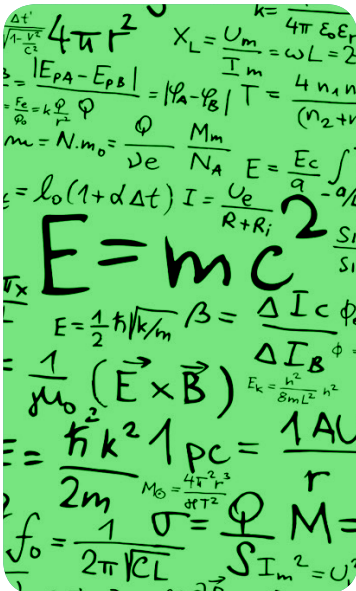
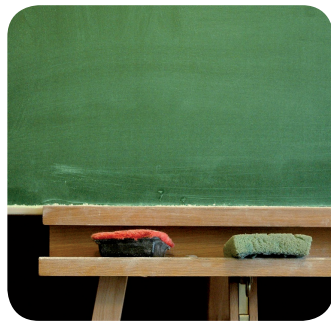




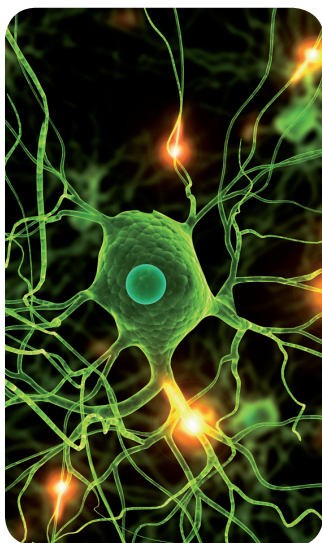
MÁSTERES de la UAM

Facultad de Ciencias
/ 15-16

Matemáticas
y Aplicaciones



Campus Internacional
excelencia UAM
CSIC+



La universalidad de la función zeta de Riemann

*Miguel Monsalve
López*



FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER:

LA UNIVERSALIDAD DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

AUTOR: MIGUEL MONSALVE LÓPEZ
CURSO: 2015-2016

Dirigido por:
José Luis Fernández Pérez

Madrid, 28 de junio de 2016.

Índice general

Introducción	5
I Preliminares	7
1. Series condicionalmente convergentes	9
1.1. Reordenación de series en espacios vectoriales de dimensión finita	10
1.2. Reordenación de series en espacios de Hilbert	13
2. Aproximaciones holomorfas: espacios de Bergman	19
2.1. Topología de los espacios de Bergman	20
3. Las desigualdades de Markov y Bernstein	25
3.1. Interpolación de Lagrange y polinomios de Chebyshev	26
3.2. La demostración de Pólya y Szegő	29
3.3. El teorema de Gauss-Lucas y una demostración alternativa	31
4. Transformadas integrales holomorfas: los teoremas de Paley-Wiener	35
4.1. Transformadas de Fourier y Laplace	35
4.2. Los teoremas de Paley-Wiener	38
5. Sucesiones y curvas equidistribuidas	43
5.1. Aproximación de números reales por racionales	43
5.2. Sucesiones uniformemente distribuidas: el criterio de Weyl	47
5.3. Curvas uniformemente distribuidas	51
6. Series de Dirichlet	57
6.1. Teoría elemental de las series de Dirichlet: convergencia y orden	57
6.2. La fórmula del valor medio cuadrático	62
7. La función zeta de Riemann	69
7.1. La función zeta de Riemann y su relación con los números primos	69
7.2. Distribución de los ceros de la función zeta	73
8. Universalidad en espacios de funciones	83
8.1. Ejemplos de teoremas de universalidad	83

II	La universalidad de la función zeta de Riemann	87
9.	El teorema de universalidad de Voronin	89
9.1.	El lema fundamental	91
9.2.	El final de la demostración	98
10.	Universalidad e Hipótesis de Riemann: la autosemejanza de la función zeta	105
10.1.	La autosemejanza de la función zeta y el teorema de equivalencia de Bagchi . . .	105
10.2.	Autosemejanza y casi periodicidad de la función zeta	108
10.3.	¿Qué se sabe de la autosemejanza de la función zeta?	109
	Índice alfabético	111
	Bibliografía	115

Introducción

Si hubiera que escoger uno de los objetos matemáticos que más interés y fascinación han generado en las Matemáticas del último siglo, uno de ellos es sin duda alguna la **función zeta de Riemann**, a la que se denota por la letra griega ζ . La profunda relación que guarda con la aparentemente errática distribución de los números primos y el halo de misticismo que se ha generado tras la **Hipótesis de Riemann** hacen de ella un tema recurrente en numerosos artículos y trabajos.

En el presente trabajo no nos interesará tanto la ya citada relación entre la función zeta y los números primos, sino que fundamentalmente nos ocuparemos de la distribución de los valores de ζ en ciertas regiones del plano. Como veremos más adelante, uno de los pioneros en este tipo de cuestiones fue el matemático danés **Harald Bohr**, quien demostró junto a **Richard Courant** el siguiente teorema en 1914, vease [8].

Teorema (Teorema de Bohr-Courant, 1914). *Sea $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ fijo. Entonces, el conjunto $\{\zeta(\alpha + iy) : y \in \mathbb{R}\}$ es denso en $\mathbb{C}$.*

Este teorema sugiere que, además de la relación que la función ζ tenga con los números primos, su naturaleza en la llamada **banda crítica** es en sí lo suficientemente rica y compleja como para ser merecedora de un exhaustivo estudio.

Sin embargo, la distribución de los valores de la función ζ va mucho más allá de lo que el lector pueda imaginar. El matemático ruso **Sergei Mikhailovitch Voronin** probó en 1975, véase [52], uno de los resultados más sorprendentes con los que se ha topado quien escribe estas palabras:

Teorema (Teorema de universalidad de Voronin, 1975). *Sean $0 < r < \frac{1}{4}$ y $f(z)$ una función holomorfa en $\mathbb{D}(0, r)$ y continua hasta la frontera que no se anula en ningún punto. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real $T = T(\varepsilon)$ de modo que*

$$\max_{|z| \leq r} \left| f(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + iT\right) \right| < \varepsilon.$$

No es sólo que la imagen por ζ de rectas verticales en la banda crítica sea densa en $\mathbb{C}$; sino que mediante traslaciones de la función zeta en la banda crítica es posible aproximar uniformemente cualquier función holomorfa que no se anule! Este teorema supuso, en cierto sentido, el primer ejemplo explícito y no trivial de los llamados **teoremas de universalidad**.

Si además consideramos la posibilidad de aproximar, en el sentido del teorema de universalidad de Voronin, funciones que sí se anulen; el círculo se cierra y volvemos inevitablemente a la misma cuestión de siempre: la Hipótesis de Riemann. Fue el matemático indio **Bhaskar Bagchi** en 1981 quién descubrió el siguiente enunciado equivalente a la Hipótesis de Riemann, vease [3]:

Teorema (Teorema de equivalencia de Bagchi, 1981). *La Hipótesis de Riemann es cierta si y sólo si para todo K compacto en $\frac{1}{2} < \Re(z) < 1$ con complementario conexo y para todo $\varepsilon > 0$ se tiene:*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \max_{z \in K} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z)| < \varepsilon \right\} \right) > 0.$$

La variedad de herramientas necesarias para una exposición clara de las demostraciones de los teoremas de universalidad de Voronin y de equivalencia de Bagchi es, como observará el lector, bastante elevada; sin embargo, en la mayoría de los casos, éstas no son excesivamente complejas. Es por ello que el grueso del trabajo es la parte de PRELIMINARES que consta de 8 capítulos y en los que discutiremos sobre temas de diversa índole. La segunda parte del trabajo, más corta y en la que se encuentran los objetivos finales del trabajo, trata exclusivamente sobre LA UNIVERSALIDAD DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN y las consecuencias que surgen al considerar ciertas cuestiones relacionadas con la universalidad. Por último, anotar que cada capítulo vendrá dividido en *secciones* (numeradas de la forma 1.1) y éstas a su vez en *apartados* (sin numerar).

Pese a que el número de referencias consultadas ha sido elevado, sí ha habido algunas con las que se ha trabajado durante todo el año:

[52] S.M.VORONIN, *Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function*, Math. USSR Izvestija, **9**, (1975), no. 3, pp. 443-453.

[47] J.STEUDING, *On the universality of the Riemann zeta-function*, (2002).

El resto de referencias consultadas y su función se irán detallando al inicio de cada capítulo.

Pido disculpas de antemano si las dimensiones del documento exceden en lo esperado para un trabajo de estas características; las razones son las siguientes: en primer lugar, el elevado número de herramientas y el hecho de que en general éstas no suelen tratarse en cursos de grado y/o máster; y en segundo lugar, aprovechando que la literatura en castellano sobre el teorema de universalidad de Voronin es inexistente, el presente trabajo pretende (tras una futura revisión y adaptación) tomar la forma de unas notas adecuadas y accesibles para cualquier estudiante de Matemáticas con conocimientos de grado.

Me gustaría acabar estas palabras con una muestra sincera de agradecimiento a Josechu; ya no sólo por dirigir con tan buen tino este trabajo durante el último año, sino por todo el apoyo y conocimiento que he recibido por su parte estos últimos cuatro años: realmente considero que me han hecho crecer como matemático y como persona. Gracias, este trabajo es en gran medida tuyo.

Miguel Monsalve López.
Madrid, 28 de junio de 2016.

PARTE I:

PRELIMINARES

1

Series condicionalmente convergentes

Dedicamos este primer capítulo a estudiar la reordenación de series en espacios vectoriales. El itinerario crece en dificultad según avanza el capítulo: en la sección 1.1 trabajaremos exclusivamente con series en espacios vectoriales de dimensión finita; mientras que en la sección 1.2 veremos, en primer lugar, los problemas que entraña la reordenación de series en espacios de Banach de dimensión infinita y, en segundo lugar, enunciaremos el teorema de Pechersky: un criterio al que posteriormente apelaremos en la demostración del teorema de universalidad de Voronin.

Las principales referencias seguidas en este capítulo han sido el libro [45] y los artículos [41] y [11] para la sección 1.1, y los artículos [11], [38] y [47] para la sección 1.2. Sin más demora, empecemos con los conceptos generales que iremos usando a lo largo del capítulo.

Comencemos estableciendo algo de notación en el contexto general para después centrarnos en cada caso concreto por separado. En lo que sigue, X será un espacio vectorial topológico de dimensión arbitraria y $(u_n)_{n \geq 1}$ una sucesión cualquiera de vectores en X .

Definición 1.1. Diremos que la **serie** $\sum_{n \geq 1} u_n$ es **convergente** si sus sumas parciales convergen; esto es, si el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n = v$$

para cierto $v \in X$.

Dada una biyección cualquiera en los naturales $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, diremos que la sucesión $(u_{\sigma(n)})_{n \geq 1}$ es una **reordenación** de $(u_n)_{n \geq 1}$. Sorprendentemente, las sumas infinitas no satisfacen en general la propiedad conmutativa sino que son sensibles a la reordenación de sus términos. Así pues, la cuestión que estudiaremos es determinar el **conjunto de valores** que toma una serie convergente considerando cualquier reordenación de sus términos; es decir, dada

una serie convergente $\sum_{n \geq 1} u_n$ queremos saber qué aspecto tiene el conjunto

$$\mathcal{S}_{(u_n)} := \left\{ \sum_{n \geq 1} u_{\sigma(n)} : \forall \sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ biyección} \right\}.$$

Más concretamente, buscaremos en cada caso establecer las hipótesis suficientes sobre la sucesión $(u_n)_{n \geq 1}$ de modo que podamos asegurar que el conjunto de valores $\mathcal{S}_{(u_n)}$ abarca por completo el espacio X . Ése será el problema que nos ocupará en las siguientes páginas y nos referiremos a él constantemente. Llegados a este punto, es natural considerar la siguiente clasificación:

Definición 1.2. Diremos que la serie $\sum_{n \geq 1} u_n$ **converge incondicionalmente** si para toda reordenación $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de $(u_n)_{n \geq 1}$ se tiene que la serie $\sum_{n \geq 1} u_{\sigma(n)}$ es convergente. En caso contrario, diremos que la serie es **condicionalmente convergente**.

Como es de esperar en los espacios vectoriales de dimensión finita el problema que nos planteamos es notablemente más sencillo que en los de dimensión infinita. Así que, como escalón previo, traslademos esta cuita a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^d$.

1.1. Reordenación de series en espacios vectoriales de dimensión finita

Caso $\mathbb{R}$: el teorema de reordenación de Riemann

El criterio para decidir si el conjunto de valores de una serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ de números reales abarca todo $\mathbb{R}$ es sobradamente conocido por todos: el **teorema de reordenación de Riemann**. Antes de enunciarlo, demos la siguiente definición:

Definición 1.3. Sea $\sum_{n \geq 1} a_n$ una serie convergente de números reales. Diremos que la serie es **absolutamente convergente** si el siguiente límite satisface

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |a_n| < +\infty.$$

Resulta que para series de números reales se da la siguiente equivalencia entre las definiciones anteriores:

Proposición 1.4. *Sea $\sum_{n \geq 1} a_n$ una serie de números reales. Entonces, $\sum_{n \geq 1} a_n$ es incondicionalmente convergente si y sólo si es absolutamente convergente. Asimismo, $\sum_{n \geq 1} a_n$ es condicionalmente convergente si y sólo si no es absolutamente convergente.*

De hecho, es muy común encontrar esta última proposición directamente como definición de serie condicionalmente convergente en los libros de cálculo elemental aunque, como veremos, sólo será válida en espacios vectoriales de dimensión finita.

El teorema de reordenación de Riemann además nos dice cómo es el conjunto de valores en cada caso.

Teorema 1.5 (Teorema de reordenación de Riemann, 1876). ¹ *Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales tal que la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge a $l \in \mathbb{R}$:*

¹Como dato histórico, este teorema aparece publicado por primera vez en la «tesis de habilitación» de Riemann para ser profesor auxiliar, defendida en Leipzig en 1876. En ésta estudiaba las condiciones para que una función pudiera ser representada mediante su serie de Fourier:

B. RIEMANN, *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Gesammelte Mathematische Werke, (1876), pp. 213-253.

- (i) Si la serie es absolutamente convergente, entonces para toda reordenación σ de la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_{\sigma(n)} = l.$$

- (ii) Si, por el contrario, la serie es condicionalmente convergente se tiene que para todo $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ existe una reordenación σ de la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ de modo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_{\sigma(n)} = b.$$

Nótese que el problema que anteriormente nos planteábamos, ya queda completamente resuelto en $\mathbb{R}$: basta con tener una serie condicionalmente convergente para que satisfaga $\mathcal{S}_{(a_n)} = \mathbb{R}$.

Veamos un ejemplo notable de serie condicionalmente convergente:

Nota 1.1.1 (La serie armónica alternada): Un ejemplo bien conocido de serie condicionalmente convergente en $\mathbb{R}$ es el de la **serie armónica alternada** que se construye a partir de la sucesión $a_n = (-1)^{n+1}/n$ para $n \geq 1$. Por un lado, considerando la serie de Taylor de $\log(1+x)$, se ve:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2).$$

Sin embargo,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Más adelante, aparecerá repetidamente una función muy relacionada con este ejemplo.

El ejemplo anterior trae a colación el siguiente criterio para encontrar series condicionalmente convergentes de números reales al que apelaremos más adelante:

Proposición 1.6. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Si existen dos subsucesiones $(a_{n_k}^+)$ y $(a_{n_k}^-)$ de términos positivos y negativos respectivamente, tales que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_{n_k}^+ = +\infty \quad y \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_{n_k}^- = -\infty.$$

Entonces, la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es condicionalmente convergente.

La demostración de esta última proposición no es sino una reinterpretación del teorema de reordenación de Riemann. Dejamos los detalles para ser completados por el lector, pues no es más que un ejercicio de cálculo elemental.

Caso $\mathbb{R}^d$

Para recordar que estamos en $\mathbb{R}^d$ y que trabajamos con vectores, volvamos a la notación $(u_n)_{n \geq 1}$; además, denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto escalar usual. Como es de esperar, la situación en $\mathbb{R}^d$ para $d > 1$ diferirá en algunos aspectos de la que se daba en $\mathbb{R}$; por ejemplo, en este caso no existirá un resultado tan fuerte como el del teorema de reordenación de Riemann, aunque sí obtendremos un resultado similar: el **teorema de Lévy-Steinitz**, del que nos valdremos para establecer las hipótesis suficientes de modo que $\mathcal{S}_{(u_n)} = \mathbb{R}^d$. Vamos con ello:

En este caso, la definición de **serie absolutamente convergente** se transforma de la manera lógica: exigiendo que la serie de los módulos (en vez de la de los valores absolutos) sea convergente; esto es, si el siguiente límite cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \|u_n\| < +\infty.$$

Resulta que la proposición 1.4 sigue siendo verdadera en $\mathbb{R}^d$: convergencia incondicional y absoluta son de nuevo conceptos equivalentes en $\mathbb{R}^d$. Sin embargo, como ya anunciamos, el teorema de reordenación de Riemann no se cumple en este caso: mientras que el punto (i) sí se sigue satisfaciendo, es evidente que el punto (ii) no puede darse en este caso. Un sencillo contraejemplo es el siguiente: consideremos la sucesión de vectores dada por $u_n = ((-1)^{n+1}/n, 0)$ para $n \geq 1$, ya que sumando en cada coordenada y recordando la nota 1.1.1 se observa que la serie no es absolutamente convergente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n = (\log(2), 0), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \|u_n\| = +\infty.$$

Sin embargo, es evidente que $\mathcal{S}_{(u_n)} = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$. Esto nos da una pista sobre lo que sucede: el hecho de que haya dos grados de libertad nos permite escoger malintencionadamente la sucesión $(u_n)_{n \geq 1}$ de modo que sólo converja en una recta afín. La situación para $\mathbb{R}^d$ con d arbitrario es análoga, a saber que los grados de libertad aumentan proporcionalmente con la dimensión. En general, la situación en $\mathbb{R}^d$ queda resumida en el ya anunciado teorema de Lévy-Steinitz, demostrado por Paul Lévy para el caso $d = 2$ en 1905 (léase [30]); y por Ernst Steinitz para $d \geq 3$ en 1915 (léase [46]). De nuevo, lo enunciaremos sin prueba, para un buen tratamiento de las ideas de la demostración léase por ejemplo [41].

Teorema 1.7 (Teorema de Lévy-Steinitz, 1905, 1913). *Sea $\sum_{n \geq 1} u_n$ una serie condicionalmente convergente en $\mathbb{R}^d$. Entonces, existe un subespacio afín $A \subset \mathbb{R}^d$ no trivial tal que para todo $v \in A$ existe una reordenación σ de modo que:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_{\sigma(n)} = v.$$

Nota 1.1.2 (Lévy-Steinitz y reordenación de Riemann: relación si la hubiera): Note, lector, que si consideramos el teorema de Lévy-Steinitz para $d = 1$ obtenemos el enunciado del teorema de la reordenación de Riemann; esto es:

Teorema de Lévy-Steinitz $\implies$ Teorema de reordenación de Riemann.

Tanto Lévy como Steinitz consideraron en sus publicaciones originales el problema sobre qué hipótesis hay que imponer a la sucesión $(u_n)_{n \geq 1}$ para que el conjunto de valores $\mathcal{S}_{(u_n)}$ sea todo el espacio $\mathbb{R}^d$. Para resolver dicho problema damos la siguiente proposición, consecuencia sencilla del teorema de Lévy-Steinitz:

Proposición 1.8. *Sea $(u_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^d$ tal que la serie $\sum_{n \geq 1} u_n$ es convergente y que para todo vector unitario $e \in \mathbb{R}^d$ la serie $\sum_{n \geq 1} \langle u_n, e \rangle$ converge condicionalmente.*

Entonces, para todo $v \in \mathbb{R}^d$ existe una reordenación σ tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_{\sigma(n)} = v.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $(u_n)_{n \geq 1}$, satisfaciendo las hipótesis de la proposición, es tal que su conjunto de valores es un subespacio afín propio de $\mathbb{R}^d$. Denotemos por A a dicho subespacio afín y consideremos un vector unitario $w \in A^\perp$. Entonces, la serie $\sum_{n \geq 1} \langle u_n, w \rangle$ no es condicionalmente convergente, ya que dada una reordenación cualquiera σ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle u_{\sigma(n)}, w \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle u_{\sigma(n)}, w \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=1}^N u_{\sigma(n)}, w \right\rangle = \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_{\sigma(n)}, w \right\rangle = 0.$$

Entrando en contradicción con el hecho de que $(u_n)_{n \geq 1}$ satisfacía las hipótesis de la proposición. $\square$

Como todos los espacios vectoriales de dimensión finita son isomorfos a $\mathbb{R}^d$, el teorema de Levy-Steinitz y la proposición posterior se cumplen en cualquier espacio vectorial de dimensión finita, por ejemplo, $\mathbb{C}$. Vamos con el caso de dimensión infinita.

1.2. Reordenación de series en espacios de Hilbert

El contraejemplo de Marcinkiewicz y el teorema de Dvoretzky–Rogers

Es de esperar que en el caso de espacios vectoriales de dimensión infinita las cosas se compliquen sustancialmente. El problema que nos planteábamos sobre establecer las hipótesis suficientes para que $\mathcal{S}_{(u_n)}$ abarcara todo el espacio vectorial se resolvía en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^d$ gracias al teorema de Lévy-Steinitz; sin embargo, éste no es cierto en dimensión infinita, ni siquiera para espacios de Hilbert. Esta pregunta: «¿existe un análogo al teorema de Lévy-Steinitz para espacios de Banach de dimensión infinita?» aparecía ya formulada en el *Cuaderno Escocés*², más concretamente en la cuestión número 106, y fue resuelta negativamente por Józef Marcinkiewicz (1910-1940) mediante el siguiente contraejemplo en $L^2[0, 1]$: consideremos las siguientes funciones en $L^2[0, 1]$

$$f_{i,k} = \chi_{[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}]} \quad \text{y} \quad g_{i,k} = -f_{i,k},$$

con $0 \leq i < +\infty$ y $0 \leq k < 2^i$ enteros. Por un lado, uno tiene:

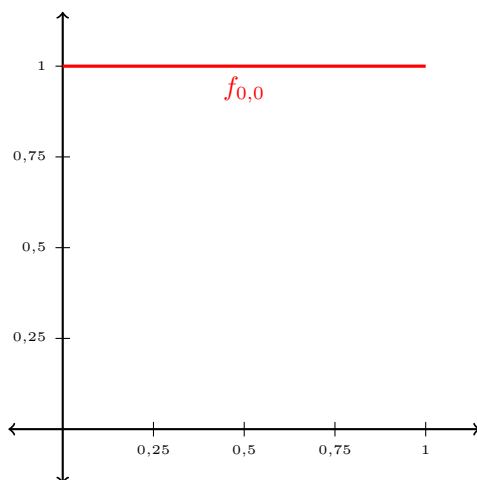
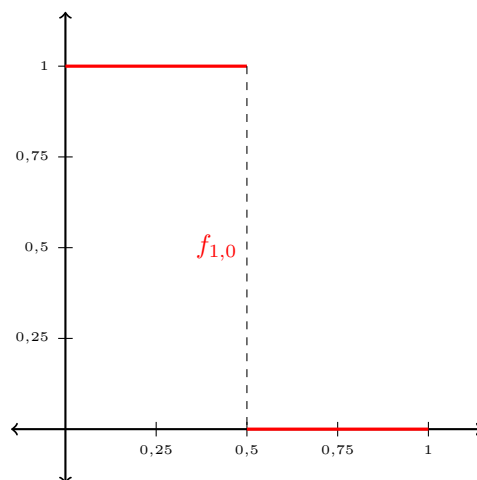
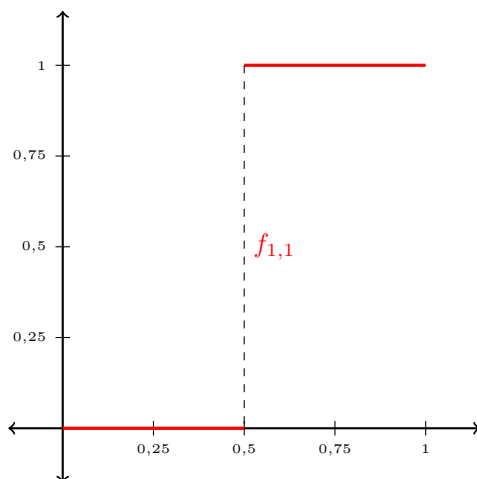
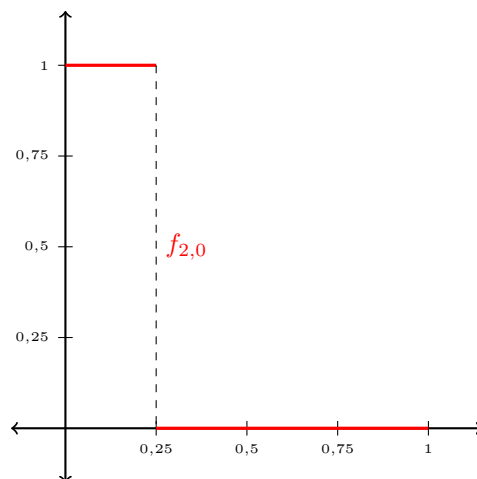
$$(f_{0,0} + g_{0,0}) + (f_{1,0} + g_{1,0}) + (f_{1,1} + g_{1,1}) + (f_{2,0} + g_{2,0}) + \dots = 0.$$

Por otro lado, si reordenamos como sigue tenemos:

$$f_{0,0} + (f_{1,0} + f_{1,1} + g_{0,0}) + (f_{2,0} + f_{2,1} + g_{1,0}) + (f_{2,2} + f_{2,3} + g_{1,1}) + \dots = 1.$$

Pero ahora, nótese que reordenando los términos siempre obtendremos funciones con valores enteros; por lo que es imposible que una reordenación de las $f_{i,k}$ y $g_{i,k}$ nos dé como resultado, por ejemplo, la función $\frac{1}{2} \in L^2[0, 1]$. Es decir, el conjunto de valores de las $f_{i,k}$ y $g_{i,k}$ no es un subespacio afín de $L^2[0, 1]$.

²Bien vale conocer la historia de este documento, fruto de las reuniones que algunos de los más prometedores estudiantes de matemáticas polacos mantenían en un café escocés en Lwów. Entre ellos se encontraban Ulam, Banach, Kac, Mazur, Saks o Steinhaus.

Figura 1.1: $f_{0,0}$ en el ejemplo de Marcinkiewicz.Figura 1.2: $f_{1,0}$ en el ejemplo de Marcinkiewicz.Figura 1.3: $f_{1,1}$ en el ejemplo de Marcinkiewicz.Figura 1.4: $f_{2,0}$ en el ejemplo de Marcinkiewicz.

Con respecto a la relación entre convergencia absoluta e incondicional, las cosas vuelven a complicarse en espacios de dimensión infinita: mientras que toda serie absolutamente convergente es también incondicionalmente convergente, el recíproco en este caso no es cierto. Este resultado se conoce por el nombre de **teorema de Dvoretzky–Rogers** y fue demostrado en 1950. La demostración original puede encontrarse en la referencia [14]:

Teorema 1.9 (Teorema de Dvoretzky–Rogers, 1950). *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces, existe una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente.*

El teorema de Pechersky

El contraejemplo de Marcinkiewicz y el teorema de Dvoretzky–Rogers son dos evidencias de que la situación se complica considerablemente al reordenar series de vectores en espacios de

Hilbert; por tanto, resulta evidente que debemos cambiar nuestra estrategia si queremos dar una solución satisfactoria al problema que venimos planteándonos a lo largo de todo el capítulo. El teorema que sigue, demostrado por D. V. Pechersky en 1973 (léase [38]), nos da una posible solución a nuestro problema:

Teorema 1.10 (Teorema de Pechersky, 1973). *Sea $\mathbf{H}$ un espacio de Hilbert real y $(u_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de vectores tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < +\infty,$$

y que para todo vector unitario $e \in \mathbf{H}$, la serie $\sum_{n \geq 1} \langle u_n, e \rangle$ converge condicionalmente. Entonces, para todo $v \in \mathbf{H}$ existe una permutación σ de $\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^N u_{\sigma(n)} - v \right\| = 0.$$

Para la demostración del teorema de Pechersky vamos a apoyarnos en los siguientes tres lemas.

Lema 1.11. *Bajo las hipótesis del teorema 1.10, tenemos que para todo $v \in \mathbf{H}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N y números $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \{0, 1\}$ tales que*

$$\left\| v - \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n \right\| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Escojamos un entero m tal que

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|u_n\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{9}.$$

Sea C_m el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de la forma

$$\sum_{n=m}^N \lambda_n u_n, \text{ para } \lambda_n \in [0, 1] \text{ y } N = m, m+1, m+2, \dots$$

Por definición, C_m es un conjunto convexo. Consideremos ahora $\text{cl}(C_m)$, la clausura de C_m en la topología de $\mathbf{H}$. Queremos probar que $\text{cl}(C_m) = \mathbf{H}$; para ello apelaremos, sin demostración, al **teorema de separación de Hahn-Banach** (consecuencia directa del teorema de Hahn-Banach, véase [43], por ejemplo).

