Lampard	43	31	72,09%
Fernando Torres	43	33	76,74%

Ahora resulta que globalmente Fernando Torres tiene mejores guarismos. ¿Quién tiene entonces, mayor probabilidad de marcar el penalti?

La relación entre Estadística y Probabilidad está presente en muchos de los problemas reales que eventualmente trasladamos al aula, y creo que el conocimiento y debate de estas estadísticas es necesario para los estudiantes. Hay muchos ejemplos en problemas de cálculo de probabilidades donde conclusiones estadísticas incorrectas producen resultados probabilísticamente absurdos.

Por último, no quiero terminar este repaso histórico de problemas sin antes mencionar uno que, si bien todavía no está considerado 'histórico' por lo reciente de su planteamiento, creo que se ganará un hueco en el futuro, por lo espectacular de su resultado. Me estoy refiriendo al famoso ***Problema de Monty Hall.*** Aunque fue planteado en 1975 por **Steve Selvin** en la revista *The American Statistician* (aunque matemáticamente era idéntico al *Problema de los Tres Prisioneros,* planteado por **Martin Gardner** en 1959) no fue hasta 1990 cuando **Marylin vos Savant** resolvió este problema en su columna '*Ask Marylin'* en la revista *Parade* (Gill, 2011). Este problema está incluido como parte de mi propuesta didáctica y será convenientemente discutido en este TFM.

Después de este análisis histórico, creo que un docente puede sacar varias conclusiones, y algunas de ellas incluso compartirlas con sus alumnos.

- La historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica con frecuencia nos engaña.
- El estudio de la génesis y evolución de los conceptos matemáticos nos proporcionan una mejor y más profunda comprensión de los mismos.
- La historia es una fuente magnífica de recursos didácticos.
- Una mirada a la historia permite tomar conciencia de que los objetos probabilísticos no son inmutables, sino fruto del ingenio y la construcción humana para dar respuesta a situaciones problemáticas.
- La construcción de la teoría de la probabilidad no ha sido sencilla, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores lo que llevó al progreso de la misma.
- **Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos que deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo.**
- **Los obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos se reproducen, con cierta frecuencia, en los alumnos.**

5.2 Sobre lo Aleatorio

“Cuanto más difícil parece determinar por la razón lo que es incierto y sometido al azar, tanto más admirable parecerá la ciencia que consiga este resultado.”

Cristiaan Huygens

Si nos dirigimos a cualquier persona que tenga una mínima noción de lo que significa ‘aleatorio’ y de lo que significa ‘determinista’, le decimos ‘la Teoría de Probabilidades estudia fenómenos aleatorios’, es de esperar que comprenda que las conclusiones a las que se llegan usando dicha teoría no serán deterministas.

Ahora bien. Supongamos que te encuentras con unos amigos en una conversación informal y les planteas un problema de probabilidad, el de Monty Hall por ejemplo. Naturalmente, algunos pondrán cara rara y dejarán de escuchar, pero otros se interesarán e intentarán resolver el problema. Supongamos que después de una breve discusión les dices que la solución es cambiar de puerta, y les explicas cómo se llega a esta conclusión. Aunque entiendan el razonamiento y lo acepten, seguro que alguien no puede evitar decir *“Hombre, pero cambiando de puerta también puedes fallar…”.* Probablemente solo se trate de un pensamiento fugaz y no vaya más allá, pero es inevitable. Nos hablan de solución de un problema matemático y nuestra primera intuición es que tiene que ser exacta y unívoca.

Los errores de aplicación del cálculo de probabilidades y de compresión de las conclusiones son abundantes, y van mucho más allá de lo anecdótico de este ejemplo. Son numerosos los estudios que han puesto en evidencia los sesgos no estadísticos y los errores que cometen la mayoría de los estudiantes que acaban con éxito la educación secundaria cuando se enfrentan a problemas que implican procesos aleatorios (Sáenz 1998, Guisaola y Barragués 2002). Cuando nos tenemos que enfrentar a situaciones no deterministas, tendemos a hacer uso de estrategias o mecanismos no probabilísticos. Algunos de estos heurísticos no estadísticos son los siguientes (Sáenz 1998, Guisaola y Barragués 2002):

- **Heurístico de Accesibilidad**: Consiste en estimar la probabilidad de un suceso según la facilidad con que se recuerdan ejemplos en los que dicho suceso ocurrió o por la facilidad con que pueden generarse ejemplos en los que tal suceso ocurre.

- **Heurístico de Equiprobabilidad**: Se refiere a la creencia en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio.

- **Enfoque del Resultado Aislado**: Se refiere a la interpretación de la probabilidad de un suceso como la formulación de una predicción acerca de si tal suceso ocurrirá o no en el siguiente experimento. Bajo esta interpretación los sujetos tienden a buscar explicaciones causales en lugar de aleatorias a la ocurrencia de resultados inesperados y a la variabilidad de los fenómenos aleatorios.

- **Sesgo Determinista:** Se interpreta como la supremacía del pensamiento causal sobre el razonamiento probabilístico.

Algunas de estos mecanismos son adquiridos a través de las experiencias de la vida cotidiana, tienen un valor práctico, es decir, son recursos de enjuiciamiento o decisión, y son persistentes y sistemáticas. El sesgo determinista también tiene su origen en el enfoque mayoritariamente causal que se da en la enseñanza científica. El alumno va construyendo una concepción del mundo determinista y causal que puede impedir el desarrollo del pensamiento sobre el azar y la incertidumbre, sobre todo si la ciencia estadística se enseña tardía y escasamente (Sáenz, 1998).

Todos estos heurísticos tienen en común una concepción errónea o incompleta de lo que implica un proceso aleatorio. El azar, lo indeterminado y la incertidumbre tienen connotaciones (no predictible, suerte, supersticiones, etc.) que no se relacionan precisamente con lo típicamente matemático y científico. Sin duda aumentar y mejorar la educación estadística y probabilística ayudaría a disminuir estos sesgos. No obstante, considero necesario hacer unos comentarios sobre lo que entendemos por aleatoriedad, la cual, junto con la idea de probabilidad, es el punto de partida del cálculo de probabilidades.

Las expresiones "experimento aleatorio", "suceso aleatorio” o términos como "azar" y "aleatoriamente" aparecen con frecuencia en los manuales escolares. Pero su significado, al referirse a una entidad abstracta, no queda unívoca y nítidamente determinado, lo cual creará dificultades de comprensión en los estudiantes (Batanero y Serrano, 1995). Podríamos basarnos en la mera definición matemática, pero es la **noción** lo que interesa a nivel educativo. Las diversas situaciones problemáticas y las prácticas que adoptan las personas para resolverlas en distintas instituciones y momentos históricos aportan rasgos característicos de las nociones que en ellas intervienen, los cuales deben ser tenidos en cuenta en la enseñanza. En las distintas épocas históricas la noción de aleatoriedad se ha interpretado de forma diferente e, incluso en la actualidad, se resiste a una definición sencilla que permita determinar con nitidez si un suceso o una secuencia de sucesos pueden considerarse aleatorios. Hay tres modelos básicos de procesos que se emplean para generar secuencias aleatorias (Batanero y Serrano, 1995):

- *Dispositivos físicos*: Ciertos procesos físicos pueden generar resultados aleatorios, como por ejemplo, elegir a ciegas una bola de una urna llena de bolas de distinto color, dados, ruletas, bombos con fichas, etc. Es el sistema más antiguo, familiar y natural de obtener tales resultados aleatorios y el que típicamente utilizamos en clase con nuestros alumnos. Sin embargo, es muy difícil conseguir construir dispositivos que aseguren la aleatoriedad física perfecta, por ejemplo, asegurar que un dado asigne exactamente una probabilidad 1/6 a cada una de sus caras. No es difícil encontrar controversias generadas sobre la generación aleatoria de resultados con un determinado dispositivo físico. (Véase discusión sobre la equiprobabilidad del último sorteo para elegir a los excedentes de cupo del servicio militar en España en 1997 (Corberán y Montes, 2000) (Díaz-Cordovés y Alonso, 2000)).

- *Tablas de Números Aleatorios:* Nacieron en el siglo XIX entre otras cosas para crear rápidamente secuencias aleatorias largas. Hay varias tablas famosas, como la publicó la corporación RAND "Un millón de dígitos aleatorios" en 1955 (Batanero y Serrano, 1995).

- *Números Pseudoaleatorios:* Con ayuda de un algoritmo de ordenador, se produce una secuencia numérica que puede ser empleada como aleatoria para los propósitos prácticos.

A pesar de que estos métodos en principio generan sucesiones aleatorias, todavía no hay un método que nos asegure unívocamente que una sucesión es efectivamente aleatoria. Ha habido diferentes enfoques (Algoritmos de Selección de **Von Mises,** Complejidad Absoluta de **Kolmogorov** (Batanero y Serrano, 1995)) pero ninguno es satisfactorio para definir la 'aleatoriedad perfecta'. Es curioso que, a pesar de contar con una axiomática consistente, prosiguen las controversias sobre la interpretación de conceptos básicos.

Desde el punto de vista educativo, considero que puede sernos de utilidad transmitir la noción de 'lo aleatorio' como aquello cuyas leyes, aunque en principio deterministas, sean demasiado complejas de manera de que el resultado de un experimento se considere impredecible. De hecho esto ocurre en el tratamiento científico que se le da a la Meteorología, por ejemplo, o a la Teoría Cinética de Los Gases. Incluso al lanzamiento de una moneda. Si conociésemos con total precisión la fuerza y el momento angular del golpeo de tu dedo, así como el peso y el tamaño exacto de la moneda, ¿No seríamos, entonces, capaces de predecir si saldrá cara o cruz? En este sentido, una 'definición' un tanto pragmática de lo aleatorio sería:

'Un fenómeno se considera aleatorio si se comporta de acuerdo al cálculo de probabilidades.'

Aunque de hecho resulta paradójico si tenemos en cuenta que, por definición, la Teoría de Probabilidades es la parte de las matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios. El pez que se muerde la cola.

En definitiva, si para la comunidad científica es complicado tratar 'de lo aleatorio' con más razón tenemos que ser cautelosos, graduales y progresivos cuando queramos que nuestros alumnos asuman los rasgos característicos de estas situaciones.

5.3 Marco Curricular. Introducción de Conceptos.

Con la nueva ley educativa (LOMCE) el estudio de la Estadística y Probabilidad se incluye en el currículo de la asignatura de Matemáticas (en todas sus 'variantes', aplicadas/académicas (3º y 4º de ESO), aplicadas a las Ciencias Sociales en Bachillerato) **en todos los cursos de enseñanza secundaria** (BOE, 2015)). El cálculo de probabilidades propiamente dicho y el estudio de sucesos aleatorios (equiprobabilidad, espacio muestral, tablas de contingencia, diagramas de árbol, regla de Laplace, etc.) se inicia en 2º de ESO y se desarrolla y amplia en los sucesivos cursos de la ESO (combinatoria, independencia de sucesos, probabilidad condicionada) como así lo establece el Decreto 48/2015 (BOCM ,2015a).

La propuesta didáctica que se expone en este TFM está diseñada para impartirla a alumnos de **1º de Bachillerato en la modalidad de Ciencias Sociales**, y por tanto utiliza elementos del currículo de dicho curso (aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades, experimentos simples y compuestos, probabilidad condicionada, dependencia e independencia de sucesos). No obstante, podríamos considerar que ampliamos sustancialmente el estudio y aplicaciones de algunos conceptos, como el de *probabilidad condicionada* o el *Teorema de Bayes* (que directamente no aparece en el currículo), y por tanto está enfocado a preparar algunos de los problemas de probabilidad que se encontrarán en la *Prueba de Acceso a la Universidad*. A pesar de ello, considero que algunos de los problemas que incluyo en esta propuesta, así como metodologías o recursos pueden ser útiles también para trabajar en otros cursos de secundaria obligatoria.

Los objetivos didácticos de este TFM son los siguientes:

- Reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico, su desarrollo y evolución (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007)

- Análisis y reflexión sobre el conocimiento común y especializado del contenido por parte del docente.

- Análisis del currículo, situaciones didácticas y metodologías de enseñanza en el ámbito del aula.

- Exploración de diferentes metodologías y recursos didácticos activos, exploratorios, manipulativos y por descubrimiento, que facilite la comprensión de la noción de aleatoriedad y de sus propiedades.

- Estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas que permita orientar mejor la tarea de enseñanza y evaluación del aprendizaje.

- Análisis y reflexión sobre los problemas propuestos a los alumnos.

Eliminar algunos de los sesgos de razonamiento no estadístico que describimos en el anterior apartado de este trabajo (aquellos descritos por Sáenz (1998) o Guisaola y Barragués (2002), entre otros) se me antoja excesivamente ambicioso para una propuesta didáctica como esta. La modificación de esos razonamientos probablemente se tendrá que abordar en un ámbito más amplio y con otro ritmo de maduración. No obstante, humildemente considero que esta propuesta sí que puede ayudar a disminuir otros sesgos más específicos, sobre todo aquellos relacionados con la probabilidad condicional y el razonamiento bayesiano, dado que en la mayoría de los problemas se trabajan estos conceptos. Algunos de estos sesgos han sido descritos (Díaz y de la Fuente, 2005):

- *Confusión entre Independencia e Incompatibilidad*: Creer que dos sucesos son independientes si son excluyentes. Este error puede ser inducido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que "independiente" puede significar, a veces, separado.

- *Intercambio de sucesos en la probabilidad condicional*: Son muchos los estudiantes que no diferencian entre $P(A|B)$ y $P(B|A)$. Por ejemplo, probabilidad de que una prueba médica sea positiva si se está enfermo y la de estar enfermo si la prueba es positiva.

- *Confusión de probabilidad condicional y conjunta:* Es decir, confundir $P(A \cap B)$ y $P(A|B)$. Este error principalmente es debido a la dificultad de comprensión de la sintaxis del enunciado.

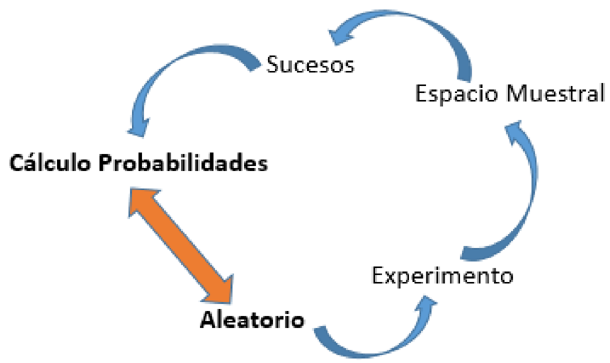
- *Condicionamiento y Temporalidad*: Consiste en suponer que el suceso condicionante en la probabilidad condicional ha de preceder temporalmente al condicionado. Es también conocida como la *falacia del eje temporal,* y puede causar serias dificultades de comprensión.

➢ Razonamiento Bayesiano: Las limitaciones en la comprensión de los enunciados de los problemas relativos al Teorema de Bayes son debidas, entre otras razones, a la forma verbal en que están expresados y a la cantidad de datos y condiciones involucradas en los mismos.

El grueso de la propuesta está basado en la resolución y discusión de los problemas, pero he considerado oportuno **incluir en el marco teórico una introducción a los conceptos fundamentales de la probabilidad**, muchos de los cuales se estudian sistemáticamente en los sucesivos cursos de secundaria. A pesar de ello, es perfectamente plausible que una parte significativa de los alumnos presente deficiencias en el aprendizaje de dichos conceptos, o como poco necesiten un buen repaso que les refresque algunas ideas. Por eso es necesaria la (re)introducción de muchos de estos conceptos que, si bien en esencia son los mismos que ya estudiaron otros años, intentaremos presentar con más generalidad y mayor grado de abstracción.

Como reglas generales para la introducción de estos conceptos, me gustaría enfatizar dos aspectos:

❖ Uso sistemático de lenguaje recurrente. Como ya hemos discutido anteriormente, el concepto de lo aleatorio puede resultar difícil de definir y de afrontar. Por ello intentaremos utilizar un lenguaje apropiado y recurrente, de manera que el alumno relacione lo aleatorio con **experimento, suceso, espacio muestral** y por último con el **cálculo de probabilidades.**



❖ Se intentará en todo momento que el aprendizaje de los conceptos se realice **con una metodología constructivista,** de lo concreto a lo general, de manera que se intentará introducir los conceptos a partir de ejemplos sencillos que sean accesibles para los alumnos.

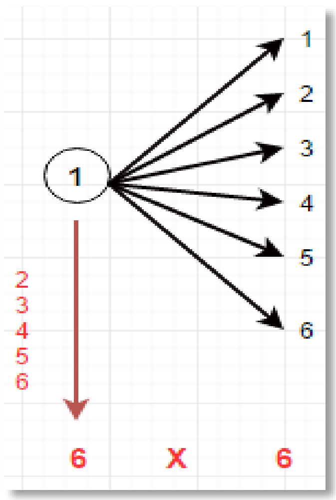
En este trabajo incluiré la propuesta de introducción de los siguientes conceptos: **Combinatoria, Sucesos Aleatorios, Algebra de Sucesos, Probabilidad y Regla de Laplace, Probabilidad Condicionada, Ley del Producto y Teorema de Bayes,** todos ellos basados en mi experiencia como docente en un grupo de 1º de Bachillerato.

Combinatoria

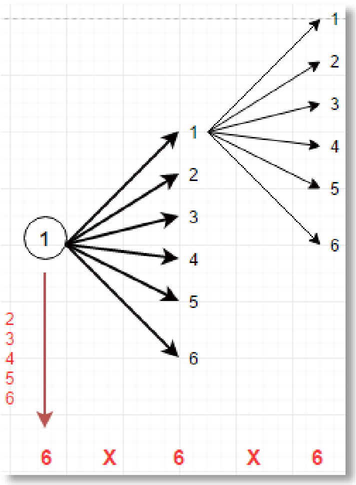
Es evidente que el dominio de la combinatoria es fundamental para el cálculo de probabilidades. Por su importancia y dificultad, normalmente su estudio se incluye en una UD diferente (y anterior) a la de probabilidad. En mi caso no fue así, y tuvimos que realizar una rápida instrucción previa para recordar algunos aspectos fundamentales del **cálculo de posibilidades.**

Las claves del cálculo combinatorio ya se incluyen en cursos anteriores (en 4º de ESO se estudia bastante en profundidad) pero seguramente los estudiantes necesiten un repaso de los conceptos principales. Para ello, podemos aprovechar para incluir metodologías e ideas que sean recurrentes en el cálculo de probabilidades.

Por ejemplo, se puede plantear como ejercicio: *¿Cuántos resultados posibles hay al lanzar dos dados?* Como probablemente no se acuerden del cálculo de variaciones con repetición, podemos deducir su cálculo mediante un **diagrama de árbol.** Tomamos el caso de que el primer dado haya salido un 1 y contamos las posibilidades.