Nota 1.2.1 (El teorema de separación de Hahn-Banach): El teorema de separación de Hahn-Banach dice:

Teorema (de separación de Hahn-Banach). *Sea X un espacio vectorial normado y $D \subset X$ un cerrado convexo. Entonces, para todo $s \in X \setminus D$ existe $\varepsilon > 0$ y un funcional lineal y acotado F de modo que*

$$F(x) \leq F(s) - \varepsilon, \text{ para todo } x \in D.$$

Una consecuencia directa de este teorema es la siguiente: para todo $D \subset X$ cerrado, propio y convexo existe un vector $e \in \mathbf{H}$ con $\|e\| = 1$, tal que

$$\sup_{x \in D} \langle x, e \rangle < +\infty. \quad (1.1)$$

Usaremos esto para probar que $\text{cl}(C_m) = \mathbf{H}$: sea $e \in \mathbf{H}$ con $\|e\| = 1$, como por hipótesis la serie $\sum_{n=m}^{\infty} \langle u_n, e \rangle$ es condicionalmente convergente, tenemos que en particular la serie de sus términos positivos es divergente; de lo que se deduce que $\text{cl}(C_m)$ no cumple la desigualdad (1.1) y por tanto no es un subconjunto propio de $\mathbf{H}$.

Por consiguiente, como $\text{cl}(C_m) = \mathbf{H}$, deducimos que existe $N \geq m$ y $\lambda_m, \dots, \lambda_N \in [0, 1]$ de modo que

$$\left\| v - \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para terminar la prueba del lema, veamos que podemos escoger $\alpha_m, \dots, \alpha_N \in \{0, 1\}$ tales que se satisfaga la siguiente desigualdad

$$\left\| \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n - \sum_{n=m}^N \alpha_n u_n \right\|^2 \leq \sum_{n=m}^N \|u_n\|^2.$$

Para ello procederemos por inducción: supongamos que pueden escogerse ciertos $\alpha_m, \dots, \alpha_M \in \{0, 1\}$ con $m \leq M < N$, de modo que la desigualdad anterior se cumpla para los vectores $u_m, \dots, u_M$. Tomemos $\alpha_{M+1} = 0$ ó 1 de modo que

$$(\lambda_{M+1} - \alpha_{M+1}) \cdot \left\langle \sum_{n=m}^M (\lambda_n - \alpha_n) u_n, u_{M+1} \right\rangle \leq 0,$$

para obtener

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=m}^{M+1} \lambda_n u_n - \sum_{n=m}^{M+1} \alpha_n u_n \right\|^2 &= \left\| \sum_{n=m}^M \lambda_n u_n - \sum_{n=m}^M \alpha_n u_n \right\|^2 + \|u_{M+1}\|^2 + \\ &\quad + 2 \cdot (\lambda_{M+1} - \alpha_{M+1}) \cdot \left\langle \sum_{n=m}^M (\lambda_n - \alpha_n) u_n, u_{M+1} \right\rangle \leq \sum_{n=m}^{M+1} \|u_n\|^2. \end{aligned}$$

Y ya hemos probado el lema, pues escogiendo $\alpha_n = 0$ para $n = 1, \dots, m-1$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| v - \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n \right\| &= \left\| v - \sum_{n=m}^N \alpha_n u_n - \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n + \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n \right\| \\ &\leq \left\| v - \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n \right\| + \left\| \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n - \sum_{n=m}^N \alpha_n u_n \right\| + \left\| \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n \right\| \\ &\leq \left\| v - \sum_{n=m}^N \lambda_n u_n \right\| + \left(\sum_{n=m}^N \|u_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=m}^N \|u_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Como corolario inmediato del lema anterior, tenemos:

Lema 1.12. *Bajo las hipótesis del teorema 1.10, tenemos que existe una permutación (n_k) de $\mathbb{N}$ tal que alguna subsucesión de las sumas parciales de $\sum_k u_{n_k}$ converge a v .*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Aplicando el lema 1.11 a la serie $\sum_{n \geq 1} u_n$ se deriva la existencia de un conjunto finito $T_1 \subset \{1, 2, 3, \dots\}$ de modo que

$$\left\| v - \sum_{n \in T_1} u_n \right\| < \frac{1}{2}.$$

Si resulta que $1 \notin T_1$, lo incluimos y definimos el número $N_1 := \max\{n \in T_1\}$. Aplicando de nuevo el lema 1.11 a la serie $\sum_{n \geq N_1+1} u_n$ obtenemos la existencia de un conjunto finito $T_2 \subset \{N_1 + 1, N_1 + 2, \dots\}$ de modo que

$$\left\| v - \sum_{n \in T_1} u_n - \sum_{n \in T_2} u_n \right\| < \frac{1}{2^2}.$$

Si resulta que $2 \notin T_2$, lo incluimos y definimos el número $N_2 := \max\{n \in T_2\}$. Repitiendo este procedimiento indefinidamente se concluye la prueba del lema. ■

Y con el siguiente, acabamos con los lemas necesarios para la demostración del teorema 1.10:

Lema 1.13. Sean $u_1, \dots, u_N \in \mathbf{H}$ vectores en un espacio de Hilbert real. Entonces, existe una permutación σ del conjunto $\{1, \dots, N\}$ de modo que

$$\max_{1 \leq m \leq N} \left\| \sum_{n=1}^m u_{\sigma(n)} \right\| \leq \left(\sum_{n=1}^N \|u_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \left\| \sum_{n=1}^N u_n \right\|.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. En primer lugar, demostremos el lema para el caso $\sum_{n=1}^N u_n = 0$. Vamos a construir la permutación σ que demuestra el lema mediante inducción. Convengamos $n_1 = 1$ y supongamos que $n_1, \dots, n_j$ con $1 \leq j < N$ han sido escogidos de modo que

$$\max_{1 \leq m \leq j} \left\| \sum_{k=1}^m u_{n_k} \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^j \|u_{n_k}\|^2. \quad (1.2)$$

Entonces, escogemos $u_{n_{j+1}}$ de entre los vectores que faltan tal que satisfaga

$$\left\langle \sum_{k=1}^j u_{n_k}, u_{n_{j+1}} \right\rangle \leq 0.$$

Debe existir al menos un vector tal, ya que, en caso contrario, sumando la cantidad anterior para todos los vectores que nos falta por escoger, tendríamos:

$$0 < \sum_{u_n \neq u_{n_k}} \left\langle \sum_{k=1}^j u_{n_k}, u_n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^j u_{n_k}, \sum_{u_n \neq u_{n_k}} u_n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^j u_{n_k}, -\sum_{k=1}^j u_{n_k} \right\rangle$$

que claramente es imposible. Veamos como la desigualdad en (1.2) sigue cumpliéndose para los vectores $u_{n_1}, \dots, u_{n_{j+1}}$: por la hipótesis de inducción, si el máximo de $\|\sum_{k=1}^m u_{n_k}\|^2$ se alcanzara para $m < j+1$ tendríamos la cota que buscamos inmediatamente. Así que supongamos que el máximo se alcanza para $m = j+1$, en tal caso

$$\left\| \sum_{k=1}^{j+1} u_{n_k} \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^j u_{n_k} \right\|^2 + \|u_{n_{j+1}}\|^2 + 2 \cdot \left\langle \sum_{k=1}^j u_{n_k}, u_{n_{j+1}} \right\rangle \leq \sum_{k=1}^{j+1} \|u_{n_k}\|^2.$$

Y queda probado el lema en el caso de que $\sum_{n=1}^N u_n = 0$.

Para el caso general, definimos $u_{N+1} := -\sum_{n=1}^N u_n$ y apelamos al caso anterior, obteniendo que

$$\max_{1 \leq m \leq N+1} \left\| \sum_{k=1}^m u_{n_k} \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^{N+1} \|u_{n_k}\|^2$$

y despejando adecuadamente los sumandos de u_{N+1} concluimos la prueba del lema. $\blacksquare$

Ahora, a partir de los tres lemas anteriores, ya estamos en disposición de demostrar el teorema de Pechersky:

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PECHERSKY. En virtud del lema 1.12, se deduce la existencia de una subsucesión de las sumas parciales de $\sum_k u_k$ que converge a v . Definamos

$$S_N := \sum_{n=1}^N u_n$$

y denotemos por S_{N_j} la subsucesión de S_N que converge a v . Para cada $j \in \mathbb{N}$ hay una permutación σ de los vectores $\{u_{N_j+1}, \dots, u_{N_{j+1}}\}$ de modo que el máximo

$$m_j := \max_{N_j+1 \leq m \leq N_{j+1}} \left\| \sum_{n=N_j+1}^m u_{\sigma(n)} \right\|$$

se minimiza. En virtud del lema 1.13 tenemos que se cumple

$$m_j \leq \left(\sum_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} \|u_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot \|S_{N_{j+1}} - S_{N_j}\|,$$

que tiende a 0 cuando $j \rightarrow \infty$. Puede verse que la reordenación de la serie que hemos obtenido tiende a v : sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario y N_j el inmediatamente inferior a N , acotando obtenemos

$$\left\| \sum_{n=1}^N u_{\sigma(n)} - v \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{N_j} u_{\sigma(n)} - v \right\| + m_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

con lo que concluye prueba del teorema de Pechersky. $\square$

2

Aproximaciones holomorfas: espacios de Bergman

Los espacios de Bergman toman el nombre del matemático estadounidense (nacido en Polonia) Stefan Bergman (1895-1977), quien desarrollo, entre otros, parte de la teoría de los espacios de funciones que se estudian a continuación, véase [4]. Los espacios de Bergman están íntimamente relacionados con otros espacios de funciones como los de Lebesgue L^p o los de Hardy¹ H^p .

La referencia principal seguida en este capítulo ha sido el primer capítulo del libro [13]. Invito al lector a ojearlo si desea conocer más detalles sobre el tema.

Definición 2.1. Sean $1 \leq p < +\infty$ y Ω un dominio del plano complejo. El **espacio de Bergman** $A^p(\Omega)$ es el conjunto de funciones holomorfas en Ω , tales que

$$\|f\|_{A^p(\Omega)} := \left(\iint_{\Omega} |f(z)|^p dx dy \right)^{1/p} < +\infty. \quad (2.1)$$

Nótese que $\|\cdot\|_{A^p(\Omega)}$ no es sino la norma en $L^p(\Omega)$; de hecho, es evidente que

$$A^p(\Omega) = L^p(\Omega) \cap \mathcal{H}(\Omega)$$

donde $\mathcal{H}(\Omega)$ denota (y denotará en lo que resta de trabajo) al espacio de las funciones holomorfas sobre el dominio Ω .

Así pues, de un modo similar² al que se procede para los espacios L^p , se tiene que $\|f\|_{A^p(\Omega)} = 0$ si y sólo si $f \equiv 0$, que $\|cf\|_{A^p(\Omega)} = |c| \cdot \|f\|_{A^p(\Omega)}$ y, en virtud de la **desigualdad de Minkowski**, que

$$\|f + g\|_{A^p(\Omega)} \leq \|f\|_{A^p(\Omega)} + \|g\|_{A^p(\Omega)}, \text{ para } p \geq 1. \quad (2.2)$$

¹Curiosamente, en el artículo original en el que Voronin prueba su teorema de universalidad, véase [52]; se refiere erróneamente a los espacios de Bergman como espacios de Hardy. Este error se propaga a otras referencias seguidas a lo largo del trabajo como por ejemplo [47]; así que, lector, guarde cuidado.

²Para que $\|\cdot\|_{A^p(\Omega)}$ defina una norma sobre el espacio de Bergman $A^p(\Omega)$ no es necesario cocientar por la relación de equivalencia $f \sim g \iff \|f - g\|_{A^p(\Omega)} = 0$, pues la holomorfía de f y g obliga a que $f \equiv g$. Recuérdese que ese paso sí es necesario para definir una norma sobre el espacio $L^p(\Omega)$.

Por tanto, $\|\cdot\|_{A^p(\Omega)}$ define una norma para todo $p \geq 1$.

Por otro lado, si tenemos en cuenta que dadas $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces $\alpha f + \beta g \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; se deduce que $A^p(\Omega)$ tiene estructura de espacio vectorial.

En definitiva, $A^p(\Omega)$ tiene para $1 \leq p \leq +\infty$ estructura de espacio vectorial normado.

Nota 2.0.1 (¿Cómo es $A^p(\mathbb{C})$?): Es evidente que cuanto mayor sea el dominio Ω , menor será su espacio de Bergman $A^p(\Omega)$; por consiguiente, es natural preguntarse cuán pequeño será $A^p(\mathbb{C})$ para cualquier p . Dividamos la discusión en dos casos: en primer lugar, veamos que $A^p(\mathbb{C}) = \{f \equiv 0\}$ para $1 \leq p < +\infty$; y en segundo lugar, veamos que $A^\infty(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$:

- Sea $1 \leq p < +\infty$ y sea $f \not\equiv 0$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(0) = 1$. Apelando a que f satisface la propiedad del valor medio por ser holomorfa en $(\star)$ y a la desigualdad de Jensen en $(\dagger)$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$1 = |f(0)| \underset{(\star)}{=} \left| \frac{1}{\pi r^2} \cdot \iint_{\mathbb{D}(0,r)} f(z) dz \right| \underset{(\dagger)}{\leq} \frac{1}{\sqrt[p]{\pi r^2}} \cdot \left(\iint_{\mathbb{D}(0,r)} |f(z)|^p dx dy \right)^{1/p} = \frac{1}{\sqrt[p]{\pi r^2}} \|f\|_{A^p(\mathbb{D}(0,r))},$$

que nos lleva a la cota superior $\|f\|_{A^p(\mathbb{D}(0,r))} \geq \sqrt[p]{\pi r^2}$; de donde, haciendo $r \uparrow +\infty$ se deduce que

$$A^p(\mathbb{C}) = \{f \equiv 0\}, \text{ para todo } 1 \leq p < +\infty.$$

- Sea $p = +\infty$. Por definición se tiene que $\|f\|_{A^\infty(\mathbb{C})} = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$; ahora, del teorema de Liouville se deduce que

$$A^\infty(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ acotada}\} = \{f \equiv \text{cte.}\} \simeq \mathbb{C}.$$

2.1. Topología de los espacios de Bergman

Es un hecho conocido que la topología métrica definida sobre $L^p(\Omega)$ le confiere estructura de espacio de Banach. Así pues, por ser un subconjunto de $L^p(\Omega)$, es de esperar que el espacio de Bergman $A^p(\Omega)$ herede alguna de sus propiedades topológicas. En particular, demostraremos que $A^p(\Omega)$ es asimismo un espacio de Banach, y para ello nos valdremos del siguiente resultado:

Proposición 2.2. *Sea $\mathbf{S}$ un subespacio contenido en un espacio de Banach $\mathbf{B}$. Entonces, si $\mathbf{S}$ es un conjunto cerrado, $\mathbf{S}$ es también un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x_n)_{n \geq 0} \subset \mathbf{S}$ una sucesión de Cauchy respecto de la norma de $\mathbf{B}$. Como $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$ es completo se sigue que x_n converge a cierto $x \in \mathbf{B}$; sin embargo, por ser $\mathbf{S}$ es cerrado, contiene a todos sus puntos límite, de lo que se deduce que $x \in \mathbf{S}$; esto es, $\mathbf{S}$ es un espacio de Banach. $\square$

Por consiguiente, por ser $A^p(\Omega)$ un subespacio de $L^p(\Omega)$; para ver si es de Banach, bastará con que comprobemos que es cerrado. Consideraremos dos casos: $p = 2$, ya que el hecho de que $L^2(\Omega)$ sea un espacio de Hilbert simplifica notablemente la demostración; y $p \neq 2$, que para demostrarlo se apelará a algún resultado referente a funciones subarmónicas.

Caso $p = 2$

La ventaja de trabajar en el espacio $A^2(\Omega)$ en vez de en un $A^p(\Omega)$ para $p \geq 1$ arbitrario, es que en $L^2(\Omega)$ tenemos definido un producto escalar; algo que, como veremos en la siguiente proposición, nos permitirá apelar a argumentos mucho más elementales que a los del caso general. De hecho, las demostraciones que expondremos en cada caso serán totalmente análogas, salvo por los argumentos que se necesitan en la prueba de la siguiente proposición:

Proposición 2.3. *Sea f holomorfa en un dominio Ω y $z_0 \in \Omega$ un punto cualquiera. Entonces, la función*

$$m_2(z_0, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

es creciente para $0 \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el desarrollo de f en serie de potencias alrededor de z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{para } |z - z_0| < \text{dist}(z_0, \partial\Omega).$$

Entonces, podemos calcular $m_2(z_0, r)$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} m_2(z_0, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \cdot \overline{f(z_0 + re^{i\theta})} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a_m} r^m e^{-im\theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} a_n \overline{a_m} r^{(n+m)} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } m = n; \\ 0, & \text{si } m \neq n; \end{cases}$$

se deduce que

$$m_2(z_0, r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

que es, claramente, creciente en la variable r . □

En particular, de la proposición 2.3 usaremos fundamentalmente la siguiente desigualdad:

$$m_2(z_0, 0) = |f(z_0)|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta, \quad \text{para todo } 0 \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega). \quad (2.3)$$

La consecuencia principal de la proposición 2.3 es el teorema que sigue, piedra angular en el resto de resultados que iremos obteniendo.

Teorema 2.4. *Sea $f \in A^2(\Omega)$, entonces*

$$|f(z)| \leq \pi^{-1/2} \text{dist}(z, \partial\Omega)^{-1} \|f\|_{A^2(\Omega)}, \quad \text{para todo } z \in \Omega.$$

Es decir, la evaluación en un punto $z \in \Omega$ es un funcional lineal y acotado en $A^2(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $z_0 \in \Omega$ y denotemos $d := \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$; entonces, como consecuencia de la proposición 2.3 se tiene (véase la desigualdad (2.3))

$$|f(z_0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

para todo $0 \leq r < d$. Finalmente, integrando con respecto a r tenemos

$$|f(z_0)|^2 \int_0^d r dr \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^d \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 r d\theta dr = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{A^2(\mathbb{D}(z_0, d))}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{A^2(\Omega)}^2$$

que, tras operar, nos lleva a la desigualdad del enunciado. □

Un corolario inmediato del teorema 2.4 es que la convergencia en la norma de $A^2(\Omega)$ implica la **convergencia uniforme sobre compactos** (y por tanto, la convergencia punto a punto).

Corolario 2.5. *Sea $(f_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de funciones en $A^2(\Omega)$ que converge a $f \in A^2(\Omega)$. Entonces, f_n converge a f uniformemente sobre compactos de Ω ; esto es:*

$$\max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

para todo $K \subset \Omega$ compacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea $K \subset \Omega$ un compacto cualquiera y tomemos $d := \min_{z \in K} \text{dist}(z, \partial\Omega)$. Por ser K compacto tenemos que $d > 0$ y, como $f_n - f \in A^2(\Omega)$, aplicando el teorema 2.4 se obtiene la cota:

$$\max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \leq \pi^{-1/2} d^{-1} \|f_n - f\|_{A^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

El segundo corolario que obtenemos es la prueba de que $A^2(\Omega)$ es un espacio de Banach (de hecho, en este caso es un espacio de Hilbert).

Corolario 2.6. *Para todo dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, el espacio de Bergman $A^2(\Omega)$ es completo. Como consecuencia se tiene que $A^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar usual*

$$\langle f, g \rangle_{A^2(\Omega)} := \iint_{\Omega} f(z) \overline{g(z)} \, dx dy. \quad (2.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos de la proposición 2.2 que basta con comprobar que $A^2(\Omega)$ es cerrado. Así pues, sea $(f_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de Cauchy en $A^2(\Omega)$. Como $(f_n)_{n \geq 0}$ es de Cauchy, se deduce de la siguiente desigualdad (consecuencia inmediata de la desigualdad de Minkowski)

$$\left| \|f_n\|_{A^2(\Omega)} - \|f_m\|_{A^2(\Omega)} \right| \leq \|f_n - f_m\|_{A^2(\Omega)}$$

que $(\|f_n\|_{A^2(\Omega)})_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Apelando ahora al teorema 2.4, se infiere que $(|f_n(z)|)_{n \geq 0}$ es asimismo una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, de donde se concluye que $f_n(z)$ converge para todo $z \in \Omega$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así pues, definamos

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z), \quad \text{para } z \in \Omega.$$

Por otro lado, como $(f_n)_{n \geq 0}$ es de Cauchy en la norma de $A^2(\Omega)$, se deduce a partir de la siguiente desigualdad que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformemente sobre compactos de Ω : como f_n converge puntualmente a f , para m suficientemente grande se tiene

$$\max_{z \in K} |f(z) - f_n(z)| = \max_{z \in K} |f_m(z) - f_n(z)| + \varepsilon \leq \pi^{-1/2} \cdot d^{-1} \|f_m - f_n\|_{A^2(\Omega)} + \varepsilon.$$

Por tanto, en virtud del **teorema de convergencia de Weierstrass** (léase la nota 2.1.1), se deduce que f es una función holomorfa en Ω , lo que concluye la demostración del teorema. □

Nota 2.1.1 (El teorema de convergencia de Weierstrass): Por ser uno de los resultados típicos de cualquier curso de variable compleja, lo enunciamos sin demostración; simplemente para que el lector olvidadizo refresque su memoria:

Teorema 2.7 (Teorema de convergencia de Weierstrass). *Sea $(f_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω , tales que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente sobre compactos de Ω , entonces:*

- (i) $f \in \mathcal{H}(\Omega)$;
- (ii) $f_n^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{(k)}$ uniformemente sobre compactos de Ω , para todo entero $k \geq 1$.

Hagamos una pequeña anotación antes de pasar al caso p arbitrario: nótese que $A^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y por consiguiente no cumple las hipótesis del teorema de Pechersky. Por tanto, necesitamos «maquillar» un poco $A^2(\Omega)$ para hacerlo un espacio de Hilbert real. Para ello, definamos un nuevo producto escalar sobre $A^2(\Omega)$:

$$\langle f, g \rangle := \Re \left(\langle f, g \rangle_{A^2(\Omega)} \right) \quad (2.5)$$

donde el producto escalar que aparece en el lado derecho de la igualdad es el definido en (2.4). Veamos que con este nuevo producto escalar, $A^2(\Omega)$ se transforma en un espacio de Hilbert real: para ello bastará con comprobar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cumple las propiedades de un producto escalar real (ya que el resto de condiciones se satisfarán de inmediato). Sean $f, g, h \in A^2(\Omega)$ y tengamos en cuenta que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{A^2(\Omega)}$ cumple las propiedades de un producto escalar complejo; entonces:

(i) **Definido positivo:**

$$\langle f, f \rangle = \Re \langle f, f \rangle_{A^2(\Omega)} \geq 0.$$

$$\text{Y además, } \langle f, f \rangle = 0 \iff \langle f, f \rangle_{A^2(\Omega)} = 0 \iff f = 0.$$

(ii) **Simetría:**

$$\langle f, g \rangle = \Re \left(\langle f, g \rangle_{A^2(\Omega)} \right) = \Re \left(\overline{\langle g, f \rangle_{A^2(\Omega)}} \right) = \Re \left(\langle g, f \rangle_{A^2(\Omega)} \right) = \langle g, f \rangle.$$

(iii) **Linealidad en la primera entrada:** sea $a \in \mathbb{R}$:

$$\langle af, g \rangle = \Re \left(\langle af, g \rangle_{A^2(\Omega)} \right) = a \cdot \Re \left(\langle f, g \rangle_{A^2(\Omega)} \right) = a \cdot \langle f, g \rangle;$$

$$\langle f + g, h \rangle = \Re \left(\langle f + g, h \rangle_{A^2(\Omega)} \right) = \Re \left(\langle f, h \rangle_{A^2(\Omega)} \right) + \Re \left(\langle g, h \rangle_{A^2(\Omega)} \right) = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle.$$

Más adelante, durante la prueba del teorema de universalidad de Voronin, usaremos este nuevo espacio de Hilbert al que sí podremos aplicarle el teorema de Pechersky.

Caso p arbitrario

Como discutíamos anteriormente, se puede demostrar, de manera prácticamente análoga a como lo hemos hecho para el caso $p = 2$, que $A^p(\Omega)$ es para todo $1 \leq p \leq +\infty$ un espacio de Banach. La única diferencia que nos encontraremos respecto a la demostración anterior se encuentra durante la prueba de la siguiente proposición:

Proposición 2.8. *Sea f holomorfa en un dominio Ω y $z_0 \in \Omega$ un punto cualquiera. Fijado un $1 \leq p \leq +\infty$ cualquiera, se tiene que la función*

$$m_p(z_0, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^p d\theta$$

es creciente para $0 \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Claramente, el argumento que dimos en la proposición 2.3 no sirve en este caso. Para demostrar la proposición 2.8 es necesario apelar a que $|f|^p$ es subarmónica para toda f holomorfa y $1 \leq p \leq +\infty$.

Los demás resultados se demuestran repitiendo los mismos argumentos que dimos para el caso $p = 2$. Así pues, simplemente los enunciamos:

Teorema 2.9. *Sea $f \in A^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq +\infty$, entonces*

$$|f(z)| \leq \pi^{-1/p} \cdot \text{dist}(z, \partial\Omega)^{-2/p} \|f\|_{A^p(\Omega)}, \text{ para todo } z \in \Omega.$$

Es decir, la evaluación en un punto $z \in \Omega$ es un funcional lineal y acotado en $A^p(\Omega)$.

Corolario 2.10. *Sea $(f_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de funciones en $A^p(\Omega)$ que converge a $f \in A^p(\Omega)$. Entonces, f_n converge a f uniformemente sobre compactos de Ω ; esto es:*

$$\max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

para todo $K \subset \Omega$ compacto.

Corolario 2.11. *Para todo dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y todo $1 \leq p \leq +\infty$, el espacio de Bergman $A^p(\Omega)$ es completo; esto es, $A^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

3

Las desigualdades de Markov y Bernstein

El origen de los teoremas que estudiaremos a continuación es cuanto menos curioso: no es muy común que aparezca el nombre de uno de los padres de la Química moderna en un trabajo de Matemáticas. Sí, parece ser que Dmitri Mendeléyev¹ (1834-1907) le comentó a su colega Andréi Andréyevich Markov (1856-1922) de la Universidad de San Petersburgo cómo resolvió un problema relacionado con la estimación de la densidad relativa de disoluciones acuosas. Mendeleyév resolvió el problema aproximando ciertas gráficas mediante polinomios cuadráticos y demostrando que sus derivadas estaban acotadas en módulo por 4. Interesado en el problema, A.A. Markov generalizó el resultado obteniendo lo que hoy conocemos como la **desigualdad de Markov** para polinomios.²

Teorema 3.1 (Desigualdad de Markov, 1889). *Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado menor o igual que n . Entonces*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p'(x)| \leq n^2 \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)|.$$

Años más tarde, en 1912, el matemático ruso Sergei Bernstein (1880-1968) demostró una cota similar para polinomios con coeficientes complejos para $|z| \leq 1$.

Teorema 3.2 (Desigualdad de Bernstein, 1912). *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio de grado menor o igual que n . Entonces*

$$\max_{|z| \leq 1} |p'(z)| \leq n \max_{|z| \leq 1} |p(z)|.$$

El principio del módulo máximo permite abordar la demostración del teorema 3.2 exclusivamente para $|z| = 1$, esto es, para $z = e^{i\theta}$; por consiguiente, uno puede reescribir el enunciado de la desigualdad de Bernstein en función de polinomios trigonométricos.

¹Como sucede con todos los nombre rusos, uno puede encontrar mil transcripciones diferentes del cirílico: Mendeléyev, Mendelev, Mendelev,...

²No puedo evitar poner las referencias pertinentes de esta historia para el lector que desee leerlas:

D.MENDELEEV, *Investigation on aqueous solutions based on specific gravity (Russian)*, St. Petersburg, (1887).
A.A.MARKOV, *On a problem of D.I.Mendelev (Russian)*, Zapishi Imp. Akad. Nauk, **62**, (1889), pp. 1-24.

Éstos son los teoremas que vamos a probar durante el capítulo. Se expondrán dos demostraciones diferentes: la primera apelando a los polinomios de Chebyshev y la segunda apelando al teorema de Gauss-Lucas.

3.1. Interpolación de Lagrange y polinomios de Chebyshev

La primera demostración que daremos de las desigualdades de Markov y Bernstein sigue la propuesta por Pólya y Szegő en [39]. Para ello necesitaremos estudiar brevemente una familia famosa de polinomios: los polinomios de Chebyshev.³

Hay muchas maneras de presentar dicha familia de polinomios; no obstante, teniendo en cuenta su papel durante la demostración del teorema 3.1, la más conveniente quizás sea aquella relacionada con la interpolación de Lagrange y con los polinomios que minimizan la norma L^∞ en el intervalo $[-1, 1]$. Empecemos hablando sobre la **interpolación de Lagrange**:

Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua y consideremos los puntos $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$, a los que llamaremos **nodos de interpolación**. En lo que sigue, queremos encontrar un polinomio $L_n f(x)$ de grado a lo sumo n y tal que $p(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0, \dots, n$. Consideremos los polinomios

$$l_i(x) := \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \text{ para } i = 0, \dots, n;$$

conocidos como **bases polinómicas de Lagrange**. Es inmediato ver que $l_i(x)$ es un polinomio de grado n que cumple $l_i(x_i) = 1$ y $l_i(x_j) = 0$ para $j \neq i$. Por consiguiente, el **polinomio interpolador** de f de grado n (o menor) será

$$L_n f(x) := \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x).$$

En caso de que se le imponga a $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, además de la continuidad, que sea $n+1$ veces derivable; obtenemos una primera cota sobre cuánto difiere el polinomio interpolador de la función original f :

Teorema 3.3. *Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable y consideremos los nodos de interpolación $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$. Entonces para toda $x \in [-1, 1]$, se cumple la siguiente desigualdad:*

$$|f(x) - L_n f(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{L^\infty}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|.$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el teorema demostrando que para toda $x \in [-1, 1]$ existe $\xi \in (-1, 1)$ tal que

$$f(x) - L_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (3.1)$$

³En particular, hablaremos aquí de los conocidos como polinomios de Chebyshev de primera especie; hay también otros de segunda especie.