Con el mismo diagrama de árbol podemos deducir fácilmente cuántas posibilidades hay cuando lanzamos 3 dados:

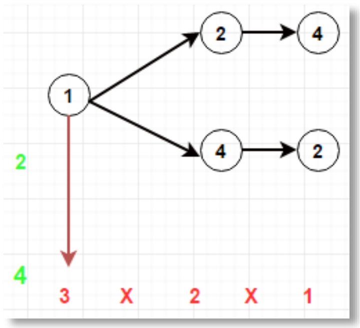


Y ya podemos ver la regla de recurrencia que sigue y deducir la fórmula general, que llamaremos **variaciones con repetición:**

$$VR_n^m = m^n$$

Con los diagramas de árbol podemos deducir la mayoría de las fórmulas necesarias para el cálculo combinatorio. Así, podremos preguntar *¿Cuántos números diferentes sin cifras repetidas se pueden formar las cifras 4, 2 y 1?*

Podremos continuar poniendo ejemplos hasta descubrir las diferentes recurrencias y fórmulas. De manera general, si llamamos *m* al número de elementos disponibles y *n* al número de elementos que tomamos, podemos deducir el tipo de combinatoria con el DIAGRAMA 1:



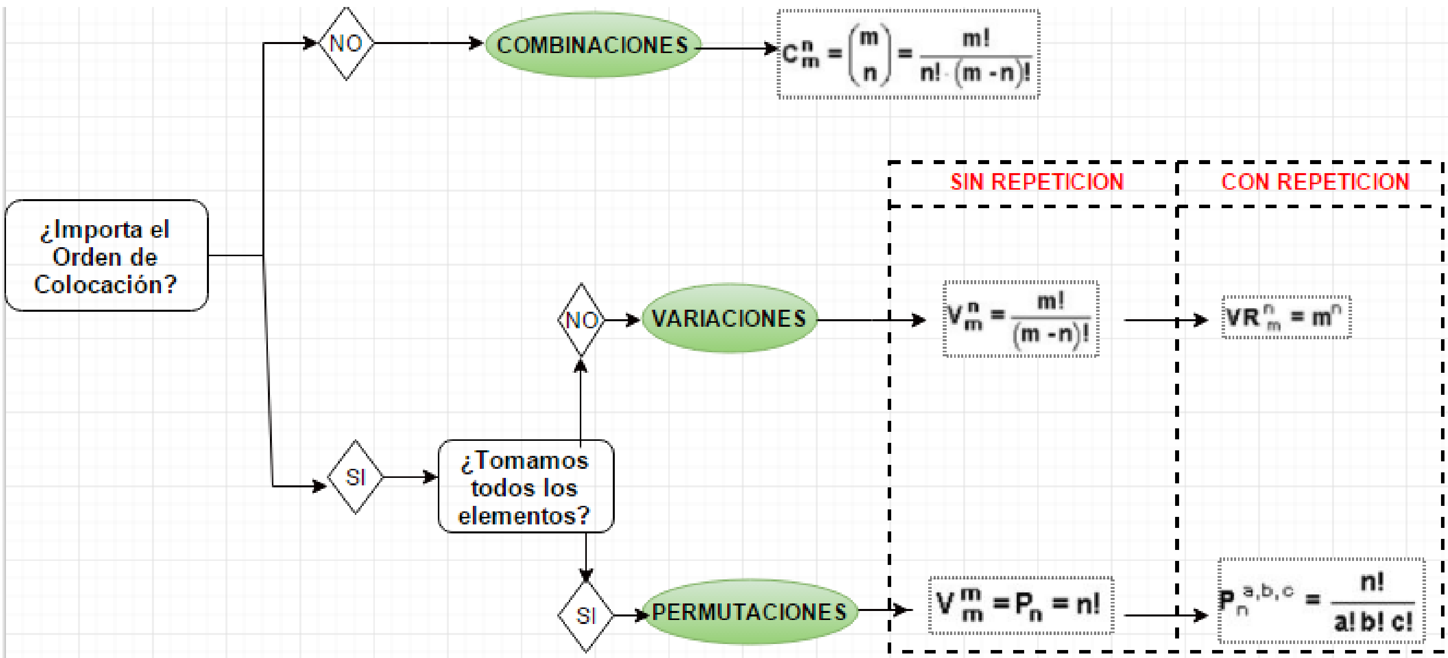


DIAGRAMA 1: Combinaciones, Permutaciones y Variaciones

Es interesante deducir y razonar con los alumnos las fórmulas de la combinatoria y usar diagramas de árbol considero que es una buena idea. Es una manera muy eficaz de organizar tus datos y 'barrer' todas las posibilidades. No obstante, creo que una vez han sido deducidas todas las fórmulas, volver a realizar diagramas de árbol es contraproducente y poco eficaz **cuando nos enfrentemos a un problema puramente combinatorio.** Por eso, considero muy útil para los alumnos el DIAGRAMA 1.

Sucesos Aleatorios. Algebra de sucesos

La noción de suceso aleatorio va a ir siempre de la mano de la de **experimento aleatorio.** Partimos de la base de que no podemos predecir el resultado de un experimento, pero sí que conocemos sus **sucesos elementales,** y consecuentemente su **espacio muestral:**

- **Suceso Elemental:** Cada uno de los posibles resultados medibles y diferenciables de un experimento aleatorio.
- **Espacio Muestral:** Conjunto de todos los sucesos elementales.

Así, ante el experimento aleatorio '*Lanzamos un dado'* conocemos sus sucesos elementales como A_i =1, 2, 3, 4, 5 y 6 y su espacio muestral como E= {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

También definimos:

- **Suceso compuesto:** Suceso formado por varios sucesos elementales.

Así, y siguiendo con el ejemplo del experimento '*Lanzamos un dado'*, podemos definir los sucesos **A ≡ '*Menor que 5'*** y **B ≡ 'Par'**, que estarán formados por los siguientes sucesos elementales:

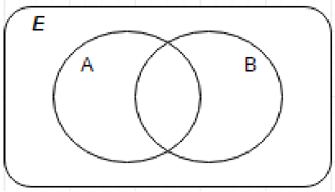
$$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 4\}} \;\; ; \quad \boldsymbol{B = \{2, 4, 6\}}$$

También definimos el **contrario de un suceso** $\overline{\boldsymbol{A}}$ como el conjunto de sucesos que no se incluyen en $\boldsymbol{A}$, haciendo énfasis en que $\overline{\boldsymbol{A}}$ no significa '*lo contrario de A'* sino simplemente '*no A'.* Siguiendo con el ejemplo de arriba:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\{5, 6\}} \;\; ; \quad \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\{1, 3, 5\}}$$

Este tipo de ejercicios son clásicos y son los que típicamente realizan en la ESO, por lo que en principio no deberían entrañar demasiada dificultad para los alumnos.

Para introducir las operaciones con sucesos y trabajar con la llamada **algebra de sucesos** y deducir sus conclusiones trabajaremos con **Diagramas de Veen,** donde el *conjunto universal* U representa todo el espacio muestral E, con una partición que representa al suceso A y otra en un suceso B.

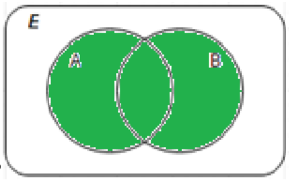


Con este diagrama podremos deducir de manera general importantes propiedades de los sucesos aleatorios y de la probabilidad en general. El trabajo con este diagrama es bastante intuitivo y los alumnos suelen entender bien los conceptos gráficamente. Existen recursos didácticos en internet muy interesantes y potentes, que permiten al alumno explorar las operaciones con sucesos de una manera dinámica e interactiva (Contreras, Diaz y Batanero, 2009). El Diagrama de Venn es sencillo y se puede dibujar en la pizarra tradicional fácilmente. Ayudándonos del diagrama definimos:

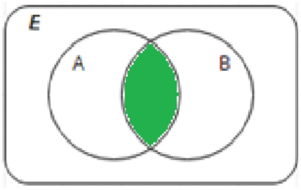
- **Unión de Sucesos** (∪)**:** Se define 'A unión B' ($\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$) como el conjunto de sucesos elementales que o bien se dan en A, o bien se dan en B. Lo identificamos con la conjunción **Ó.**

- **Intersección de Sucesos** (∩)**:** Se define 'A intersección B' ($\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$) como el conjuntos de sucesos elementales que se dan en A y en B. Lo identificamos con la conjunción **Y.**

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$

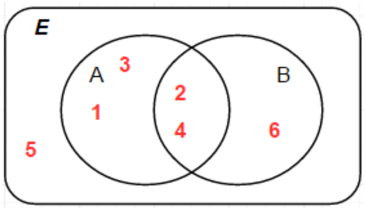


$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$



Para dibujar las áreas correspondientes, se puede proponer que los alumnos dibujen con líneas verticales el área correspondiente a **A** y con líneas horizontales el área de **B.** La intersección $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ corresponderá con el área que haya quedado dibujada 'a cuadros' (líneas verticales + horizontales). La unión $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ corresponderá con el área que **no** esté en blanco.

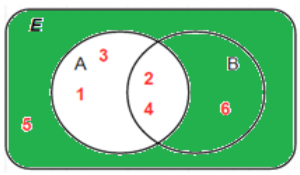
Siguiendo con el ejemplo del experimento '*Lanzamos un dado*', con los sucesos A y B que habíamos definido antes, podemos distribuir los sucesos elementales en el diagrama como corresponde:



Y se ve fácilmente que:

- $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{6}\}$
- $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{2}, \boldsymbol{4}\}$

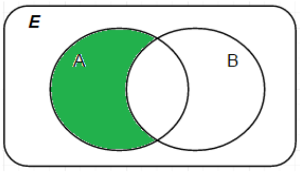
También podemos deducir el suceso $\overline{\boldsymbol{A}} = \{\boldsymbol{5}, \boldsymbol{6}\}$ de la siguiente manera:



Cuando dos sucesos A y B cualesquiera cumplen que $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$ ($\emptyset$ se lee ‘vacío’, no tienen nada en común), se dice que los sucesos A y B son **incompatibles.** Dos sucesos elementales son siempre incompatibles.

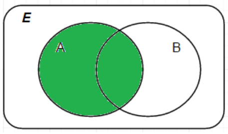
- Definimos **suceso diferencia** $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$ como el conjunto de elementos de ***A*** que no son de ***B:***

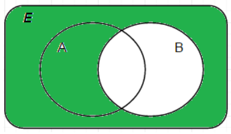
Gráficamente: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$



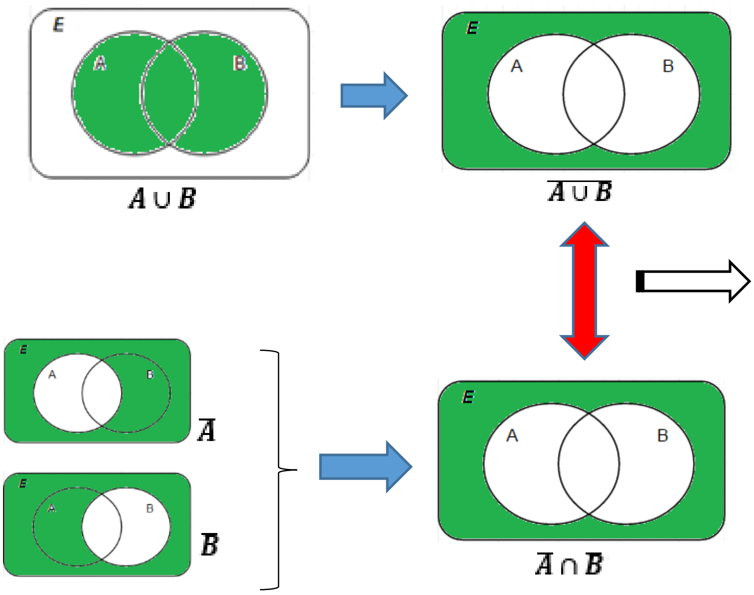
Y deducimos que:

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$$





Con estos diagramas también podemos deducir fácilmente las *Leyes de De Morgan:*



$$\boxed{\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}}$$

Primera Ley de De Morgan

La segunda Ley de De Morgan se deduce de manera similiar:

$$\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$$

Probabilidad y Regla de Laplace

La regla de Laplace y la función de probabilidad ya la estudiaron en cursos anteriores, por lo que su introducción no supone mayor dificultad para los alumnos. Podemos definir el experimento, ‘*Elijo al azar un alumno de esta clase’,* y con los siguientes datos (reales):

Chicos	Chicas	**Total**
8	13	21

Definimos los sucesos (los sucesos siempre se denotan con letras mayúsculas): **A≡’Ser chico’ ; B≡’Ser chica’.** Y preguntamos:

¿Qué probabilidad hay de que elija a un chico? ¿Y a una chica?

La mayoría de los alumnos reconocerán la situación y contestarán $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{21}}$; $\boldsymbol{P(B)} = \frac{\boldsymbol{13}}{\boldsymbol{21}}$.

Este momento es idóneo para predicar ser estrictos con la notación y dejar claro que $P(A) \neq A$ y que en este ejemplo **jamás** pondríamos $\boldsymbol{A = \frac{8}{21}}$. En general, los alumnos tienen una intuición de lo que es **regla de Laplace,** pero no reconocen el nombre ni tampoco saben definirla correctamente.

$$P(A) = \frac{N^{\underline{o}}\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{N^{\underline{o}}\ de\ casos\ posibles}$$

Aquí podemos dejar claro que la regla de Laplace tal cual la hemos usado sólo es correcta cuando se trata de un experimento **regular,** esto es, **cuando todos los sucesos elementales de nuestro experimento sean equiprobables.** En nuestro ejemplo '*como la extracción de un alumno es al azar, todos los alumnos tenemos la misma probabilidad de ser elegidos.'* Con la regla de Laplace definimos la **función probabilidad** e, implícitamente nuestra noción de 'probabilidad' como 'lo favorable' entre 'lo posible'. De esta función $P(A)$ se deducen rápidamente las propiedades más significativas.

- $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$. Si $P(A) = 1$ el suceso es **seguro.** Si $P(A) = 0$ el suceso es **imposible.**
- $\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$
- $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ **=>** Esta propiedad se intuye fácil con los diagramas.

Esta noción de 'probabilidad' tenemos que complementarla con la **teoría de los grandes números**. Para introducirla podemos mostrarles y discutir los datos que recogió el matemático **John Kerrich** (1903 – 1985), que mientras estaba preso en la 2ª Guerra Mundial anotó los resultados de lanzar 10.000 veces una moneda.

Nº de lanzamientos	10	30	5000	10000
Caras	4	17	2523	5067
Caras/Lanzamientos	0,4	0,56	0,507	0,5067

Si repetimos un experimento aleatorio en igualdad de condiciones la tendencia a largo plazo de cada uno de los resultados es predecible, y esa tendencia tiene que coincidir (asintóticamente) con la probabilidad calculada. La discusión de estos resultados con los alumnos puede ser interesante y se les pueden plantear preguntas del tipo '*¿Qué es más fácil, que me salgan 4 caras de 10 lanzamientos o 40 caras de 100 lanzamientos?'* . También podríamos a empezar a usar coletillas del tipo '*Yo no apuesto nada a menos de 100 repeticiones.'*

Para trabajar con la regla de Laplace, podemos proponer el siguiente ejercicio clásico:

- *Calcula la probabilidad de extraer un caballo de una baraja española.*

- *Si la primera extracción fue un caballo y no reemplazamos la carta, ¿Qué probabilidad hay de que la segunda extracción sea otra vez un caballo?*

Probabilidad Condicionada

La probabilidad condicionada es el concepto más complejo que introducimos a los alumnos en esta propuesta didáctica. Para ello echaremos mano de los conceptos ya estudiados de álgebra de sucesos y la regla de Laplace. Partimos del mismo experimento aleatorio '*Elijo al azar un alumno de esta clase',* pero añadimos más datos (también reales de clase) y los organizamos en una **tabla de contingencia** de la siguiente manera:

	Chicos	Chicas	Total
Moreno	6	8	**14**
No moreno	2	5	**7**
Total	**8**	**13**	**21**

Definimos los sucesos:

A ≡ 'Ser chico' **B ≡'Ser chica'**

M ≡'Ser Moreno' **N ≡'No Ser moreno'**

Y preguntamos algunas cuestiones que resolverán con la regla de Laplace, intentando ser estrictos son la notación:

- *¿Qué probabilidad hay de que la persona sea morena?*

$$P(M) = \frac{Nº\ total\ personas\ morenas}{Nº\ total\ personas} = \frac{14}{21} = 0.66$$

- *¿Qué probabilidad de que sea morena **y** chica?*

$$P(M \cap B) = \frac{Nº\ personas\ chicas\ morenas}{Nº\ total\ personas} = \frac{8}{21} = 0.38$$

- *¿Qué probabilidad de que la persona sea no morena **ó** chico?*

$$P(N \cup A) = \frac{Nº\ personas\ no\ morenas + Nº\ de\ chicos\ morenos}{Nº\ total\ personas} = \frac{7+2}{21} = \frac{9}{21} = 0.43$$

Este tipo de cuestiones no son obvias para la mayoría de los alumnos y requiere atención por su parte, pero con la tabla de contingencia delante, los cálculos acaban saliendo.

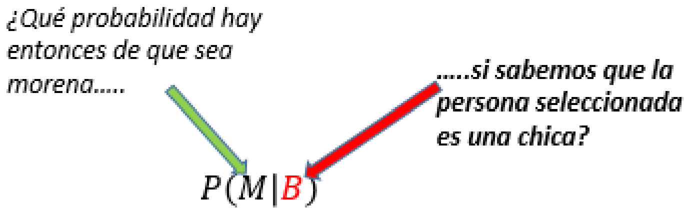
Cuando estén todas las dudas resueltas, procedemos a formular la siguiente pregunta:

- ***Si sabemos que la persona seleccionada es una chica,*** *¿Qué probabilidad hay entonces de que sea morena?*

$$P(M|B) = \frac{Nº\ personas\ chicas\ morenas}{Nº\ total\ \boldsymbol{chicas}} = \frac{8}{13} = 0.61$$

El nº de casos posibles ha variado. Antes el denominador era el número total de alumnos (21) y ahora el número de chicas (13). Esto los alumnos lo vieron bien.

Ojo a la nueva notación…



Para completar la introducción de la probabilidad condicionada y definirla formalmente, volvemos a nuestro experimento '*Lanzamos un dado'* con los mismos sucesos que habíamos definido:

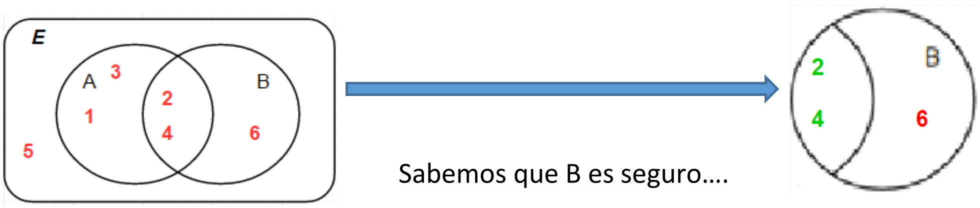
definido:	A ≡ 'Menor que 5'	A={1, 2, 3, 4]	$A \cap B = \{2, 4\}$
	B ≡'Par'	B={2, 4, 6]	$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

Calculamos fácilmente: $P(A) = 4/6$; $P(B) = 3/6$; $P(A \cap B) = 2/6$; $P(A \cup B) = 5/6$

Y hacemos la siguiente pregunta:

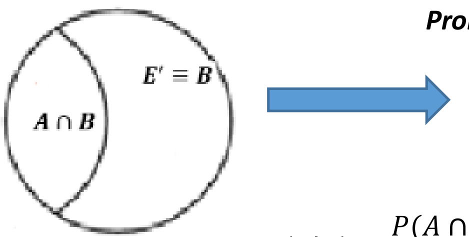
- *¿Qué probabilidad hay de que el resultado sea menor que 5* ***si sabemos que es par?*** *Es decir, ¿Cuánto vale $P(A|B)$?*

Para su cálculo echaremos mano del diagrama rectangular y de la regla de Laplace:



$$P(A|B) = \frac{N^{\underline{o}}\ casos\ favorables}{N^{\underline{o}}\ casos\ posibles} = \frac{\{2,4\}}{\{2,4,6\}} = \frac{2}{3}$$

El **espacio muestral** (los casos posibles) se modifica $E \rightarrow \boldsymbol{E'} \equiv \boldsymbol{B}$ y los casos favorables corresponden a la intersección $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$**:**

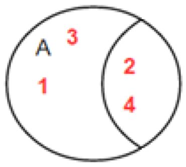


Probabilidad de A condicionado a B

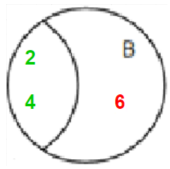
$$\boxed{\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B\,)}{P(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Es importante hacer el ejercicio inverso para comprobar que $P(B|A)$ no es lo mismo que $P(A|B)$:



$$\boldsymbol{P(A|B) \neq P(B|A)}$$



$$P(B|A) = \frac{\{2,4\}}{\{1,2,3,4\}} = \frac{1}{2} \qquad\qquad P(A|B) = \frac{\{2,4\}}{\{2,4,6\}} = \frac{2}{3}$$

Regla del Producto y Teorema de Bayes

Una vez conocidos los fundamentos de la probabilidad condicionada, es fácil deducir la **regla del producto**, solo con despejar $P(A \cap B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B\,)}{P(B)} \longrightarrow \boldsymbol{P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)}$$

Es posible que a priori los alumnos no entiendan la utilidad de la regla del producto. Podemos alegar que en muchos problemas nos van a dar la probabilidad condicionada para luego pedirnos la intersección.