Si $x = x_i$ para algún $i = 0, \dots, n$ entonces ambos lados de la igualdad de (3.1) se anulan y queda demostrado en este caso particular. Así pues, fijemos x tal que no sea ninguno de los nodos x_i . Definamos la cantidad

$$\lambda := \frac{f(x) - L_n f(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}$$

y consideremos la función $\varphi(t) := f(t) - L_n f(t) - \lambda \prod_{i=0}^n (t - x_i)$. Es inmediato ver que $\varphi(x_i) = 0$ para todo $i = 0, \dots, n$ y que además $\varphi(x) = 0$; es decir, la función $\varphi(t)$ tiene a lo menos $n+2$ ceros en $[-1, 1]$. Por consiguiente, derivando $n+1$ veces y por el teorema de Rolle se tiene que existe $\xi \in (-1, 1)$ tal que $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Por tanto, teniendo en cuenta que $L_n f(t)$ es un polinomio de grado a lo sumo n y que $\prod_{i=0}^n (t - x_i)$ es un polinomio mónico de grado $n+1$, tenemos que:

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - L_n f(x)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} (n+1)!$$

y despejando adecuadamente queda probado el teorema. $\square$

Nótese que en la cota del teorema 3.3, dada una f arbitraria que satisfaga las hipótesis, lo único que podemos controlar es la cantidad $|\prod_{i=0}^n (x - x_i)|$. Así pues, es natural preguntarse cuál será la mejor elección de los nodos x_i de modo que

$$\left\| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right\|_{L^\infty([-1, 1])} \quad (3.2)$$

sea mínima en el conjunto de polinomios mónicos de grado $n+1$ definidos en $[-1, 1]$: es aquí donde entran en juego los polinomios de Chebyshev.

Teorema 3.4. *Consideremos los puntos $-1 < x_n < \dots < x_1 < 1$ dados por*

$$x_i = \cos \left(\frac{2i-1}{2n} \cdot \pi \right).$$

Entonces, el n -ésimo polinomio de Chebyshev

$$T_n(x) := 2^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

es el polinomio real de grado n con el mayor coeficiente principal posible cuyo valor absoluto está acotado por 1 en el intervalo $[-1, 1]$.

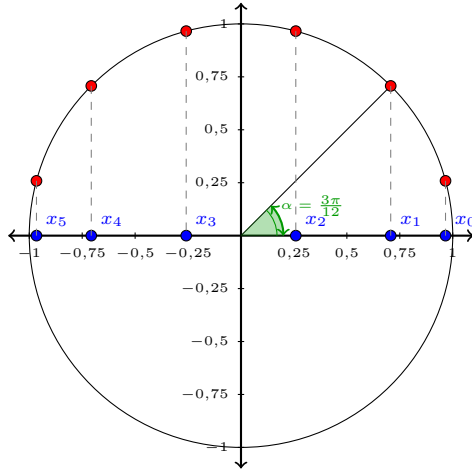
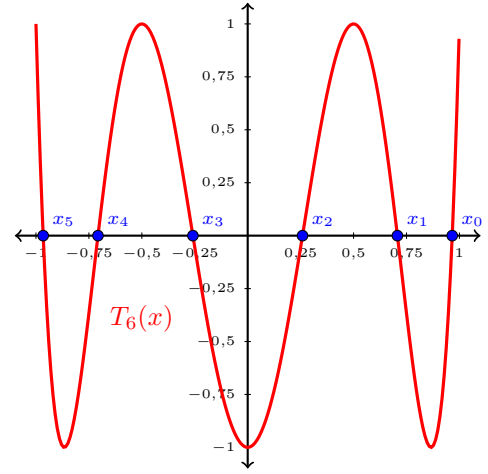
No probaremos el teorema: nos obligaría a dar un rodeo demasiado largo y a usar tecnología algo ajena al objetivo y a la temática del trabajo (véanse las figuras 3.1 y 3.2 para visualizar estas construcciones). No obstante, nótese que dándole la vuelta al enunciado del teorema 3.4 se deduce que los nodos x_i que minimizan la cantidad que aparece en (3.2) son justamente los ceros del polinomio de Chebyshev $T_{n+1}(x)$:

$$x_i = \cos \left(\frac{2i+1}{2(n+1)} \cdot \pi \right), \text{ para } i = 0, \dots, n.$$

A éstos se les conoce como **nodos de Chebyshev**. Dejemos este resultado también en forma de teorema:

Teorema 3.5. *Sea $p(x)$ un polinomio mónico cualquiera de grado n en $[-1, 1]$. Entonces, se tiene*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p(x)| \geq \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$


 Figura 3.1: Nodos de Chebyshev para $T_6(x)$.

 Figura 3.2: Polinomio $T_6(x)$ de Chebyshev.

Nota 3.1.1 (Una expresión alternativa para los polinomios de Chebyshev): Otra manera de caracterizar a los polinomios de Chebyshev que nos será de utilidad más adelante es la siguiente: adelantándonos a los hechos, consideremos la función T_n tal que

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

En virtud de las fórmulas de de Moivre puede verse que T_n es de hecho un polinomio de grado n que se anula en $\theta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2n}$ para $i = 1, \dots, n$. Haciendo el cambio de variable $x = \cos \theta$ llegamos a que T_n satisface la expresión

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

para $x \in [-1, 1]$ y que se anula en $x_i = \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$ para $i = 1, \dots, n$. Por consiguiente, se deriva que esta definición de T_n coincide con la dada en el teorema 3.4 salvo por una constante de proporcionalidad, y bastará con evaluar en $x = 1$ para convencernos de que dicha constante es 1; esto es, hemos encontrado una expresión alternativa para el n -ésimo polinomio de Chebyshev.

Para acabar con esta breve introducción a los polinomios de Chebyshev, calculemos el polinomio de interpolación de Lagrange $L_n p(x)$ en $[-1, 1]$ para un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ cualquiera (sí, un polinomio) de grado n en los nodos de Chebyshev. Obviamente tendremos que $L_n p(x) = p(x)$, sin embargo lo que nos interesará es la expresión explícita, ya que más adelante nos será de utilidad en la demostración de la desigualdad de Markov. En primer lugar, nótese que

$$T'_{n+1}(x_i) = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{T_{n+1}(x)}{x - x_i} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j).$$

Por consiguiente, tenemos que

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{T_{n+1}(x)}{x - x_i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j} = \frac{T_{n+1}(x)}{(x - x_i) \cdot T'_{n+1}(x_i)}.$$

De donde deducimos la expresión

$$p(x) = \sum_{k=0}^n p(x_k) \frac{T_{n+1}(x)}{(x - x_k) \cdot T'_{n+1}(x_k)}.$$

Ahora, derivando respecto de θ en la igualdad $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)\theta)$ que obtuvimos en la nota 3.1.1, llegamos a que

$$T'_{n+1}(\cos \theta) = \frac{(n+1) \cdot \sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = \frac{(n+1) \cdot \sin((n+1)\theta)}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)} \cdot \pi\right)$, llegamos a

$$T'_{n+1}(x_k) = \frac{n+1}{(-1)^{k-1} \sqrt{1 - x_k^2}}.$$

Obteniendo así, la expresión de la conocida como **interpolación de Chebyshev**

$$p(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n p(x_k) \cdot (-1)^{k-1} \cdot \sqrt{1 - x_k^2} \cdot \frac{T_{n+1}(x)}{x - x_k}. \quad (3.3)$$

3.2. La demostración de Pólya y Szegő

Presentamos a continuación la demostración de las desigualdades de Markov y Bernstein propuesta por George Pólya (1887-1985) y Gábor Szegő (1895-1985) en el libro [39]. Para hacer la lectura más fluida, en lo que sigue denotemos por $\mathcal{P}_n$ y $\mathcal{T}_n$ respectivamente al conjunto de polinomios algebraicos y trigonométricos con coeficientes complejos de grado a lo sumo n .

Antes de probar las desigualdades de Markov y Bernstein, necesitaremos una serie de resultados previos:

Lema 3.6. *Sea $p \in \mathcal{P}_{n-1}$, entonces se cumple*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p(x)| \leq \max_{x \in [-1, 1]} \left| n \sqrt{1 - x^2} \cdot p(x) \right|.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Sean $-1 < x_n < \dots < x_1 < 1$ los ceros del polinomio $T_n(x)$ y denotemos por $M := \max_{x \in [-1, 1]} |n \sqrt{1 - x^2} \cdot p(x)|$.

En primer lugar, sea $x \in [x_1, x_n]$, en tal caso tenemos

$$\sqrt{1 - x^2} \geq \sqrt{1 - x_1^2} = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \underset{(\dagger)}{\geq} \frac{1}{n}$$

donde en $(\dagger)$ hemos usado la desigualdad $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ para $0 \leq t \leq \pi/2$ (basta con esbozar ambas gráficas para convencerse). Por tanto, para $x \in [x_1, x_n]$ tenemos que $|p(x)| \leq n \sqrt{1 - x^2} \cdot |p(x)| \leq M$, y queda probado el primer caso.

Para $x \notin [x_1, x_n]$ vamos a aplicar la fórmula de interpolación de Chebyshev (3.3):

$$\begin{aligned} |p(x)| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n p(x_i) (-1)^{i-1} \sqrt{1 - x_i^2} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right| \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left| n \sqrt{1 - x_i^2} \cdot p(x_i) \right| \cdot \left| \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right| \\ &\leq \frac{M}{n^2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right| \underset{(\star)}{=} \frac{M}{n^2} \left| \sum_{i=1}^n \frac{T_n(x)}{x - x_i} \right| \end{aligned}$$

donde el paso $(\star)$ puede llevarse a cabo ya que todos los sumandos son del mismo signo. Teniendo en cuenta la fórmula de la derivada logarítmica $T'_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{T_n(x)}{x-x_i}$, sólo nos queda probar que $|T'_n(x)| \leq n^2$: recordemos que $T'_n(\cos \theta) = \frac{n \operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen} \theta}$, por tanto bastará con probar que

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right| \leq n, \text{ para todo } \theta \in \mathbb{R}.$$

Lo probaremos rápidamente por inducción: para $n = 1$ es trivial y suponiéndolo cierto para n , tenemos que para $n + 1$ se cumple

$$\left| \frac{\operatorname{sen}((n+1)\theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right| = \left| \frac{\operatorname{sen}(n\theta) \cdot \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cdot \cos(n\theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right| \leq \left| \frac{\operatorname{sen}(n\theta) \cdot \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right| + |\cos(n\theta)| \leq n + 1.$$

Y queda demostrado el lema. ■

Empecemos ahora a trabajar con polinomios trigonométricos: veamos un corolario de este último lema.

Corolario 3.7. *Sea $S \in \mathcal{T}_n$ un polinomio trigonométrico impar. Entonces*

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{S(\theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right| \leq n \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |S(\theta)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $S(\theta)$ es impar, tenemos que $\frac{S(\theta)}{\operatorname{sen} \theta}$ es par, y por tanto puede expresarse como $\frac{S(\theta)}{\operatorname{sen} \theta} = p(\cos \theta)$ para cierto $p \in \mathcal{P}_{n-1}$. Apelando al lema 3.6 en $(\star)$, tenemos

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{S(\theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right| = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |p(\cos \theta)| \leq \max_{(\star) \theta \in [0, 2\pi]} |np(\cos \theta) \operatorname{sen} \theta| = n \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |S(\theta)|.$$

□

Ya estamos en disposición de probar la desigualdad de Bernstein. Probaremos la versión con polinomios trigonométricos que, como apuntamos al inicio del capítulo, en virtud del principio del módulo máximo para funciones holomorfas, implica la veracidad del teorema 3.2.

Teorema 3.8. *Sea $S \in \mathcal{T}_n$, entonces:*

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} |S'(\theta)| \leq n \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |S(\theta)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos la función auxiliar

$$f(\alpha, \theta) := \frac{S(\alpha + \theta) - S(\alpha - \theta)}{2}.$$

Claramente, para α fijo, la función $f(\alpha, \theta)$ es un polinomio en $\mathcal{T}_n$ con simetría impar. Por consiguiente, en virtud del corolario 3.7 tenemos:

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \left| \frac{f(\alpha, \theta)}{\operatorname{sen} \theta} \right| \leq n \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\alpha, \theta)| \leq n \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |S(\theta)|.$$

Ahora, teniendo en cuenta en $(\star)$ que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$, obtenemos:

$$S'(\alpha) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\alpha + \theta) - S(\alpha - \theta)}{2\theta} \stackrel{(\star)}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(\alpha, \theta)}{\operatorname{sen} \theta}$$

y por consiguiente $|S'(\alpha)| \leq n \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |S(\theta)|$. Como la elección de α ha sido arbitraria, se deduce la desigualdad del enunciado y concluye la prueba del teorema. □

Vamos ahora con la desigualdad de Markov. Probaremos una versión algo más fuerte ya que en el teorema que sigue se permite que p tenga coeficientes complejos:

Teorema 3.9. *Sea $p \in \mathcal{P}_n$, entonces:*

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p'(x)| \leq n^2 \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)|.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el polinomio trigonométrico $S(\theta) = p(\cos \theta)$. Como $S'(\theta) = -p'(\cos \theta) \cdot \sin \theta$ sigue siendo un polinomio en $\mathcal{T}_n$, como consecuencia del teorema 3.8 obtenemos:

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} |p'(\cos \theta) \sin \theta| \leq n \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |p(\cos \theta)|.$$

En otras palabras, deshaciendo el cambio $x \mapsto \cos \theta$:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p'(x) \sqrt{1 - x^2}| \leq n \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)|,$$

y apelando ahora al lema 3.6, como $p' \in \mathcal{P}_{n-1}$ se infiere la desigualdad del enunciado:

$$\max_{x \in [-1, 1]} |p'(x)| \leq n \max_{x \in [-1, 1]} |p'(x) \sqrt{1 - x^2}| \leq n^2 \max_{x \in [-1, 1]} |p(x)|.$$

□

Para acabar con la primera de las demostraciones de las desigualdades de Markov y Bernstein vamos a hacer un pequeño apunte: las desigualdades de Markov y Bernstein son óptimas en el sentido de que hay polinomios para los que se satisface la igualdad. En el caso de la desigualdad de Markov, esto sucede para los polinomios de Chebyshev: recordemos que $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, entonces

$$T'_n(\cos \theta) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin \theta};$$

por consiguiente, cuando $\theta \rightarrow 0$ ó $\theta \rightarrow 2\pi$ tenemos que $T'_n(\cos \theta) \rightarrow n^2$, o equivalentemente $|T'_n(x)| = n^2$ en $x = \pm 1$. En el caso de la desigualdad de Bernstein, encontramos los polinomios como consecuencia del caso recién probado a partir del cambio $x \mapsto \cos \theta$: $S(\theta) = \cos(n(\theta - \theta_0))$ para θ_0 arbitrario.

3.3. El teorema de Gauss-Lucas y una demostración alternativa

Daremos a continuación una demostración alternativa de la desigualdad de Bernstein a partir de un bonito teorema: el conocido como **teorema de Gauss-Lucas**⁴. Puede decirse de este teorema que es una versión compleja del teorema de Rolle; no obstante, como veremos en la nota 3.3.1 tras la prueba del teorema, aparecerá una sorpresa adicional.

⁴A quien apela el nombre del teorema es a Félix Lucas y no a Édouard Lucas (1842-1891), bastante más conocido que el primero por sus resultados en primalidad, ¡demostró en 1876 que $2^{127} - 1$ era primo!, o en matemáticas recreativas: inventó el juego de las Torres de Hanoi. La primera demostración publicada del teorema de Gauss-Lucas data de 1874, aunque Gauss lo había utilizado anteriormente de manera implícita. El artículo original puede encontrarse en:

FÉLIX LUCAS, *Sur une application de la mécanique rationnelle à la théorie des équations*, C.R. Hebd. Séances Acad. Sci., **89**, (1879), pp. 224–226.

Teorema 3.10 (Teorema de Gauss-Lucas). *Sea $p \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio no constante. Entonces, las raíces de p' pertenecen al cierre convexo de las raíces de p .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que p es un polinomio mónico y sean $a_1, \dots, a_n$ sus raíces (pueden estar repetidas); entonces p puede expresarse exactamente como $p(z) = \prod_{i=1}^n (z - a_i)$.

Sea w un cero de p' , que no sea simultáneamente un cero de p (en tal caso no habría nada que probar); entonces, tomando la derivada logarítmica obtenemos

$$\frac{p'(w)}{p(w)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{w - a_i} = 0,$$

o equivalentemente:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\overline{w} - \overline{a_i}}{|w - a_i|^2} = 0.$$

Lo que nos lleva, tomando conjugados y despejando, a la igualdad

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|w - a_i|^2} \right) w = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{|w - a_i|^2}.$$

Despejando w obtenemos su combinación convexa en término de los $a_1, \dots, a_n$ y concluye la prueba del teorema. □

Nota 3.3.1 (El teorema de Marden): A priori podría parecer que la combinación convexa que obtenemos mediante el teorema de Gauss-Lucas no tenga nada de especial; de hecho, no sería de extrañar que el lector arguyera, probablemente con razón, que no resulta una expresión muy atractiva. Sin embargo, sí guarda un significado geométrico concreto: lo que se tiene no es sino una media baricéntrica. Esto hace que para grados pequeños, por ejemplo 2 y 3, se tengan relaciones geométricas entre las raíces de p y las de p' ; dando lugar a resultados realmente estéticos como el teorema de Marden:

Teorema 3.11 (Teorema de Marden, 1864). *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio de grado 3 cuyas raíces a_1, a_2, a_3 no sean colineales y denotemos por T al triángulo formado por a_1, a_2 y a_3 . Entonces, las raíces w_1, w_2 de $p'(z)$ son los focos de la única elipse tangente al triángulo T en las mediatrices de cada uno de sus lados.*

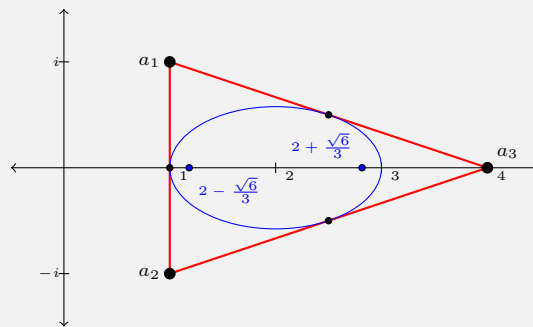


Figura 3.3: Teorema de Marden para $p(z) = z^3 - 6z^2 + 10z - 8$.

Invito al lector a leer [25] para conocer más en profundidad la historia detrás de este teorema.

Vamos ahora con la demostración de la desigualdad de Bernstein a partir del teorema de Gauss-Lucas. Antes, recordemos su enunciado:

Teorema 3.2 (Desigualdad de Bernstein, 1912). *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio de grado menor o igual que n . Entonces*

$$\max_{|z| \leq 1} |p'(z)| \leq n \max_{|z| \leq 1} |p(z)|.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA DESIGUALDAD DE BERNSTEIN VÍA GAUSS-LUCAS. En lo que sigue, denotemos por $M := \max_{|z| \leq 1} |p(z)|$. En primer lugar, es inmediato ver que $z^n \cdot p\left(\frac{1}{z}\right)$ es un polinomio de grado n y además, en virtud del principio del módulo máximo, tenemos que cumple

$$\max_{|z| \leq 1} \left| z^n \cdot p\left(\frac{1}{z}\right) \right| = \max_{|z|=1} \left| z^n \cdot p\left(\frac{1}{z}\right) \right| = \max_{|z|=1} |p(z)| = M,$$

de donde se deduce directamente que $\left| \frac{p(z)}{z^n} \right| \leq M$ para todo $|z| \geq 1$.

Ahora sea $|\lambda| > M$ y definamos el polinomio $q(z) := p(z) - \lambda z^n$. Mediante una simple acotación, aplicando lo que hemos ido obteniendo, vemos que $q(z) \neq 0$ para todo $|z| \geq 1$:

$$|q(z)| = |p(z) - \lambda z^n| \geq |\lambda z^n| - |p(z)| > M |z^n| - M |z^n| = 0.$$

Por consiguiente, todos los ceros de $q(z)$ se encuentran en $\mathbb{D}$. En virtud del teorema de Gauss-Lucas se deduce que los ceros de $q'(z)$ también se encuentran en $\mathbb{D}$; esto es, $q'(z) \neq 0$ para todo $|z| \geq 1$, lo que equivale, teniendo en cuenta que $q'(z) = p'(z) - n\lambda z^{n-1}$, a la relación

$$\frac{p'(z)}{nz^{n-1}} \neq \lambda, \text{ para todo } |z| \geq 1.$$

Pero nótese que la elección de λ ha sido arbitraria, de donde deducimos que

$$\left| \frac{p'(z)}{nz^{n-1}} \right| \leq M, \text{ para todo } |z| \geq 1.$$

En particular, la desigualdad anterior para $|z| = 1$ se traduce en $|p'(z)| \leq nM$. Ahora, a partir del principio del módulo máximo por fin deducimos la desigualdad deseada:

$$\max_{|z| \leq 1} |p'(z)| \leq n \max_{|z| \leq 1} |p(z)|.$$

□

4

Transformadas integrales holomorfas: los teoremas de Paley-Wiener

En este capítulo se estudiarán las hipótesis bajo las cuales será posible extender la transformada de Fourier de una función a ciertos dominios del plano complejo. Se empezará definiendo y estudiando las principales propiedades de las transformadas de Fourier y Laplace; para, en la segunda sección enunciar los teoremas de Paley¹-Wiener y demostrar el segundo de los dos, al que posteriormente apelaremos durante la demostración del teorema de universalidad de Voronin.

4.1. Transformadas de Fourier y Laplace

En la sección que comienza llevaremos un somero estudio de la construcción y las propiedades de las transformadas de Fourier y Laplace². Nos centraremos exclusivamente en aquellos hechos que nos serán de utilidad más adelante en la prueba del segundo teorema de Paley-Wiener. Para un estudio más exhaustivo, el lector puede acudir a cualquiera de las numerosas referencias que existen; no obstante, en estas páginas hemos seguido principalmente [42].

Transformada de Fourier

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, definimos su **transformada de Fourier** como:

$$\hat{f}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx. \quad (4.1)$$

Claramente, dicha transformada está bien definida en cada punto, ya que:

$$|\hat{f}(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot |e^{-ixt}| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty.$$

¹Como dato histórico, anotar que entre los dos protagonistas a los que apela el título destaca la trágica historia de Raymond Paley (Raymond Edward Alan Christopher Paley), quien murió en 1933 con 26 años sepultado por un alud de nieve mientras esquiaba en las Montañas Rocosas de Canadá.

²A la transformada de Laplace también se la conoce como la transformada de Fourier-Laplace.

Queremos definir la transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbb{R})$ ya que, por ser éste un espacio de Hilbert tiene muy buenas propiedades. Sin embargo, puesto que $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue no es un espacio de medida finita, se tiene que $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$. Por tanto, con la definición anterior no podremos calcular directamente la transformada de Fourier de una función en $L^2(\mathbb{R})$: habrá que trabajar un poco más.

No obstante sí tenemos que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$. Así que, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ existe una sucesión de Cauchy $(f_k)_{k \geq 1} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $f_k \xrightarrow{L^2} f$. Así pues, se define $\hat{f}$ como el límite de la transformadas de Fourier de las f_k :

$$\hat{f}(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) e^{-ixt} dx.$$

Resulta que la definición anterior no depende de la elección de la sucesión de funciones (f_k) ; esto es, la transformada de Fourier está bien definida sobre $L^2(\mathbb{R})$ y además para $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ esta nueva definición coincide con la que dimos en la ecuación (4.1).

Finalmente, se tiene que la transformada de Fourier es un operador con muy buenas propiedades en $L^2(\mathbb{R})$, en particular es (casi) una isometría³ con el producto escalar usual: el conocido **teorema de Plancherel** lo pone en evidencia.

Teorema 4.1 (Plancherel, 1910).⁴ *Para todo par de funciones $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene la siguiente relación:*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) \cdot \overline{\hat{g}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

En particular $\|f\|_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_{L^2}$.

Más adelante, con los teoremas de Paley-Wiener a los que apela el título del capítulo, discutiremos bajo qué condiciones se puede extender la transformada de Fourier a algunos dominios del plano complejo. Antes, vamos a estudiar un primo hermano de la transformada de Fourier: la transformada de Laplace.

Transformada de Laplace

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible en $(0, +\infty)$, se define su **transformada de Laplace** como:

$$\mathcal{L}_{f(t)}(s) := \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt, \text{ para } s \in \mathbb{R}.$$

Vamos a intentar ampliar el dominio de definición de la transformada de Laplace a los números complejos, se espera que bajo ciertas condiciones $\mathcal{L}_{f(t)}(z)$ sea holomorfa en alguna región del plano complejo. No hay más que fijarse en la definición de la transformada de Laplace para imaginarse que dichas condiciones estarán relacionadas con el crecimiento de f y la función exponencial. Así pues, se dice que f (de variable real o compleja) es de **tipo exponencial con constante A** , para cierta A real y positiva, si existe $C > 0$ de modo que

$$|f(z)| \leq C e^{A|z|}.$$

³Lo sería cambiando la constante que precede a la integral en la definición de la transformada de Fourier.

⁴La referencia del artículo original es:

M. PLANCHEREL, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par les intégrales définies*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **30**, no. 1, (1910), pp. 289–335.

Acotando de manera sencilla, puede verse que en tal caso $\mathcal{L}_{f(t)}(z)$ está bien definida en el semiplano $\mathbb{H}_A := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > A\}$:

$$|\mathcal{L}_{f(t)}(z)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| \cdot |e^{-zt}| dt \leq C \int_0^{+\infty} e^{-t(\Re(z)-A)} dt < +\infty.$$

Pero claro, de ahí a la holomorfía todavía hay un paso que dar: probar la derivabilidad; algo que nos llevará un poco más de trabajo.

Proposición 4.2. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de tipo exponencial con constante A . Entonces, su transformada de Laplace es una función holomorfa en el semiplano $\mathbb{H}_A$ y su derivada coincide con $-\mathcal{L}_{tf(t)}$. Además, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene que f es holomorfa en $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Empecemos probando la primera parte de la proposición: veamos que para todo $z \in \mathbb{H}_A$ se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}_{f(t)}(z+h) - \mathcal{L}_{f(t)}(z)}{h} + \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt} dt = 0. \quad (4.2)$$

Expresando todo en forma de integrales tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_{f(t)}(z+h) - \mathcal{L}_{f(t)}(z)}{h} + \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt} dt &= \int_0^{+\infty} f(t) \left(\frac{e^{-(z+h)t} - e^{-zt}}{h} - (-t)e^{-zt} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} \left(\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) dt. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ahora, para acabar la demostración, apoyémonos en el siguiente lema:

Lema 4.3. *Para todo $a \in \mathbb{C}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $|h| < \frac{1}{|a|}$ se tiene*

$$\left| \frac{e^{ah} - 1}{h} - a \right| \leq |a|^2 |h|.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Sustituyendo la exponencial por su serie de potencias y operando se llega a la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{ah} - 1}{h} - a \right| &= |a|^2 |h| \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n h^n}{(n+2)!} \right| \leq |a|^2 |h| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|ah|^n}{(n+2)!} \\ &< |a|^2 |h| \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = |a|^2 |h| \cdot (e - 2) < |a|^2 |h|. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye la prueba del lema. ■

Introduciendo módulos en la igualdad (4.3), en virtud del lema tenemos que para h suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathcal{L}_{f(t)}(z+h) - \mathcal{L}_{f(t)}(z)}{h} + \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt} dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} \left| f(t)e^{-zt} \left(\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) \right| dt \\ &\leq C \cdot |h| \int_0^{+\infty} e^{At} e^{-\Re(z)t} t^2 dt \\ &= C \cdot |h| \int_0^{+\infty} e^{(A-\Re(z))t} t^2 dt. \end{aligned}$$

Como $\Re(z) > A$ esta última integral es finita, de donde se deduce la igualdad (4.2) cuando $h \rightarrow 0$ y por tanto la holomorfía de $\mathcal{L}_{f(t)}$ en $\mathbb{H}_A$. Es más, hemos probado la siguiente identidad:

$$\mathcal{L}_{f(t)}^{(k)} = (-1)^k \mathcal{L}_{t^k f(t)}, \text{ para todo } z \in \mathbb{H}_A.$$

Finalmente, si además $f \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$|\mathcal{L}_{f(t)}(z)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt \right| \leq \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^{+\infty} e^{-2zt} dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

para todo $z \in \mathbb{H}$, mientras que la holomorfía se prueba de manera parecida al caso anterior. $\square$

4.2. Los teoremas de Paley-Wiener

En la sección anterior, dada $f \in L^2(\mathbb{R})$ se definía la transformada de Fourier $\hat{f}$ como una función de variable real. No obstante, bajo algunas condiciones, dicha transformada podrá extenderse de manera holomorfa a algunos dominios del plano complejo, por ejemplo: sea $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$, entonces

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{-ixz} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-1}{iz} e^{-ixz} \right]_{-1}^1 = \frac{\text{sen}(iz)}{\pi z}$$

puede extenderse a ser una función entera con una singularidad evitable en $z = 0$. Sin embargo, no siempre tendremos tanta suerte⁵ y la transformada de Fourier sólo podrá extenderse a ser meromorfa u holomorfa en algún dominio menor, como por ejemplo, un semiplano. En lo que sigue, nos centraremos fundamentalmente en el estudio de dos clases de transformadas holomorfas que posteriormente serán protagonistas en los **teoremas de Paley-Wiener**:

- (a) Sea $F \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\text{supp}(F) \subset (0, +\infty)$ y definamos para $z \in i\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ la función

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{itz} dt = \int_0^{+\infty} F(t) e^{-ty} e^{itx} dt.$$

A partir de la proposición 4.2, con el cambio de variable $z \mapsto iz$, se ve que ciertamente f es holomorfa en $i\mathbb{H}$. Además, del teorema de Plancherel se deduce que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^2 dx = \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 e^{-2ty} dt \leq \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt.$$

Por tanto, tenemos que la familia $\{x \mapsto f(x + iy)\}$ para $y \in (0, +\infty)$ es un conjunto acotado en $L^2(dx)$.