También aprovechamos para definir los **sucesos independientes.** Dos sucesos A y B son independientes cuando la probabilidad de cada uno de ellos no está influida porque el otro suceso ocurra o no, es decir:

$$P(A|B) = P(A) \longrightarrow \boldsymbol{P(B) * P(A) = P(A \cap B\,)}$$

Por ejemplo, en el experimento '*Lanzo dos monedas, una de cobre y otra de zinc, a la vez*' yo podría definir dos sucesos A y B como: **A ≡ 'Sacar cara en la moneda de cobre'** y **B ≡ ''Sacar cara en la moneda zinc'.** Y preguntar, *¿Qué probabilidad hay de que saque dos caras?*

- Sabemos $P(A) = 0.5$ y $P(B) = 0.5$ y nos piden $P(A \cap B)$.
- Lo que pase en la moneda de zinc es indiferente a lo que pase en la de cobre → $P(A|B) = P(A)$.

- Los sucesos A y B son independientes: $P(A \cap B\,) = P(B) * P(A) = \left({}^{1}/_{2}\right) * \left({}^{1}/_{2}\right) = 0.25$

Para introducir el **Teorema de Bayes,** vamos a realizar dos razonamientos paralelos para las probabilidades condicionadas $P(A|B)\ y\ P(B|A)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad\qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$P(A|B) * P(B) = P(A \cap B) \quad \Longleftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$$

Igualamos las dos expresiones: $P(A|B) * P(B) = P(B|A) * P(A)$ y despejamos $P(A|B)$:

TEOREMA DE BAYES

$$\boxed{P(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \frac{\boldsymbol{P(B|A) * P(A)}}{\boldsymbol{P(B)}}}$$

A la hora de enunciar el teorema, es importante hacer mención al carácter bidireccional del razonamiento. El Teorema de Bayes '*funciona como un espejo'* que relaciona $P(A|B)$ con $P(B|A)$. En el lenguaje de clase, el Teorema de Bayes se conocerá como el de '*la probabilidad inversa'* o, el de '*mirar para atrás'.*

Naturalmente después de estos razonamientos es probable que los alumnos se hayan perdido entre tanta nomenclatura, y que ninguno se haga una idea de la finalidad y la importancia de la regla del producto ni del Teorema de Bayes. De hecho, en cierto sentido, es inevitable. La comprensión del Teorema de Bayes exige esfuerzo cognitivo y no es fácil para los estudiantes la interpretación exacta de lo que se les pide (Tversky y Kahneman, 1974).

Por eso, acto seguido sería *conveniente* comenzar con un problema-ejemplo que muestre su aplicación.

6. Propuesta Didáctica. Taller de Probabilidad.

La siguiente propuesta didáctica está basada en mi experiencia como docente en prácticas en el Colegio Cardenal Spinola de Madrid con alumnos de 1º de Bachillerato en la modalidad de Ciencias Sociales. La propuesta se llevó a cabo durante la impartición de la UD de *Probabilidad,* si bien no se podría decir que dicha propuesta corresponda con una UD como tal, ya que le faltan elementos importantes como la evaluación. Por tanto, podríamos decir que esta propuesta se articula como un '***Taller de Probabilidad'*** basados en distintos problemas.

La propuesta de problemas supone la parte más importante de la propuesta didáctica en este TFM. En total son 8 problemas más 2 actividades complementarias que he llamado 'retos'. En total fueron 8 sesiones, pero podríamos considerar que las 3 primeras fueron de introducción de conceptos por lo que serían **5 sesiones** los que dediqué al trabajo con los problemas.

Aunque en un principio fuese concebido como un 'taller de probabilidad', en el sentido de buscar actividades que fuesen atractivas para los alumnos, explorando nuevos recursos didácticos o profundizando en conceptos y conclusiones sorprendentes o paradójicas, lo cierto es que no me atrevería a calificarlo como taller de probabilidad**.** Aunque desde el centro se me dio total libertad para que yo planificase mis sesiones como considerase oportuno, ciertamente procuré que en la medida de lo posible la actividad no supusiese una diferencia abismal con respecto al trascurso habitual de la clase. Como parte de las prácticas del módulo específico del MESOB, estas sesiones suponían mi primera experiencia real como docente, por lo que di bastante importancia a otros aspectos que poco tienen que ver con la probabilidad (planificación, seguimiento del trabajo, motivación en el aula, mantenimiento del orden, etc.). Por lo tanto mi propuesta didáctica podría considerarse como un híbrido entre taller y UD. Este hecho influyó tanto en los contenidos como en la metodología.

En cuanto a la propuesta de problemas propiamente dicha, me planteaba intentar cumplir los siguientes objetivos:

- Proporcionar métodos de resolución de problemas que resulten generales y accesibles para los alumnos.
- Explorar diferentes recursos didácticos y valorar su alcance.
- Generar debate y reflexión entre los alumnos acerca de los problemas propuestos.
- Eliminar, en la medida de lo posible, algunos **sesgos de razonamiento** que padecen muchos de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de tipo estadístico.
- Que todo lo anterior contribuya a que se produzca un aprendizaje significativo por parte de los alumnos.

Teniendo en cuenta las circunstancias en que la propuesta fue llevaba a cabo (como he dicho se trataba de mi primera experiencia docente) considero oportuno añadir una serie de objetivos adicionales en tanto en cuanto el ámbito natural de esta propuesta es el **aula.**

  - Aplicación y análisis de diferentes estrategias de motivación en el aula.
  - Adaptación dinámica de la programación de aula en función de la evolución de las sesiones.
  - Exploración de diferentes metodologías y recursos didácticos generales.

En cuanto a la **metodología,** el trabajo con los problemas propuesto se realizó continuando la dinámica habitual del resto de las clases. Se trataba de un grupo bastante reducido, con alrededor de 20 alumnos, y la actitud colectiva generalmente era muy buena. La mayoría de los alumnos trabajaban día a día y no dudaban en preguntar acerca de cualquier procedimiento o concepto que no hubiese quedado claro. La participación en el aula era también excelente y existía un ambiente de compañerismo y de cooperación. En este contexto es relativamente sencillo trabajar con una metodología en la que los estudiantes construyeran su conocimiento de forma activa, resolviendo problemas e interactuando con sus compañeros en la clase, potenciando el enfoque constructivista y social del aprendizaje.

La estructura de las sesiones era variable, pero casi siempre se pedía a los alumnos que mirasen en casa uno o dos ejercicios de la hoja problemas (ver ANEXO) y que intentasen resolverlos. En la primera parte de la sesión siempre había algún voluntario para intentar la resolución en la pizarra. Normalmente esta parte se alargaba por la gran cantidad de dudas que existía y el debate y la discusión que se generaba. Posteriormente hacía alguna actividad que daba pie a la propuesta de otro problema, que incluso podía proponer que intentase resolver en el aula (dependiendo del problema). Considero que esta metodología es óptima para el aprendizaje, pero requiere una alta implicación y motivación por parte del alumnado, cosa que bien sabemos no siempre es posible.

Respecto a la resolución propiamente dicha de los problemas, he procurado ser **muy metódico,** procurando también adaptarme a las características de los alumnos. A pesar de ser muy trabajadores, el razonamiento y la creatividad matemática no era el fuerte de ninguno de ellos (se trataba de la modalidad de Ciencias Sociales) y requerían de métodos estructurados y fiables para la resolución de problemas. En este sentido, he sido muy estricto en la mayoría de problemas, sobre todo en los que se pedía el uso del teorema de Bayes, con la definición de los sucesos y con la representación gráfica de un **diagrama de árbol.** Siempre y cuando no se trate de un problema puramente combinatorio, considero que el diagrama es un recurso de gran utilidad, resultando la mejor manera de organizar los datos y facilitar los cálculos. La representación de los datos es fundamental y en la práctica totalidad de los problemas echaba mano de un diagrama de árbol, y eso es lo que aconsejé en todo momento a los alumnos.

"Una representación adecuada de los problemas probabilísticos facilita el cálculo de probabilidades y produce soluciones acertadas a los problemas tratados, produciendo buenos resultados incluso en problemas que involucran el Teorema de Bayes"

Carmen Batanero, INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD

A continuación procederé con el comentario crítico detallado de cada uno de los problemas, que he considerado oportuno estructurar de la siguiente manera:

- *Contexto:* Descripción breve del problema. Comentarios sobre contexto didáctico, procedimientos que se pretenden trabajar con él, expectativas previas y, en general, comentarios que considere oportunos.

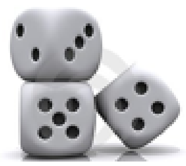
- *Sintaxis:* Una gran parte de los errores conceptuales que cometen los alumnos tienen su origen en la dificultad para entender e interpretar el enunciado del problema. Los orígenes de estas dificultades han sido estudiados (Diaz y de la Fuente, 2005) y obedecen a diferentes factores. Por eso considero necesario reflexionar sobre la sintaxis utilizada en cada caso, y comentar los efectos de sus posibles variaciones.

- *Resolución:* Incluirá comentarios sobre los intentos de resolución de los alumnos, posibles diferentes enfoques y reflexión de los resultados. Prácticamente todas las resoluciones incluirán un diagrama de árbol sobre el que se irá trabajando.

- *Respuesta de los alumnos:* Análisis sobre la reacción que causó en los alumnos cada problema, incluyendo errores recurrentes y comentarios sobre la discusión que generó.

6.1 La Paradoja de los Tres Dados

En el siglo XVII, los jugadores italianos solían apostar sobre el total de puntos obtenidos al lanzar tres dados. Pensaban que la probabilidad de obtener 9 puntos al sumar los puntos de los tres dados era la misma que la de obtener 10. Razonaban así:



- Hay seis combinaciones posibles para obtener 9 puntos (126, 135, 144, 234, 225, 333).
- También hay seis combinaciones posibles para obtener 10 puntos (145, 136, 226, 235, 244, 334).

¡Por lo tanto la probabilidad debe ser la misma!

Pero la experiencia permitía concluir que se ganaba más veces apostando a 10 que a 9. Galileo les aclaró esta aparente paradoja calculando correctamente las probabilidades. ¿Sabrías calcularlas tú?

Presentación: Echamos mano de la historia de la probabilidad para presentar un problema **clásico** de combinatoria con dados, en lo que supuso el génesis del cálculo de probabilidades. Es el único problema puramente combinatorio y el único en el que no se usará diagrama de árbol.

Sintaxis: El hecho de que se hable de lanzar dados los alumnos ya lo relacionan con el azar y el cálculo de probabilidades. También nos dicen que $P(9) < P(10)$ con lo cual se intuye que habrá más casos que sumen 10 a que sumen 9. Está muy dirigido el enunciado. Plantearlo como una paradoja de tipo histórica creo que es bastante motivador para los alumnos.

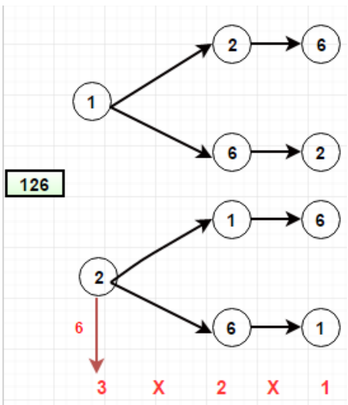
Resolución: Los problemas en lo que haya que usar combinatoria son los únicos en los que no vamos a usar diagramas de árbol. Al tratarse de un experimento regular, (todas los posibles resultados son equiprobables) simplemente aplicaremos la regla de Laplace.

$$P = \frac{Nº\ Casos\ favorables}{Nº\ casos\ Posibles}$$

Aunque los sucesos formalmente se denotan por letras mayúsculas, tampoco pasa nada si decimos: **9 ≡'Sumar 9'; 10 ≡'Sumar10'.**

El número de casos posibles lo calculamos fácilmente. Además fue uno de los ejemplos que usamos en los cálculos de combinatoria. '*Lanzamos tres dados'* ≡ 6 x 6 x 6 = 6^3 = ***216*** Algunos alumnos hicieron un diagrama de árbol igual que el que hicimos para introducir la combinatoria y llegaron al mismo cálculo.

A la hora de estimar los casos favorables, algunos alumnos volvieron a hacer uso del diagrama de árbol. Por ejemplo para 126:



Conceptualmente es correcto, pero se pierde tiempo si no generalizas rápido. Algunos alumnos hicieron diagramas de árbol de unas cuantas combinaciones…

Lo ideal sería que echaran mano del DIAGRAMA 1 de combinatoria e identificasen este cálculo como **permutaciones** sin repetición ($P_n = n!$) o con repetición ($P_n^a = \frac{n!}{a!}$), siendo a el número de elementos repetidos.

De esta manera generalizamos rápidamente que las combinaciones con tres elementos diferentes representan 6 casos favorables (p.e. 126, 162, 216, 261, 612, 621), los que tengan 2 elementos supondrán 3 casos (p.e. 225, 252, 522) y los que estén formados por 1 solo elemento sólo supondrán una posibilidad. La clave es sumar todos los casos que suman 9 y todos los casos que suman 10.

Suman 9

Combinaciones	Elementos	Total
126	3	6
135	3	6
144	2	3
234	3	6
225	2	3
333	1	1
		25

Suman 10

Combinaciones	Elementos	Total
145	3	6
136	3	6
226	2	3
235	3	6
244	2	3
334	2	3
		27

Hasta aquí consiguieron llegar pocos alumnos. Algunos llegaron formando ellos **todos** los casos, con el riesgo que eso conlleva. Correcto pero poco eficaz, sobre todo si el número de combinaciones fuese más alto. Aplicamos regla de Laplace, y vemos que efectivamente $P(9) < \mathrm{P}(10)$.

$$P(9) = \frac{25}{216} = 0.115 \qquad P(10) = \frac{27}{216} = 0.125$$

Respuesta de los alumnos: Teniendo en cuenta que era el primer problema de este tipo, considero que la respuesta de los alumnos no fue mala. Los que lo intentaron entendieron la idea y cuando se resolvió para todos, no hubo grandes problemas. Las dificultades para el uso eficaz de la combinatoria son comprensibles, si tenemos en cuenta que no habían trabajado con ella.

6.2 Las Urnas con Bolas

Se lanza una moneda. Si sale cara se acude a una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras para extraer una bola. Si sale cruz se acude a una urna que contiene 3 bolas blancas y 3 negras para extraer una bola.

a) Escribe el espacio muestral y determina las probabilidades de cada suceso elemental.

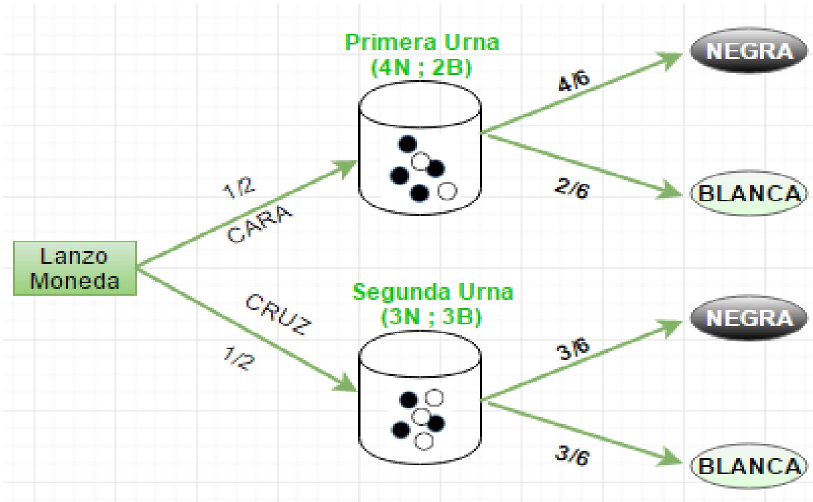
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

c) Si la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de la primera urna?

Contexto: Problema clásico para trabajar con probabilidad condicionada. Primer contacto con el trabajo con diagramas de árbol, regla del producto y Teorema de Bayes. Este problema nos servirá como modelo para lo que queremos trabajar. También es importante y motivador porque hay problemas muy similares en la prueba de la PAU. Muy propicio para resolver por el profesor en la pizarra, justo después de introducir la regla del producto y el Teorema de Bayes.

Sintaxis: Muy sintética. Ideas claras. Cada frase es una 'rama del árbol'. Completamente dirigido a trabajar con un diagrama. Cada apartado corresponde con los conceptos que vamos a trabajar (regla del producto, ley de la probabilidad total, Teorema de Bayes).

Resolución: Como ya he dicho, vamos a realizar el primer diagrama de árbol con los alumnos. Hay que ser estricto en la notación pero también procurar que quede visualmente intuitivo. Cada rama tiene una probabilidad asociada. Con las ramas de las monedas no hay problema (1/2) con las de las urnas usamos regla de Laplace (en principio no simplifico la fracción, para que sepan de donde sale). El diagrama queda así:



Y definimos los sucesos:

C ≡ 'Sacar Cara' **N ≡ 'Sacar Bola Negra'**
X ≡ 'Sacar Cruz' **B ≡ 'Sacar Bola Blanca'**

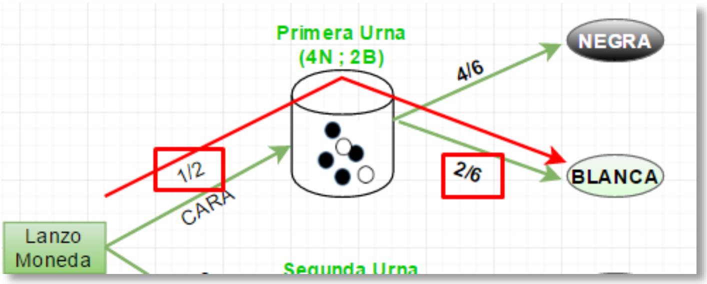
He definido esos sucesos por comodidad e intuición.

a) El espacio muestral lo describo así: $E = \{\mathrm{CN}, \mathrm{CB}, \mathrm{XN}, \mathrm{XB}\}$ leído: cara **y** negra, cara **y** blanca, cruz **y** negra, cruz **y** blanca. Con lo cual interpretamos como intersecciones:

$$\boldsymbol{E} = \{\mathbf{C} \cap \mathbf{N}, \mathbf{C} \cap \mathbf{B}, \mathbf{X} \cap \mathbf{N}, \mathbf{X} \cap \mathbf{B}\}$$

Cada elemento del espacio muestral es uno de los posibles recorridos en mi diagrama de árbol. Para calcular la probabilidad de cada uno, podría pensar en usar la regla de Laplace contando sucesos elementales, pero eso sería suponer que son equiprobables (1/4 cada uno), cosa de que no es correcta.

Para calcular las probabilidades correctamente, introducimos el uso de la **regla del producto.** Por ejemplo para C ∩ N tendremos que: $P(C \cap N) = P(N|C) * P(C)$. No sería difícil interpretar que la probabilidad de sacar cara P(C) es 1/2 y que la probabilidad de sacar una bola negra **cuando sabes que has sacado cara** $P(N|C)$ es 4/6, esto es, cuando has sacado la bola de la primera urna (4N; 2B). Pero prefiero que lo vean en el diagrama, que facilita mucho los cálculos. Por regla general, **para calcular la probabilidad de un suceso, multiplica las probabilidades de todas las ramas que sigues hasta llegar al suceso.** Por ejemplo para C ∩ B (Cara y Blanca):

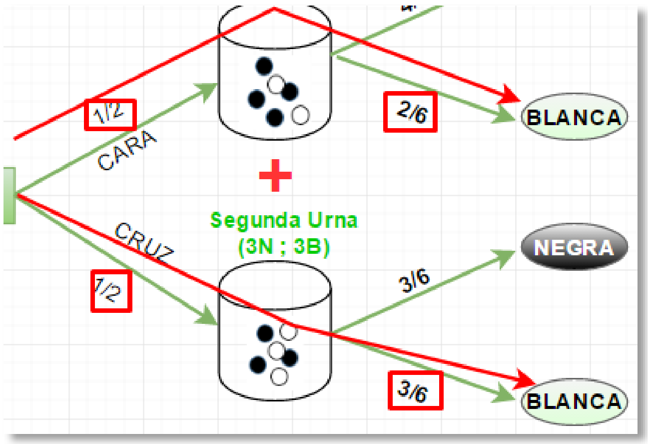


$$P(C \cap B) = (\,{}^{1}/_{2}) * ({}^{2}/_{6}) = 0.16$$

$$P(CB) = 0.16 \qquad P(CN) = 0.33$$
$$P(XB) = 0.25 \qquad P(XN) = 0.25$$

La suma de la probabilidad de todos los sucesos elementales tiene que ser igual a uno. Evidentemente, si realizamos el experimento obtendremos seguro alguno de los posibles resultados.

b) Para calcular la probabilidad de que salga blanca, tenemos que tener en cuenta todas las posibilidades que tenemos de sacar blanca. '*Puedo sacar blanca de la primera urna, o puedo sacarla de la segunda'*. **Tendremos que sumar la probabilidad de todos los sucesos que sacan blanca.** En el diagrama lo vemos así:



$$\boldsymbol{P(B) = (\,{}^{1}/_{2}) * (\,{}^{2}/_{6}) + (\,{}^{1}/_{2}) * (\,{}^{3}/_{6}) = 0.41}$$

Esto es tal cual el **Teorema de la Probabilidad Total** $[P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) * P(A_i)]$**,** pero interpretado como suma de diferentes ramas.

c) Nos dicen un resultado del experimento y tenemos que calcular la probabilidad de que venga de una urna. Es decir, tenemos que calcular probabilidades **a posteriori** en vez de a priori. La idea de '*conozco el resultado pero no sé por dónde ha llegado*' es muy interesante para que los alumnos intuyan la aplicación del **Teorema de Bayes.** Esa idea de la '*probabilidad inversa',* tener que calcular '*para atrás'.* Relacionar lo que nos pide el enunciado con la notación también es fundamental, *'probabilidad de que haya sido extraída de la primera urna (es decir, si ha salido cara) si sabemos que la bola ha sido blanca',* se interpreta como $\boldsymbol{P(C|B)}$**.** Entonces podemos aplicar el Teorema de Bayes.

$$P(C|B) = \frac{P(B|C) * P(C)}{P(B)}$$

Es importante, y no siempre fácil, saber interpretar $P(B|C)$ y diferenciarlo de $P(C|B)$. Sustituimos con cuidado:

- $P(B|C) = {}^{2}/_{6}$
- $P(C) = {}^{1}/_{2}$
- $P(B) = 0.41$ (calculado en el apartado b)

Operamos y listo:

$$P(C|B) = \frac{({}^{2}/_{6}) * ({}^{1}/_{2})}{0.41} = 0.4$$

Bajo mi punto de vista, esta resolución por el Teorema de Bayes tiene inconvenientes. No siempre conoceremos explícitamente los datos que intervienen en la fórmula y su cálculo no siempre es inmediato. Por eso considero muy interesante darle una interpretación análoga a la que hicimos con la probabilidad condicionada. Es decir, desde la idea '*laplaciana'* de 'lo favorable' entre lo 'posible', pero cambiando nuestro espacio muestral:

$$P(C|B) = \frac{'Probabilidad\ caso(s)\ favorable(s)'}{'Probabilidad\ casos\ posibles'}$$

Bajo esta interpretación, ahora los casos posibles son todas las maneras de extraer una bola blanca (CB o XB), y el caso favorable es extraer bola blanca de la primera urna (CB).

$$P(C|B) = \frac{\{CB\}}{\{CB, XB\}} = \frac{P(CB)}{P(CB) + P(XB)} = \frac{0.16}{0.16 + 0.25} = 0.4$$

Este enfoque puede ser útil especialmente útil cuando los casos favorables correspondan a más de un suceso elemental (ver el problema de *La compañía telefónica*). De cualquier manera reconocer la probabilidad inversa bayesiana de tipo $P(B|A)$ es complicado, y sólo una buena interpretación del enunciado nos lo garantiza.

Reacción de los Alumnos: Este problema lo resolví en la pizarra a modo de ejemplo, por lo que sólo puedo tener en cuenta las dudas que me planteaban con su resolución. En general creo que la aceptación fue buena. El enunciado estaba claro y el método visual es bastante intuitivo. Surgieron bastantes dudas en el tercer apartado. La primera intuición ante la pregunta fue calcular la probabilidad de la rama cara-blanca (o primera urna-blanca), como habíamos hecho en el primer apartado. Creo que es normal que la primera vez que alguien se enfrente a un problema que implique el Teorema de Bayes tenga estas reacciones. Al menos yo las tendría.

6.3 La Población Activa

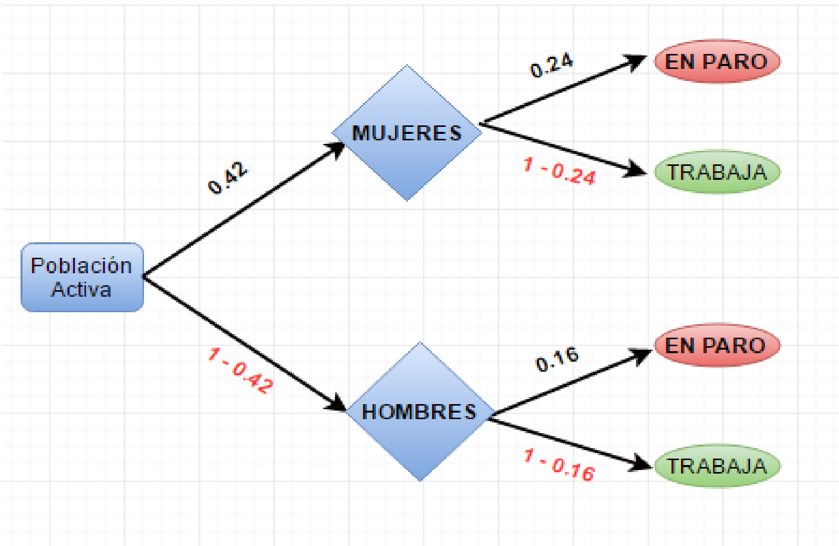
El 42% de la población activa de España está formada por mujeres. Se sabe que un 24% de las mujeres y un 16% de los hombres están en el paro. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa esté en el paro?

Contexto: Sin duda el problema más sencillo de todo el taller. Sólo un apartado y no se aplica el Teorema de Bayes. La idea es que hagan este problema en casa después de la explicación del problema de las urnas, para que practiquen y cojan confianza (que también es importante) con los diagramas de árbol y con la regla del producto.

Sintaxis: Es muy explícito el '*persona elegida al azar*' para que se calcule la probabilidad conjunta. Yo podría haber preguntado *¿Qué probabilidad hay de estar en paro?'* y seguro que hubiese generado más dudas.

Resolución: Definimos los sucesos: **H ≡ 'Hombre'** **P ≡'Estar en paro'**
M ≡ 'Mujer' **T ≡'Tener trabajo'**

Y realizamos el diagrama de árbol:



La única novedad con respecto al problema de las urnas es que tenemos que estimar la probabilidad de algunas de las ramas (p.e. probabilidad de ser hombre $(1 - 0.42 = 0.58)$ o probabilidad de trabajar si eres mujer). **La suma de las probabilidades de todas las ramas que salen de un mismo nodo tiene que ser 1.** En este caso es bastante intuitivo. '*O se es hombre o se es mujer*'. '*O estas en paro o tienes trabajo*'.

Para calcular la probabilidad de que una persona esté en paro [$P(P)$] sumamos la probabilidad de todas las posibilidades de estar en paro. Esto es, estar en paro siendo mujer o siendo hombre.

$$P(P) = P(Mujer\ \boldsymbol{y}\ en\ paro) + P(Hombre\ \boldsymbol{y}\ en\ paro) = P(M \cap P) + P(H \cap P)$$

Las probabilidades $P(M \cap P)$ y $P(H \cap P)$ se calculan usando la regla del producto, como producto de las probabilidades de cada rama.

$$\boldsymbol{P(P) = (0.42) * (0.24) + (0.58) * (0.16) = 0.19}$$

<u>*Respuesta de los alumnos:*</u> La respuesta fue bastante buena. Resolvieron el problema en la pizarra sin demasiada dificultad. Sólo surgieron dudas a raíz de la notación con porcentajes, que no sabían si podían incluir esa notación en el diagrama de árbol. Sí que pueden, pero a la hora de operar tienen que volver a la notación formal ($1 \leq P \leq 0$). Este problema les dio confianza y mejoró su motivación.

6.4 Los Cuatro Interruptores

1.- En una habitación tenemos 4 interruptores de los cuales sólo uno de ellos enciende la luz. Halla la probabilidad de acertar con el interruptor correcto:

a) En el primer intento. c) En el tercer intento.

b) En el segundo intento. d) En el cuarto intento.

2.- En una habitación tenemos 4 interruptores de los cuales sólo uno de ellos enciende la luz. Consideramos el experimento aleatorio que consiste en anotar el número de interruptores que necesito pulsar para encender la luz. Describe el espacio muestral y calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.

<u>*Contexto*</u>: En primer lugar conviene aclarar que formalmente se trata de dos problemas diferentes, pero me parece interesantísimo que su resolución y discusión se haga de manera conjunta. Se trata de una situación idónea para aclarar conceptos como *experimento aleatorio, espacio muestral o probabilidad condicionada* y para estimar la capacidad comprensiva de los alumnos. Contextualmente hubiese sido perfecto para proponer justo después de introducir los principios de la probabilidad condicionada, pero preferí que hubiesen trabajado antes con diagramas de árbol porque en la segunda parte utilizaremos uno.

<u>*Sintaxis:*</u> La importancia de este problema reside en su sintaxis. Los dos empiezan con la misma sentencia, lo cual podría hacer pensar que se trata del mismo experimento. Las

diferencias a la hora de describir los experimentos son sutiles pero importantes. En el segundo se explicita '*consiste en anotar el número de interruptores que necesito pulsar para encender la luz'*, lo cual da a entender que antes o después encenderemos la luz, pero en el primero sólo decimos *'acertar con el interruptor correcto',* para brevemente definirnos las 4 situaciones. La idea es darnos cuenta que en realidad se trata de cuatro experimentos que tienen el mismo espacio muestral {encender, no encender} pero que son diferentes e independientes. Una sintaxis más dirigida y que probablemente hubiese facilitado la compresión del primer problema sería la siguiente:

Halla las probabilidades de acertar con el interruptor correcto en estas 4 situaciones:

a) Te encuentras en el primer intento. *c) Te encuentras en el tercer intento.*

b) Te encuentras en el segundo intento. *d) Te encuentras en el cuarto intento.*

También hubiese sido más clarificador pedir el espacio muestral de cada situación, y también la probabilidad de fallar. En cualquier caso, la comprensión de los enunciados era prácticamente la única dificultad de los problemas, por lo que considero que está bien así.

<u>*Resolución*</u>: Sin duda la clave para la resolución del primer problema es la idea de que, a pesar de que se nos hable de '*segundo, tercer, cuarto intento*' **las probabilidades en cada caso son independientes** del anterior intento y que, por tanto, formalmente nos encontramos ante **4 experimentos.** A partir de aquí, una simple aplicación de la regla de Laplace nos dará las probabilidades en cada caso.

Lo primero definimos el suceso **A ≡ 'Enciendo la luz'.** También podríamos definir un suceso **B=Ā ≡'No enciendo la luz'** y ya de paso definir el espacio muestral de todos los casos como:

$$E = \{A, B\} = \{A, \bar{A}\}$$

No se pedía en el enunciado, pero puede ser clarificador.

a) En el caso del primer intento no hubo problema en la aplicación de la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{Nº\ Casos\ favorables\ a\ A}{Nº\ casos\ Posibles} = \frac{Nº\ Intenrruptores\ que\ encienden\ la\ luz}{Nº\ total\ de\ interruptores} = \frac{1}{4}$$

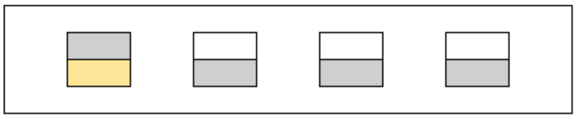
Si se quiere remarcar:

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$$

b) En el segundo intento nos podemos encontrar con algunas de las dificultades de comprensión del enunciado a los que hacíamos referencia. Por ejemplo una alumna que resolvía el problema en la pizarra escribió: $\boldsymbol{P(A) = {}^{2}/_{4}}$

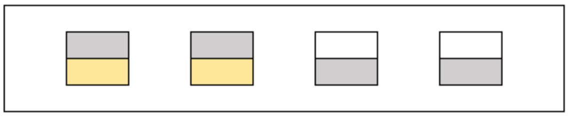
Interpretó el 2 en el numerador como ‘*número de interruptores que he pulsado’.* Evidentemente es un error importante de aplicación de la regla de Laplace, y esta alumna tendrá que trabajar más, pero le encontraba su sentido en la idea de que en el segundo intento tendremos más probabilidad de acertar con el interruptor que en el primero, lo cual es cierto. En cualquier caso lo que refleja es que está condicionando lo que haya pasado en el primer intento a las probabilidades de acertar en el segundo intento. No tiene sentido hablar de segundo intento si hemos acertado el primero. Si estamos en esta situación, lo único que nos importa del primer lance es que **se ha marcado un interruptor que sabemos que no enciende**, y por lo tanto tenemos menos casos posibles.

Un alumno echó mano de una explicación visual para explicárselo a sus compañeros que me pareció muy interesante. A raíz de la pequeña ilustración que aparece junto al enunciado, se imaginó que los interruptores tenían dos posiciones, una arriba y otra abajo. Y dijo: ‘**Sabemos que estamos en el *Segundo Intento* porque hay un interruptor ‘*arriba’* y la luz sigue apagada’**. Con esta interpretación es más fácil obviar el carácter cronológico del experimento, incluso pensar que el supuesto primer intento lo realizara otra persona. Con lo cual el problema se reduce a un problema de tres interruptores, en el que sólo uno enciende la luz:



$$P(A) = \frac{1}{3}$$

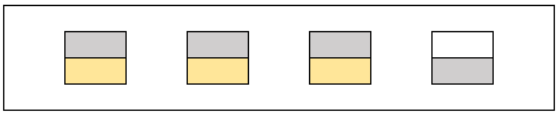
c) Siguiendo el razonamiento, si estamos en el *tercer intento* es que ya hemos marcado dos interruptores que no encienden:



Y por lo tanto sólo nos quedan dos interruptores que pueden encender:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

d) En el cuarto intento sólo quedaría un interruptor sin marcar, por lo que estaríamos seguros de acertar:



$P(A) = 1$

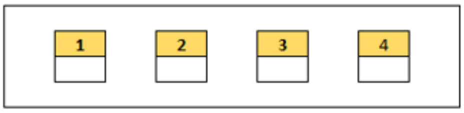
En el segundo problema nos describen el experimento como *'anoto los interruptores que necesito pulsar para encender la luz'*. Ahora nos enfrentamos a **un solo experimento** en el que acabaremos encendiendo la luz seguro, pero no sabemos cuántos interruptores pulsaremos.

Definimos los sucesos: **1 ≡ 'Un interruptor'** **2≡ 'Dos interruptores'** **3 ≡ 'Tres interruptores'** **4 ≡ 'Cuatro interruptores'**

Y entonces el espacio muestral queda descrito como:

$$\boldsymbol{E = \{1, 2, 3, 4\}}$$

Como apunte comentar que es importante **no numerar** los interruptores, es decir, no asignarles un número por posición, por ejemplo:

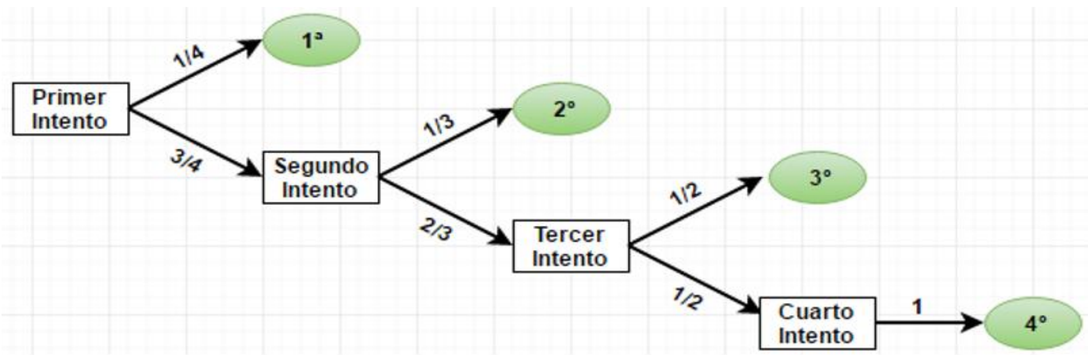


Con la notación que estamos usando para definir los sucesos, esto puede confundir a los alumnos.

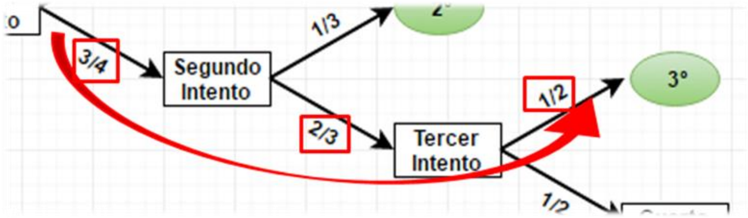
Para calcular la probabilidad de cada suceso elemental, ahora sí que tenemos que tener en cuenta (condicionar) que por ejemplo para pulsar 2 interruptores he tenido que fallar en el primer intento. Las probabilidades de acertar (y fallar) **en cada intento** las hemos calculado en el primer problema. La secuencia lógica que seguiría el experimento sería:

- **Primer intento**: 1/4 de acertar. Si fallo voy al segundo intento.
- **Segundo intento**: 1/3 de acertar. Si fallo voy al tercero.
- **Tercer intento**: 1/2 de acertar. Si fallo voy al cuarto.
- **Cuarto intento**: Acierto seguro.