- (b) Sea $F \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\text{supp}(F) \subset [-A, A]$, para cierto $A > 0$. En este caso tenemos que

$$f(z) = \int_{-A}^A F(t) e^{itz} dt$$

está definida para todo $z \in \mathbb{C}$, ya que:

$$|f(z)| \leq \int_{-A}^A |F(t) e^{itz}| dt = \int_{-A}^A |F(t)| e^{-yt} dt \leq e^{A|z|} \int_{-A}^A |F(t)| dt = C e^{A|z|}$$

⁵Claramente una función indicatriz no es un ejemplo muy emocionante. Aunque unidas hacen la fuerza...

donde la última igualdad se deduce de que $f \in L^1[-A, A]$ por ser éste un espacio de medida finita con la medida de Lebesgue. Por tanto, hemos demostrado que además f es de tipo exponencial con constante A .

Análogamente a cómo procedimos para la familia **(a)** se demuestra que f es holomorfa, aunque en este caso resulta que f es entera. Por último, de nuevo por el teorema de Plancherel tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 dz = \int_{-A}^A |F(t)|^2 e^{-2yt} dt < +\infty.$$

Los teoremas de Paley-Wiener⁶ estudian la existencia de F si consideramos el problema en el sentido inverso. A veces, las cosas quedan más claras sin más que ver los enunciados:

Teorema 4.4 (Primer teorema de Paley-Wiener). *Sea $f \in \mathcal{H}(i\mathbb{H})$ y sea*

$$C := \sup_{y \in (0, +\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + y)|^2 dx < +\infty.$$

Entonces, existe $F \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte incluido en $(0, +\infty)$ y tal que:

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{itz} dt, \text{ para todo } z \in i\mathbb{H}; \quad \int_0^{+\infty} |F(t)|^2 dt = C.$$

Teorema 4.5 (Segundo teorema de Paley-Wiener). *Sea f una función entera de tipo exponencial con constante $A > 0$, tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 dz < +\infty.$$

Entonces, existe $F \in L^2(\mathbb{R})$ cuyo soporte está incluido en $[-A, A]$, de modo que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \int_{-A}^A F(t) e^{itz} dt.$$

Se probará sólo el segundo teorema, ya que es al que apelaremos en la prueba del teorema de universalidad de Voronin. El lector interesado puede acudir a [42] donde se prueban ambos teoremas.

DEMOSTRACIÓN DEL SEGUNDO TEOREMA DE PALEY-WIENER. Uno esperaría que para probar el teorema, bastase con definir

$$F(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx$$

y demostrar que $F(t) = 0$ para $|t| > A$. Sin embargo el argumento no funciona: hemos de dar un pequeño rodeo. Sea $f_\varepsilon(x) := f(x) \cdot e^{-\varepsilon|x|}$ para $\varepsilon > 0$, vamos a demostrar la siguiente igualdad

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) e^{-itx} dx = 0, \text{ para todo } |t| > A. \quad (4.4)$$

⁶Para el lector interesado la referencia del artículo original es:

R. PALEY & N. WIENER, *Fourier transforms in the complex domain*, AMS Coll. Publ., **19**, New York, (1934).

Veamos que esto es suficiente para probar el teorema: como $|f(x)|^2 \cdot |e^{-\varepsilon|x|} - 1|^2 \leq |f(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene, en virtud del teorema de la convergencia dominada, que $\|f_\varepsilon - f\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Por tanto, el teorema de Plancharel implica que $\|\hat{f}_\varepsilon - \hat{f}\|_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$; esto es, $\hat{f}_\varepsilon \xrightarrow{L^2} F$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por consiguiente, de cumplirse (4.4), como la convergencia en L^2 implica la convergencia en casi todo punto, estaríamos demostrando que $F(t) = 0$ para casi todo $|t| > A$. De la fórmula de inversión de la transformada de Fourier se seguiría

$$f(z) = \int_{-A}^A F(t) e^{itz} dt$$

para casi todo $z \in \mathbb{R}$. Pero como ambos lados de la igualdad son funciones enteras, tendríamos la igualdad en todo $\mathbb{C}$. Y por tanto, queda demostrado que (4.4) basta para probar el teorema.

Por tanto, vamos con la prueba de (4.4): definamos para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Gamma_\alpha(s) := \{se^{i\alpha} : 0 \leq s < +\infty\}, \quad \Pi_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \Re(ze^{i\alpha}) > A\},$$

y la función

$$\phi_\alpha(w) := \int_{\Gamma_\alpha} f(z) e^{-wz} dz = e^{i\alpha} \int_0^{+\infty} f(se^{i\alpha}) e^{-we^{i\alpha}s} ds.$$

Mediante un argumento análogo al de la proposición 4.2 (de hecho, ϕ_α es a fin de cuentas una transformada de Laplace girada) se demuestra que $\phi_\alpha \in \mathcal{H}(\Pi_\alpha)$, $\phi_0 \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$ y que $\phi_\pi \in \mathcal{H}(-\mathbb{H})$. La importancia de las funciones ϕ_α para la demostración radica en la identidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) e^{-itx} dx = \phi_0(\varepsilon + it) - \phi_\pi(-\varepsilon + it)$$

que se comprueba sin mucho esfuerzo de manera operativa:

$$\begin{aligned} \phi_0(\varepsilon + it) - \phi_\pi(-\varepsilon + it) &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-(\varepsilon + it)x} dx + \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-(-\varepsilon + it)x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\varepsilon x} e^{-itx} dx + \int_{-\infty}^0 f(x) e^{\varepsilon x} e^{-itx} dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\varepsilon|x|} e^{-itx} dx + \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-\varepsilon|x|} e^{-itx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) e^{-itx} dx. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el límite de la ecuación (4.4) quedará probado si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\phi_0(\varepsilon + it) - \phi_\pi(-\varepsilon + it)) = 0$. Probaremos este hecho, demostrando que las funciones ϕ_α son continuación analítica unas de otras; esto es, dos ϕ_α cualesquiera coinciden en la intersección de sus dominios de definición. Supongamos que $0 < \beta - \alpha < \pi$ y definamos

$$\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \eta := \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right).$$

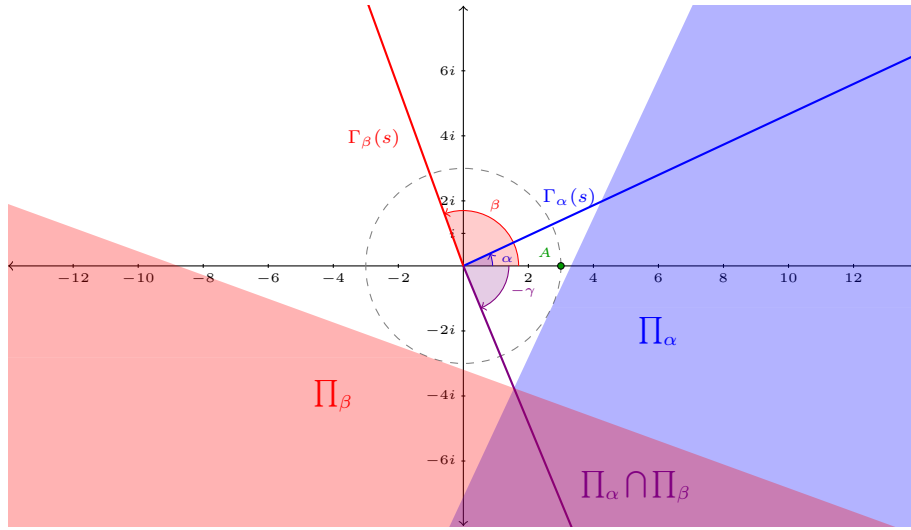


Figura 4.1: Un dibujo explicativo de la construcción que usamos durante la prueba del teorema de Paley-Wiener.

Sea $w = |w| e^{-i\gamma}$, entonces

$$\begin{aligned}\Re(w e^{i\alpha}) &= \Re(|w| e^{i(\alpha-\gamma)}) = |w| \cos(\alpha - \gamma) = |w| \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \eta |w|; \\ \Re(w e^{i\beta}) &= \Re(|w| e^{i(\beta-\gamma)}) = |w| \cos(\beta - \gamma) = |w| \cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) = \eta |w|.\end{aligned}$$

Por tanto, $w \in \Pi_\alpha \cap \Pi_\beta$ siempre y cuando $|w| > A/\eta$. Sea w_0 de la forma recién descrita y consideremos el camino $\Gamma(t) = r e^{it}$ para $\alpha \leq t \leq \beta$; en virtud del teorema de Cauchy, por ser $f(z)e^{w_0 z}$ una función entera, se tiene para todo $r > 0$ que

$$\int_0^{r e^{i\alpha}} f(z) e^{-w_0 z} dz + \int_\Gamma f(z) e^{-w_0 z} dz + \int_{r e^{i\beta}}^0 f(z) e^{-w_0 z} dz = 0. \quad (4.5)$$

Vamos a acotar el segundo sumando de la expresión anterior:

$$\Re(-w_0 z) = -\Re(r |w_0| \cdot e^{-i\gamma} e^{it}) = -r |w_0| \cdot \cos(t - \gamma) \leq -r |w_0| \eta;$$

introduciendo esta cota en la integral que queremos acotar y teniendo en cuenta que f es de tipo exponencial tenemos

$$\left| \int_\Gamma f(z) e^{-w_0 z} dz \right| \leq \int_\Gamma C e^{(A - |w_0| \eta) r} dz = C e^{(A - |w_0| \eta) r} (\beta - \alpha) r.$$

Finalmente, tomando el límite cuando $r \rightarrow +\infty$, teniendo en cuenta que $|w_0| > A/\eta$ se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_\Gamma f(z) e^{-w_0 z} dz \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} C e^{(A - |w_0| \eta) r} (\beta - \alpha) r = 0.$$

Por tanto, tomando el límite cuando $r \rightarrow \infty$ en la igualdad (4.5) se tiene que

$$0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{r e^{i\alpha}} f(z) e^{-w_0 z} dz + \int_\Gamma f(z) e^{-w_0 z} dz + \int_{r e^{i\beta}}^0 f(z) e^{-w_0 z} dz = \phi_\alpha(w_0) + 0 - \phi_\beta(w_0).$$

Y queda demostrado que para todo $w = |w|e^{-i\gamma}$ con $|w| > A/\eta$, se tiene $\phi_\alpha(w) = \phi_\beta(w)$. Para concluir la prueba, nótese que del principio de los ceros aislados se sigue que coinciden en todo $\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta$. $\square$

Como corolario, tenemos la siguiente proposición que usaremos más adelante como lema en la demostración del teorema de universalidad de Voronin.

Proposición 4.6. *Sea f una función entera de tipo exponencial con constante A . Entonces, para todo $\delta > 0$ existe una sucesión (t_j) de números reales positivos arbitrariamente grandes de modo que:*

$$|f(t_j)| > e^{-(A+2\delta)t_j}.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario. Entonces, existe δ y una constante B de modo que $|f(t)| \leq Be^{-(A+2\delta)t}$ para todo $t \geq 0$. Si además tenemos en cuenta que f es de tipo exponencial, operando en la desigualdad anterior deducimos que para cierta constante C se cumple

$$e^{(A+\delta)t} |f(t)| \leq Ce^{-\delta|t|}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Por consiguiente, $e^{(A+\delta)t} f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ y en virtud del teorema 4.5 tenemos que existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ con soporte en $[-\delta, \delta]$ de modo que:

$$e^{(A+\delta)t} f(t) = \int_{-\delta}^{\delta} g(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

Aplicando la identidad de Plancherel, se sigue que para casi todo punto $\xi \in \mathbb{R}$ se tiene

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{((A+\delta)-i\xi)t} dt.$$

Como $\text{supp}(g) \subset [-\delta, \delta]$, la integral anterior se anula para casi todo ξ fuera de $[-\delta, \delta]$; por tanto, se tiene que $f(t) = 0$ para casi todo $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, de la holomorfía deducimos que la igualdad se cumple para todo $t \in \mathbb{R}$ entrando así en contradicción con la suposición inicial de la demostración. $\square$

5

Sucesiones y curvas equidistribuidas

El objetivo final de este capítulo es ser capaces de aproximar la medida de ciertos conjuntos en el toro a partir de integrales sobre curvas uniformemente distribuidas. Es probable que el lector, haya considerado cuestiones análogas con objetos más elementales como, por ejemplo, las sucesiones uniformemente distribuidas. Es por ello, que iremos introduciendo las ideas desde esta perspectiva.

Empezaremos el capítulo considerando ideas y nociones más básicas como los teoremas de aproximación de Dirichlet y Kronecker; seguiremos con el estudio de las sucesiones equidistribuidas en el toro y enunciaremos un conocido criterio para determinarlas: el criterio de Weyl. A continuación, aplicaremos las sucesiones equidistribuidas para estimar la medida de conjuntos en el toro; y por último, trasladaremos todas estas ideas al mundo de las curvas equidistribuidas para, al final del trabajo, aplicar algunos de los resultados que obtendremos en la demostración del teorema de universalidad de Voronin.

Para acabar con la introducción, anotar que parte del capítulo puede estudiarse desde la perspectiva de la teoría ergódica, léase [44]; aunque se ha decidido no hacerlo por razones de espacio. El resto de referencias que se han seguido son [28] para las secciones 5.1 y 5.2, y [47] para la sección 5.3.

5.1. Aproximación de números reales por racionales

El caso unidimensional

Empezamos el apartado con un teorema clásico de teoría de números: el **teorema de aproximación de Dirichlet**.

Teorema 5.1 (Teorema de aproximación de Dirichlet, 1840). *Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y N un entero positivo cualesquiera. Entonces, existen dos enteros p, q de modo que $0 < q < N$, para los cuales*

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE APROXIMACIÓN DE DIRICHLET. Consideremos los $N + 1$ números en $[0, 1)$ dados por $a_i = i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor$ para $i = 0, \dots, N$. Por el principio del palomar, dos de los a_i anteriores caerán en alguno de los N intervalos de la forma $[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N})$ para $j = 0, \dots, N-1$, digamos a_m y a_n donde, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $m < n$. La prueba ya es inmediata: teniendo en cuenta que $|a_n - a_m| < \frac{1}{N}$ se sigue que

$$|(n-m)\alpha - (\lfloor n\alpha \rfloor - \lfloor m\alpha \rfloor)| < \frac{1}{N},$$

y queda probado el teorema, puesto que $0 < n - m < N$. $\square$

Una manera apropiada de entender el teorema anterior e ir introduciendo lo que vendrá más adelante es considerándolo en el **toro**. El toro, al que denotaremos como $\mathbb{T}$, no es otra cosa que el conjunto de los reales módulo $\mathbb{Z}$: es decir, definida la relación de equivalencia $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$, el toro es el conjunto cociente

$$\mathbb{T} := \mathbb{R} / \sim.$$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera, su representante en el toro no es sino su parte fraccionaria, a la que denotaremos por $\{\alpha\}$; es por esto que al toro se le identifica con el intervalo $[0, 1)$.

El toro con la suma adquiere estructura de grupo y además, la aplicación

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}, +) &\longrightarrow (\mathbb{S}^1, \cdot) \\ \alpha &\longmapsto e^{2\pi i \alpha} \end{aligned}$$

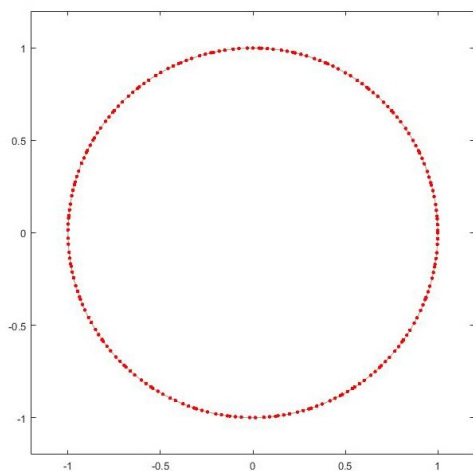
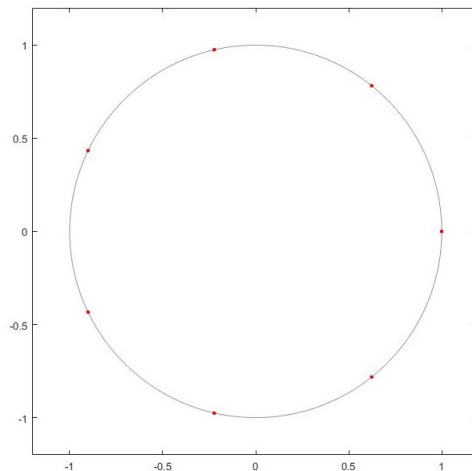
es un isomorfismo de grupos, donde $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Siempre con previo aviso, pero trabajaremos indistintamente en cada una de las anteriores versiones del toro.

Interpretado en estos términos, el teorema de aproximación de Dirichlet afirma que dado $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera, la sucesión $a_n = \{n\alpha\}$ es densa localmente en $0 \in \mathbb{T}$ (o si se prefiere ver en la versión $\mathbb{S}^1$: la sucesión $a_n = e^{2\pi i n \alpha}$ es densa localmente en 1). Pensado detenidamente, el teorema es trivial cuando $\alpha \in \mathbb{Q}$, ya que en tal caso bastaría con ir escogiendo múltiplos del denominador de α para probar el teorema; por lo que el caso «difícil» es cuando α es irracional. Sin embargo, en ese caso sucede algo más fuerte: la sucesión es densa en todo el toro.

Teorema 5.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, la sucesión $a_n = \{n\alpha\}$ es densa en $\mathbb{T}$ si y sólo si α es irracional.*

Para no alargar más de la cuenta el capítulo con los preliminares, nos ahorraremos la demostración de este teorema. Más adelante, lo deduciremos como un corolario del criterio de Weyl.

Un par de dibujos en $\mathbb{S}^1$ que ponen de manifiesto las discusiones anteriores hecho son los siguientes:

Figura 5.1: Puntos en $\mathbb{S}^1$ de la forma $e^{2\pi i n \sqrt{2}}$ Figura 5.2: Puntos en $\mathbb{S}^1$ de la forma $e^{2\pi i n \frac{3}{7}}$

El caso d -dimensional

Tanto el teorema de aproximación de Dirichlet como su generalización posterior, el teorema 5.2, tienen su versión en más dimensiones. En este caso el entorno en el que trabajaremos será el **toro d -dimensional**:

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{T} \times \overset{(d)}{\dots} \times \mathbb{T} \simeq \mathbb{S}^1 \times \overset{(d)}{\dots} \times \mathbb{S}^1;$$

o si se prefiere, $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \sim$ donde, para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ definimos la relación de equivalencia

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d;$$

es decir, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ su representante en $\mathbb{T}^d$ se obtiene tomando la parte fraccionaria de cada una de sus coordenadas. Aprovecho para aclarar brevemente la notación que seguiremos en este capítulo: los elementos de $\mathbb{R}^d$ y/o $\mathbb{T}^d$ se representarán en **negrita**, $\{\mathbf{x}\}$ representa el vector $(\{x_1\}, \dots, \{x_d\})$, y por último denotaremos al producto escalar usual en $\mathbb{R}^d$ y/o $\mathbb{T}^d$ como $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Por otro lado, es evidente que también debemos cambiar la hipótesis respecto a la irracionalidad de α . Para evitar los «ciclos» en el toro, la hipótesis lógica es imponer a las entradas de nuestro vector independencia lineal sobre $\mathbb{Q}$: decimos que $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ son **linealmente dependientes** sobre $\mathbb{Q}$ si existen $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{Q}$ no todos nulos tales que $r_1\alpha_1 + \dots + r_d\alpha_d \in \mathbb{Q}$ (o equivalente $\in \mathbb{Z}$); y **linealmente independientes** en caso contrario. Vamos con el primero de los enunciados:

Teorema 5.3 (Teorema de aproximación de Kronecker, 1884). ¹ Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Entonces, para todo entero $N > 0$, existen enteros q y $p_1, \dots, p_d$ de modo que

$$|q\alpha_i - p_i| < \frac{1}{N}, \text{ para todo } i = 1, \dots, d.$$

¹Leopold Kronecker (1823-1891) probó una versión algo más general de este resultado, véase [27]; aunque para nuestro propósito esta nos será suficiente y más didáctica.

Entendamos de nuevo el enunciado del teorema sobre $\mathbb{T}^d$. En primer lugar, nótese que del mismo modo en que ocurría para el teorema de aproximación de Dirichlet, el teorema de aproximación de Kronecker sería trivial en caso de que los α_i fuesen linealmente dependientes sobre $\mathbb{Q}$. Por seguir con los paralelismos, resulta que de nuevo este teorema sólo estudia la densidad en entornos del $(0, \dots, 0) \in \mathbb{T}^d$, ¿qué ocurre con el resto de puntos de $\mathbb{T}^d$?

Teorema 5.4. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Entonces, la sucesión $a_m = (\{m\alpha_1\}, \dots, \{m\alpha_d\})$ es densa en $\mathbb{T}^d$ si y sólo si los α_i son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.*

De nuevo, veamos un par de dibujos en el toro $\mathbb{T}^2$ que nos ayuden a entender mejor qué está sucediendo.

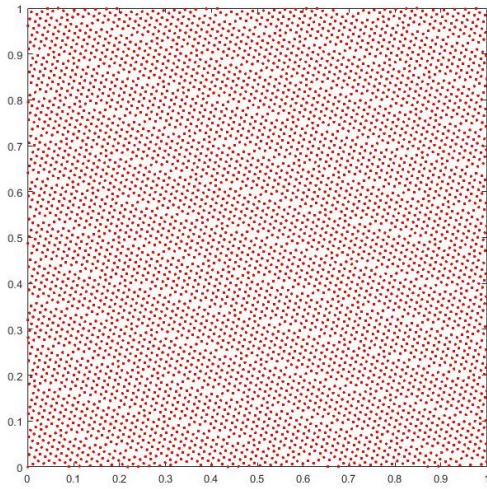


Figura 5.3: Puntos de la forma $(m \log(3), m \log(5))$.

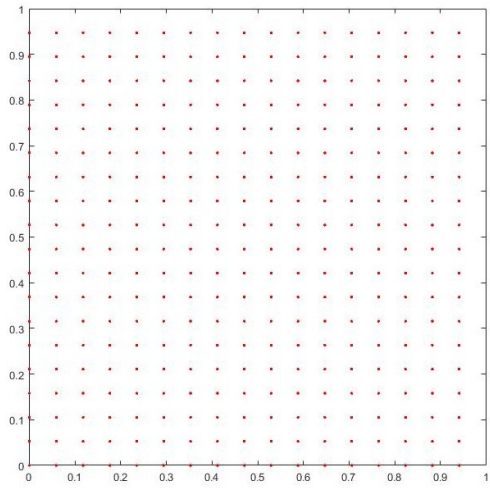


Figura 5.4: Puntos de la forma $(m \frac{1}{17}, m \frac{1}{19})$.

Nota 5.1.1 (Un conjunto linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$): Al final del trabajo apelaremos a alguno de los teoremas que estamos enunciando en este capítulo. En concreto, se los aplicaremos a la siguiente familia de números reales: $\{\log(p) : p \text{ primo}\}$. Para ello, es imprescindible que sea linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$. Este hecho queda en evidencia en la siguiente proposición:

Proposición 5.5. *El conjunto $\mathcal{P} := \{\log(p) : p \text{ primo}\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$. Además, esta afirmación es equivalente al teorema fundamental de la Aritmética.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe una dependencia lineal no trivial sobre $\mathbb{Q}$ para el conjunto $\mathcal{P}$, es decir:

$$\sum_{i=1}^N r_i \log(p_i) = 0, \quad r_i \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los r_i , y pasando aquellos sumandos que sean negativos al lado derecho, obtenemos una igualdad del tipo:

$$\sum m_k \log(p_k) = \sum m_j \log(p_j), \quad m_i \in \{1, 2, \dots\}$$

en la que los primos que aparecen a cada lado son distintos. Usando la propiedad suma-producto del logaritmo, llegamos a la igualdad $\prod p_k^{m_k} = \prod p_j^{m_j}$ que contradice al teorema fundamental de la Aritmética. $\square$

5.2. Sucesiones uniformemente distribuidas: el criterio de Weyl

Como reza el título, el objeto principal de estudio en esta sección son las sucesiones uniformemente distribuidas en el toro que, como iremos viendo, tienen propiedades muy interesantes. Vamos con la definición:

Definición 5.6. Decimos que una sucesión $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{T}$ está **uniformemente distribuida** o **equidistribuida** si para todo intervalo $I \subset \mathbb{T}$ se cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{a_n \in I : n \leq N\}}{N} = m(I).$$

En primer lugar, nótese que equidistribución y densidad topológica son conceptos esencialmente diferentes: sin ir más lejos, que una sucesión sea densa no depende del orden (lo es como conjunto sin más), mientras que su equidistribución sí. De hecho existen sucesiones equidistribuidas en $\mathbb{T}$ que dejan de serlo al reordenarlas adecuadamente. Sin embargo, sí hay una relación lógica entre densidad y equidistribución: toda sucesión equidistribuida es densa, pero no viceversa². Encontrar un contraejemplo del recíproco es una tarea trivial: basta con añadir términos a una sucesión densa que impidan la equidistribución; no obstante, dejaremos la primera de las afirmaciones en forma de proposición con su correspondiente demostración, más por su importancia que por su dificultad.

Proposición 5.7. *Toda sucesión equidistribuida en $\mathbb{T}$ es densa.*

DEMOSTRACIÓN. Escojamos $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{T}$ cualesquiera. Por ser $(a_n)_{n \geq 0}$ equidistribuida, tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{a_n \in [-\varepsilon + x, x + \varepsilon] : n \leq N\}}{N} = 2\varepsilon > 0.$$

De esto, se sigue que para N suficientemente grande existe a_n de modo que $|x - a_n| < \varepsilon$, y por tanto queda demostrado que $(a_n)_{n \geq 0}$ es densa. $\square$

Por tanto, uno espera que las sucesiones equidistribuidas tengan propiedades más fuertes que aquellas que son densas exclusivamente. La diferencia estriba en el hecho de que la segunda es una definición meramente topológica mientras que la primera impone una distribución métrica muy restrictiva. Todo esto se pone en evidencia con la construcción que sigue: de manera trivial, la definición 5.6 es equivalente a pedir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \chi_I(a_n) = m(I), \text{ para todo intervalo } I \subset \mathbb{T}. \quad (5.1)$$

Aproximando mediante sumas superiores e inferiores y aplicando la igualdad (5.1); se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 5.8. *La sucesión $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{T}$ está uniformemente distribuida si y sólo si para toda función f integrable Riemann se cumple*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(a_n) = \int_0^1 f(t) dt.$$

²Mejor dicho: toda sucesión que admita alguna reordenación equidistribuida es densa.

DEMOSTRACIÓN.

($\Rightarrow$): Supongamos que $(a_n)_{n \geq 0}$ está uniformemente distribuida. Como consecuencia de (5.1), tenemos que para toda función simple; es decir, de la forma $s(t) = \sum_{i=0}^N c_i \chi_{[b_i, b_{i+1})}(t)$, donde $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_N = 1$; se cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N s(a_n) = \int_0^1 s(t) dt.$$

Sea ahora f una función integrable Riemann cualquiera. Por la definición de integral de Riemann, existen para todo $\varepsilon > 0$ dos funciones simples $s_1 \leq f \leq s_2$ de modo que $\int_0^1 (s_2(t) - s_1(t)) dt < \varepsilon$; de donde se deducen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt - \varepsilon &\leq \int_0^1 s_1(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N s_1(a_n) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f(a_n) \\ &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f(a_n) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N s_2(a_n) = \int_0^1 s_2(t) dt \leq \int_0^1 f(t) dt + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por último, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ se deduce la primera implicación.

($\Leftarrow$): Supongamos ahora que para toda función integrable Riemann se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(a_n) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Sea ahora un intervalo cualquiera $I = [b, c] \subset \mathbb{T}$; en particular, tenemos que $\chi_I(t)$ es una función integrable Riemann, y por tanto

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \chi_I(a_n) = \int_0^1 \chi_I(t) dt = m(I);$$

de donde se deduce que $(a_n)_{n \geq 0}$ está uniformemente distribuida. □

Con un poco más de esfuerzo en la implicación ($\Leftarrow$) se puede probar el análogo a la proposición 5.8 para funciones continuas. El truco de la prueba es que para $\varepsilon > 0$ arbitrario, existen $f_1 \leq \chi_I \leq f_2$ continuas de modo que $\int_0^1 (f_2(t) - f_1(t)) dt < \varepsilon$; y el argumento culmina con una cadena de desigualdades similar a la llevada a cabo en la implicación ($\Rightarrow$). Dejamos esta afirmación en forma de proposición para apelar a ella en la demostración del criterio de Weyl.

Proposición 5.9. *La sucesión $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{T}$ está uniformemente distribuida si y sólo si para toda función f continua se cumple*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(a_n) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Acabamos con un último e importante criterio para buscar sucesiones uniformemente distribuidas. El teorema lleva el nombre de Hermann Weyl (1885-1955) quien lo probó en 1916, véase [53].