Podríamos calcular las probabilidades de los sucesos elementales directamente, pero creo que es más didáctico y más fácil de calcular haciendo un diagrama de árbol que represente todo el experimento:



Para calcular cada probabilidad, multiplicamos todas las probabilidades asociadas a las ramas que hay que seguir hasta cada suceso:



$P(1) = \mathbf{\frac{1}{4}}$

$P(2) = \left({}^{3}/_{4}\right) * \left({}^{1}/_{3}\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$

$P(3) = \left({}^{3}/_{4}\right) * \left({}^{2}/_{3}\right) * \left({}^{1}/_{2}\right) = \mathbf{\frac{1}{4}}$

$P(4) = \left({}^{3}/_{4}\right) * \left({}^{2}/_{3}\right) * \left({}^{1}/_{2}\right) * 1 = \mathbf{\frac{1}{4}}$

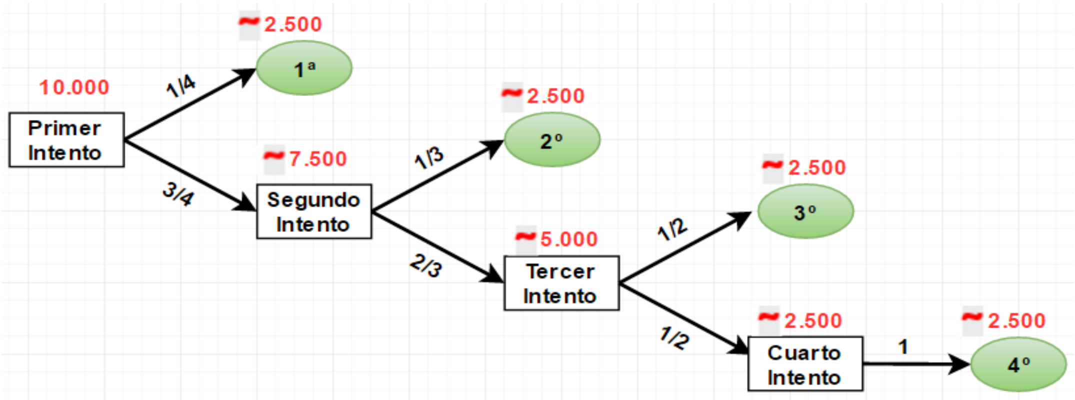
Así que al final resulta que los sucesos elementales son equiprobables.

Reacción de los Alumnos: La resolución y el planteamiento de los problemas provocaron bastante confusión entre los alumnos. Se generó un debate-discusión que en el fondo reflejaban carencias en la asimilación de conceptos fundamentales, como experimento aleatorio, espacio muestral o probabilidad. El resultado del segundo problema acabó por desencajarles. Después de tantas vueltas y resulta que es igual de probable encender la luz a '*la primera que a la cuarta*'. Ante estas muestras de confusión, realicé la siguiente explicación:

Supongamos que este experimento se repite 10.000 veces, con 10.000 personas diferentes en igualdad de condiciones. Teniendo en cuenta lo que nos dice la **Teoría de los Grandes Números,** esto es lo que ocurriría:

- Aproximadamente 1/4 de las 10.000 personas acertarán a la primera $(\boldsymbol{\sim 2.500\ personas\ a\ la\ 1^{a}})$ y el resto (~7.500) irán al segundo intento.
- Aproximadamente 1/3 de las 7.500 personas acertarán a la segunda $(\boldsymbol{\sim 2.500\ personas\ a\ la\ 2^{a}})$ y el resto (~5.000) lo intentarán por 3ª vez.
- Aproximadamente 1/2 de las 5.000 personas acertarán a la tercera $(\boldsymbol{\sim 2.500\ personas\ a\ la\ 3^{a}})$ y el resto (~2.500) lo intentarán por última vez.
- Todas esas personas que han llegado al cuarto intento acertarán $(\boldsymbol{\sim 2.500\ personas\ a\ la\ 4^{a}})$

Sobre el diagrama de árbol:



6.5 El Reparto del Bote

Dos muchachos se juegan un bote de 10 euros a piedra papel y tijera. El primero que llegue a 5 puntos se llevará los 10 euros. La partida se interrumpe antes de concluir, cuando el jugador A lleva 4 puntos y el B 3 puntos. ¿Cómo deben repartirse el bote?

Contexto: Tal cual el histórico *Problema del Reparto de la Apuesta* que he analizado en el apartado 3. Un problema precioso que da mucho juego en el aula, sin duda. Paradójicamente, cuando propuse el problema sabía que era uno de los problemas que el *Caballero de Mere* propuso a Pascal y a Fermat, pero no conocía los detalles de los intentos previos de Pacioli, Tartaglia y Cardano. Me pareció un problema que suponía una aplicación diferente de la probabilidad, e intuí que, ya que estábamos estudiando probabilidad, los estudiantes usarían las herramientas que estábamos trabajando.

Sintaxis: De las pocas modificaciones que hice sobre las formulaciones clásicas fue decir que el juego era *Piedra, Papel y Tijera,* para que no hubiera dudas de que tenía carácter azaroso. No obstante, es importante observar que en el enunciado no aparecen palabras como **probabilidad, aleatorio, suceso o experimento** ni tampoco las típicas referencias a monedas, dados o cartas. Me parece importante remarcarlo porque, como ya he comentado en el apartado *sobre lo aleatorio,* todas estas palabras abundan en el ámbito escolar y son las que evocan el uso de las leyes de la probabilidad y la estadística en los estudiantes.

Resolución: Aquí comentaré la resolución probabilística correcta. Un alumno propuso una resolución alternativa que comentaré en *Reacción de los Alumnos.*

La idea es que la repartición del bote ha de hacerse **proporcionalmente a las probabilidades que tiene cada jugador de ganar la partida en el momento de la interrupción.** Esto es, suponiendo que la partida continuase, calcular de cuántas maneras gana el jugador A y de cuantas maneras ganaría B, y realizar el reparto en esa proporción.

Se puede resolver de manera intuitiva teniendo en cuenta que al jugador A sólo le faltaría un punto y al jugador B le faltarían 2. Por lo tanto:

- El jugador A gana sí:

- Gana el siguiente lance **[5,3]**

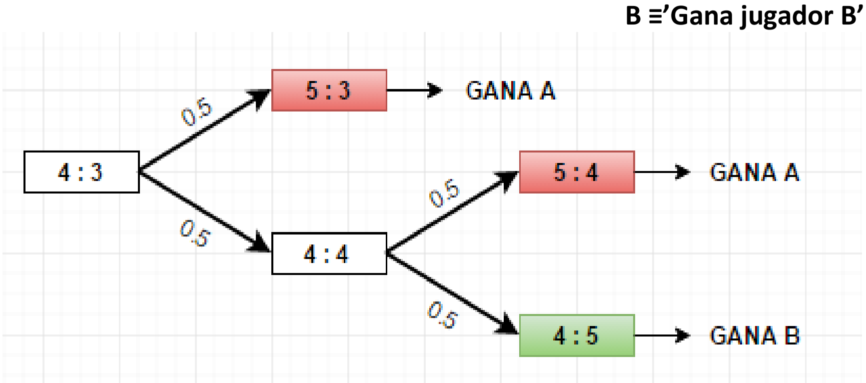
- Pierde el siguiente lance **[4,4]** pero gana el definitivo **[5,4]**

- El jugador B gana sí:

- Gana el siguiente lance **[4,4]** y también el definitivo **[4,5]**

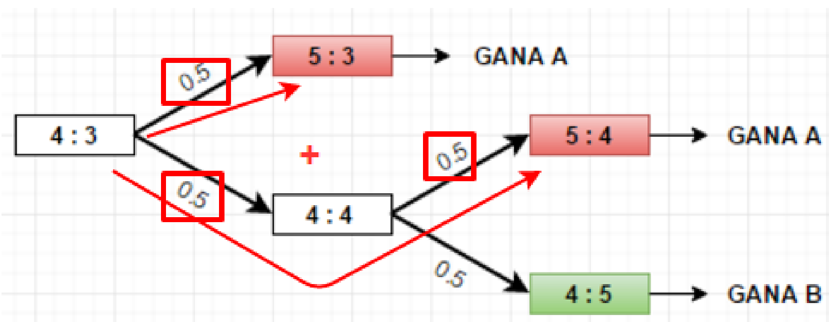
Pero tenemos que calcular la probabilidad de cada una de las jugadas, porque no parece correcto suponer que las tres formas son equiprobables. Para ello, creo que lo más adecuado nuevamente es construir un diagrama de árbol y calcular sobre él las probabilidades de los correspondientes resultados. En cada lance, estimamos que cada jugador tiene la misma probabilidad de apuntarse el tanto (0,5). Definimos los sucesos:

A ≡'Gana jugador A'
B ≡'Gana jugador B'



De nuevo para calcular $P(A)$ tengo que sumar la probabilidad de las dos maneras posibles que tiene de ganar:

$$P(A) = P(Ganar\ 1er\ Lance) + P(Perder\ 1er\ Lance\ y\ Ganar\ el\ 2º)$$



$$P(A) = \left(1/_2\right) + \left(1/_2\right) * \left(1/_2\right) = \frac{3}{4} \qquad P(B) = \left(1/_2\right) * \left(1/_2\right) = \frac{1}{4}$$

Con lo cual 3/4 del bote corresponderán al jugador A y 1/4 al jugador B. Si el bote eran 10€, tendremos:

- $\boldsymbol{Jugador\ A\ \rightarrow 7.5}$ €
- $\boldsymbol{Jugador\ B\ \rightarrow 2.5}$ €

<u>Reacción de los Alumnos</u>: Propuse este problema en clase con la esperanza de que a alguno lo resolviese rápido, ya que técnicamente no entrañaba demasiada dificultad. En seguida un alumno me dijo creía que lo tenía y cuando lo acabó salió a la pizarra a resolverlo. Esto es lo que hizo:

- *Cuando se interrumpió el juego el marcador era de [4 : 3] por lo que se habían repartido 7 puntos en total.*

- *El jugador A había ganado 4 puntos por lo que corresponden* $4/_7$ *del total del bote. De igual manera al jugador B le corresponden* $3/_7$ *del bote.*

- $\boldsymbol{Jugador\ A\ \rightarrow 5.71}$ €
- $\boldsymbol{Jugador\ B\ \rightarrow 4.29}$ €

Entonces no lo sabía pero… ¡Era la misma solución que propuso Luca Pacioli en el siglo XV!

En ese momento no entré a valorar si su respuesta era correcta o no, porque matemáticamente era consistente. Además al resto de alumnos les pareció convincente. Dejé escrita su solución en la pizarra y acto seguido les propuse mi método ‘alternativo’, con el cálculo de probabilidades. Antes de empezar a escribir ya me trasmitieron sus primeras dudas ‘*¿Por qué haces como si siguiera la partida? ¿No había terminado?’.* Simplemente les dije que este era otro método para repartir. El cálculo de probabilidades lo entendieron, a nadie le pareció extraño que en una partida de *Piedra, papel o Tijera* cada jugador tuviera un 50% de posibilidades en cada lance. Lo sorprendente para ellos fue que **el resultado del reparto no era el mismo,** y en seguida comenzó una discusión sobre qué método era ‘*el correcto’.* (Resulta curioso cómo en seguida te lanzan esta pregunta: *Pero entonces, ¿Cuál es la solución buena?).* En un principio defendieron como ‘más justo’ el reparto que había hecho su compañero. Consideraban que había menos diferencia y que era más equitativo. Además, entendían mejor que el reparto tenía que basarse en lo que ya había pasado, y no comprendían por qué se me había ocurrido ‘seguir con la partida’. Para defender mi solución, hice hipótesis sobre otros posibles resultados en la interrupción, pero en principio su método seguía funcionando. Entonces les pregunté:

¿Y en el caso de que el resultado fuese [1:0], cómo lo harías?

Posteriormente, me resultó fascinante conocer que esta había sido una de las objeciones que Tartaglia le hizo a la solución de Pacioli. Inconscientemente, habíamos reproducido una sucesión de razonamientos históricos en el aula. En lo que restó de discusión intenté defender 'mi' tesis argumentando que yo me fiaba más de '*lo que podía pasar*' que de lo que '*ya había pasado*'. Además, el jugador que llegase a 5 puntos se llevaba los 10 euros, independientemente de que acabasen [5:0] o [5:4], y bajo ese punto de vista mi solución podría parecer más justa.

Poco a poco hubo alumnos que se fueron inclinando a aceptar que la solución probabilística era mejor, pero en ningún momento desacredité la solución del alumno, ni dije que era incorrecta o injusta. La discusión se alargó y algunos seguían preguntando cual era la solución correcta, a lo que la profesora –que estaba en el aula con nosotros– comentó con ironía: **'***En el caso de que algún día os encontréis en una situación parecida, si vais perdiendo argumentad lo que ha dicho Javi (el alumno) porque os favorece, pero si vais ganando argumentad lo que ha dicho Aitor'.* Solución salomónica, sí señor.

Al final iba a tener razón Tartaglia, cuando a concluye su exposición de este mismo problema con las palabras:

"*…la resolución de tal pregunta debe ser más judicial que matemática, de modo que, cualquiera que sea la manera de que se lleve a cabo la división, habrá causa para litigar"*

También me resultó muy curioso, que la situación que yo viví en el aula había sido ya descrita. El profesor Juan Antonio Garcia Cruz, en un artículo titulado *Historia de un problema: El reparto de una apuesta*, escribe (Garcia Cruz, 2000):

'*Por lo general los alumnos presentan la [solución] de Pacioli, es decir, el reparto proporcional a los puntos ganados. De forma similiar a Pacioli y Tartaglia, los alumnos se centran en lo ocurrido, en la certeza del juego. Este es un obstáculo difícil de superar. Sólo la argumentación y la forma de posición en el juego puede hacer que se acepte otra forma de solución.'*

6.6 La Compañía Telefónica

Una compañía telefónica tiene 3 empleados encargados de recibir las quejas de los clientes:

- El empleado A atiende al 60% de los visitantes, B al 25% y C al resto.

- El empleado A resuelve el 95% de los problemas que plantean los clientes, mientras que B sólo resuelve el 80% y C el 60%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que NO me resuelvan el problema?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que me resuelvan el problema si NO me atiende A?

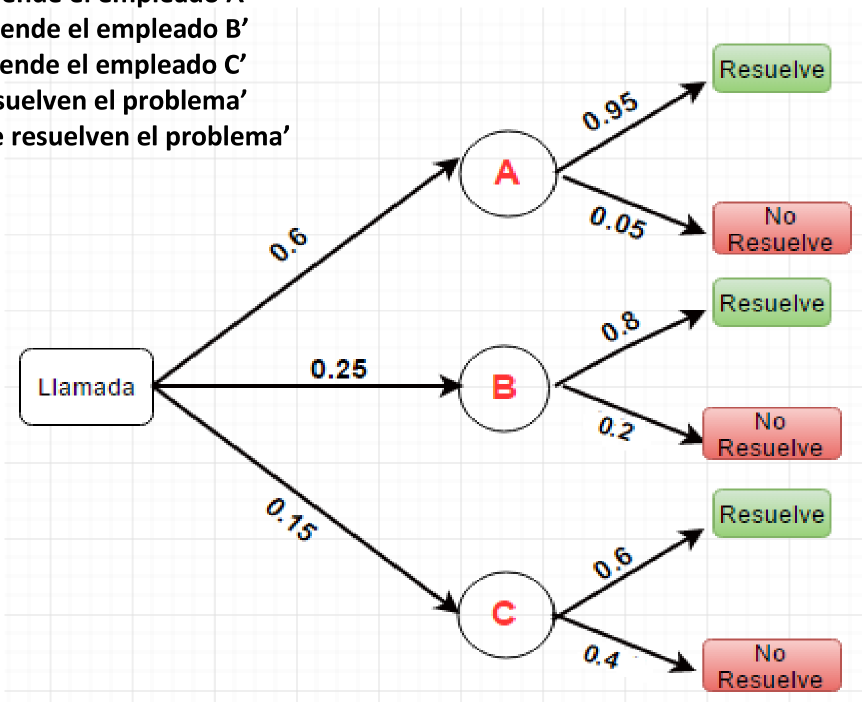
c) Si no me han resuelto el problema, ¿cuál es la probabilidad de que me haya atendido el empleado B?

Contexto: Otro problema bastante completo para trabajar con el Teorema de Bayes. La realización del diagrama no debería esconder ninguna dificultad para los alumnos, pero las preguntas b) y c) pondrán a prueba su capacidad de entender lo que nos piden.

Sintaxis: Con los apartados b) y c) pedimos lo mismo (aplicación de Bayes) pero de diferente manera. La pregunta c) es cómo típicamente se formula la pregunta, pero si no se lee con atención el apartado b) es muy probable que no se entienda lo que nos piden. Como ya hemos comentado, cuando tenemos que usar el Teorema de Bayes la comprensión de lo que nos piden no siempre es sencilla.

Resolución: Como siempre, antes de nada definimos los sucesos y realizamos nuestro diagrama de árbol.

A ≡ 'Me atiende el empleado A'
B ≡ 'Me atiende el empleado B'
C ≡ 'Me atiende el empleado C'
R ≡ 'Me resuelven el problema'
N ≡ 'No me resuelven el problema'



a) Para calcular la probabilidad total de que **no me resuelvan el problema**, volvemos a hacer uso del Teorema de la Probabilidad Total. Es decir, **sumamos** la probabilidad de todas las formas de que no me resuelvan el problema:

$$P(N) = P(A \cap N) + P(B \cap N) + P(C \cap N) = (0.6 * 0.05) + (0.25 * 0.2) + (0.15 * 0.4) = \mathbf{0.14}$$

b) No es fácil entender lo que nos piden aquí. Como ya hemos dicho, la comprensión del Teorema de Bayes exige esfuerzo cognitivo y no es fácil para los estudiantes la interpretación exacta de lo que se les pide. Es habitual que los alumnos interpreten que se les pide $P(R \cap \bar{A})$, esto es, la probabilidad que B y C me resuelvan el problema.

La interpretación correcta es que '*me resuelvan el problema* ***si ya sabemos que no me ha atendido A'***, es decir, $\boldsymbol{P(R|\bar{A})}$. Una vez más, hay que suponer que *'ya sabemos un resultado, y queremos saber de dónde puede venir'*, para aplicar el Teorema de Bayes.

La formulación del teorema en este caso sería:

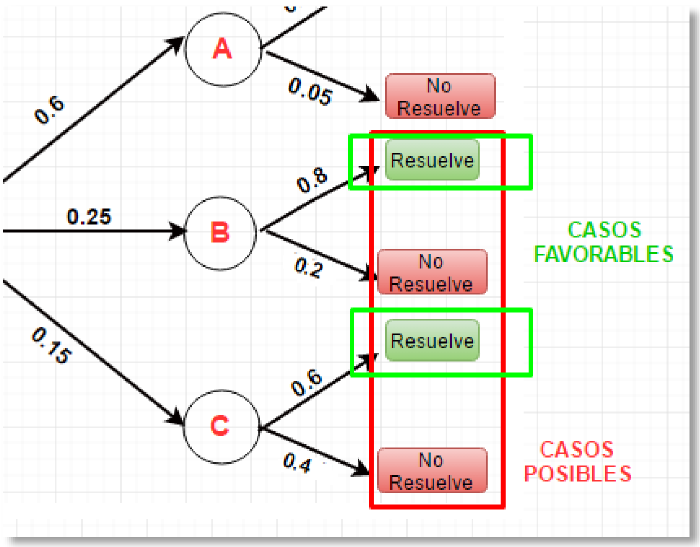
$$P(R|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}|R) * P(R)}{P(\bar{A})}$$

Esta fórmula puede presentar muchas dificultades para trabajar con ella. En principio no conocemos ninguno de los datos implicados $[P(\bar{A}|R), P(R), P(\bar{A})]$ y tendríamos que hacer cálculos para determinarlos.