Teorema 5.10 (Criterio de Weyl, 1916). *La sucesión $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{T}$ está uniformemente distribuida si y sólo si para todo entero $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se cumple*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N e^{2\pi i k a_n} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN DEL CRITERIO DE WEYL.

($\Rightarrow$): Esta implicación es trivial. Supongamos que la sucesión $(a_n)_{n \geq 0}$ está uniformemente distribuida; en particular, por ser $e^{2\pi i k t}$ continua para todo $k \in \mathbb{Z}$, se cumple la proposición 5.9. Por tanto, teniendo en cuenta la fórmula de de Moivre

$$e^{2\pi i k t} = \cos(2\pi k t) + i \operatorname{sen}(2\pi k t)$$

basta con comprobar las siguientes integrales inmediatas para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\int_0^1 \cos(2\pi k t) dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_0^1 \operatorname{sen}(2\pi k t) dt = 0.$$

($\Leftarrow$): Para la demostración de esta implicación usaremos el teorema de aproximación de Weierstrass (léase la nota 5.2.1 más adelante). Supongamos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N e^{2\pi i k a_n} = 0$$

para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. En particular tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \cos(2\pi k a_n) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \operatorname{sen}(2\pi k a_n) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; de donde se deduce que para todo polinomio trigonométrico S se satisface

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N S(a_n) = \int_0^1 S(x) dx.$$

Apelamos ahora al teorema de aproximación de Weierstrass: sean f continua y $\varepsilon > 0$, tenemos que existe S polinomio trigonométrico tal que $|f(t) - S(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{T}$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(a_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N S(a_n) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (f(a_n) - S(a_n)) \\ &= \int_0^1 S(t) dt + O(\varepsilon) = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 (S(t) - f(t)) dt + O(\varepsilon) \\ &= \int_0^1 f(t) dt + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ probamos que se cumple la proposición 5.9, concluyendo así la prueba del teorema.

□

Una bonita aplicación del criterio de Weyl es la siguiente generalización del teorema 5.2:

Corolario 5.11. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, la sucesión $a_n = \{n\alpha\} \subset \mathbb{T}$ está uniformemente distribuida si y sólo si α es irracional.*

DEMOSTRACIÓN. De nuevo, veamos cada implicación por separado:

($\Rightarrow$): Supongamos que α es racional; entonces existe $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $r\alpha \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente, aplicando el criterio de Weyl tenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N e^{2\pi i r \{n\alpha\}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N e^{2\pi i (rn\alpha - \lfloor rn\alpha \rfloor)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{N} = 1;$$

de lo que se deduce que $(a_n)_{n \geq 0}$ no está uniformemente distribuida.

($\Leftarrow$): Para la implicación opuesta vamos a aplicar de nuevo el criterio de Weyl. Supongamos que α es irracional, en tal caso tenemos que $\{n\alpha\} \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Por tanto, para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se cumple

$$\sum_{n=0}^N e^{2\pi i k \{n\alpha\}} = \sum_{n=0}^N (e^{2\pi i k \alpha})^n = \frac{1 - e^{2\pi i k (N+1)\alpha}}{1 - e^{2\pi i k \alpha}};$$

por lo que tomando límites y acotando se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^N e^{2\pi i k \{n\alpha\}} \right| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \frac{2}{|1 - e^{2\pi i k \alpha}|} = 0,$$

y apelando al criterio de Weyl queda demostrado el teorema.

□

Antes de seguir, lector, retroceda unas pocas páginas y compruebe que como corolario del criterio de Weyl y la proposición 5.7 obtenemos el teorema 5.2.

Nota 5.2.1 (El teorema de aproximación de Weierstrass): Durante la demostración del criterio de Weyl apelamos a uno de los teoremas clásicos del análisis, el teorema de aproximación de Weierstrass. Aprovechamos esta nota para recordarlo:

Teorema (de aproximación de Weierstrass). *Sea $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un polinomio p tal que $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$.*

De paso, daremos una versión algo más fuerte que usaremos más adelante, el conocido como teorema de Stone-Weierstrass:

Teorema (de Stone-Weierstrass, 1937). ^a *Sea X un espacio de Hausdorff compacto y $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ no trivial. Entonces, $\mathcal{A}$ es denso si y sólo si separa puntos.*

^aM.H.STONE, *Applications of the theory of boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc., **41**, no. 3, (1937), pp. 375-481.

Medir conjuntos mediante sucesiones equidistribuidas

Una posible aplicación de las sucesiones equidistribuidas es aproximar o calcular la medida de un conjunto $D \subset \mathbb{T}$ contando el número de puntos que caen dentro (una especie de método de Montecarlo; de hecho, en la literatura puede encontrarse con el nombre de quasi-Montecarlo) mediante la fórmula

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \chi_D(a_n) = m(D). \quad (5.2)$$

Ya hemos visto en (5.1) que para intervalos la fórmula anterior sí es válida; por tanto, es de esperar que mediante uniones, intersecciones y el paso al límite seamos capaces de aproximar la medida de una gran cantidad de conjuntos D . Y así será, aunque no tendremos todas con nosotros... Para conjuntos Lebesgue medibles cualesquiera no podemos afirmar que se cumpla la igualdad (5.2). Por ejemplo: sean $\overline{\mathbb{Q}}$ el conjunto de números algebraicos y la sucesión $a_n = \{n\sqrt{2}\}$ en el toro. Por un lado, tenemos que $a_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ para todo $n \geq 0$, por lo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \chi_{\overline{\mathbb{Q}}}(a_n) = 1.$$

Sin embargo, por otro lado, tenemos que $\overline{\mathbb{Q}}$ es un conjunto numerable, y por tanto $m(\overline{\mathbb{Q}}) = 0$. Esto nos lleva a la siguiente pregunta: «¿existe una condición suficiente sobre el conjunto D para afirmar que la fórmula (5.2) se satisface?» La respuesta es afirmativa y un argumento inmediato, teniendo en cuenta la proposición 5.8, es el siguiente: «siempre que $\chi_D(t)$ sea una función integrable Riemann»; pero esto es como decir que la medida del conjunto D pueda aproximarse arbitrariamente mediante intervalos desde dentro y desde fuera:

Definición 5.12. Sea D un conjunto de $\mathbb{T}$. Se dice que D es **medible Jordan**³ si para todo $\varepsilon > 0$ existen dos intervalos cerrados $I_1 \subset D \subset I_2$ tales que $m(I_2 \setminus I_1) < \varepsilon$.

Con esta definición y el párrafo anterior se deduce la siguiente proposición:

Proposición 5.13. Sean $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{T}$ una sucesión uniformemente distribuida y D un conjunto medible Jordan. Entonces, se cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \chi_D(a_n) = m(D).$$

5.3. Curvas uniformemente distribuidas

Si en la sección anterior considerábamos sucesiones equidistribuidas en el toro, en ésta vamos a estudiar curvas equidistribuidas. De nuevo, bajo ciertas hipótesis adicionales, deduciremos una proposición similar a la 5.8: el paso del discreto al continuo provocará que la suma que aparecía en el lado izquierdo de la igualdad pase a ser una integral. Vamos con la definición formal de equidistribución para curvas:

Definición 5.14. Sea $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{T}^d$ una curva parametrizada y continua en el toro. Se dice que $\gamma(\tau)$ está **uniformemente distribuida** o **equidistribuida** en $\mathbb{T}^d$ si para todo cerrado simple $C = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ se cumple

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} m(\{\tau \in [0, T] : \gamma(\tau) \in C\}) = m(C).$$

³Nótese que nuestro contraejemplo, los números algebraicos, no satisface esta condición; ya que es numerable y denso simultáneamente.

Nótese que la velocidad de la parametrización es una hipótesis necesaria: análogo a lo que discutíamos al comienzo de la sección 5.2 con la reordenación de sucesiones, un cambio de parametrización adecuado puede transformar una curva equidistribuida en otra que no lo es (aunque, por supuesto, el grafo de la curva seguirá siendo el mismo). Como veremos, ésta no es la única similitud entre este caso y el que estudiamos con las sucesiones equidistribuidas. En primer lugar, la proposición 5.7 también se cumple para curvas: toda curva uniformemente distribuida en $\mathbb{T}^d$ es densa. En segundo lugar, se puede remedar la construcción que culminaba con las proposiciones 5.8 y 5.9 para obtener los siguientes resultados análogos para el caso de curvas equidistribuidas.

Proposición 5.15. *Sea $\gamma(\tau)$ una curva en $\mathbb{T}^d$. Entonces, $\gamma(\tau)$ está uniformemente distribuida si y sólo para toda función f integrable Riemann se cumple:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\gamma(\tau)) d\tau = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Proposición 5.16. *Sea $\gamma(\tau)$ una curva en $\mathbb{T}^d$. Entonces, $\gamma(\tau)$ está uniformemente distribuida si y sólo para toda función f continua en $\mathbb{T}^d$ se cumple:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\gamma(\tau)) d\tau = \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Y mediante el mismo argumento que en el caso de sucesiones obtenemos como corolario la versión continua de la proposición 5.13:

Proposición 5.17. *Sean $\gamma(\tau)$ una curva uniformemente distribuida en $\mathbb{T}^d$ y $D \subset \mathbb{T}^d$ un conjunto medible Jordan. Entonces,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_D(\gamma(\tau)) d\tau = m(D).$$

Donde **medible Jordan** en este caso quiere decir que puede aproximarse desde dentro y desde fuera mediante cerrados simples de $\mathbb{T}^d$; es decir, D es medible Jordan si para todo $\varepsilon > 0$ existen $C_1 \subset D \subset C_2$ cerrados simples tales que $m(C_2 \setminus C_1) < \varepsilon$.

El criterio de Weyl para curvas

Teorema 5.18 (Criterio de Weyl para curvas). *Sea $\gamma(\tau)$ una curva en $\mathbb{T}^d$. Entonces, $\gamma(\tau)$ está uniformemente distribuida si y sólo si*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \gamma(\tau) \rangle} d\tau = 0$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN DEL CRITERIO DE WEYL PARA CURVAS. Como veremos, la prueba es muy parecida a la que dimos para sucesiones:

($\Rightarrow$): Supongamos que $\gamma(\tau)$ está uniformemente distribuida en $\mathbb{T}^d$. En particular, $\gamma(\tau)$ satisface las hipótesis de la proposición 5.16; por tanto, puesto que las funciones $e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \gamma(\tau) \rangle}$ son continuas para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, se comprueba que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \gamma(\tau) \rangle} d\tau = \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x} = 0$$

y queda probada la primera de las implicaciones.

($\Leftarrow$): Supongamos que para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ tenemos,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \gamma(\tau) \rangle} d\tau = 0.$$

En particular, de aquí se deduce que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi \langle \mathbf{k}, \gamma(\tau) \rangle) d\tau = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi \langle \mathbf{k}, \gamma(\tau) \rangle) d\tau = 0.$$

Sean f una función continua en $\mathbb{T}^d$ y $\varepsilon > 0$ cualesquiera; del teorema de Stone-Weierstrass (léase la nota 5.2.1) se deduce la existencia de un polinomio trigonométrico S de modo que $|S(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\gamma(\tau)) d\tau &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S(\gamma(\tau)) d\tau + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(\gamma(\tau)) - S(\gamma(\tau))) d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S(\gamma(\tau)) d\tau + O(\varepsilon) = \int_{\mathbb{T}^d} S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + O(\varepsilon) \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{T}^d} (S(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + O(\varepsilon) \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

y haciendo $\varepsilon \downarrow 0$, como consecuencia de la proposición 5.16, queda demostrado el teorema. $\square$

De nuevo, siguiendo con las analogías, obtenemos un corolario similar al 5.11.

Corolario 5.19. Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$. Entonces, la recta $\gamma(\tau) = \{\tau\alpha\}$ está uniformemente distribuida en $\mathbb{T}^d$ si y sólo si los α_i son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$.

DEMOSTRACIÓN. Otra vez, la demostración es paralela a la del corolario 5.11:

($\Rightarrow$): Supongamos que existe una dependencia lineal no trivial sobre $\mathbb{Q}$ de los α_i , es decir:

$$\sum_{i=1}^d r_i \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad \text{para ciertos } r_i \in \mathbb{Q} \text{ no todos nulos.}$$

Sea $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$, entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle \mathbf{r}, \gamma(\tau) \rangle} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \tau \langle \mathbf{r}, \alpha \rangle} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 1 d\tau = 1.$$

Por consiguiente, como $\gamma(\tau)$ no satisface el criterio de Weyl se sigue que no es equidistribuida.

($\Leftarrow$): Supongamos que los α_i son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Demostraremos esta implicación comprobando que la curva $\gamma(\tau)$ satisface el criterio de Weyl: de la independencia

lineal sobre $\mathbb{Q}$ se deduce que $\{\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle\} \neq \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$; por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \gamma(\tau) \rangle} d\tau &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} \right)^\tau d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{e^{2\pi i \tau \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle}}{2\pi i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{e^{2\pi i T \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} - 1}{2\pi i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} \right). \end{aligned}$$

Acotando esta última expresión tenemos:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T e^{2\pi i \langle \mathbf{k}, \gamma(\tau) \rangle} d\tau \right| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \left| \frac{e^{2\pi i T \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} - 1}{2\pi i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle} \right| \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{2}{|2\pi i \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle|} = 0.$$

Del criterio de Weyl deducimos que $\gamma(\tau)$ está equidistribuida. □

Del mismo modo que hemos hecho durante todo el capítulo, veamos un par de dibujos en $\mathbb{T}^2$ que nos ayuden a visualizar qué está ocurriendo:

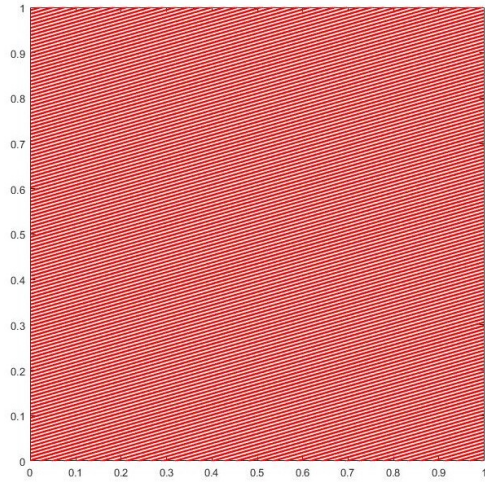


Figura 5.5: Recta de la forma $(\tau \log(11), \tau \log(2))$.

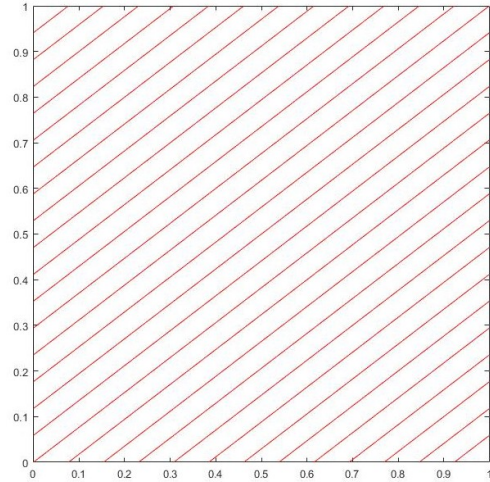


Figura 5.6: Recta de la forma $(\tau \frac{1}{13}, \tau \frac{1}{17})$.

Convergencia uniforme de integrales mediante curvas equidistribuidas

Para este apartado es necesario repasar brevemente el estudio de familias de funciones relativamente compactas de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ y el teorema de Arzelà-Ascoli. En lo que sigue (X, d) denotará a un espacio métrico y consideraremos sobre $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ la **topología compacta-abierta**, que en el caso que nos concierne, no es sino la que resulta de considerar la convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{R}$.

Aunque las definiciones que vienen podrían darse en un contexto topológico más amplio, nos limitaremos en todas al caso que nos atañe: (X, d) es un espacio métrico.

Definición 5.20. Se dice que $A \subset X$ es **relativamente compacto** si toda sucesión en A tiene una subsucesión que converge en X ; esto es, A es relativamente compacto si $\text{cl}(A)$ es compacto.

Definición 5.21. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ es **equicontinua en el punto** $x_0 \in X$ si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$f(\mathbb{D}(x_0, \delta)) \subset \mathbb{D}(f(x_0), \varepsilon)$$

para toda función $f \in \mathcal{F}$. Decimos que $\mathcal{F}$ es **equicontinua** si lo es para todo punto de X .

Por ejemplo, para $x \in [-1, 1]$ y $n \geq 1$ entero, la familia de funciones dada por $f_n(x) = nx$ no es equicontinua en $x = 0$; mientras que la familia de funciones $g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ sí lo es.

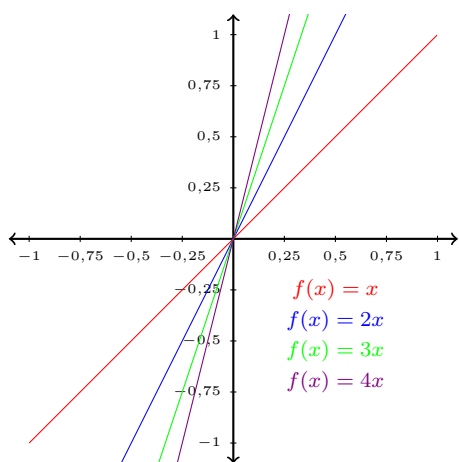


Figura 5.7: La familia de funciones $f_n(x) = nx$.

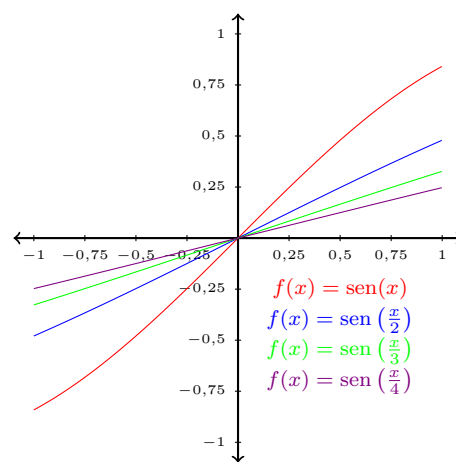


Figura 5.8: La familia de funciones $g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

Definición 5.22. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ está **uniformemente acotada** si para cierto $M < +\infty$, se cumple $|f(x)| < M$ para todo $x \in X$ y toda $f \in \mathcal{F}$.

Asimismo, nótese que las familias $(f_n)_{n \geq 1}$ y $(g_n)_{n \geq 1}$ nos sirven respectivamente como ejemplos de una familia que no está uniformemente acotada y otra que sí lo está.

Usaremos estas definiciones anteriores para obtener un criterio que nos permita distinguir familias de funciones relativamente compactas y/o compactas en el espacio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$: **el teorema de Arzelà-Ascoli**. Lo enunciamos sin demostración, puede encontrarse una en [1].

Teorema 5.23 (Teorema de Arzelà-Ascoli). ⁴ Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones en el espacio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Entonces, $\mathcal{F}$ es relativamente compacta si y sólo si es equicontinua y uniformemente acotada.

Teorema 5.24 (Teorema de Arzelà-Ascoli para compactos). Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones en el espacio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Entonces, $\mathcal{F}$ es compacta si y sólo si es cerrada, equicontinua y uniformemente acotada.

⁴El tiempo y el desarrollo del análisis funcional han provocado que el enunciado seminal, demostrado por los matemáticos italianos Cesare Arzelà (1847-1912) y Giulio Ascoli (1843-1896) a finales del siglo XIX, se haya generalizado en varias direcciones. La primera publicación del teorema de Arzelà-Ascoli con un enunciado similar al que damos aquí quizás sea:

C. ARZELÀ, *Sulle funzioni di linee*, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat., **5**, no. 5, (1895), pp. 55-74.

Ahora es momento de aplicar todas estas nociones a nuestro propósito: aproximar uniformemente integrales sobre conjuntos en el toro $\mathbb{T}^d$ a partir de curvas uniformemente distribuidas.

Teorema 5.25. *Sea $\gamma(\tau)$ una curva uniformemente distribuida en $\mathbb{T}^d$. Sea $D \subset \mathbb{T}^d$ un conjunto medible Jordan y $\mathcal{F}$ una familia de funciones complejas uniformemente acotada y equicontinua. Entonces*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\gamma(\tau)) \cdot \chi_D(\gamma(\tau)) d\tau = \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

uniformemente respecto de $f \in \mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $\mathbb{T}^d$ es compacto, el teorema de Arzelà-Ascoli nos dice que $\mathcal{F}$ es una familia relativamente compacta; de esto se deduce la existencia de $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{F}$ de modo que para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene que

$$\sup_{\mathbf{x} \in D} |f(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x})| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot m(D)} \quad (5.3)$$

para alguna de las f_j con $1 \leq j \leq N$. Por ser las f_j continuas, de la proposición 5.16 se infiere la existencia de T_0 de modo que para todo $T > T_0$ se tiene

$$\left| \int_D f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{T} \int_0^T f_j(\gamma(\tau)) \cdot \chi_D(\gamma(\tau)) d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para cualquiera de las f_j . Ya estamos en disposición de probar el teorema: sean $f \in \mathcal{F}$ cualquiera y f_j cumpliendo la desigualdad en (5.3), acotando se tiene:

$$\begin{aligned} \left| \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{T} \int_0^T f(\gamma(\tau)) \chi_D(\gamma(\tau)) d\tau \right| &\leq \left| \int_D f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{T} \int_0^T f_j(\gamma(\tau)) \chi_D(\gamma(\tau)) d\tau \right| \\ &+ \left| \int_D (f(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \right| + \frac{1}{T} \left| \int_0^T (f(\gamma(\tau)) - f_j(\gamma(\tau))) \chi_D(\gamma(\tau)) d\tau \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde se deduce la convergencia uniforme. $\square$

Durante la prueba del teorema de universalidad de Voronin, apelaremos a este último resultado.

6

Series de Dirichlet

El objeto de estudio en este capítulo son las **series de Dirichlet** que son series de la forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

donde $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de números reales cuyo límite es $+\infty$, y $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión cualquiera de números complejos. En particular, nos centraremos en las conocidas como series de Dirichlet **ordinarias** que son aquellas tales que $\lambda_n = \log(n)$; esto es, series de Dirichlet de la forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}.$$

Esta vez la Historia sí ha sido justa y consecuente y, como indica su nombre, las series de Dirichlet fueron introducidas por Dirichlet (1805-1859); quien las aplicó en diversos problemas de teoría de números como el conocido teorema de Dirichlet sobre primos en progresiones aritméticas.

Las referencias que se han seguido para el desarrollo de este capítulo han sido indistintamente [23] y [49] para ambas secciones. Por supuesto, invito al lector a ojearlas y compararlas con lo que aquí exponemos.

6.1. Teoría elemental de las series de Dirichlet: convergencia y orden

El plano de convergencia uniforme

En esta primera sección nos centraremos en el estudio de la convergencia de las series de Dirichlet, así como en las propiedades analíticas básicas que satisfacen. Enunciaremos todos los resultados para series de Dirichlet ordinarias; no obstante, remedando cada una de las demostraciones que siguen, son igualmente válidas para el caso general, véase [23].

Teorema 6.1. Sea $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet convergente para z_0 . Entonces, $f(z)$ converge uniformemente en todo el sector angular definido por

$$|\operatorname{Arg}(z_0 - z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta,$$

para todo $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que $z_0 = 0$, ya que en caso contrario podríamos aplicar los cambios

$$a'_n = \frac{a_n}{n^{z_0}} \quad \text{y} \quad z' = z - z_0,$$

y la serie de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} a'_n n^{-z'}$ convergería para $z' = 0$.

Para comprobar que f converge uniformemente veamos que para todo z en el sector angular descrito, la sucesión

$$S_N := \sum_{n=1}^N a_n n^{-z}$$

satisface el criterio de Cauchy. Antes de nada, veamos un par de relaciones que necesitaremos en la demostración: como por hipótesis $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, se deduce que

$$R_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

tiende a 0 cuando $N \rightarrow +\infty$. Por tanto, para $N > M$ y aplicando sumación por partes en $(\star)$, se tiene:

$$\begin{aligned} S_N - S_M &= \sum_{n=M+1}^N a_n n^{-z} = \sum_{n=M+1}^N (R_{n-1} - R_n) n^{-z} \\ &\stackrel{(\star)}{=} \frac{R_M}{(M+1)^z} - \frac{R_N}{(N+1)^z} + \sum_{n=M+1}^N R_n \cdot \left(\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ahora, acotando como sigue

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right| &= \left| - \int_n^{n+1} z t^{-z-1} dt \right| \leq |z| \int_n^{n+1} t^{-\Re(z)-1} dt \\ &= \frac{|z|}{\Re(z)} \cdot \left(n^{-\Re(z)} - (n+1)^{-\Re(z)} \right), \end{aligned} \quad (6.2)$$

ya nos encontramos en disposición de probar que S_N satisface el criterio de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera y $N_0 = N_0(\varepsilon)$ un entero tal que $R_n < \varepsilon$ para todo $n > N_0$, tomando $N > M > N_0$ y considerando las ecuaciones (6.1) y (6.2) tenemos:

$$\begin{aligned} |S_N - S_M| &= \frac{R_M}{(M+1)^z} - \frac{R_N}{(N+1)^z} + \sum_{n=M+1}^N R_n \cdot \left(\frac{1}{(n+1)^z} - \frac{1}{n^z} \right) \\ &< \frac{\varepsilon}{(M+1)^z} + \frac{\varepsilon}{(N+1)^z} + \frac{\varepsilon |z|}{\Re(z)} \cdot \sum_{n=M+1}^N \left(n^{-\Re(z)} - (n+1)^{-\Re(z)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon|z|}{\Re(z)} = 2\varepsilon(1 + \sec(\operatorname{Arg}(z))) \leq 2\varepsilon\left(1 + \sec\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right) \\
&= 2\varepsilon(1 + \operatorname{cosec}(\delta)).
\end{aligned}$$

Con lo que concluye la prueba del teorema. $\square$

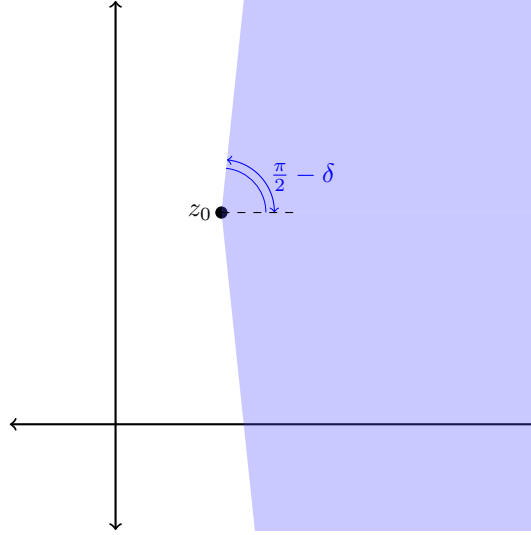


Figura 6.1: Sector angular de la forma $|\operatorname{Arg}(z_0 - z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$.

Un corolario inmediato del teorema 6.1 es el siguiente:

Corolario 6.2. Sea $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet. Entonces, si $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ es convergente para z_0 también lo es para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) > \Re(z_0)$.

Por consiguiente, con respecto a su convergencia, dada una serie de Dirichlet podría suceder cualquiera de las siguientes tres posibilidades:

- La serie de Dirichlet converge para todo $z \in \mathbb{C}$, como por ejemplo:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/n!}{n^z}.$$

- La serie de Dirichlet no converge para ningún $z \in \mathbb{C}$, como por ejemplo:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^z}.$$

- Existe un número σ_0 , al que llamaremos **abscisa de convergencia**, de modo que $f(z)$ es convergente para todo $\Re(z) > \sigma_0$ y divergente u oscilatoria para todo $\Re(z) < \sigma_0$. Es decir, la abscisa de convergencia se define como:

$$\sigma_0 := \inf \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, f(x + iy) \text{ converge}\}.$$

En otras palabras, si en los dos primeros puntos convenimos $\sigma_0 = -\infty$ y $\sigma_0 = +\infty$ respectivamente, de la discusión anterior inferimos que el **plano de convergencia** de una serie de Dirichlet cualquiera es siempre un semiplano de la forma $\Re(z) > \sigma_0$; a saber que en la recta $\Re(z) = \sigma_0$, a la que llamaremos **línea de convergencia**, la cuestión sobre la convergencia aún queda abierta.

No es posible dar un criterio general con respecto a la convergencia sobre la recta $\Re(z) = \sigma_0$, por lo que sería necesario un estudio en cada caso concreto; por ejemplo, puede verse que las dos series de Dirichlet

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1/\log^2(n)}{n^z} \quad (6.3)$$

tienen como abscisa de convergencia $\sigma_0 = 1$; sin embargo, mientras $g(z)$ converge para todos los puntos de la recta $\Re(z) = 1$, $\zeta(z)$ no lo hace para ninguno. Pueden verse más ejemplos de este tipo en la sección 3 de [23]. La discusión anterior queda parcialmente resumida en el siguiente enunciado, al que apelaremos en el próximo apartado:

Teorema 6.3. *Sea $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet. Entonces ésta puede converger para todo $z \in \mathbb{C}$, no converger para ningún $z \in \mathbb{C}$ o converger sólo para algunos $z \in \mathbb{C}$. En este último caso, existirá un número real σ_0 de modo que la serie es convergente para todo $\Re(z) > \sigma_0$ y divergente u oscilatoria para todo $\Re(z) < \sigma_0$.*

Otro corolario del teorema 6.1 es que el plano de convergencia hace también las veces de dominio de holomorfía de f , es decir:

Corolario 6.4. *Sea $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet. Entonces, $f(z)$ es holomorfa en el plano de convergencia $\Re(z) > \sigma_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Nótese que para todo entero $n \geq 1$, la función n^{-z} es entera. Así pues, sea $\Re(z) > \sigma_0$ y $\mathbb{D}(z, \varepsilon) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > \sigma_0\}$. Como la serie $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ converge uniformemente en el disco $\mathbb{D}(z, \varepsilon)$, $f(z)$ define una función holomorfa en dicho disco. Por último, puesto que la elección de z ha sido arbitraria, se deduce que $f(z)$ es holomorfa en todo el plano de convergencia. $\square$

El plano de convergencia absoluta

Si consideramos las mismas discusiones que en el apartado anterior para la serie de Dirichlet dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^z}$$

deducimos el siguiente enunciado, análogo al teorema 6.3 para el caso que estamos considerando.