Por eso creo que es muy útil interpretar la aplicación del Teorema de Bayes como una **probabilidad condicionada,** en el que nuestro espacio muestral se reduce.

$$P(R|\bar{A}) = \frac{'Probabilidad\ casos\ favorables'}{'Probabilidad\ casos\ posibles'}$$

Sobre el diagrama:



$$P(R|\bar{A}) = \frac{\{RB, RC\}}{\{RB, NB, RC, NC\}} = \frac{P(R \cap B) + P(R \cap C)}{P(B) + P(C)\ (*)}$$

$(*)$ La probabilidad total de todos los casos de que me atiendan B o C $\{RB, NB, RC, NC\}$, coincide con la suma de las probabilidades de B y C por separado. Está bien dejar claro esto a los alumnos, haciendo los cálculos para que lo vean si es necesario.

$$P(\bar{A}) = P(B) * [P(R|B) + P(N|B)] + P(C) * [P(R|C) + P(N|C)] =$$

$$= P(B) * [\mathbf{0.8} + \mathbf{0.2}] + P(C) * [\mathbf{0.6} + \mathbf{0.4}] = P(B) + P(C)$$

Recordemos que todas las ramas que salen de un mismo nodo del diagrama tienen que sumar probabilidad uno.

Hacemos los cálculos:

$$P(R|\bar{A}) = \frac{(0.25 * 0.8) + (0.15 * 0.6)}{0.25 + 0.15} = \mathbf{0.72}$$

c) En este caso sí que es más sencillo interpretar el Teorema de Bayes. Sabemos que no me han resuelto el problema, ¿No me lo ha resuelto B? Es decir, tenemos que calcular $P(B|N)$

$$P(B|N) = \frac{P(N|B) * P(B)}{P(N)}$$

En este caso sí que conocemos todos los datos y podemos aplicar la fórmula directamente sin problemas:

- $P(N|B) = 0.2$
- $P(B) = 0.25$
- $P(N) = 0.14$ (calculado en el apartado a)

$$P(B|N) = \frac{0.2 * 0.25}{0.14} = \mathbf{0.35}$$

Reacción de los Alumnos: El problema lo propuse para resolver en casa y la respuesta fue bastante buena. Con la realización del diagrama de árbol no hubo ningún problema y resolvieron satisfactoriamente el apartado a). Con el apartado b) hubo más dificultades. Como he comentado, su reacción fue que les pedían $P(R \cap \bar{A})$. Es difícil que interpreten el **'si no me atiende A'** como un hecho.

6.7 La fiabilidad del Test

En una cierta población, se sabe que una persona entre 1000 padece una determinada enfermedad. Existe un test clínico que identifica la enfermedad, pero tiene un determinado margen de error:

- El 98% de las personas enfermas dan positivo en el test.
- El 99% de las personas sanas dan negativo en el test.

Si seleccionamos una persona al azar y el test es positivo:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que la persona esté enferma? ¿Es razonable el resultado obtenido?
b) En general, cuando el doctor ordena el test es porque ya observa ciertos síntomas de que una persona esté enferma. Resolver el apartado a) anterior suponiendo ahora que una entre cada 10 personas padece la enfermedad. (Esto es, que el doctor estime que la probabilidad de que esté enferma es del 10%).

<u>*Contexto:*</u> Reconozco que este es uno de los problemas que más me ha sorprendido de todos a los que me he enfrentado. Los resultados son aparentemente absurdos. A nivel didáctico, es verdad que exige una capacidad lectora y de comprensión por parte de los alumnos, pero la introducción del problema y sobre todo la discusión y reflexión de los resultados pueden ser muy interesantes. Decidí realizar este problema en la clase, con la colaboración de todos. Para empezar, les mostré el titular de una noticia publicada en el periódico *El Mundo* hace unos años:

Casi el 1% de los universitarios tiene el virus del sida

Salud pública. La unidad móvil de Madrid en Positivo hizo ayer un test en la Complutense

En la unidad didáctica anterior (Estadística) ya habíamos hablado de algunos titulares tendenciosos acerca de estudios estadísticos que a veces nos encontrábamos en la prensa. En el desarrollo de la noticia se podía leer: "*En menos de 15 minutos y con un simple pinchazo en un dedo – como si de un simple test de glucemia se tratara– 208 jóvenes averiguaron cuál era su estado de salud. De todos ellos, dos universitarios – el 0,96% del total– dieron positivo para el virus del VIH."* Entre los alumnos en seguida empezaron a surgir críticas que dudaban de lo apropiado del titular. '*Se ha hecho sólo en una universidad de Madrid, y no a todos los universitarios españoles'* ó '*208 personas no son una muestra significativa'.* Todas esas afirmaciones eran ciertas, pero yo quería llegar más allá y pregunté, *¿Vosotros os harías una prueba para comprobar si tenéis VIH?* La mayoría contestaron que no, bajo el pretexto de 'Q*ue yo sepa, yo no he hecho nada para "coger el SIDA"'.* Esa es la reflexión a la que quería llegar antes de proponer el problema. Supongamos que la muestra de este estudio es más amplia y se realiza en todas la universidades españolas y que los resultados confirmasen ese ratio de positivos. ¿Sería entonces igualmente lícito decir que el 1% de los universitarios tiene SIDA? Probablemente no. La razón es que la prueba **sólo la realizan voluntarios** y no estudiantes elegidos 'al azar'. Si alguien se realiza una test para ver si tiene SIDA, probablemente sea porque haya tenido alguna **conducta de riesgo** para contraer esa enfermedad, con lo cual el estudio no se podría extrapolar al conjunto de la población universitaria.

Esta reflexión me pareció interesante por dos motivos:

- Realizamos una reflexión de lo importante que es la Estadística y su apropiada interpretación. La mayoría de las probabilidades con las que trabajamos en un problema, se basan en estudios estadísticos.
- Con el hecho de hablar del VIH y de su futuro inmediato (la universidad) logramos captar la atención de los alumnos y despertar su interés.

Sintaxis: Intenté que la exposición de los datos fuese lo más sintética y estructurada posible. No obstante con la frase '*Si seleccionamos una persona al azar y el test es positivo ¿Cuál será la probabilidad de que la persona esté enferma?*' resulta bastante confusa para un alumno, y probablemente le cree dificultades a la hora de plasmar la información.

Estoy convencido que antes formular esta pregunta, hubiese sido conveniente añadir un apartado con esta cuestión:

- *¿Qué probabilidades hay de que una persona elegida al azar dé positivo en el test?*

Hubiese facilitado el cálculo y la comprensión de la siguiente pregunta. Aclarar también que cuando decimos en el apartado b) que '*suponiendo ahora que uno entre cada 10 personas padece la enfermedad*' estamos presuponiendo que se refiere a las personar que se realizan el test, evidentemente. Quizás hubiese sido conveniente realizar esa aclaración en el enunciado.

Resolución: Una vez más creo conveniente plantear un diagrama de árbol, aunque esta vez su planteamiento puede generar dificultades. En primer lugar tenemos que tener claro en que consiste nuestro experimento aleatorio. ¿Este test se realiza a cualquier persona? ¿Se mide sólo el resultado del test o también se confirma si luego la persona esta efectivamente enferma? ¿Una persona está enferma antes de que de positivo en el test? Si es la primera vez que te enfrentas a una situación como esta, es posible que no reflexiones adecuadamente sobre estas preguntas y que puedas realizar un diagrama de árbol erróneo. Esto es lo que me pasó a mí mismo cuando intenté resolver este problema, y observé que a algunos alumnos también empezaron a hacerlo.

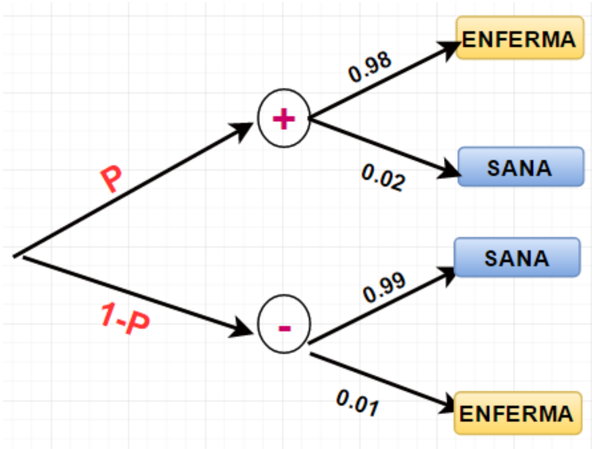
Definimos los sucesos:

+ ≡'Dar positivo en el test'

− ≡'Dar negativo en el test'

E ≡'Estar enfermo'

S ≡'Estar sano'



La idea que podría esperarse es interpretar que la probabilidad de efectivamente estar enfermo habiendo dado positivo corresponde con $P(+\cap E) = P(E|+) * P(+) = p * 0.98$. Para salvar el hecho que desconozco esta probabilidad $P(+) = p$, hacemos uso del dato del enunciado cuando nos dicen '*una de cada 1000 padece la enfermedad'*, es decir $P(E) = {}^{1}/_{1000}$. Con nuestro diagrama de árbol $P(E)$ corresponde con:

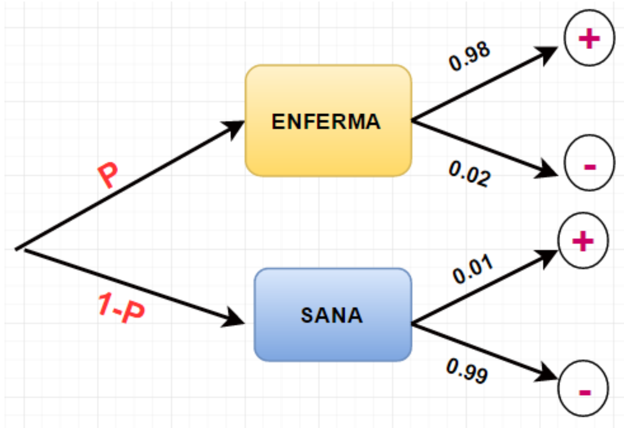
$$P(E) = P(positivo\ y\ enfermo) + P(negativo\ y\ enfermo);$$

$${}^{1}/_{1000} = p * 0.98 + (1-p) * 0.01$$

Este razonamiento es erróneo por 3 motivos:

- En ese cálculo p sale negativo, lo cual es absurdo.
- Hemos interpretado $P(E|+) = 0.98$ y eso no es correcto. El enunciado dice '*El 98% de las personas enfermas dan positivo en el test*' y no al revés. Con lo cual $P(+|E) = 0.98$ y la probabilidad $P(E|+)$ significa '*probabilidad de estar enfermo una vez has dado positivo en el test',* es decir, lo que nos pide el enunciado.
- En todo el razonamiento hemos pensado que en la probabilidad de estar enfermo sólo depende de haber dado positivo o negativo en el test, lo cual no es cierto.

Comento todo esto porque creo que es un error bastante recurrente cuando nos hablan de test que identifica una enfermedad. Esto es, condicionar mis probabilidades de estar enfermo única y exclusivamente a dar positivo (o negativo) en el test. Lo lógico sería pensar que uno ya está enfermo (o no) independientemente de hacerse ninguna prueba. Esta es la clave para realizar correctamente el diagrama de árbol, y así se lo transmití a los alumnos. '*Una persona está sana o enferma, y luego ya veremos que dicen los test…'*



Y mi probabilidad **P** de estar enfermo nos la dicen en el enunciado:

$$P(E) = p = {}^{1}/_{1000} \qquad\qquad P(S) = 1 - p = {}^{999}/_{1000}$$

Como ya he comentado en el apartado 'Sintaxis', es bueno calcular primero la 'probabilidad de dar positivo en el test'. Con el diagrama de árbol delante, haremos como siempre para calcular la probabilidad total de dar positivo, es decir, sumar probabilidad de dar positivo cuando estás enfermo y la probabilidad de dar positivo cuando estas sano.

$$P(+) = P(+|E) * P(E) + P(+|S) * P(S) = (0.98) * ({}^{1}/_{1000}) + (0.01) * ({}^{999}/_{1000}) = \mathbf{0.01}$$

Este dato nos va a venir bien es cálculos posteriores. Además ya nos damos cuenta de que el hecho de dar positivo es bastante raro, y que hay que tener en cuenta que puedes dar positivo estando sano.

a) Nos dicen que alguien al azar **ha dado positivo.** Es decir, puede ser que esté enferma y de positivo, o que esté sana y de positivo. Nos dan un resultado del experimento y queremos saber '*de donde viene'.* Una vez más hay que utilizar el **Teorema de Bayes,** e interpretar que nos piden la probabilidad de (realmente) estar enferma una vez sabemos que ya ha dado positivo, esto es, $P(E|+)$.

$$P(E|+) = \frac{P(+|E) * P(E)}{P(+)}$$

Conocemos todos los datos:

- $P(+|E) = 0.98$
- $P(E) = 0.001$
- $P(+) = 0.01$ (calculado en el apartado anterior)

$$P(E|+) = \frac{0.98 * 0.001}{0.01} = 0.098 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P(E|+) = 9.8\%}$$

Así que tenemos un test que parece bastante infalible, en el sentido que diagnostica correctamente una enfermedad la inmensa mayoría de las veces, ¡y resulta que ahora una persona que ha dado positivo lo más probable es que no esté enferma!

Uno podría pensar que ha realizado mal los cálculos, pero si reflexionamos nos damos cuenta de lo que pasa:

- Si cogemos una persona al azar, es inmensamente más probable que este sana. Por tanto, ese 1% por ciento que tienen las personas sanas de dar positivo, tiene más peso que no el 98% entre los enfermos.
- Los porcentajes de 'éxito' de las pruebas para personas sanas o enfermas (que en el argot médico se conocen como 'valor predictivo positivo' y 'valor predictivo negativo') se calculan a partir de pruebas sobre pacientes que se sospechaban podrían parecer esta enfermedad, no sobre gente al azar.

¿Qué sentido tiene hacerle un test muy específico (y que seguro que no es barato) a una persona que en principio está sana?

b) Ahora realizamos el mismo experimento pero en vez de '*cogemos una persona al azar'*, tenemos una persona que tiene ciertos síntomas que típicamente se dan en los pacientes que padecen esta enfermedad, por lo que nuestros datos cambian.

$$P(E) = p = {}^{1}/_{10} \qquad\qquad P(S) = 1 - p = {}^{9}/_{10}$$

Volvemos a realizar el cálculo de $P(E|+)$, teniendo en cuenta de que la probabilidad total de dar positivo también varía.

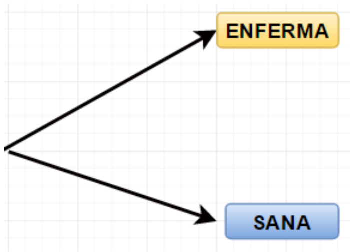
$$P(E|+) = \frac{P(+|E) * P(E)}{P(+)} = \frac{P(+|E) * P(E)}{P(+|E) * P(E) + P(+|S) * P(S)} =$$

$$= \frac{0.98 * 0.1}{(0.98 * 0.1) + (0.01 * 0.9)} \cong 0.92 \;\rightarrow\; \boldsymbol{P(E|+) = 92\%}$$

Ahora sí que parece que tiene más sentido.

<u>*Reacción de los Alumnos*</u>: El problema se resolvió íntegramente en clase, por lo que tuve la oportunidad de ver las dificultades que tenían los alumnos. Si de primeras les lanzas la pregunta *'Si seleccionamos una persona al azar y el test es positivo, ¿Cuál será la probabilidad de que la persona esté enferma?'* es muy probable que se genere una fuerte confusión. Es complicado de ver el experimento y plasmarlo en el diagrama. Normalmente realizamos primero el test y luego confirmamos que está enfermo, pero en realidad los pacientes estás enfermos (o sanos) antes de realizarle la prueba. Ya sé que esos razonamientos cronológicos son peligrosos a la hora de

montar un diagrama de árbol, pero en este caso funciona bastante bien. Después de la pista que les di, *'ante todo, alguien puede estar enfermo o sano….'*, los alumnos hicieron correctamente el diagrama:



Acto seguido les pedí que calculasen la probabilidad de dar positivo, lo cual también hicieron sin problema. Después aplicaron el Teorema de Bayes en general bastante bien. La aplicación del Teorema de Bayes la ven mucho más fácil si antes hemos calculado las probabilidades del denominador o las '*probabilidades de los casos posibles',* en este caso $P(+)$. Realizar los problemas en 'dos pasos' es algo que les cuesta mucho. En cuanto a la discusión de resultados, me hubiese gustado tener más tiempo para reflexionar sobre lo que acabábamos de ver, pero creo que el resultado fue chocante y les pareció bastante curioso a los alumnos.

Personalmente considero que los resultados de este problema son muy sorprendentes y merece la pena reflexionar sobre la naturaleza de las pruebas médicas. Básicamente todo el saber en medicina se basa en Estadísticas y por consiguiente en Probabilidades. El significado de dar positivo en una determinada prueba está muy condicionado por otras consideraciones: síntomas, factores de riesgo, antecedentes familiares… Todo ello hace que la mayoría de diagnósticos estén basados en hipótesis que sólo se pueden demostrar de una manera estadística, lo que hace muy complejo la toma de decisiones.

El problema que hemos trabajado es un caso extremo, ya que se trata de una prueba muy específica, y que por tanto medicamente hablando no tiene sentido realizarla a alguien 'al azar', es decir, sin ninguna sospecha significativa. En cambio este tipo de *interferencias* se observan mucho en pruebas más cotidianas, como las **analíticas de sangre.** Un 'positivo' en alguno de los niveles que se analizan pueden tener consecuencias muy diferentes es distintos pacientes. Un ejemplo típico es el análisis es la medición de la **creatinina** en sangre. La creatinina es una sustancia de desecho que se produce en el metabolismo de los músculos cuya concentración normalmente es constante en la sangre. Se filtra por los riñones, por lo que su medición suele ser una buena referencia para monitorizar la correcta función renal.

BIOQUÍMICA			
GLUCOSA EN SUERO	75	mg/dL	(74-106)
COLESTEROL TOTAL	126	mg/dL	(<200)
CREATININA EN SUERO	0,47 *	mg/dL	(0,70-1,30)
FILTRADO GLOMERULAR (CKD-EPI)	>90	mL/min/1.73m2	(>60)
URATO EN SUERO	2,6 *	mg/dL	(3,5-7,2)
SODIO EN SUERO	136,0	mmol/L	(136,0-145,0
POTASIO EN SUERO	5,8 *	mmol/L	(3,5-5,5)
CLORO EN SUERO	107,0	mmol/L	(98,0-107,
ASAT/GOT	19	UI/L	(<40)
ALAT/GPT	11	UI/L	(<35)

Esta es una analítica en la que el nivel de creatinina en sangre es más bajo que los límites normales. La paciente presenta síntomas de delgadez extrema, por lo que este positivo confirmaría que padece **caquexia**, esto es, extrema malnutrición. Los médicos saben que este diagnóstico aumentan las probabilidades de padecer otras enfermedades más graves como cáncer, sida, tuberculosis o algunos trastornos autoinmunes, por lo que tendrán que sopesar realizar más pruebas o comenzar con algún tipo de tratamiento.