Teorema 6.5. *Sea $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet. Entonces ésta puede converger absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$, no converger absolutamente para ningún $z \in \mathbb{C}$ o converger absolutamente sólo para algunos $z \in \mathbb{C}$. En este último caso, existirá un número real $\bar{\sigma}$ de modo que la serie es absolutamente convergente para todo $\Re(z) > \bar{\sigma}$ y no hacerlo para todo $\Re(z) < \bar{\sigma}$.*

Por lo que dada una serie de Dirichlet cualquiera podemos definir, además de su abscisa, línea y plano de convergencia; su **abscisa**, **línea** y **plano de convergencia absoluta**. A la abscisa de convergencia absoluta la denotaremos, como en el teorema 6.5, por $\bar{\sigma}$. Además, como la convergencia absoluta implica la uniforme, es evidente que $\sigma_0 \leq \bar{\sigma}$. No es difícil dar ejemplos de series de Dirichlet tales que $\sigma_0 = \bar{\sigma}$ y $\sigma_0 < \bar{\sigma}$:

- La serie de Dirichlet dada por $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} n^{-z}$ cumple $\sigma_0 = \bar{\sigma} = 1$. Como ya sabrá el lector, este ejemplo no es otro que la célebre función zeta de Riemann. Estudiaremos a fondo esta función en el siguiente capítulo.
- La serie de Dirichlet dada por $\eta(z) := \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} n^{-z}$ cumple $0 = \sigma_0 < \bar{\sigma} = 1$. A esta serie de Dirichlet se la conoce como **función η de Dirichlet** y será una herramienta crucial en dos de las demostraciones centrales del trabajo.¹

Nótese además, que para $\Re(z) > 1$ se satisface la igualdad $\eta(z) = (1 - 2^{1-z})\zeta(z)$:

$$(1 - 2^{1-z})\zeta(z) = (1 - \frac{2}{2^z}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} - \frac{2}{(2n)^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = \eta(z).$$

Posteriormente, esta observación nos ayudará a extender analíticamente la función ζ a dominios mayores que $\Re(z) > 1$.

En general, para series de Dirichlet ordinarias puede comprobarse la desigualdad

$$\sigma_0 \geq \bar{\sigma} - 1,$$

por lo que las abscisas $\bar{\sigma}$ y σ_0 no pueden estar arbitrariamente separadas. En este sentido, los dos ejemplos vistos en la discusión anterior podrían considerarse como «extremales».

Series de Dirichlet de orden finito

En general, dada una función $f(z)$, decimos que f tiene **orden** $\mu \in \mathbb{R}$ si satisface la relación asintótica

$$f(z) = O(|z|^\mu). \quad (6.4)$$

Razonando como venimos haciendo para determinar las abscisas de convergencia y convergencia absoluta, tomando el ínfimo de los $\mu \in \mathbb{R}$ para los que se satisface la ecuación (6.4) (incluyendo como posibilidades $\mu = -\infty$ y $\mu = +\infty$), podemos hablar de el² **orden de una función**.

Como veremos, en el caso de series de Dirichlet nos interesará conocer su orden exclusivamente sobre rectas y bandas verticales. Así pues, dada $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet decimos que tiene orden μ en la abscisa $\alpha > \sigma_0$ si

$$f(\alpha + iy) = O(|y|^\mu).$$

Razonando como lo hicimos tras la ecuación (6.4), podemos hablar de el orden de una serie de Dirichlet en la abscisa $\alpha > \sigma_0$. En particular, estaremos interesados en las series de Dirichlet de **orden finito**. Un ejemplo de una serie de Dirichlet de orden finito al que nos referiremos posteriormente es el de la función η para toda abscisa $\alpha > 0$, veámoslo: fijado $\alpha > 0$, sea $0 < \varepsilon < \alpha$ cualquiera; claramente $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} n^{-\varepsilon}$ es convergente, así pues definamos para lo que resta de discusión

$$a_n := (-1)^{n+1} n^{-\varepsilon} \quad \text{y} \quad S_N := \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n^\varepsilon}.$$

¹Si tiene a bien, lector, lea la nota 1.1.1 que vimos en el primer capítulo y observe las relaciones que hay con este ejemplo.

²Nótese el artículo determinado.

Sea z de la forma $z = \alpha - \varepsilon + iy$, aplicando sumación por partes, tenemos para $N > M$

$$\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n^z} = \sum_{n=1}^M \frac{a_n}{n^z} + \sum_{n=M+1}^N S_n \cdot \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} \right) - \frac{S_M}{(M+1)^z} - \frac{S_N}{(N+1)^z},$$

como $\Re(z) = \alpha - \varepsilon > 0$, haciendo $N \rightarrow +\infty$ tenemos

$$\eta(\alpha + iy) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} = \sum_{n=1}^M \frac{a_n}{n^z} + \sum_{n=M+1}^{\infty} S_n \cdot \left(\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z} \right) - \frac{S_M}{(M+1)^z}.$$

Ahora, tomando valores absolutos y acotando como en (6.2) tenemos:

$$\begin{aligned} |\eta(\alpha + iy)| &\leq \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}} + \frac{C|z|}{\Re(z)} \cdot \sum_{n=M+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-\varepsilon}} \right) + \frac{C}{(M+1)^{\alpha-\varepsilon}} \\ &< \int_1^{M+1} \frac{1}{(t-1)^{\alpha-\varepsilon}} dt + \frac{C|y|}{M^{\alpha-\varepsilon}} + C \\ &\ll M^{1-(\alpha-\varepsilon)} + C|y| M^{-(\alpha-\varepsilon)} + C, \end{aligned}$$

y finalmente, tomando $M = \lfloor |y| \rfloor$ se deduce que η es de orden finito en la abscisa $\alpha > \sigma_0$, pues:

$$|\eta(\alpha + iy)| = O\left(|y|^{1-\alpha+\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (6.5)$$

De hecho, reproduciendo la discusión anterior para una serie de Dirichlet ordinaria cualquiera, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 6.6. *Sea $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet y σ_0 su abscisa de convergencia. Entonces, para todo $\sigma_0 < \alpha < \sigma_0 + 1$ se tiene*

$$|f(\alpha + iy)| = O\left(|y|^{1-(\alpha-\sigma_0)+\varepsilon}\right),$$

para todo $\varepsilon > 0$.

6.2. La fórmula del valor medio cuadrático

Nuestra intención en esta sección es probar una fórmula del valor medio para series de Dirichlet en la norma L^2 sobre bandas verticales. La sección culminará con el teorema 6.9, al que posteriormente nos referiremos en alguno de los teoremas centrales del trabajo. Un primer resultado en la dirección que queremos tomar es el siguiente, aunque en este caso consideramos la norma L^2 exclusivamente sobre rectas verticales:

Teorema 6.7. *Sean $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ y $g(z) = \sum_{n \geq 1} b_n n^{-z}$ series de Dirichlet. Sean $\bar{\sigma}_f$ y $\bar{\sigma}_g$ sus abscisas de convergencia absoluta respectivamente. Entonces, para todo $\alpha > \bar{\sigma}_f$ y $\beta > \bar{\sigma}_g$ se cumple*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\alpha + iy) \cdot g(\beta - iy) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Haciendo el producto tenemos

$$f(\alpha + iy) \cdot g(\beta - iy) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{m \neq n} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{iy}.$$

Ahora, como con α y β fijos las series convergen uniformemente y absolutamente en todo intervalo $[-T, T]$ para la variable y , podemos integrar término a término para obtener:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(\alpha + iy) \cdot g(\beta - iy) dy &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{m \neq n} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{iy} \right) dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{m \neq n} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \int_{-T}^T \left(\frac{n}{m}\right)^{iy} dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n^{\alpha+\beta}} + \sum_{m \neq n} \frac{a_m b_n}{m^{\alpha} n^{\beta}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(T \log(n/m))}{2T \log(n/m)}. \end{aligned}$$

El factor que involucra a T está uniformemente acotado con respecto a T, m y n , y tiende a 0 cuando $T \rightarrow +\infty$. La demostración concluye apelando al teorema de la convergencia dominada. $\square$

Tomando $f \equiv g$ en el teorema 6.7, se deduce el siguiente corolario:

Corolario 6.8. Sea $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet y $\bar{\sigma}$ su abscisa de convergencia absoluta. Entonces, para todo $\alpha > \bar{\sigma}$ se cumple

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\alpha + iy)|^2 dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}}. \quad (6.6)$$

Dos cuestiones a señalar surgen aquí: en primer lugar, la cota inferior dada para α en las hipótesis del corolario, es decir $\alpha > \bar{\sigma}$, puede mejorarse; aunque encontrar el ínfimo de los α para los que se satisface el límite (6.6) no es tarea fácil: en parte de la literatura que trata el tema de las series de Dirichlet, como por ejemplo [49], a dicho ínfimo se le denomina como **abscisa de valor medio** y al semiplano que deja a la derecha como **semiplano de valor medio**. En segundo lugar, ¿qué tipo de convergencia se da en (6.6)? El siguiente teorema, endureciendo un poco las hipótesis, responde a esta última pregunta (véase la sección 9.5 de [49]):

Teorema 6.9. Sean $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet y $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $f(z)$ es holomorfa para $\Re(z) > \sigma$, de orden finito en la abscisa σ y la cantidad

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\sigma + iy)|^2 dy$$

permanece acotada cuando $T \rightarrow +\infty$. Entonces, para $\alpha \geq \sigma$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\alpha + iy)|^2 dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}}$$

uniformemente en toda banda vertical $\sigma < \sigma_1 \leq \alpha \leq \sigma_2$.

Este teorema pone en evidencia la existencia de un número real σ_m , que no es sino el ínfimo de los σ para los que el teorema 6.9 se cumple, y un «semiplano de valor medio». Además, aunque no lo demostraremos, Titchmarsh prueba la siguiente cota para σ_m (véase de nuevo la sección 9.5 de [49]):

$$\sigma_m \geq \max \left(\sigma_0, \bar{\sigma} - \frac{1}{2} \right).$$

Antes de empezar con la prueba del teorema, es necesario que enunciemos el siguiente lema:

Lema 6.10. *Sea $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ una serie de Dirichlet y $\bar{\sigma}$ su abscisa de convergencia absoluta. Entonces, para todo $\delta, \lambda, c > 0$ y $c > \bar{\sigma} - \Re(z)$ se tiene la fórmula³*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} = \frac{1}{2\pi i \lambda} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{t}{\lambda}\right) f(z+t) \delta^{-t} dt.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Para probar el lema, expresemos el lado derecho de la igualdad como

$$\frac{1}{2\pi i \lambda} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\Gamma\left(\frac{t}{\lambda}\right) \delta^{-t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{z+t}} \right) dt.$$

Puesto que la serie del integrando converge absolutamente, podemos permutar el orden de sumación e integración para obtener:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot \frac{1}{2\pi i \lambda} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{t}{\lambda}\right) (n\delta)^{-t} dt. \quad (6.7)$$

Vamos a aplicar ahora, el teorema de los residuos para el cálculo de la integral en (6.7): teniendo en cuenta que los polos (simples) de la función $\Gamma(z)$ se encuentran en $0, -1, -2, -3, \dots$ y sus residuos son

$$\text{Res}(\Gamma(z); -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, n \geq 0;$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i \lambda} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{t}{\lambda}\right) (n\delta)^{-t} dt &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}(\Gamma(z/\lambda)(n\delta)^{-z}; -\lambda n) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda (n\delta)^{\lambda n} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-(n\delta)^\lambda}. \end{aligned}$$

Y concluye la prueba del lema. ■

³Léase la nota 6.2.1 que habla de la función $\Gamma(z)$ tras la prueba del lema.

Nota 6.2.1 (La función Γ): La **función gamma** es una función meromorfa que interpola al factorial y lo «define» en el resto del plano complejo. Se define mediante la fórmula:

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Así pues, usando integración por partes puede comprobarse la identidad $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, de donde se deduce que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo entero $n \geq 1$. Usaremos fundamentalmente dos propiedades de la función Γ : en primer lugar, sus polos se encuentran en $0, -1, -2, -3, \dots$ con residuo $\text{Res}(\Gamma, -n) = (-1)^n/n!$; en segundo lugar, satisface la estimación asintótica para toda constante $a \in \mathbb{C}$ dada por (véase 4.42, ejemplo (i) en [49]):^a

$$\log(\Gamma(z+a)) = \left(z+a-\frac{1}{2}\right) \cdot \log(z) - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad (6.8)$$

cuando $|z| \rightarrow \infty$ y uniformemente para $-\pi + \varepsilon \leq \text{Arg}(z) \leq \pi - \varepsilon$.

^aEsta estimación es una consecuencia de la conocida como **fórmula de Stirling para la función gamma**.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.9. Fijemos T y sea z de la forma $z = \alpha + iy$ con $|y| < T$. Empecemos la prueba del teorema aplicando a $f(z)$ el lema 6.10 para los valores $c = \sigma - \alpha$ y $\lambda > \alpha - \sigma$; en tal caso, sólo dejamos a la derecha del camino de integración al polo simple $z = 0$ cuyo residuo es $\lambda f(z)$, por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} - f(z) &= \frac{1}{2\pi i \lambda} \int_{\sigma-\alpha-i\infty}^{\sigma-\alpha+i\infty} \Gamma\left(\frac{t}{\lambda}\right) f(z+t) \delta^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi \lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{\sigma-\alpha+is}{\lambda}\right) f(\sigma+i(y+s)) \delta^{\alpha-\sigma-is} ds \\ &\stackrel{(*)}{\ll} \delta^{\alpha-\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A|s|} |f(\sigma+i(y+s))| ds \end{aligned} \quad (6.9)$$

para cierta $A \in \mathbb{R}$ positiva, y donde en $(*)$ hemos apelado a la estimación asintótica para la función Γ que vimos en la ecuación (6.8) de la nota 6.2.1. Ahora, vamos a estimar la integral que aparece en la ecuación (6.9): en primer lugar, como $|y| < T$ y f es por hipótesis de orden finito en la recta $\Re(z) = \sigma$, tenemos

$$\int_{2T}^{+\infty} e^{-A|s|} |f(\sigma+i(y+s))| ds \ll \int_{2T}^{+\infty} e^{-A|s|} s^A ds = O(e^{-AT}),$$

y una acotación análoga se satisface para $s \in (-\infty, -2T)$. Aplicando ahora la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$\begin{aligned} \left(\int_{-2T}^{2T} e^{-A|s|} |f(\sigma+i(y+s))| ds \right)^2 &\leq \left(\int_{-2T}^{2T} e^{-A|s|} ds \right) \cdot \left(\int_{-2T}^{2T} e^{-A|s|} |f(\sigma+i(y+s))|^2 ds \right) \\ &< \frac{2}{A} \cdot \int_{-2T}^{2T} e^{-A|s|} |f(\sigma+i(y+s))|^2 ds. \end{aligned}$$

Por consiguiente, considerando las cotas que hemos obtenido hasta el momento tenemos:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} - f(z) \right|^2 \ll \delta^{2\alpha-2\sigma} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A|s|} |f(\sigma+i(y+s))| ds \right)^2$$

$$\ll 4\delta^{2\alpha-2\sigma}e^{-2AT} + \frac{4}{A} \cdot \delta^{2\alpha-2\sigma} \int_{-2T}^{2T} e^{-A|s|} |f(\sigma + i(y+s))|^2 ds.$$

E integrando con respecto a $y \in (-T, T)$ llegamos a la acotación

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} - f(z) \right|^2 dy \\ \ll 8\delta^{2\alpha-2\sigma}e^{-2AT}T + \frac{4}{A} \cdot \delta^{2\alpha-2\sigma} \int_{-2T}^{2T} e^{-A|s|} \int_{-T}^T |f(\sigma + i(y+s))|^2 dy ds, \end{aligned}$$

que si tenemos en cuenta que

$$\int_{-T}^T |f(\sigma + i(y+s))|^2 dy = \int_{-T+s}^{T+s} |f(\sigma + iy)|^2 dy = O(T)$$

uniformemente para $|s| < 2T$; dividiendo entre $2T$ se llega a la estimación asintótica

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} - f(z) \right|^2 dy = O(\delta^{2\alpha-2\sigma})$$

uniformemente con respecto a T . Aplicando cuidadosamente la desigualdad de Minkowski para $p = 2$ (véase la ecuación (2.2)), se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(z)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} - f(z) \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = O(\delta^{\alpha-\sigma}) \quad (6.10) \end{aligned}$$

uniformemente con respecto a T .

Ahora, si tenemos en cuenta que para $\delta > 0$ la serie $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-z} e^{-(n\delta)^\lambda}$ es absolutamente convergente, siguiendo el mismo argumento que el usado en el teorema 6.7 o el corolario 6.8 tenemos

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} \right|^2 dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}} \cdot e^{-2(n\delta)^\lambda}. \quad (6.11)$$

Fijando, por ejemplo, $\delta = 1$ y teniendo en cuenta las ecuaciones (6.10) y (6.11) se observa que

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(z)|^2 dy = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\alpha + iy)|^2 dy < C$$

para cierta constante $C > 0$ cuando $T \rightarrow +\infty$; por consiguiente, atendiendo a la estimación que aparece en (6.10), se deduce que la aplicación $\delta \mapsto \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 n^{-2\alpha} e^{-2(n\delta)^\lambda}$ es creciente y está acotada superiormente cuando $\delta \downarrow 0$, de donde se deduce la existencia del límite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}} \cdot e^{-2(n\delta)^\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}}. \quad (6.12)$$

Ya estamos en disposición de concluir la demostración del teorema. El argumento es el siguiente: dado $\varepsilon > 0$, se deduce de (6.10) que podemos escoger $\delta > 0$ de modo que para todo $T > 0$

$$\left| \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\alpha + iy)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

fijado dicho δ , en consecuencia de la estimación que aparece en (6.11), podemos escoger T_0 suficientemente grande de modo que

$$\left| \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \cdot e^{-(n\delta)^\lambda} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}} e^{-2(n\delta)^\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $T > T_0$. Por tanto, considerando las dos últimas acotaciones y el límite en (6.12) se deduce

$$\left| \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(\alpha + iy)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} \right| < \varepsilon$$

para $T > T_0$ con lo que concluye la prueba del teorema. $\square$

7

La función zeta de Riemann

El objeto de estudio de este capítulo será, como reza el título, la función zeta de Riemann. En primer lugar, daremos las claves de su construcción y su continuación analítica a todo el plano complejo; en segundo lugar, estudiaremos la relación entre la posición de sus ceros y la distribución de los números primos que, inevitablemente, culminará con los enunciados del teorema de los números primos y la Hipótesis de Riemann. Por último, estudiaremos cotas efectivas sobre la densidad de los ceros de la función zeta en la banda crítica; más concretamente, enunciaremos y demostraremos el teorema de Bohr-Landau que posteriormente aplicaremos en la demostración del último teorema que aparece en este trabajo: el teorema de equivalencia de Bagchi.

Las referencias principales en este capítulo han sido para la sección 7.1 los libros [24], [15] y [50]; mientras que para la sección 7.2 los artículos originales de Bohr y Landau: [9] y [10].

7.1. La función zeta de Riemann y su relación con los números primos

La función zeta de Riemann: construcción y definiciones

Definición 7.1. Se define la **función zeta de Riemann** como la función de variable compleja dada por:

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \text{ para } \Re(z) > 1.$$

En virtud del teorema de convergencia de Weierstrass (léase la nota 2.1.1), puede comprobarse que ésta define una función holomorfa en el semiplano $\Re(z) > 1$. Además, desarrollando cada factor en su serie de potencias en p^{-n} y apelando a la factorización única de los enteros; puede

comprobarse la siguiente identidad; conocida como **identidad de Euler**¹ o **producto de Euler**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}, \text{ para } \Re(z) > 1, \quad (7.1)$$

donde el producto infinito se toma en todos los números primos.

Aunque a priori hayamos definido ζ en el semiplano $\Re(z) > 1$ mediante una serie de Dirichlet, lo cierto es que puede extenderse de manera meromorfa a dominios mayores del plano complejo:

Teorema 7.2. *La función ζ puede extenderse analíticamente a una función meromorfa en el semiplano $\Re(z) > 0$ con un único polo simple en $z = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea z fijo tal que $\Re(z) > 1$. Teniendo en cuenta la identidad

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \cdot \eta(z)$$

y que $\eta(z)$ define una función holomorfa en $\Re(z) > 0$; se infiere la existencia de una continuación analítica de ζ al semiplano $\Re(z) > 0$ con posibles polos en los puntos $\varrho_k = 1 + i \frac{2k\pi i}{\log(2)}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Ahora, procedamos de manera análoga con la función $\eta_3(z) := (1 - 3^{1-z})\zeta(z)$, que considerando su expresión como serie de Dirichlet (del mismo modo que lo hacíamos para $\eta(z)$ en la sección 6.1) se demuestra que define una función holomorfa para $\Re(z) > 0$. Por tanto, teniendo en cuenta la identidad

$$\zeta(z) = \frac{1}{1 - 3^{1-z}} \cdot \eta_3(z),$$

se infiere la existencia de una continuación analítica de ζ al semiplano $\Re(z) > 0$ con posibles polos en los puntos $\varsigma_j = 1 + i \frac{2j\pi i}{\log(3)}$ para $j \in \mathbb{Z}$. Ahora, recordando que el conjunto $\{\log(p) : p \text{ primo}\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{Q}$ (léase la nota 5.1.1), se deduce que el único polo posible de ζ en $\Re(z) > 0$ es $z = 1$. Veamos que $z = 1$ sí es un polo calculando su residuo:

$$\text{Res}(\zeta; 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot \zeta(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{1 - 2^{1-z}} \cdot \eta(z) = \log(2) \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2^{1-z} \log(2)} = 1.$$

□

El teorema anterior puede mejorarse para obtener una extensión analítica a todo el plano complejo salvo, claro está, el polo simple que ya hemos calculado en $z = 1$. Además, considerando algunas propiedades de la función Γ , se comprueba que la función ζ satisface la siguiente **ecuación funcional**:

$$(2\pi)^z \zeta(1 - z) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \Gamma(z) \zeta(z).$$

De la ecuación funcional se observa la existencia de cierta simetría en la función ζ respecto de la recta $\Re(z) = \frac{1}{2}$ de la que nos valdremos para localizar los ceros de la función ζ : por un lado, recordando que $\zeta(z)$ no se anulaba para $\Re(z) > 1$, se deriva la presencia de ceros en los puntos $-2, -4, -6, \dots$ evaluando la ecuación funcional en $z = 2n + 1$ para todos los enteros $n \geq 1$; a éstos se les denominan **ceros triviales**. El resto de los ceros de la función zeta, los denominados **ceros no triviales**, deben encontrarse en la banda $0 \leq \Re(z) \leq 1$ simétricamente posicionados

¹El primero en probar dicha identidad, como el nombre indica, fue Leonhard Euler (1707-1783) en 1737, aunque tratando a ζ como una función de variable real exclusivamente. La referencia original, si se atreve con el latín, es: L.EULER, *Variae observationes circa series infinitas*, Comment.Acad.Sci.Petropol, **9**, (1737), pp. 160-188.

respecto de la recta $\Re(z) = \frac{1}{2}$. Por tanto, la búsqueda de los ceros no triviales de la función ζ puede restringirse a la conocida como **banda crítica**: $\frac{1}{2} \leq \Re(z) \leq 1$.

En la celeberrima memoria que Bernhard Riemann (1826-1866) presentó a la Academia de Ciencias de Berlín, léase [40]², analizaba la relación existente entre la posición de los ceros de ζ y la distribución de los números primos. Aquel estudio daba lugar a la archiconocida **Hipótesis de Riemann** y que siglo y medio después aún sigue sin demostrar.

HIPÓTESIS DE RIEMANN:

Los ceros no triviales de ζ están situados en la recta $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

El teorema de los números primos y la Hipótesis de Riemann

En el apartado que comienza daremos un breve argumento heurístico para poner en evidencia la relación que hay entre la posición de los ceros de ζ y la distribución de los números primos. Hemos seguido como referencia el artículo [20]; no obstante, invito al lector a consultar los libros [24] y/o [15] si desea completar formalmente todos los detalles de la discusión posterior:

En lo que sigue, sea x una variable real. Definamos la **función π contadora de primos**

$$\pi(x) := \# \{p \leq x : p \text{ primo}\} = \sum_{p \leq x} 1.$$

Sorprendentemente, otras funciones contadoras de primos resultan más convenientes para probar el teorema de los números primos. En particular, definamos la **función ψ de Chebyshev**:

$$\psi(x) := \sum_{p^m \leq x} \log(p)$$

y veamos que $\psi(x) \sim \pi(x) \log(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Por un lado, con un sencillo análisis se obtiene la primera de las cotas:

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log(p) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \cdot \log(p) \leq \sum_{p \leq x} \log(x) = \log(x) \cdot \pi(x);$$

esto es, dividiendo por x y suponiendo que el siguiente límite existe:³

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x}.$$

Por otro lado, para todo $0 < \alpha < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{p \leq x} \log(p) + \sum_{p \leq x^{1/2}} \log(p) + \sum_{p \leq x^{1/3}} \log(p) + \dots \geq \sum_{p \leq x} \log(p) \\ &\geq \sum_{x^\alpha \leq p \leq x} \log(p) \geq (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \cdot \log(x^\alpha); \end{aligned}$$

²Existen numerosas traducciones del texto original al inglés y/o al castellano en internet o en libros que no son difíciles de encontrar.

³Créame que existe, no pretendo engañarle.

ahora, teniendo en cuenta que $\pi(x^\alpha) < x^\alpha$, operando llegamos a la siguiente desigualdad

$$\frac{\psi(x)}{x} > \alpha \left(\frac{\pi(x) \log(x)}{x} - \frac{\log(x)}{x^{1-\alpha}} \right).$$

Manteniendo α fijo y haciendo $x \rightarrow \infty$, puesto que $\frac{\log(x)}{x^{1-\alpha}} \rightarrow 0$, se deduce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x}.$$

Y haciendo $\alpha \uparrow 1$ finalmente se deduce lo que queríamos demostrar: $\psi(x) \sim \pi(x) \log(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$.

Usemos ahora la función ψ para nuestro propósito: en primer lugar, tomando la derivada logarítmica de ζ tenemos para $\Re(z) > 1$ que

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{\substack{p \text{ primo} \\ m \geq 1}} \frac{\log(p)}{p^{mz}}.$$

Valiéndonos de la siguiente integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^z \frac{dz}{z} = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < y < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } y = 1; \\ 1, & \text{si } y > 1; \end{cases}$$

que se comprueba fácilmente mediante el teorema de los residuos, tenemos las siguientes igualdades: en primer lugar, para $c > 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \cdot \frac{x^z}{z} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \sum_{\substack{p \text{ primo} \\ m \geq 1}} \frac{\log(p)}{p^{mz}} \cdot \frac{x^z}{z} dz \\ &= \sum_{\substack{p \text{ primo} \\ m \geq 1}} \frac{\log(p)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{p^m} \right)^z \frac{dz}{z} \\ &= \sum_{p^m \leq x} \log(p) + O(1) = \psi(x) + O(1). \end{aligned}$$

Mientras que, haciendo el cálculo de la integral directamente por residuos y teniendo en cuenta que el polo en $z = 1$ contribuye como x ; se tiene la igualdad:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \cdot \frac{x^z}{z} dz = \sum_{\Re(\varrho) < c} \text{Res} \left(-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \cdot \frac{x^z}{z}; \varrho \right) = x - \sum_{\zeta(\varrho)=0} \frac{x^\varrho}{\varrho}.$$

De donde se deduce la identidad

$$\psi(x) = x - \sum_{\zeta(\varrho)=0} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O(1). \quad (7.2)$$

Esta última identidad pone en evidencia la relación existente entre los ceros de ζ y la distribución de los números primos: en primer lugar, nótese que los ceros triviales $-2, -4, -6, \dots$ dan

lugar a una cantidad despreciable; por lo que sólo resta analizar los ceros no triviales. Si damos por hecho que ζ no se anula en la recta $\Re(z) = 1$ y que además sus ceros no se condensan cerca de dicha recta (algo que veremos posteriormente en la nota 7.2.2), de la ecuación (7.2) llegamos a la conclusión de que

$$\psi(x) \sim x,$$

que, atendiendo a la relación asintótica $\psi(x) \sim \pi(x) \log(x)$, es equivalente al **teorema de los números primos**:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}. \quad (7.3)$$

Jacques Hadamard (1865-1963) y C-J. De la Vallée Poussin (1866-1962) completaron de manera independiente en 1896 los detalles de la «demostración» anterior, véanse las referencias [22] y [51]. Un análisis asintótico más preciso de las funciones π y ψ nos permite mejorar la estimación dada en la ecuación (7.3) y así obtener la siguiente versión del teorema de los números primos, a la que apelaremos durante la demostración del teorema de universalidad de Voronin. En particular, la versión que aquí enunciamos del teorema fue demostrada por De la Vallée Poussin en 1899.

Teorema 7.3 (Teorema de los números primos, 1896). *Para cierta constante absoluta $c > 0$ se cumple:*⁴

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} + O\left(xe^{-c\sqrt{\log(x)}}\right).$$

Además, si en la ecuación (7.2) asumimos que todos los ceros de ζ se encuentran sobre la recta $\Re(z) = \frac{1}{2}$ es posible llegar a la siguiente conclusión:⁵

Teorema 7.4 (Von Koch, 1901). *Si la Hipótesis de Riemann es cierta, entonces:*

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)} + O\left(\sqrt{x} \log(x)\right).$$

7.2. Distribución de los ceros de la función zeta

Pese a sonar algo desesperanzador, lo cierto es que después de 150 años no se ha avanzado demasiado hacia una prueba de la Hipótesis de Riemann; es más, la mayor parte de la información que conocemos sobre la localización de los ceros de ζ es de principios o mediados del siglo XX. En la sección que comienza veremos uno de esos resultados clásicos: el **teorema de Bohr-Landau**; pero esto nos obliga a estudiar anteriormente algunas herramientas clásicas para contar ceros de funciones holomorfas. Vamos con ello.

Conteo de ceros de funciones holomorfas

En el apartado que comienza, estudiaremos alguna herramienta analítica para el conteo de los ceros de una función holomorfa arbitraria en su dominio de definición. Empecemos estableciendo algo de notación: sea f una función holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces denotaremos el conjunto de sus ceros contados con multiplicidad por

$$\mathcal{Z}_f := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

⁴A la función $x \mapsto \int_2^x 1/\log(t) dt$ se la conoce como **logaritmo integral**.

⁵Es decir, si asumimos como cierta la Hipótesis de Riemann.

En particular, dado un subconjunto $\Omega' \subset \Omega$, $\mathcal{Z}_f \cap \Omega'$ denota el conjunto de los ceros de f que pertenecen a Ω' . El símbolo $\#$ denota la medida de contar; por ejemplo, $\#(\mathcal{Z}_f \cap \Omega')$ denota el número de ceros de f que pertenecen a Ω' (de nuevo, contados con multiplicidad).

Una de las herramientas más utilizadas para el conteo y el estudio de la distribución de los ceros de funciones holomorfas es la conocida **fórmula de Jensen**, que relaciona el crecimiento de la función con su número de ceros:

Teorema 7.5 (Fórmula de Jensen, 1899). ⁶ Sea f holomorfa en $\mathbb{D}(0, R)$ y tal que $f(0) \neq 0$. Entonces, para todo $0 < r < R$ se tiene

$$\sum_{\varrho \in \mathcal{Z}_f} \log^+ \left(\frac{r}{|\varrho|} \right) + \log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Lo enunciamos sin prueba, puede encontrarse una en [1]. En lo que sigue, deduciremos de la fórmula de Jensen y algunos resultados básicos de variable compleja, varios enunciados que nos serán de utilidad más adelante para la estimación de ceros de ζ .

Lema 7.6. Sea f holomorfa en $\mathbb{D}$ y continua hasta la frontera. Si f cumple

$$\iint_{|z| \leq 1} |f(z) - 1|^2 dx dy < \pi (1 - r)^2$$

para algún $r < 1$; entonces, f no se anula en $\mathbb{D}(0, r)$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Supongamos que f tiene un cero ϱ en el círculo $|z| \leq r$; entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{|z| \leq 1} |f(z) - 1|^2 dx dy &\geq \iint_{|z - \varrho| \leq 1 - r} |f(z) - 1|^2 dx dy \\ &= \int_0^{1-r} \int_0^{2\pi} |f(\varrho + \rho e^{i\theta}) - 1|^2 \rho d\theta d\rho \underset{(\star)}{\geq} 2\pi \int_0^{1-r} \rho d\rho = \pi (1 - r)^2, \end{aligned}$$

donde en $(\star)$ hemos aplicado la fórmula de Cauchy a la función holomorfa $(f(z) - 1)^2$ para llegar dicha desigualdad, más detalladamente:

$$2\pi = \left| \frac{1}{i} \int_{|z - \varrho| = 1} \frac{(f(z) - 1)^2}{z - \varrho} dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} (f(\varrho + \rho e^{i\theta}) - 1)^2 d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(\varrho + \rho e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta.$$

■

⁶El artículo original de Johan Jensen (1859-1925) es en realidad una carta a Mittag-Leffler, editor de Acta Mathematica por aquel entonces; puede encontrarse en:

J.L.W.V.JENSEN, *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions*, Acta Mathematica, **22**, 1, (1899).

Nota 7.2.1: Remedando la demostración, puede generalizarse el lema anterior en varias direcciones: en primer lugar, puede tomarse como dominio de definición $\mathbb{D}(0, R)$ y $r < R$; en segundo lugar, el exponente del valor absoluto que aparece en el integrando podría ser cualquier entero $p \geq 1$ (y con algo más de maña, cualquier $1 \leq p < \infty$ real); y por último, el sustraendo que aparece dentro del valor absoluto podría ser cualquier complejo no nulo:

Lema 7.7. Sean f holomorfa en $\mathbb{D}(c, R)$ y continua hasta la frontera y $1 \leq p < +\infty$. Si f cumple

$$\iint_{|z-c| \leq R} |f(z) - b|^p \, dx dy < \pi b^p (R - r)^2$$

para algunos $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $r < R$; entonces f no se anula en $\mathbb{D}(c, R)$.

Usaremos el lema 7.6 y la fórmula de Jensen para obtener la siguiente proposición, enunciada a medida para la posterior demostración del teorema de Bohr-Landau:

Proposición 7.8. Sea f holomorfa en $\mathbb{D}(0, R)$ y continua hasta la frontera y tal que $f(0) \neq 0$. Entonces, existe una constante $K = K(r, R, |f(0)|)$ tal que para todo $0 < r < R$ se cumple

$$\#(\mathcal{Z}_f \cap \mathbb{D}(0, r)) \leq K \cdot \iint_{|z| \leq R} |f(z) - 1|^2 \, dx dy.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que f tiene infinitos ceros en $\mathbb{D}(0, R)$; ya que en caso contrario la demostración sería trivial. En este caso, es necesario que los ceros de f se acumulen en $\partial\mathbb{D}(0, R)$; pues de no ser así, f sería constantemente nula en virtud del teorema de los ceros aislados.

Aplicando la fórmula de Jensen para $\frac{r+R}{2}$ en $(\star)$ y apelando a la proposición 2.3 para $\frac{r+R}{2} \leq \rho \leq R$ en $(\dagger)$, tenemos que para todo $0 < r < R$ se tiene:

$$\begin{aligned} \#(\mathcal{Z}_f \cap \mathbb{D}(0, r)) \cdot \log \left(\frac{r+R}{2r} \right) + \log |f(0)| &\leq \sum_{\varrho \in \mathcal{Z}_f} \log^+ \left(\frac{r+R}{2|\varrho|} \right) + \log |f(0)| \\ &\stackrel{(\star)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f \left(\frac{r+R}{2} \cdot e^{i\theta} \right) \right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left(1 + \left| f \left(\frac{r+R}{2} \cdot e^{i\theta} \right) - 1 \right| \right) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f \left(\frac{r+R}{2} \cdot e^{i\theta} \right) - 1 \right| d\theta \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \left| f \left(\frac{r+R}{2} \cdot e^{i\theta} \right) - 1 \right|^2 \right) d\theta \\ &\stackrel{(\dagger)}{\leq} \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta. \end{aligned}$$

De donde se deduce la existencia de un $r_0 = r_0(R, f(0))$ y una constante $K = K(R, r_0, f(0))$ de modo que para todo $r \geq r_0$ se tiene

$$\#(\mathcal{Z}_f \cap \mathbb{D}(0, r)) \cdot \log \left(\frac{r+R}{2r} \right) \leq K \cdot \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta}) - 1|^2 d\theta.$$

Integrando en polares para $\frac{r_0+R}{2} \leq \rho \leq R$ y aplicando el lema 7.6 para r_0 se deduce finalmente la prueba de la proposición. $\square$

Como veremos posteriormente, esta versión de la proposición nos es suficiente para nuestro propósito; no obstante, damos las claves para llevar a cabo una generalización similar a la de la

nota 7.2.1. Enunciar la proposición anterior en L^2 simplifica notablemente las cosas, ya que en (†) nos basta con apelar a la proposición 2.3 que a fin de cuentas es un resultado que depende de la estructura de L^2 como espacio de Hilbert. Sin embargo, esto no sucede en general para L^p . Remedando el argumento anterior con la norma L^p llegaríamos a:

$$\begin{aligned} \#(\mathcal{Z}_f \cap \mathbb{D}(0, r)) \cdot \log \left(\frac{r+R}{2r} \right) + \log |f(0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f \left(\frac{r+R}{2} \cdot e^{i\theta} \right) - 1 \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi} \left(p - 1 + \left| f \left(\frac{r+R}{2} \cdot e^{i\theta} \right) - 1 \right|^p \right) d\theta. \end{aligned}$$

Para continuar con el argumento y aplicar el análogo de (†), necesitamos apelar al hecho de que la función

$$m_p(z_0, r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^p d\theta$$

es creciente en la variable r . Este resultado ya lo enunciamos en la proposición 2.8 y para su prueba, necesitábamos aplicar resultados referentes a funciones subarmónicas. Enunciamos el teorema en el caso general:

Proposición 7.9. *Sea f holomorfa en $\mathbb{D}(0, R)$ y continua hasta la frontera y tal que $f(0) \neq 0$. Entonces, existe una constante $K = K(r, R, |f(0)|)$ tal que para todo $0 < r < R$ se cumple*

$$\#(\mathcal{Z}_f \cap \mathbb{D}(0, r)) \leq K \cdot \iint_{|z| \leq R} |f(z) - 1|^p dx dy.$$

Ceros de la función zeta: el teorema de Bohr-Landau

Antes de empezar con el estudio de la distribución de los ceros de ζ en la banda crítica, establezcamos algo de notación para hacer la lectura más fluida:

$$N(\sigma, T) := \# \{ \zeta(\rho) = 0 : \sigma < \Re(\rho), 0 < \Im(\rho) < T \}.$$

También nos será práctica la siguiente notación para rectángulos en el plano complejo

$$\mathcal{R}(\sigma, \Sigma; t, T) := \{ z \in \mathbb{C} : \sigma < \Re(z) < \Sigma, t < \Im(z) < T \}.$$

En particular, tenemos que $N(\sigma, T) = \# \mathcal{Z}_\zeta \cap \mathcal{R}(\sigma, 1; 0, T)$.

A lo largo de las siguientes páginas estudiaremos el comportamiento asintótico de $N(\sigma, T)$ para σ fijo y cuando $T \rightarrow +\infty$; más concretamente, al final de la sección habremos demostrado que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(\sigma, T)}{T} = 0 \quad (7.4)$$

para cualquier $\sigma > \frac{1}{2}$ fijo; es decir, que la densidad de los ceros en la banda crítica no puede ser muy grande. Como escalón previo, probaremos una versión más débil: $N(\sigma, T) = O(T)$ bajo las mismas hipótesis; y después, a partir de un magnífico truco obtendremos la estimación que aparece en la ecuación (7.4). Sendos resultados fueron demostrados conjuntamente por Harald Bohr⁷ (1887-1951) y Edmund Landau (1877-1938) en 1914 siguiendo los argumentos que aquí se exponen (daremos las referencias originales de cada uno de los teoremas).

⁷Aunque la historia le ha dado la fama a su hermano Niels Bohr, físico y premio Nobel en 1922; lo cierto es que la vida y obra de Harald Bohr no merecen menos atención: un dato curioso es que Harald Bohr ganó la medalla de plata con la selección de fútbol danesa en los Juegos Olímpicos de Londres 1908. ¡Seguro que esa madre no podía estar más orgullosa de sus hijos!

Teorema 7.10 (Teorema de Bohr-Landau, versión débil). *Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, para todo $\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ se tiene que*

$$N(\sigma, T) = O(T).$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que ζ no tiene ceros en $\Re(z) \geq 1$, podemos suponer que $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Valiéndonos de la proposición 7.8, cubriremos el rectángulo $\mathcal{R}(\frac{1}{2} + \varepsilon, 1; 0, T)$ mediante discos, como se describe a continuación, para estimar el número de ceros de ζ que se encuentran en dicha región:

■ **CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA:**

Escojamos $x' > 2$ tal que la diferencia $R := x' - (\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2})$ sea entera y la circunferencia de centro $c_\tau = x' + i(\tau + \frac{1}{2})$ que pasa por los puntos $\frac{1}{2} + \varepsilon + i\tau$ y $\frac{1}{2} + \varepsilon + i(\tau + 1)$ se encuentre a la derecha de la recta $\Re(z) = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Denotemos por $r < R$ el radio de dicha circunferencia. Ahora, por construcción, se puede cubrir el rectángulo de la siguiente manera:

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, 1; 0, T\right) \subset \mathcal{R}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, 1; 0, R + 1\right) \cup \bigcup_{\tau=R+1}^{\lfloor T \rfloor} \mathbb{D}(c_\tau, r).$$

Véase la figura 7.1 para visualizar un diagrama explicativo con la construcción que se ha descrito.

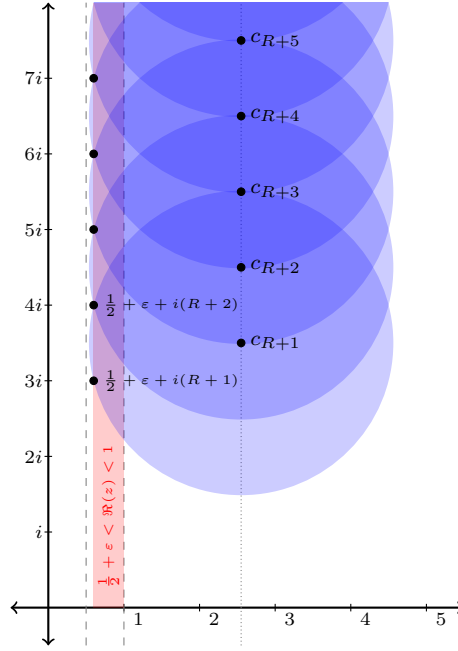


Figura 7.1: Construcción geométrica.

Traducido en las desigualdades que obtuvimos en la proposición 7.8 y teniendo en cuenta que $|\zeta(c_\tau)| \geq |\zeta(x')|^{-1} > 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$ (nótese la necesidad de que dicha constante sea absoluta para todo $\tau \in \mathbb{R}$ en el argumento dado a continuación), podemos acotar el número de ceros de ζ en el rectángulo como sigue:

$$N(\sigma, T) \leq N(\sigma, R + 1) + \sum_{\tau=R+1}^{\lfloor T \rfloor} \#(\mathcal{Z}_\zeta \cap \mathbb{D}(c_\tau, r))$$

$$\begin{aligned}
&\leq N(\sigma, R+1) + K \cdot \sum_{\tau=R+1}^{\lfloor T \rfloor} \iint_{|z-c_\tau| \leq R} |\zeta(z) - 1|^2 \, dxdy \\
&\leq N(\sigma, R+1) + K \cdot \sum_{\tau=R+1}^{\lfloor T \rfloor} \int_{\tau+\frac{1}{2}-R}^{\tau+\frac{1}{2}+R} \int_{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}^{x'+R} |\zeta(z) - 1|^2 \, dxdy \\
&\leq N(\sigma, R+1) + 2KR \int_1^{T+\frac{1}{2}+R} \int_{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}^{x'+R} |\zeta(z) - 1|^2 \, dxdy. \tag{7.5}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la prueba del teorema pasa por estimar adecuadamente la integral que aparece al final de la ecuación (7.5). Lo haremos en dos pasos:

- **PASO 1:** Sea la función $\Upsilon(z) := (1 - 2^{1-z}) \cdot (\zeta(z) - 1)$ cuya serie de Dirichlet, a diferencia de lo que sucede para ζ , sí converge para $\Re(z) > 0$. Sea $\Upsilon(z) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-z}$ dicha serie de Dirichlet. No es difícil comprobar que $|a_n| \leq 1$ para todo $n \geq 1$; por consiguiente, por ser Υ de orden finito para la abscisa $\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ (véase la ecuación (6.5) y/o el teorema 6.6), en virtud del teorema 6.9 se tiene el siguiente límite:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}^{x'+R} \int_{-T-\frac{1}{2}-R}^{T+\frac{1}{2}+R} |\Upsilon(x+iy)|^2 \, dydx \leq 2R \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{(1+\varepsilon)}} \leq 2R\zeta(1+\varepsilon).$$

De donde se deduce la existencia de un T_0 de modo que para todo $T > T_0$ se cumple

$$\int_{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}^{x'+R} \int_{-T-\frac{1}{2}-R}^{T+\frac{1}{2}+R} |\Upsilon(x+iy)|^2 \, dydx \leq 6RT\zeta(1+\varepsilon). \tag{7.6}$$

Ahora, como la función $1 - 2^{1-z}$ se anula en los puntos $\varrho_m = 1 + i \frac{2\pi m}{\log(2)}$ para $m \in \mathbb{Z}$, excluyendo todos los discos $\mathbb{D}(\varrho_m, \frac{1}{9})$ del dominio de integración de la ecuación (7.6) se obtiene un conjunto $\mathcal{R}^*(T)$ para el que existe una constante absoluta $b > 0$, de modo que $b < |1 - 2^{1-z}|$ para todo $z \in \mathcal{R}^*(T)$. Por tanto, para todo $T > T_0$ se tiene:⁸

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}^*(T)} |\zeta(z) - 1|^2 \, dxdy &\leq \frac{1}{b^2} \cdot \iint_{\mathcal{R}^*(T)} |\Upsilon(z)|^2 \, dxdy \\
&\leq \frac{1}{b^2} \cdot \int_{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}^{x'+R} \int_{-T-\frac{1}{2}-R}^{T+\frac{1}{2}+R} |\Upsilon(x+iy)|^2 \, dydx \leq \frac{6RT\zeta(1+\varepsilon)}{b^2}.
\end{aligned}$$

- **PASO 2:** Ya hemos logrado una cota de la integral (7.5) fuera de los discos $\mathbb{D}(\varrho_m, \frac{1}{9})$; por

⁸Se utilizará un argumento muy similar durante la demostración del teorema de universalidad de Voronin.

tanto, ahora es menester acotarla dentro: sea $m \neq 0$, como $\zeta \in \mathcal{H}(\mathbb{D}(\varrho_m, \frac{1}{9}))$ tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_{|z-\varrho_m| \leq \frac{1}{9}} |\zeta(z) - 1|^2 dx dy &= \int_0^{\frac{1}{9}} \int_0^{2\pi} |\zeta(\varrho_m + \rho e^{i\theta}) - 1|^2 \rho d\theta d\rho \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{2}{9}} \int_0^{2\pi} |\zeta(\varrho_m + \rho e^{i\theta}) - 1|^2 \rho d\theta d\rho \\ &= \iint_{\frac{1}{9} \leq |z-\varrho_m| \leq \frac{2}{9}} |\zeta(z) - 1|^2 dx dy \end{aligned}$$

donde en $(\star)$ hemos apelado a la proposición 2.3. Por consiguiente, sumando para todas las $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $|\Im(\varrho_m)| \leq T+1+R$ se deduce:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ |\Im(\varrho_m)| \leq T+1+R}} \iint_{|z-\varrho_m| \leq \frac{1}{9}} |\zeta(z) - 1|^2 dx dy &\leq \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ |\Im(\varrho_m)| \leq T+1+R}} \iint_{\frac{1}{9} \leq |z-\varrho_m| \leq \frac{2}{9}} |\zeta(z) - 1|^2 dx dy \\ &\leq \iint_{\mathcal{R}^*(T+1)} |\zeta(z) - 1|^2 dx dy \leq \frac{6R(T+1)\zeta(1+\varepsilon)}{b^2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, sumando las dos cotas obtenidas en los pasos **1** y **2**, se deduce la prueba del teorema:

$$\begin{aligned} N(\sigma, T) &\leq N(\sigma, R+1) + 2KR \int_1^{T+\frac{1}{2}+R} \int_{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}}^{x'+R} |\zeta(z) - 1|^2 dx dy \\ &\leq N(\sigma, R+1) + 2KR \cdot \frac{6R\zeta(1+\varepsilon)}{b^2} \cdot (2T+1) = O(T). \end{aligned}$$

□

Como discutíamos antes de comenzar con la demostración anterior, variando ligeramente el razonamiento seguido puede mejorarse la estimación recién conseguida para obtener $N(\sigma, T) = o(T)$. El argumento que expondremos, ideado por H. Bohr y E. Landau en [10], nos lleva a definir los **productos de Euler parciales**:

Definición 7.11. Sea M un conjunto cualquiera de números primos. Entonces, se define el **producto parcial de Euler** como

$$\zeta_M(z) := \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}, \quad \text{para } \Re(z) > 1.$$

De manera similar a cómo procedíamos para la función ζ pueden probarse la convergencia y holomorfía de $\zeta_M(z)$ para $\Re(z) > 1$; asimismo, es posible encontrar una suerte de fórmula (7.1) que exprese ζ_M mediante una serie de Dirichlet. Además, del mismo modo en que lo hacíamos para ζ en el teorema 7.2, también es posible extender analíticamente ζ_M al semiplano $\Re(z) > 0$.

No obstante, siendo un poco más restrictivos con M , pueden deducirse propiedades más interesantes para algunos casos concretos: como las funciones $1 - p^{-z}$ sólo se anulan en los puntos $\varsigma_k = \frac{2\pi i k}{\log(p)}$ para $k \in \mathbb{Z}$, tenemos:

- (i) En caso de que M sea un conjunto finito, ζ_M es holomorfa y no se anula para $\Re(z) > 0$.
- (ii) En caso de que el complementario de M sea un conjunto finito, se tiene la igualdad

$$\zeta_M(z) = \zeta(z) \cdot \prod_{p \in M^c} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right),$$

por lo que ζ_M es holomorfa en todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ y para $\Re(z) > 0$ se anula en los mismos puntos que ζ .

Durante la demostración del teorema de Bohr-Landau aparecerán productos de Euler parciales como los descritos en el punto (ii); más concretamente, repetiremos la demostración del teorema 7.10 para un producto parcial de dicho tipo en vez de para la función ζ . De este modo, conseguiremos pasar de una O a una o . Pese a su evidente paralelismo, se han separado las pruebas de los teoremas 7.10 y 7.12 para que resalte y el lector pueda localizar sin problema «el truco» del que discutíamos ahí arriba; créanme que es de provecho este orden: aunque simple, es una idea magnífica y potente. Vamos con el enunciado y su demostración:

Teorema 7.12 (Teorema de Bohr-Landau, [10]). *Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, para todo $\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ se tiene que*

$$N(\sigma, T) = o(T).$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE BOHR-LANDAU. Puesto que ζ no tiene ceros para $\Re(z) \geq 1$, podemos suponer que $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Consideremos el siguiente conjunto de números primos $M_k := \{p \text{ primo} : p > p_k\}$ donde p_k denota al k -ésimo número primo, y atendamos a la función

$$\zeta_{M_k}(z) := \zeta(z) \cdot \prod_{p \leq p_k} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right).$$

Nótese que ζ_{M_k} pertenece a las descritas en el punto (ii) de la discusión anterior al teorema; por tanto, ζ_{M_k} tiene los mismos ceros que ζ en el semiplano $\Re(z) > 0$.

Teniendo en cuenta este último hecho, si repetimos la construcción geométrica que llevamos a cabo durante la demostración del teorema 7.10 y razonamos como entonces, a partir de la proposición 7.8 llegamos a la desigualdad:⁹

$$\begin{aligned} N(\sigma, T) &= \# \left(\mathcal{Z}_{\zeta_{M_k}} \cap \mathcal{R}(\sigma, 1; 0, T) \right) \\ &\leq N(\sigma, R+1) + 2RK \cdot \int_1^{T+\frac{1}{2}+R} \int_{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}^{x'+R} |\zeta_{M_k}(z) - 1|^2 dx dy \end{aligned}$$

para todo entero $k \geq 1$. Por lo que, de nuevo, basta con estimar adecuadamente esta última integral. Como antes, lo haremos en dos pasos:

⁹Nótese que la constante K que aparece en la desigualdad no depende de k .

- **PASO 1:** Fijado un k , vamos a imitar la cota anterior a partir de la función $\Upsilon_k(z) = (1 - 2^{1-z}) \cdot (\zeta_{M_k}(z) - 1)$, cuya serie de Dirichlet de nuevo converge para $\Re(z) > 0$. En este caso, los coeficientes de su serie de Dirichlet satisfacen:

$$\begin{cases} a_n = 0, & \text{para } n < p_{k+1}; \\ |a_n| \leq 3, & \text{para } n \geq p_{k+1}. \end{cases}$$

Por lo que, teniendo en cuenta que Υ_k es de orden finito, apelando al teorema 6.9 se deduce la siguiente acotación asintótica:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}^{x'+R} \int_{-T - \frac{1}{2} - R}^{T + \frac{1}{2} + R} |\Upsilon_k(x + iy)|^2 dy dx &\leq 2R \cdot \sum_{n=p_{k+1}}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n^{(1+\varepsilon)}} \\ &\leq 18R \cdot \sum_{n=p_{k+1}}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} =: 18RC_k, \end{aligned}$$

donde nótese que C_k es tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = 0$. Finalmente, repitiendo punto por punto el resto de argumentos y construcciones que dimos durante el **PASO 1** del teorema 7.10, se deduce la existencia de T_0 y $\tilde{b} > 0$ tal que para todo $T > T_0$ se tiene:

$$\iint_{\mathcal{R}^*(T)} |\zeta_{M_k}(z) - 1|^2 dx dy \leq \frac{54RTC_k}{\tilde{b}^2}.$$

- **PASO 2:** Este paso es, trasladando las cotas pertinentes, completamente análogo al anterior. Por consiguiente, deducimos

$$\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ |\Im(\varrho_m)| \leq T+1+R}} \iint_{|z - \varrho_m| \leq \frac{1}{9}} |\zeta_{M_k}(z) - 1|^2 dx dy \leq \frac{54R(T+1)C_k}{\tilde{b}^2}.$$

De nuevo como antes, sumando ambas cotas obtenidas en los pasos **1** y **2**, se tiene:

$$\begin{aligned} N(\sigma, T) &\leq N(\sigma, R+1) + 2KR \int_1^{T + \frac{1}{2} + R} \int_{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}^{x'+R} |\zeta_{M_k}(z) - 1|^2 dx dy \\ &\leq N(\sigma, R+1) + 2KR \cdot \frac{54RC_k}{\tilde{b}^2} \cdot (2T+1). \end{aligned}$$

Expresemos la desigualdad anterior en forma de cociente para llegar a la conclusión:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{N(\sigma, T)}{T} \leq \frac{216KR^2C_k}{\tilde{b}^2}$$

para todo entero k . Finalmente, haciendo $k \rightarrow +\infty$ se concluye la prueba el teorema

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(\sigma, T)}{T} = 0.$$

□

Nota 7.2.2 (Estimaciones asintóticas más refinadas): Aunque en lo que sigue no precisaremos de estimaciones asintóticas tan ajustadas, lo cierto es que se conocen cantidades más refinadas sobre la densidad de los ceros de ζ sobre la banda crítica que la dada por el teorema de Bohr-Landau.

Teorema 7.13 (F. Carlson, 1920). *Para todo $\varepsilon > 0$ y $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ se tiene:*

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{4\sigma(1-\sigma)+\varepsilon}\right).$$

Teorema 7.14 (A.E. Ingham, 1940). ^a *Para todo $\frac{1}{2} < \sigma \leq \frac{3}{4}$ se tiene:*

$$n(\sigma, T) \ll T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)} \cdot (\log T)^5.$$

Por último, hasta la fecha la mejor estimación que se conoce es:

Teorema 7.15 (S.A. Gritsenko, 1994). ^b *Para $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ se tiene:*

$$N(\sigma, T) \ll T^{12/5(1-\sigma)} \cdot (\log T)^{91/5}.$$

^aA.E. INGHAM, *On the estimation of $N(\sigma, T)$* , Quart. J. Math., **11**, (1940), pp. 291–292.

^bS.A. GRITSENKO, *Sharpening a constant in a density theorem*, Mat. Zametki, **55**, (1994), pp. 59–61.

8

Universalidad en espacios de funciones

Probablemente, el primer ejemplo histórico que puede encontrarse del fenómeno de universalidad trae como protagonista a Mihály Fekete (1886-1957) que demostró en 1914 el siguiente teorema, véase [35]:

Teorema 8.1 (Fekete, 1914). *Existe una serie de potencias real $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ con la propiedad de que para toda función $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$ con $f(0) = 0$, existe una sucesión de enteros positivos (m_k) tal que*

$$\sum_{n=1}^{m_k} a_n x^n \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x), \text{ uniformemente en } [-1, 1].$$

Personalmente, creo que la filosofía tras el fenómeno de universalidad queda bastante clara a partir del teorema 8.1. No obstante, puede darse una definición formal del fenómeno de **universalidad** en general:

Definición 8.2. Sean X, Y espacios topológicos y $T_i : X \rightarrow Y$ una familia de aplicaciones continuas para $i \in I$. Se dice que $x \in X$ es **universal** para la familia $(T_i)_{i \in I}$ si el conjunto $\{T_i(x) : i \in I\}$ es denso en Y .

En el resto del capítulo veremos otros teoremas de universalidad con su respectiva demostración para familiarizarnos con el concepto. Las referencias que se han seguido para el desarrollo de las siguientes páginas han sido el magnífico ensayo [21] escrito por Große-Erdmann (recomiendo empezar leyendo este ensayo al lector interesado en estudiar más en profundidad el fenómeno de universalidad); las notas [47]; y los artículos originales de los teoremas que veremos [5], [31] y [35].