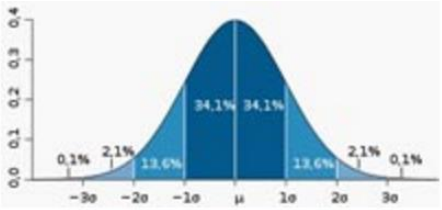
BIOQUÍMICA			
GLUCOSA EN SUERO	86	mg/dL	(74-106)
COLESTEROL TOTAL	207 *	mg/dL	(<200)
CREATININA EN SUERO	0,48 *	mg/dL	(0,60-1,10)
FILTRADO GLOMERULAR (CKD-EPI)	>90	mL/min/1.73m2	(>60)
URATO EN SUERO	3,8	mg/dL	(2,6-6,0)
CALCIO TOTAL EN SUERO	9,7	mg/dL	(8,4-10,2)
FOSFATO EN SUERO	3,7	mg/dL	(2,7-4,5)
ASAT/GOT	7	UI/L	(<40)
ALAT/GPT	<8	UI/L	(<35)
FOSFATASA ALCALINA	118	UI/L	(45-129)
GGT	19	UI/L	(<38)

Esta es otra analítica donde los resultados también muestran unos niveles bajos de creatinina. En cambio, la paciente en este caso no presenta ningún síntoma específico ni otros valores anormales que hagan sospechar que pueda estar enferma, por lo que la mandan a casa. Las posibles razones de este 'positivo' son variadas, pero ninguna invita a pensar a un médico que la paciente sufra ninguna enfermedad. Algunas razones podrían ser:

- El paciente es una persona mayor con poca masa muscular, pero que goza de buena salud.
- Al paciente le han puesto suero o ha bebido mucha agua antes de la prueba, que diluye la creatinina y por lo tanto baja la concentración.
- El paciente es hipertenso y esto puede modificar estas concentraciones.

Pero lo más curioso es que en muchas ocasiones no hay razón para el nivel bajo o alto de una sustancia porque, de hecho, puede no significar una **alteración.** Estadísticamente ciertos valores salen anormales porque sí. Más concretamente, la probabilidad nos dice que **uno de cada 20**

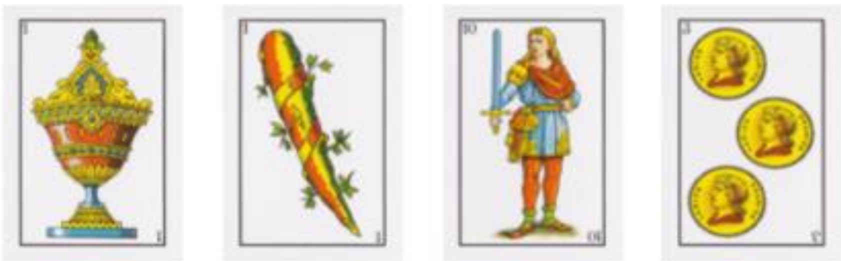
valores sale anormal porque sí. Esos números que salen al lado de la analítica, y que si te pasas pone un asterisco, se calculan aplicando una **distribución normal.**



Los niveles normales de una determinada sustancia se basan en mediciones sobre muestras de voluntarios sanos. Estadísticamente podemos hallar el valor normal de ese parámetro, así como un margen de variación que permita cubrir con cierta confianza estadística a un determinado porcentaje de la población. Porcentaje que, arbitrariamente, se fija en un 95%. De ahí que un 5% de las determinaciones, una de cada veinte, se quede fuera del rango de normalidad: va implícito en su diseño.

6.8 La Paradoja de Los Ases

En un mazo sólo tengo las siguientes 4 cartas.



Barajan y me dan dos de ellas.

a) Miro mis dos cartas y digo: «tengo un as». ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos ases?

b) Miro mis dos cartas y digo: «tengo el as de copas». ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos ases? ¿Más o menos que en el apartado a)?

c) Sin verlas, elijo una de mis cartas. La miro y digo: «es un as». ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos ases?

d) Sin verlas, elijo una de mis cartas. La miro y digo: «es el as de copas». ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos ases? ¿Más o menos que en el apartado c)?

<u>*Contexto:*</u> Los dos últimos problemas de mi taller los propuse como ***retos*** por la dificultad extra que entrañaban y lo enfoqué como actividades de ampliación. Estos retos tienen la particularidad que, siendo aparentemente sencillos, tienen soluciones contra intuitivas o sorprendentes. Mi idea era analizarlos los últimos días de clase en un ambiente más distendido, que favoreciera la discusión y el debate entre los alumnos.

La paradoja de los ases es un problema con unas ideas muy sencillas que aparentemente no entrañan mayor misterio, pero que esconden conceptos muy sutiles sobre simetrías que resultan determinantes a la hora de calcular casos posibles y casos favorables. Tengo que reconocer que yo mismo tuve alguna dificultad para entender las pequeñas diferencias entre las preguntas de cada apartado. En cuanto al trabajo hecho en el aula, sinceramente tuve **muy poco tiempo** para desarrollar esta paradoja, y por lo tanto apenas pude calibrar la aceptación que tuvo entre los alumnos.

Sintaxis: Es la clave de este problema. No se puede decir tanto con tan pocas palabras. Sin duda el detalle importante es la diferencia entre '*Miro mis dos cartas y digo:'* y '*Sin verlas, elijo una de mis cartas. La miro y digo:'* Una diferencia muy sutil.

Resolución: Voy a realizar la resolución que intenté utilizar con los alumnos y que a su vez más sencilla me resultó a mí mismo. Está claro que se trata de un experimento regular ('*Extraer dos cartas de una baraja de 4 cartas')* y que por tanto tendremos que utilizar la regla de Laplace para calcular las probabilidades:

$$P = \frac{Nº\ Casos\ Favorables\ a\ 'DosAses'}{Nº\ de\ Casos\ posibles}$$

La dificultad se esconde en determinar en cada situación los casos favorables y los casos posibles. Denominaremos así las cuatro cartas.

AC ≡ 'As de Copas'	**10 ≡ 'Sota de Espadas'**
AB ≡ 'As de Bastos'	**3 ≡ 'Tres de Oros'**

a) '*Miro mis dos cartas y digo: 'Tengo un as'*

Nos dicen que mira las dos cartas, por lo tanto no sabemos si al decir que tiene un as se está refiriendo a la carta de la izquierda, o a la de la derecha:

Este hecho es crucial, ya que a la hora de tener en cuenta los **casos posibles**, **no podemos considerar que el orden de las cartas influya.** Es decir, por ejemplo a la hora de considerar el caso AB-10, no podemos diferenciarlo con el caso 10-AB.

Por lo tanto se trata de **combinaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2:**

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4*3}{2*1} = \mathbf{6}$$

AC-AB	**AB-10**
AC-10	**AB-3**
AC-3	**10-3**

Nos dice que tiene un as, con lo cual los casos posibles son aquellos que tienen al menos un as. **Forman 5 casos posibles:**

AC-AB	**AB-10**
AC-10	**AB-3**
AC-3	**10-3**

Y el caso favorable sólo es 1, el **AC-AB**

Por lo tanto, en este caso, la probabilidad de tener dos ases es:

$$\boldsymbol{P_a = \frac{1}{5}}$$

b) '*Miro mis dos cartas y digo: 'Tengo el as de copas'*

Una vez más nos dicen que mira las dos cartas, por lo que tenemos que considerar que pares simétricos suman una posibilidad y nuevamente tengo **6 combinaciones**. Pero ahora nos dicen que tiene **el as de copas,** por lo que al contar los casos posibles sobre esas 6 combinaciones solo tendremos en cuenta las que tienen el as de copas 'AC'. **Forman 3 casos posibles:**

AC-AB	**AB-10**
AC-10	**AB-3**
AC-3	**10-3**

Y el caso favorable sólo es 1, el **AC-AB**

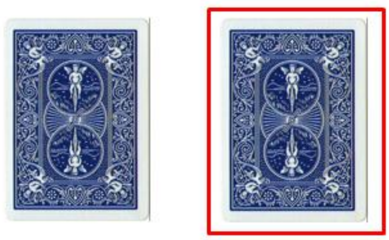
Por lo tanto, en este caso, la probabilidad de tener dos ases es:

$$\boldsymbol{P_b = \frac{1}{3}}$$

Podría parecer paradójico que este caso tengamos más probabilidades que el apartado a). El hecho que nos digan '*tengo un as de copas'* podría parecer que restringe las posibilidades. De hecho es así, pero sólo restringe los casos posibles, por lo que la probabilidad aumenta.

c) *'Sin verlas, elijo una de mis cartas y digo: "es un as" '*

Ahora nos dice que sólo mira una carta, con lo cual implícitamente **esa carta queda marcada:**



Este hecho es determinante. **Ahora sí que tenemos un motivo para discriminar dos parejas 'simétricas'**. Como nos dicen '*esta carta es un as'* no podemos decir que el caso AB-10 sea el mismo que el caso 10-AB. En uno el as está 'a la izquierda' y el otro 'a la derecha'.

Como sí que influye el orden, a la hora de calcular nuestros casos posibles, ahora tendremos **variaciones sin repetición de 4 elementos tomados de 2 en 2:**

$$V_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \mathbf{12}$$

AC-AB	**AB-10**	**10-AB**	**AB-AC**
AC-10	**AB-3**	**3-AB**	**10-AC**
AC-3	**10-3**	**3-10**	**3-AC**

Nos dice que tiene un as, con lo cual los **casos posibles** son aquellos que tienen un as **en un determinado lado** (por ejemplo a la izquierda). **Contamos 6 posibles casos:**

AC-AB	**AB-10**	**10-AB**	**AB-AC**
AC-10	**AB-3**	**3-AB**	**10-AC**
AC-3	**10-3**	**3-10**	**3-AC**

Con dos ases tenemos **2 casos favorables**, AC-AB y AB-AC. Por lo tanto, en este caso, la probabilidad de tener dos ases es:

$$\boldsymbol{P_c = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

d) *Sin verlas, elijo una de mis cartas y digo: "es el as de copas" '*

Una vez más nos dicen que mira sólo una carta, por lo que tenemos que considerar nuevamente **12 variaciones**. Pero ahora nos dicen que tiene **el as de copas,** por lo que al contar los casos posibles sobre esas 12 combinaciones solo tendremos en cuenta como posibles las que tienen el as de copas (AC) en un determinado lado (por ejemplo la izquierda). Recordemos que esa carta ha quedado marcada. **Contamos 3 posibles casos:**

AC-AB	**AB-10**	**10-AB**	**AB-AC**
AC-10	**AB-3**	**3-AB**	**10-AC**
AC-3	**10-3**	**3-10**	**3-AC**

Y ahora sólo tenemos un caso favorable, el AC-AB.

Y la probabilidad de tener dos ases queda:

$$\boldsymbol{P_d = \frac{1}{3}}$$

Una vez más el resultado es paradójico. A pesar de haber dado más información que en el apartado c) (ahora tenemos un as de copas) **la probabilidad de tener dos ases es la misma.**

El hecho diferencial es precisamente **esa rotura de simetría** que inevitablemente tenemos al mirar **sólo una carta**, y tenemos que considerar AB-AC y AC-AB como dos casos diferenciables.

Reacción de los Alumnos: Como ya he comentado, me quedó muy poco tiempo para discutir este problema con los alumnos. Tuve la sensación de que tampoco les resultó tan sorprendente, aunque igual precisamente por eso lo entendieran mejor. Cuando estaba explicando el primer caso (Mirando las dos cartas) algunos alumnos me preguntaron por la posibilidad de contar dos casos simétricos como diferentes. Les expliqué por qué en este caso no, pero ya quedó sobre la mesa el razonamiento clave que explica esta paradoja.

6.9 El Problema de Monty Hall

Imagínate que eres un concursante de un programa televisivo. Te muestran 3 puertas iguales y cerradas y tienes que elegir una de ellas. Detrás de una puerta hay **un coche,** y detrás de las otras dos hay **una cabra** en cada una, como premio "de consolación".

- ¿Qué probabilidad hay de que elijas la puerta del coche?
- ¿Qué probabilidad hay de que elijas alguna de las puertas de las cabras?

Antes de abrir la puerta que has elegido, el presentador, **que sabe perfectamente en qué puerta está el coche,** abre una de las puertas que **no** has elegido y muestra una cabra. Entonces te da la oportunidad de cambiar de puerta…

¿En que caso tengo más probabilidad de ganar el coche? ¿Tú qué harías?

a) Mantener mi elección.
b) Cambiar mi elección.
c) Tengo la misma probabilidad tanto si cambio como si mantengo mi elección.

Justifica brevemente tu respuesta

<u>Contexto:</u> Bajo mi punto de vista, el problema más espectacular de los que forman esta propuesta didáctica. La solución es completamente anti intuitiva y sorprendente a todos aquellos que no se hayan enfrentado antes al problema. De cara al trabajo con alumnos de secundaria, creo que es interesante introducir metodologías alternativas para su discusión y resolución:

- El día anterior les di la hoja con la formulación del problema. Tenían que contestar a las 2 preguntas de arriba y elegir una opción abajo, justificando su respuesta de manera intuitiva.

- Antes de la resolución formal del problema, hicimos una aproximación heurística del problema, usando un simulador.

Sintaxis: Procuré que la redacción del enunciado fuese lo más dirigida posible. Con las dos primeras preguntas se pretende dar una pista que a mi juicio es fundamental. Esto es, con la primera elección, es más probable que **se elija una cabra.** También se intenta remarcar que las probabilidades del experimento no cambian cuando el presentador te abre la puerta, ya que **siempre lo hará, y siempre te enseñará una cabra.**

Resolución: La resolución del problema la enfoqué en tres partes, y durante ellas procuré que fuesen los alumnos los que construyesen la solución de forma activa, interactuando con sus compañeros y fomentando el debate y la discusión.

El día anterior les entregué las hojas con el enunciado y les pedí que contestasen a las preguntas usando simplemente la intuición. El objetivo era que tuviesen una primera toma de contacto con la situación, y una vez hubiésemos discutido sus respuestas en clase, hacerme una idea de los razonamientos que usaban. Luego recogí estas hojas, para analizar un poco más a fondo lo que habían contestado.

Ese día había 19 alumnos en clase. Todos contestaron bien a las dos primeras preguntas, usando la regla de Laplace:

A ≡'Puerta del coche' **B ≡'Puerta de la cabra'**

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{3}} \qquad \boldsymbol{P(B) = \frac{2}{3}}$$

En la pregunta que tenían que elegir entre cambiar o no de elección, **1 alumno** mantendría su elección, **5 alumnos** preferirían cambiar y **13 alumnos** eligieron la opción c), esto es, tengo la misma probabilidad tanto si cambio como si mantengo. Estas son algunas de las razones que dieron:

- Opción a: El alumno que eligió esta opción no escribió nada relevante en la hoja, pero en el debate que surgió en clase explicó que una vez vio una especie de documental que aseguraba que en estas situaciones había que mantener tu elección, porque aunque '*aparentemente te ayudaba abriéndote otra puerta, en el fondo era un engaño.'*

- ***Opción b****:* Los alumnos que preferirían cambiar mencionaban que en una visita a la 'Universidad de Estadística' les habían puesto el mismo ejemplo y les dijeron que en esta situación había que cambiar. Estos fueron algunos de sus razonamientos:

"*Cuando eliges la 1º puerta tienes 1/3 de posibilidades, en cambio si cambias tienes un 50% de posibilidades, por lo que es mejor cambiar."*

"Ahora hay un 50% de acertar. Lo he decidido porque un profesor en la universidad de estadística dijo que en estas ocasiones siempre cambiemos de opinión."

"Según mi punto de vista hay más probabilidad, porque en el programa saben en qué puerta está el coche, y por algo la que abre es en la que a estar la cabra y por lo tanto en la otra el coche."

"Cambiar porque al principio tienes 1/3 de posibilidades de acertar, mientras que ahora tienes 1/2 de posibilidades de acertar."

- ***Opción c:*** Era la opción mayoritaria además de la más intuitiva. La justificación de sus respuestas se basaba en afirmar que tenían las mismas probabilidades de ganar o perder porque tenía un 50% en cada caso. Estas fueron algunas de las respuestas:

"*Tengo el 50% de probabilidades tanto si cambio como si mantengo. Porque sigo sin saber cuál es lo que oculta las otras puertas por lo tanto 50% de posibilidades."*

"Sigo sin saber en qué puerta está el coche y tengo 1/2 de probabilidades de que me toque por lo tanto es indiferente."

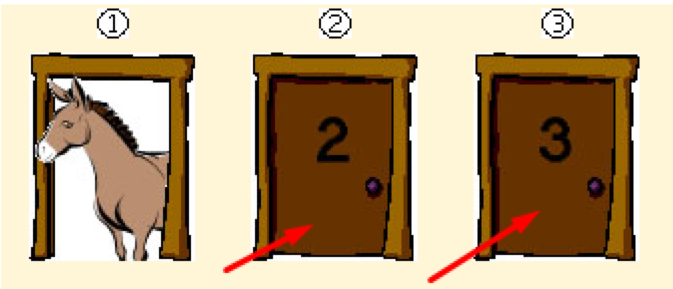
Algunos hicieron cálculos:

" $1/2 * 2/2 = 2/4 = 1/2 \rightarrow 0.5$ *. 50% de probabilidades tanto si me cambio como si no."*

" A ≡ 'Mantener mi elección'; B ≡ 'Cambiar mi elección'. $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/2$ *; Da lo mismo cambiar que mantener mi elección."*

Después de un pequeño debate en el que cada uno intentó defender su postura, yo en principio hice por decantarme por la opción del '50%' y usé un razonamiento 'laplaciano'. 'Siempre t*enemos dos casos posibles, y sólo en uno hay un coche.'* Desde luego que parece lo más razonable.

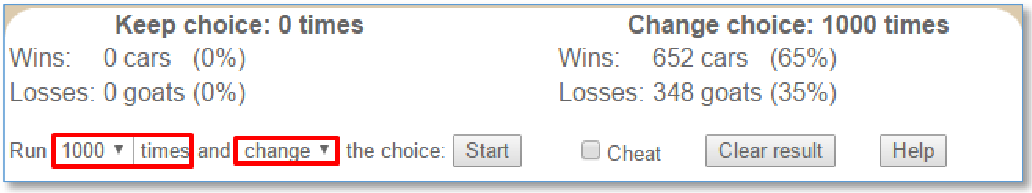
La segunda parte de la resolución usamos uno de los numerosos simuladores del problema de Monty Hall existentes en la red (http://www.estadisticaparatodos.es/taller/montyhall). La idea era sencilla, cada alumno jugaba una vez (primero elegía puerta, y después de que le enseñasen la cabra (en este caso era un burro) decidía si cambiar o mantener) y apuntábamos los resultados (cambiaba/mantenía, ganaba/perdía).



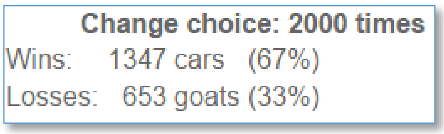
	Ganan	Pierden	Total
Cambian	7	4	**11**
Mantienen	3	5	**8**

- De 11 que jugaron a cambiar, 7 se llevaron el coche.
- De 8 que jugaron a mantener, 3 se llevaron el coche.

Después de estos resultados, la idea de que cambiando tu elección tenías más probabilidad de ganar el coche se fue extendiendo entre los estudiantes. Acto seguido les pregunté: ‘*¿Vosotros diríais de la probabilidad de ganar si cambias de elección es de 7/11?*’ La respuesta fue bastante unánime. Para decir eso tendríamos que repetir el experimento un número muy grande de veces y apuntar los resultados. Entonces usamos una opción del simulado (http://www.grand-illusions.com/simulator), que repite el experimento 1000 veces de manera aleatoria, pero eligiendo si cambias o no tu elección.



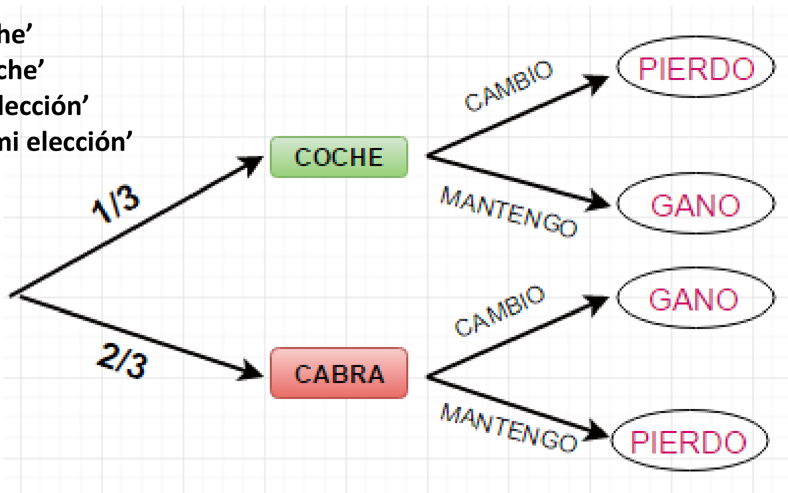
Entonces les pregunté si ahora creían que la probabilidad de ganar el coche si cambiabas era del 65%. Algunos me contestaron que jugáramos otras 1000 veces para estar seguros.



La idea es que relacionen el 33% y el 66% con 1/3 y 2/3. Entonces un alumno hizo una reflexión muy interesante: ‘*En principio teníamos 2/3 de probabilidad de elegir una cabra, con lo cual si tendremos 2/3 de ganar el coche.*’

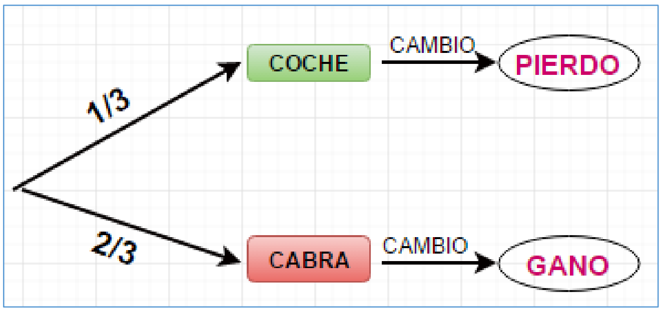
La tercera parte de la resolución intentamos una resolución analítica propiamente dicha. Para ello usamos el método que más hemos trabajado en clase, el **diagrama de árbol.** En principio definimos los sucesos de esta manera:

G ≡ ‘Gano el coche’
P ≡ ‘Pierdo el coche’
C ≡’Cambio mi elección’
M ≡’Mantengo mi elección’



Pero esta representación genera problemas. ¿Qué probabilidad asigno a 'cambiar' o 'mantener' mi elección? ¿Es realmente un suceso aleatorio? Todos los alumnos en el simulador eligieron libremente cambiar o mantener, y a la hora de repetir simulaciones automáticas y aleatorias teníamos que elegir previamente si cambiábamos siempre o manteníamos siempre. Por lo tanto cambiar o mantener tu elección **no es un suceso aleatorio** y por lo tanto tenemos que hablar de **dos experimentos aleatorios diferentes,** en uno cambiando siempre y en otro manteniendo siempre. En los dos defino los sucesos:

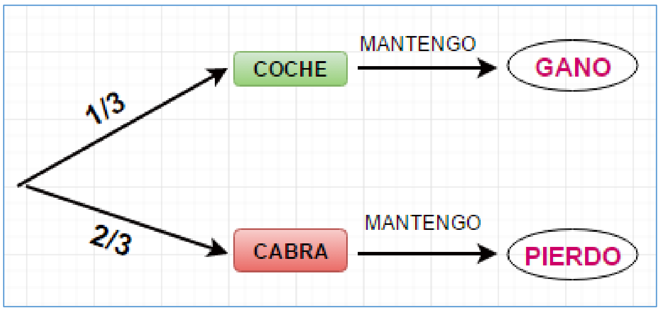
G ≡ 'Gano el coche'
P ≡ 'Pierdo el coche'



<u>CAMBIANDO</u>

$$\boldsymbol{P(G) = \frac{2}{3}}$$

$$P(P) = 1/3$$



<u>MANTENIENDO</u>

$$\boldsymbol{P(G) = \frac{1}{3}}$$

$$P(P) = 2/3$$

Queda pues demostrado que tenemos 2/3 de probabilidades de ganar el coche si cambiamos nuestra elección, mientras que tan solo 1/3 de probabilidad de ganarlo si decidimos mantenerla.

<u>Reacción de los Alumnos</u>: El ambiente en el aula durante toda la actividad fue excelente. Todos los alumnos seguían el hilo de lo que se decía y argumentaba. Creo que el hecho de que el aprendizaje fuese tan secuencial fue muy positivo. Cuando acabó la sesión algunos alumnos incluso me felicitaron.

7. Evaluación

Como ya he apuntado, el trabajo que realicé con los alumnos careció de una evaluación formal, por lo que tendremos que evaluar la propuesta didáctica desde perspectivas más subjetivas. No obstante, estuve en contacto con la profesora del grupo, y me informó de los resultados de la prueba final escrita, la cual contenía preguntas sobre funciones, estadística, probabilidad y distribuciones binomiales. Habíamos acordado que en las preguntas de probabilidad habría una en la que fuese necesario realizar un diagrama de árbol y aplicar el Teorema de Bayes. El problema fue el siguiente:

4._ (2 P) En un cierto banco el 30% de los créditos concedidos son para vivienda, el 50% se destina a empresas y el resto para consumo familiar. De los créditos concedidos a vivienda, el 10% resultan impagados, de los concedidos a empresas el 20% son impagados y de los de consumo resultan impagados el 10%. Organizar los datos y calcular la probabilidad de que elegido un crédito al azar,

a) Sea impagado

b) sea pagado

c) Se hubiera destinado a vivienda sabiendo que ha sido impagado.

Este problema era más sencillo que la mayoría de los que trabajaron conmigo, pero se ajusta al nivel que típicamente se exige a un curso como 1º de Bachillerato. Tuve acceso a algunas de las respuestas y tengo que afirmar que los resultados de esta pregunta fueron en general bastante buenos. La mayoría de los alumnos realizó correctamente el diagrama de árbol y no tuvieron demasiada dificultad para calcular las probabilidades ni aplicar el Teorema de Bayes. Sólo algunos alumnos tuvieron algún error de notación. La profesora hizo hincapié en que ningún alumno había dejado la pregunta en blanco y todos lo habían intentado, y eso es muy positivo.

Respecto a los objetivos que me había marcado antes de la realización de esta propuesta didáctica, creo que en general he cumplido con la mayoría de ellos. En concreto y a la vista de los resultados, me siento especialmente satisfecho con la consecución de los siguientes objetivos:

- ✓ Proporcionar métodos de resolución de problemas que resulten generales y accesibles para los alumnos.
- ✓ Explorar diferentes recursos didácticos y valorar su alcance.
- ✓ Generar debate y reflexión entre los alumnos acerca de los problemas propuestos.

El objetivo de eliminar sesgos de razonamiento no estadístico es difícil de valorar. Sin embargo sí que me atrevería a apuntar un par de sesgos que percibí más marcados entre los alumnos:

- ➢ *Confusión de probabilidad condicional y conjunta:* Como ya comentamos, este error tiene mucho que ver con la comprensión del enunciado. Hay muchos problemas que, dependiendo de cómo estén expresados, generarán dudas y confusiones entre $P(A \cap B)$ y $P(A|B)$ (como por ejemplo el problema de ***La fiabilidad del test***).

- <u>*Condicionamiento y Temporalidad:*</u> El suceso condicionante siempre debe ir precedido temporalmente. Este sesgo está muy marcado entre los alumnos, y creo que es tremendamente difícil eliminarlo. Aunque considero que se trata de un método muy general y potente, hay que reconocer que los **diagramas de árbol,** así como el enfoque que le dimos al **Teorema de Bayes,** no resultaron nada favorables para la eliminación de este sesgo. Parece que el uso de un árbol es el recurso más efectivo para resolver problemas de probabilidad condicional, sobre todo cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo). Pero puede reforzar las concepciones casualista o cronologista en los alumnos que las manifiestan (Diaz y De la Fuente, 2005). Sin duda habría que realizar alguna otra actividad o problema para trabajar en este sentido.

A nivel teórico, creo que los objetivos generales también se han trabajado consecuentemente:

- ✓ La reflexión epistemológica sobre la naturaleza del conocimiento estocástico, su desarrollo y evolución.
- ✓ Análisis y reflexión sobre el conocimiento común y especializado del contenido por parte del docente.
- ✓ Análisis del currículo, situaciones didácticas y metodologías de enseñanza en el ámbito del aula.
- ✓ Exploración de diferentes metodologías y recursos didácticos activos, exploratorios, manipulativos y por descubrimiento, que facilite la comprensión de la noción de aleatoriedad y de sus propiedades.
- ✓ Estudio de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos en el aprendizaje y sus estrategias en la resolución de problemas que permita orientar mejor la tarea de enseñanza y evaluación del aprendizaje.
- ✓ Análisis y reflexión sobre los problemas propuestos a los alumnos.

En definitiva, a pesar de lo limitado y humilde de esta propuesta didáctica, a la vista de los resultados de la prueba escrita, de la consecución de los objetivos planteados y de las reacciones de los alumnos durante su realización, considero que **los resultados de la propuesta didáctica aquí descrita fueron bastante satisfactorios.**

8. Referencias

- BASULTO, J. y CAMUÑEZ J.A. (2007). El problema de los dados del caballero de Méré: soluciones publicadas en el siglo XVII. *Suma,* 56, 43-54. Disponible en: http://revistasuma.es/IMG/pdf/56/043-054.pdf

- BATANERO, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística?. *Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, batanero@goliat.ugr.es Blaix15,* 2-13. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf

- BATANERO, C., CONTRERAS, J.M., DIAZ, C., ARTEAGA, P. (2009) Paradojas en la Historia de la Probabilidad como Recurso Didáctico. *Actas de las XV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas.* Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TallerParadojas.pdf

- BATANERO, C., ORTIZ, J. J. y SERRANO, L. (2007). Investigación en Didáctica de la Probabilidad. *UNO,* 44, 7-16. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/uNOiNVESTIGACION.pdf

- BATANERO, C. y SERRANO, L. (1995). La Aleatoriedad, su Significado e Implicaciones Educativas. *UNO, 5, 15-28.* Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/aleatoriedad.pdf

- BOCM (2015a). Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. BOCM del 20 de mayo.

- BOCM (2015b). Decreto 52/2015, de 21 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo del Bachillerato. BOCM del 22 de Mayo.

- BOE (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE del 10 de Diciembre.

- BOE (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE del 3 de Enero.

- CONTRERAS, J.M., DÍAZ, C. y BATANERO, C. (2009). Recursos para la Exploración de la Probabilidad Condicional en Internet. *IX Congreso Galego de Estatística e*

Investigación de Operacións, 201-206. Disponible en: http://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/congresos/Recursos.pdf

- CONTRERAS, J.M., BATANERO, C., CAÑADAS, G.R. y GEA, M.M. (2012) La Paradoja de Simpson. *Suma,* 71, 19-26. Disponible en: http://revistasuma.es/IMG/pdf/71/019-026.pdf

- CORBERÁN, A. y MONTES, F. (2000). Perversiones y trampas de la Probabilidad. *La Gaceta de la RSME*, 3, 198-229. Disponible en: http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=257

- DÍAZ, C. y DE LA FUENTE, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/epsilon_condicional.pdf

- DÍAZ-CORDOVÉS, J. y ALONSO, M.D. (2000). Comentarios sobre el artículo "Perversiones y trampas de la Probabilidad" de A. Corberán y F. Montes. *La Gaceta de la RSME*, 3(2), 100-106. Disponible en: http://gaceta.rsme.es/confirmar.php?id=218

- GARCIA, M. (2000). El Surgimiento de la Teoría de la Probabilidad. *VIII Edición Jornadas ASEPUMA.* 421-429. Disponible en: http://www.uv.es/asepuma/VIII/m07/m7-04.pdf

- GARCÍA CRUZ, J.A. (2000). Historia de un problema: El Reparto de la Apuesta. *Suma,* 33,25-36. Disponible en: https://jagcruz.webs.ull.es/Articulos/historia_problema.pdf

- GILL, R. (2011). The Monty Hall Problem. *Mathematical Institute, University of Leiden, Netherlands.* Disponible en: http://www.math.leidenuniv.nl/~gill/mhp-statprob.pdf. Consultado el 15 de Junio de 2016.

- GUISAOLA, J. y BARRAGUÉS, J.I. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias,* 20(2), 85-302. Disponible en: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21812/21646

- PERERO, M. (1994) Historias e historia de las matemáticas. Editorial Iberoamérica, México. 1994, 88-94. Disponible en: http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/CienciasAplicadas/ProbabilidadEstadistica/orig_prob.html. Consultado el 15 de Junio de 2016.

- SAENZ, C. (1998). Sesgos en el razonamiento probabilístico y efectos de la instrucción estadística elemental. *Suma,* 28, 37-52. Disponible en: http://revistasuma.es/IMG/pdf/28/037-052.pdf

- TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science, New Series*, 185, 1124-1131. Disponible en: http://people.hss.caltech.edu/~camerer/Ec101/JudgementUncertainty.pdf

9. *Anexos*

ANEXO I: Problemas

PROBLEMAS PROBABILIDAD- 1º BACHILLERATO

1.- En una habitación tenemos 4 interruptores de los cuales sólo uno de ellos enciende la luz. Halla la probabilidad de acertar con el interruptor correcto:

a) En el primer intento.
b) En el segundo intento.
c) En el tercer intento.
d) En el cuarto intento.

2.- En una habitación tenemos 4 interruptores de los cuales sólo uno de ellos enciende la luz. Consideramos el experimento aleatorio que consiste en anotar el número de interruptores que necesito pulsar para encender la luz. Describe el espacio muestral y calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.

3.- Se lanza una moneda. Si sale cara se acude a una urna que contiene 4 bolas blancas y 2 negras para extraer una bola. Si sale cruz se acude a una urna que contiene 3 bolas blancas y 3 negras para extraer una bola.
a) Escribe el espacio muestral y determina las probabilidades de cada suceso elemental.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?
c) Si la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de la primera urna?

4.- El 42% de la población activa de España está formada por mujeres. Se sabe que un 24% de las mujeres y un 16% de los hombres están en el paro. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa esté en el paro?

5.- Dos muchachos se juegan un bote de 10 euros a piedra papel y tijera. El primero que llegue a 5 puntos se llevará los 10 euros. La partida se interrumpe antes de concluir, cuando el jugador A lleva 4 puntos y el B 3 puntos. ¿Cómo deben repartirse el bote?

6.- Una compañía telefónica tiene 3 empleados encargados de recibir las quejas de los clientes:

- El empleado A atiende al 60% de los visitantes, B al 25% y C al resto.
- El empleado A resuelve el 95% de los problemas que plantean los clientes, mientras que B sólo resuelve el 80% y C el 60%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que NO me resuelvan el problema?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que me resuelvan el problema si NO me atiende A?
c) Si no me han resuelto el problema, ¿cuál es la probabilidad de que me haya atendido el empleado B?

7.- *La paradoja de los 3 dados*

En el siglo XVII, los jugadores italianos solían apostar sobre el total de puntos obtenidos al lanzar tres dados. Pensaban que la probabilidad de obtener 9 puntos al sumar los puntos de los tres dados era la misma que la de obtener 10. Razonaban así:

- Hay seis combinaciones posibles para obtener 9 puntos (126, 135, 144, 234, 225, 333).
- También hay seis combinaciones posibles para obtener 10 puntos (145, 136, 226, 235, 244, 334).

¡Por lo tanto la probabilidad debe ser la misma!

Pero la experiencia permitía concluir que se ganaba más veces apostando a 10 que a 9. Galileo les aclaró esta aparente paradoja calculando correctamente las probabilidades. ¿Sabrías calcularlas tú?

8.- *La fiabilidad del Test*

En una cierta población, se sabe que una persona entre 1000 padece una determinada enfermedad. Existe un test clínico que identifica la enfermedad, pero tiene un determinado margen de error:

- El 98% de las personas enfermas dan positivo en el test.
- El 99% de las personas sanas dan negativo en el test.

Si seleccionamos una persona al azar y el test es positivo:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que la persona esté enferma? ¿Es razonable el resultado obtenido?

b) En general, cuando el doctor ordena el test es porque ya observa ciertos síntomas de que una persona esté enferma. Resolver el apartado a) anterior suponiendo ahora que una entre cada 10 personas padece la enfermedad. (Esto es, que el doctor estime que la probabilidad de que esté enferma es del 10%).

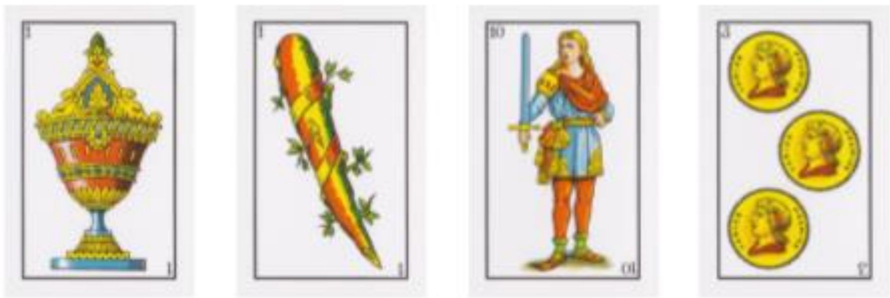
ANEXO II: Retos

Probabilidad – 1ºBachillerato

RETO Nº1

LA PARADOJA DE LOS ASES

En un mazo sólo tengo las siguientes 4 cartas.



Barajan y me dan dos de ellas.

a) Miro mis dos cartas y digo: «tengo un as». ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos ases?
b) Miro mis dos cartas y digo: «tengo el as de copas». ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos ases? ¿Más o menos que en el apartado a)?

RETO Nº2

EL CONCURSO DE LAS TRES PUERTAS

Imagínate que eres un concursante de un programa televisivo. Te muestran 3 puertas iguales y cerradas y tienes que elegir una de ellas. Detrás de una puerta hay **un coche,** y detrás de las otras dos hay **una cabra** en cada una, como premio "de consolación".

- ¿Qué probabilidad hay de que elijas la puerta del coche?

- ¿Qué probabilidad hay de que elijas alguna de las puertas de las cabras?

Antes de abrir la puerta que has elegido, el presentador, **que sabe perfectamente en qué puerta está el coche,** abre una de las puertas que **no** has elegido y muestra una cabra. Entonces te da la oportunidad de cambiar de puerta…

¿En que caso tengo más probabilidad de ganar el coche? ¿Tú que harías?

a) Mantener mi elección.
b) Cambiar mi elección.
c) Tengo la misma probabilidad tanto si cambio como si mantengo mi elección.

Justifica brevemente tu respuesta.