8.1. Ejemplos de teoremas de universalidad

El primer ejemplo con demostración que veremos de un teorema de universalidad es una variante del teorema 8.1 debida a W. Luh, véase [31]:

Teorema 8.3. *Existe una serie de potencias real $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ con la propiedad de que para todo intervalo $[a, b]$ tal que $0 \notin [a, b]$ y toda función $f \in \mathcal{C}([a, b])$, existe una sucesión de enteros positivos (m_k) tal que*

$$\sum_{n=1}^{m_k} a_n x^n \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x), \text{ uniformemente en } [a, b].$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(Q_k)_{k \geq 0}$ una ordenación cualquiera del conjunto de los polinomios con coeficientes racionales que se anulan en 0 (que, por si acaso dudara el lector, le confirmo que es un conjunto numerable). Para encontrar la serie de potencias que buscamos, vamos a construir por inducción una sucesión de polinomios $(P_k)_{k \geq 0}$ como sigue:

Escogemos $P_0 = Q_0$, y supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ conocemos $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$. Denotemos por $d_n := \deg(P_{n-1})$. Sea φ_n una función continua en $[-n, n]$ tal que:

(i) $\varphi_n(0) = 0$;

(ii) Para todo $x \in \mathcal{I}_n := [-n, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, n]$:

$$\varphi_n(x) = \frac{Q_n(x) - \sum_{j=0}^{n-1} P_j(x)}{x^{d_n+1}}.$$

Ahora, del teorema de aproximación de Weierstrass (lea la nota 5.2.1 si le falla la memoria), se deduce la existencia de un polinomio F_n tal que:

$$\max_{x \in [-n, n]} |F_n(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{n^{d_n+2}}.$$

Si definimos $P_n(x) := F_n(x) \cdot x^{d_n+1}$ encontramos el siguiente término de la sucesión; que además, satisface la desigualdad

$$\max_{x \in \mathcal{I}_n} \left| \sum_{j=0}^n P_j(x) - Q_n(x) \right| = \max_{x \in \mathcal{I}_n} |(F_n(x) - \varphi_n(x))x^{d_n+1}| < \frac{n^{d_n+1}}{n^{d_n+2}} = \frac{1}{n}; \quad (8.1)$$

y además, es obvio que distintos P_n no tienen potencias en común, por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \quad (8.2)$$

es una serie de potencias bien definida.

Sea $f \in \mathcal{C}([a, b])$ cualquiera, veamos que se cumple la tesis del enunciado para la serie de potencias que aparece en la ecuación (8.2): aplicando de nuevo el teorema de aproximación de Weierstrass, se infiere la existencia de una sucesión creciente de enteros $(n_k)_{k \geq 1}$ tendiendo a infinito de modo que

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_{n_k}(x)| < \frac{1}{k} \quad (8.3)$$

para todo $k \geq 1$. Puesto que para k suficientemente grande se tiene que $[a, b] \subset \mathcal{I}_{n_k}$ se sigue de

las desigualdades (8.1) y (8.3):

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{d_{n_k}+1} a_n x^n \right| &= \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{j=0}^{n_k} P_j(x) \right| \\
&\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_{n_k}(x)| + \max_{x \in [a, b]} \left| \sum_{j=0}^{n_k} P_j(x) - Q_{n_k}(x) \right| \\
&\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_{n_k}(x)| + \max_{x \in \mathcal{I}_{n_k}} \left| \sum_{j=0}^{n_k} P_j(x) - Q_{n_k}(x) \right| < \frac{1}{k} + \frac{1}{n_k},
\end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $k \rightarrow \infty$. Por consiguiente, tomando $m_k = d_{n_k}+1$ concluye la prueba del teorema. $\square$

Tras el descubrimiento de Fekete surgieron numerosos resultados relativos al fenómeno de universalidad; uno de éstos, el segundo teorema de universalidad que demostraremos en este trabajo y que lleva consigo el nombre de George David Birkhoff (1884-1944), ya empieza a estar algo más relacionado con el teorema de universalidad de Voronin. Su enunciado es el siguiente:

Teorema 8.4 (Birkhoff, 1929). *Existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con la propiedad de que para toda función $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ existe una sucesión creciente de números reales $(c_n)_{n \geq 1}$ tal que*

$$\max_{|z| \leq n} |f(z + c_n) - g(z)| < \varepsilon.$$

Note, lector, que esto es como decir que $f(z + c_n)$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ a $g(z)$. El artículo original de Birkhoff puede encontrarse en [5].

DEMOSTRACIÓN. Sea $(Q_j)_{j \geq 1}$ una sucesión de polinomios densa en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ en la que cada polinomio aparece un número infinito de veces. Sea $(D_j)_{j \geq 1}$ una sucesión de discos cerrados disjuntos de radio j y tales que sus centros $(c_j)_{j \geq 1}$ forman una sucesión creciente en $\mathbb{R}$. Finalmente, sea $(E_j)_{j \geq 1}$ una sucesión de discos cerrados centrados en el origen y tal que $D_j \subset E_j$ y $D_{j+1} \cap E_j = \emptyset$.

Vamos a construir una sucesión de polinomios $(P_n)_{n \geq 1}$ del siguiente modo: escogemos $P_1 = Q_1$. En virtud del teorema de Mergelyan (léase la nota 8.1.1 posterior a la demostración), existe un polinomio P_2 tal que $\max_{z \in E_1} |P_2(z)| < 1/2$ y tal que

$$\max_{z \in D_2} |P_2(z) - (Q_2(z - c_2) - P_1(z))| < \frac{1}{2}.$$

De nuevo, del mismo modo que en el paso anterior, existe un polinomio P_3 tal que $\max_{z \in E_2} |P_3(z)| < 1/2^2$ y tal que

$$\max_{z \in D_3} |P_3(z) - (Q_3(z - c_3) - P_1(z) - P_2(z))| < \frac{1}{2^2}.$$

Repitiendo este proceso, tenemos para todo $n \in \mathbb{N}$ un polinomio P_n tal que $\max_{z \in E_{n-1}} |P_n(z)| < 1/2^{n-1}$ y tal que

$$\max_{z \in D_n} \left| P_n(z) - \left(Q_n(z - c_n) - \sum_{j=1}^{n-1} P_j(z) \right) \right| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Afirmamos que $f(z) := \sum_{j=1}^{\infty} P_j(z)$ nos vale para demostrar el teorema:

- En primer lugar, se deduce directamente del criterio M de Weierstrass que $f \in \mathcal{H}(E_j)$ para todo $j \geq 1$, lo que implica que f es entera.
- En segundo lugar, dados g una función entera cualquiera y $\varepsilon > 0$; como hemos cogido $(Q_j)_{j \geq 1}$ densa en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y tal que todo Q_j aparezca infinitas veces en la sucesión, podemos escoger un k suficientemente grande tal que:

1. $\max_{z \in E_{k-1}} |g(z) - Q_k(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$;
2. $\max_{z \in E_k} \left| f(z) - \sum_{j=1}^k P_j(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$;
3. $\max_{z \in D_k} \left| \sum_{j=1}^k P_j(z) - Q_k(z - c_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Y considerando las tres cotas anteriores concluye la prueba del teorema:

$$\begin{aligned}
\max_{|z| \leq k} |f(z + c_k) - g(z)| &= \max_{z \in D_k} |f(z) - g(z - c_k)| \\
&= \max_{z \in D_k} \left| f(z) - \sum_{j=1}^k P_j(z) + \sum_{j=1}^k P_j(z) - Q_k(z - c_k) + Q_k(z - c_k) - g(z - c_k) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Nota 8.1.1 (El teorema de Mergelyan): Durante la demostración del teorema 8.4, apelamos al siguiente resultado:

Teorema 8.5 (Teorema de Mergelyan). *Sean K un compacto en $\mathbb{C}$ con complementario sea conexo y f una función holomorfa en $\text{int}(K)$ y continua hasta la frontera. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $p \in \mathbb{C}[z]$ tal que*

$$\max_{z \in K} |f(z) - p(z)| < \varepsilon.$$

Puede encontrarse una demostración en [42].

Pese a que nos conformaremos con los ejemplos anteriores, pues considero que el concepto de universalidad ya ha quedado suficientemente claro para nuestro propósito, aún podríamos seguir enunciando un montón de teoremas de universalidad. Sin embargo, sí creo conveniente mencionar algunas referencias importantes sobre el tema: el primero en dar nombre a la noción de universalidad fue Józef Marcinkiewicz en el artículo [32]; ejemplos más modernos de teoremas de universalidad son por ejemplo el de V. Nestoridis (léase [34]) o C. Blair y L. Rubel (léase [6]). También, algunos autores¹ han enmarcado parte de los teoremas que hemos enunciado y citado en un contexto más general: los llamados **operadores hipercíclicos**; para conocer más información sobre el tema, el lector puede leer el ensayo [21] anteriormente citado.

¹Algunos ejemplos y referencias son los siguientes: C. Kitai [26], G. Godefroy y J. Shapiro [19] y R. Aron y D. Markose [2].

PARTE II:

LA UNIVERSALIDAD DE LA FUNCIÓN
ZETA DE RIEMANN

9

El teorema de universalidad de Voronin

Podemos afirmar sin remilgos que éste es el capítulo central del trabajo: por un lado es el objetivo principal que venimos buscando desde que empezamos estas páginas y por otro lado es el punto de partida del último capítulo en el que probaremos el teorema de equivalencia de Bagchi.

Ya en 1914 y mediante técnicas similares a las que describiremos aquí, Harald Bohr y Richard Courant (1888-1972) demostraron el siguiente teorema, véase [8]:

Teorema 9.1 (Teorema de Bohr-Courant, 1914). *Sea $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ fijo. Entonces, el conjunto $\{\zeta(\alpha + iy) : y \in \mathbb{R}\}$ es denso en $\mathbb{C}$.*

Este teorema pone en evidencia que el comportamiento de la función ζ sobre la banda crítica es notablemente diferente al que tiene sobre su semiplano de convergencia absoluta $\Re(z) > 1$. Las siguientes cotas elementales muestran que para $\alpha > 1$ fijo, el conjunto $\{\zeta(\alpha + iy) : y \in \mathbb{R}\}$ no escapa del anillo

$$\frac{1}{\zeta(\alpha)} \leq |\zeta(\alpha + iy)| \leq \zeta(\alpha).$$

Por un lado obtenemos la cota superior como sigue:

$$|\zeta(\alpha + iy)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^{\alpha+iy}|} = \zeta(\alpha);$$

mientras que, por otro lado, usando la fórmula de inversión de Möbius, tenemos la cota inferior:

$$\left| \frac{1}{\zeta(\alpha + iy)} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{\alpha+iy}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \zeta(\alpha).$$

Véase la figura 9.1, en la que se visualizan muy bien los hechos descritos en el teorema 9.1 y en la discusión anterior.

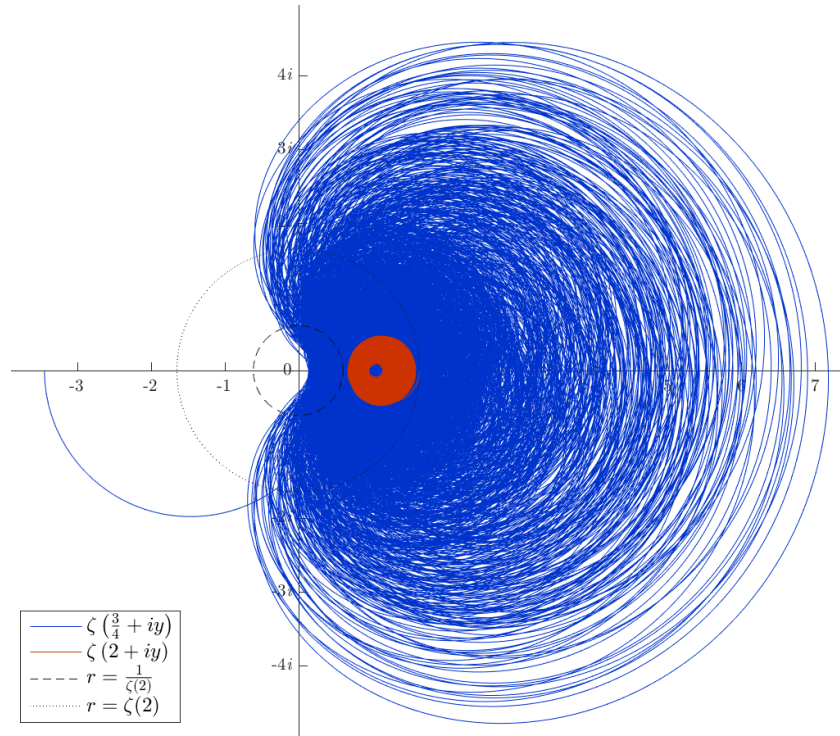


Figura 9.1: Comparación de las gráficas de $\zeta\left(\frac{3}{4} + iy\right)$ y $\zeta(2 + iy)$ para $y \in [0, 5000]$.

El siguiente protagonista en esta historia es Sergei Mikhailovitch Voronin (1946-1997) quien generalizó notablemente el teorema de Bohr-Courant en 1975 en el artículo

[52] S.M.VORONIN, *Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function*, Math. USSR Izvestija, **9**, (1975), no. 3, pp. 443-453.

Más concretamente, Voronin demostró que mediante traslaciones de la función ζ sobre la banda crítica es posible aproximar uniformemente cualquier función holomorfa en un pequeño disco y que no se anule; es decir, la función ζ es universal en el conjunto de las funciones holomorfas que no se anulan (en la topología compacta-abierta) realizando traslaciones en la banda crítica. Es por esto, que a este resultado se le conoce con el nombre de **teorema de universalidad de Voronin**. Este teorema supuso, de alguna manera, el primer ejemplo explícito¹ de teorema de universalidad. El enunciado es el siguiente:

Teorema 9.2 (Teorema de universalidad de Voronin, 1975). *Sean $0 < r < \frac{1}{4}$ y $f(z)$ una función holomorfa en $\mathbb{D}(0, r)$ y continua hasta la frontera que no se anula en ningún punto. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real $T = T(\varepsilon)$ de modo que*

$$\max_{|z| \leq r} \left| f(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + iT\right) \right| < \varepsilon. \quad (9.1)$$

Llegados a este punto, cualquier mente suficientemente despierta se preguntaría sobre la posibilidad de aproximar mediante traslaciones de ζ en la banda crítica funciones que sí se

¹Nótese que todos los ejemplos sobre los que discutimos en el capítulo 8 demuestran exclusivamente la existencia de un elemento universal.

anulen; de hecho, una respuesta afirmativa o negativa a dicha pregunta probablemente tendría consecuencias definitivas con respecto a la veracidad o falsedad de la Hipótesis de Riemann. En el próximo capítulo, discutiremos sobre este tema en profundidad.

A continuación, demostraremos el teorema de universalidad de Voronin siguiendo la demostración original; para ello, apelaremos a muchos de los teoremas que hemos ido demostrando durante los capítulos anteriores, es por ello que la dificultad de la prueba no proviene en sí tanto del plano teórico, sino en saber juntar y cocinar adecuadamente y en el momento preciso cada uno de los ingredientes que deben aparecer.

Las referencias que hemos seguido en todo el capítulo han sido el artículo original de Voronin [52], muy bien escrito y traducido al inglés; las notas de J. Steuding [47] que, aunque justamente la exposición del teorema de universalidad de Voronin es (en mi opinión) mejorable, demuestran un gran dominio sobre el tema e introducen muy ordenadamente cada una de las herramientas necesarias para afrontar la demostración del teorema de Voronin (pese a la crítica negativa, recomiendo al lector encarecidamente esta referencia); y los libros [29] y [48] que son un excelente punto de partida para el lector interesado en ampliar su conocimiento sobre este tema.

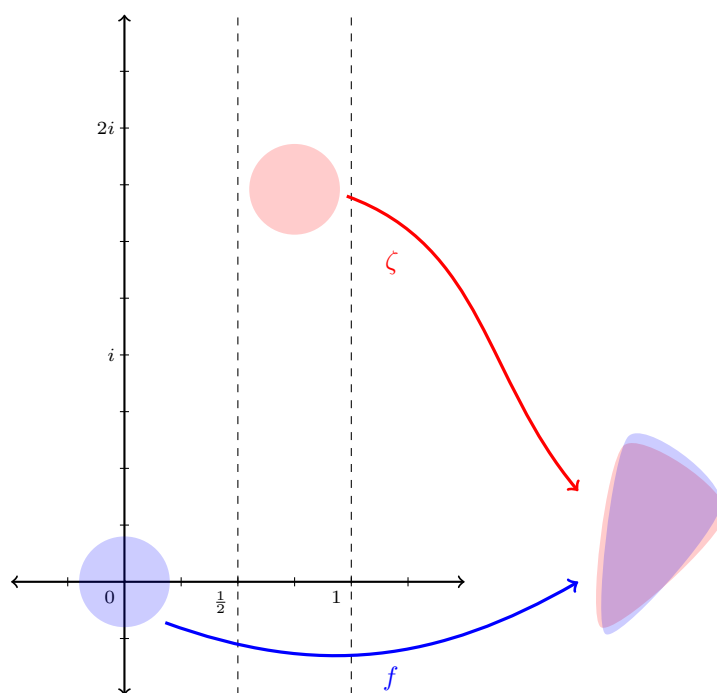


Figura 9.2: Esquema representativo del teorema de universalidad de Voronin.

9.1. El lema fundamental

La demostración del teorema de universalidad de Voronin está dividida principalmente en dos partes: la primera a la que, respetando la nomenclatura seguida en el artículo original, le pondremos el sobrenombre de **lema fundamental**; es según palabras del propio Voronin el «corazón de la demostración». Antes de enunciarlo, precisamos de la siguiente definición que generaliza en cierto sentido a la definición 7.11:

Definición 9.3. Sean $\omega = (\omega_p)$ una sucesión de números reales indexada en los primos y M un conjunto finito de números primos. Se define el **producto de Euler asociado** a M como

$$\zeta_M(z, \omega) := \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \omega_p}}{p^z}\right)^{-1}, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

En las demostraciones que siguen a continuación, los dos ejemplos de sucesiones con los que trabajaremos serán: $\mathbf{\Lambda} := (\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots)$ y $\mathbf{0} := (0, 0, 0, \dots)$. En cada caso, tendremos respectivamente:

$$\zeta_M(z, \mathbf{\Lambda}) = \prod_{\substack{n=1 \\ p_n \in M}}^{\infty} \left(1 - \frac{i^{-n}}{p_n^z}\right)^{-1} \quad \text{y} \quad \zeta_M(z) := \zeta_M(z, \mathbf{0}) = \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

donde, como es usual, p_n denota (y denotará en lo que sigue) al n -ésimo número primo.

Aunque cambiemos los M y ω , hay una característica de los productos finitos de Euler que permanece invariante: como la cantidad $1 - \frac{e^{-2\pi i \omega_p}}{p^z}$ se anula exclusivamente para algunos puntos del eje imaginario, se tiene que $\zeta_M(z, \omega)$ es siempre una función holomorfa en los semiplanos $\Re(z) > 0$ y $\Re(z) < 0$. Sin más demora, vamos con el enunciado y la prueba del lema fundamental:

Proposición 9.4 (Lema fundamental, [52]). *Sean $0 < r < \frac{1}{4}$ y $g(z)$ una función holomorfa en $\mathbb{D}(0, r)$ y continua hasta la frontera. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y todo entero positivo N , existe un conjunto finito de primos M que contiene a todos los primos $p \leq N$ de modo que*

$$\max_{|z| \leq r} \left| \log \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) - g(z) \right| < \varepsilon.$$

Para el lector más exigente, aclarar que el logaritmo $\log \zeta_M(z, \omega)$ se define de la manera «lógica»: para cada $p \in M$ tomamos la rama principal del logaritmo; esto es, con $-\pi < \text{Arg}(z) < \pi$; y consideramos

$$\log \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \omega_p}}{p^z} \right)^{-1}$$

que es holomorfa, por ejemplo, en $\mathbb{D}$. Por consiguiente, aprovechando las propiedades del logaritmo, para definir $\log \zeta_M(z, \omega)$ basta con tomar la suma

$$\log \zeta_M(z, \omega) := \sum_{p \in M} \log \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \omega_p}}{p^z} \right)^{-1}, \quad \text{para } z \in \mathbb{D}.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA FUNDAMENTAL. Sea $\varepsilon > 0$. Como $g(z)$ es continua en $|z| \leq r$, existe $\kappa > 1$ de modo que $\kappa^2 r < \frac{1}{4}$ y

$$\max_{|z| \leq r} \left| g \left(\frac{z}{\kappa^2} \right) - g(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9.2)$$

Por ser continua en $|z| \leq r$, la función $g \left(\frac{z}{\kappa^2} \right)$ está acotada en $|z| \leq R := \kappa r$, y por consiguiente pertenece al espacio de Bergman $A^2(\mathbb{D}(0, R))$ (tomado como un espacio de Hilbert real²).

Denotemos por p_k al k -ésimo número primo, y consideremos la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z), \quad \text{donde } u_k(z) := \log \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \Lambda_{p_k}}}{p_k^{z + \frac{3}{4}}} \right)^{-1}. \quad (9.3)$$

²Léase la discusión en la página 23.

Como veremos al final de la prueba, si probamos que para todo $v \in A^2(\mathbb{D}(0, R))$ existe una reordenación de la serie que aparece en la ecuación (9.3) que converge a v , habremos probado la proposición. Para ello comprobaremos que la serie $\sum_{k \geq 1} u_k(z)$ satisface las hipótesis del teorema de Pechersky, teorema 1.10, en el espacio de Bergman $A^2(\mathbb{D}(0, R))$.

Ahora, teniendo en cuenta el desarrollo en serie de Taylor de la función $\log(1-z)$ para $|z| < 1$, se tiene que $\sum_{k \geq 1} u_k$ difiere de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Upsilon_k(z), \text{ donde } \Upsilon_k(z) := e^{\frac{-2\pi i k}{4}} \cdot p_k^{-(z+3/4)}$$

una serie absolutamente convergente; y por consiguiente, es suficiente con probar que la serie $\sum_{k \geq 1} \Upsilon_k(z)$ satisface las hipótesis del teorema de Pechersky:

(i) Veamos que $\sum_{k \geq 1} \Upsilon_k(z)$ satisface la primera de las hipótesis del teorema de Pechersky:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|\Upsilon_k(z)\|_{A^2(\mathbb{D}(0, R))}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \iint_{|z| \leq R} |\Upsilon_k(z)|^2 dx dy \\ &\leq \pi R^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{-(\frac{3}{2}-2R)} < +\infty, \end{aligned}$$

ya que $R < \frac{1}{4}$ y por tanto $\frac{3}{2} - 2R > 1$.

(ii) Veamos que $\sum_{k \geq 1} \Upsilon_k(z)$ satisface la segunda hipótesis del teorema de Pechersky; esto es, necesitamos ver que para toda $\varphi \in A^2(\mathbb{D}(0, R))$ tal que $\|\varphi\|_{A^2(\mathbb{D}(0, R))} = 1$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \Upsilon_k, \varphi \rangle$ es condicionalmente convergente. Para ello, en virtud de la proposición 1.6, basta con demostrar que:

- I. $\langle \Upsilon_k, \varphi \rangle \longrightarrow 0$ cuando $k \rightarrow +\infty$.
- II. Existen dos subseries de $\sum_{k=1}^{\infty} \langle \Upsilon_k, \varphi \rangle$ de términos positivos y negativos respectivamente y tales que una diverge a $+\infty$ y la otra a $-\infty$.

Comprobar que se satisfacen los dos puntos anteriores nos llevará unas cuantas páginas; así que sea paciente, lector. Vamos con ello:

Recordando de la página 23 cómo estaba definido el producto escalar, tenemos:

$$\langle \Upsilon_k, \varphi \rangle = \Re \left(\iint_{|z| \leq R} \frac{e^{\frac{-2\pi i k}{4}}}{p_k^{z+\frac{3}{4}}} \cdot \overline{\varphi(z)} dx dy \right) = \Re \left(e^{\frac{-2\pi i k}{4}} \iint_{|z| \leq R} p_k^{-(z+\frac{3}{4})} \cdot \overline{\varphi(z)} dx dy \right). \quad (9.4)$$

Definamos ahora la función de variable real

$$\Psi(t) := \iint_{|z| \leq R} e^{-t(z+\frac{3}{4})} \cdot \overline{\varphi(z)} dx dy$$

que claramente cumple

$$\langle \Upsilon_k, \varphi \rangle = \Re \left(e^{(-2\pi i k)/4} \cdot \Psi(\log p_k) \right).$$

Ahora, por ser φ holomorfa en el disco $\mathbb{D}(0, R)$, tenemos que $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ para ciertos α_n ; además, podemos expresar $\Psi(t)$ en función de los α_n como sigue:

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= e^{-\frac{3t}{4}} \cdot \iint_{|z| \leq R} e^{-tz} \cdot \overline{\varphi(z)} \, dx dy \\
&= e^{-\frac{3t}{4}} \cdot \iint_{|z| \leq R} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-tz)^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha_n} \bar{z}^n \, dx dy \\
&= e^{-\frac{3t}{4}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^m \overline{\alpha_n}}{m!} \cdot \iint_{|z| \leq R} z^m \cdot \bar{z}^n \, dx dy \\
&= e^{-\frac{3t}{4}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^m \overline{\alpha_n}}{m!} \cdot \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^{m+n} e^{i\theta(m-n)} \rho d\theta d\rho \\
&= \pi R^2 e^{-\frac{3t}{4}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \overline{\alpha_n} R^{2n}}{(n+1)!} t^n = \pi R^2 e^{-\frac{3t}{4}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (tR)^n,
\end{aligned}$$

donde $\beta_n = (-1)^n \cdot \frac{\overline{\alpha_n} R^n}{n+1}$. Ahora, como $\|\varphi\| = 1$ tenemos que

$$1 = \iint_{|z| \leq R} \varphi(z) \cdot \overline{\varphi(z)} \, dx dy = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 \iint_{|z| \leq R} z^n \cdot \bar{z}^n \, dx dy = \pi R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2 R^{2n}}{n+1}.$$

Y por consiguiente, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2 R^{2n}}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|^2 R^{2n}}{n+1} = \frac{1}{\pi R^2}.$$

En particular, esto prueba que $|\beta_n| \leq \frac{1}{R\pi^{1/2}}$ para todo $n \geq 0$, lo que a su vez demuestra que la función

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} z^n,$$

que cumple la igualdad $\Psi(t) = \pi R^2 e^{-\frac{3t}{4}} F(tR)$, es entera y de tipo exponencial con tasa de crecimiento 1, ya que:

$$|F(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n| \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{1}{R\pi^{1/2}} e^{|z|}.$$

Con esto, ya podemos comprobar que se satisface el punto I, ya que:

$$|\langle \Upsilon_k, \varphi \rangle| \leq |\Psi(\log p_k)| = \pi R^2 e^{-\frac{3}{4} \log p_k} \cdot |F(R \log p_k)| \leq p_k^{-\frac{3}{4}} \cdot p_k^R \leq p_k^{-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Vamos con la demostración del punto II.

Es el momento de apelar a la proposición 4.6: como F es de tipo exponencial con tasa de crecimiento 1, se tiene que para todo $\delta > 0$ existe una sucesión (z_j) de reales positivos arbitrariamente grandes tales que

$$|F(z_j)| > e^{-(1+2\delta)z_j}.$$

Podemos traducir esta última cota para $\Psi(t)$ de la manera siguiente: sea $t_j = \frac{z_j}{R}$, entonces

$$|\Psi(t_j)| = \pi R^2 e^{-\frac{3t_j}{4}} \cdot |F(t_j R)| > \pi R^2 e^{-t_j(\frac{3}{4} + R(1+2\delta))},$$

y para δ suficientemente pequeño, podemos reescribir la cota anterior del siguiente modo: para cierto $\delta' > 0$ suficientemente pequeño, existe una sucesión (t_j) de números reales arbitrariamente grandes, tales que

$$|\Psi(t_j)| > e^{-(1-\delta')t_j}. \quad (9.5)$$

Ya tenemos controlada la función $\Psi(t)$ en los puntos t_j , ahora queremos controlarla también en ciertos intervalos alrededor de dichos t_j . Para ello, aproximaremos Ψ por polinomios y aplicaremos la desigualdad de Markov, teorema 3.1. Sean $N_j := \lfloor t_j \rfloor + 1$ y $t_j - 1 \leq t \leq t_j + 1$, como $|\beta_n| \leq \frac{1}{R\pi^{1/2}}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_j^2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (tR)^n &\ll \sum_{n=N_j^2}^{\infty} \frac{(tR)^n}{n!} \ll \frac{(tR)^{N_j^2}}{(N_j^2)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tR)^n}{n!} \ll \frac{N_j^{N_j^2}}{(N_j^2)!} \cdot e^{N_j} \\ &\stackrel{(*)}{\ll} \frac{N_j^{N_j^2}}{\left(\frac{N_j^2}{e}\right)^{N_j^2}} \cdot e^{N_j} = \frac{e^{N_j^2 + N_j}}{N_j^{N_j^2}} \ll e^{-2t_j}, \end{aligned}$$

donde en la comparación $(*)$ hemos usado la fórmula de Stirling. Realizando una acotación análoga, obtenemos

$$\sum_{n=N_j^2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{3t}{4}\right)^n \ll e^{-2t_j}.$$

Aplicaremos estas comparaciones asintóticas para obtener que

$$\begin{aligned} F(tR) &= \sum_{n=0}^{N_j^2-1} \frac{\beta_n}{n!} (tR)^n + \sum_{n=N_j^2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (tR)^n = P_j(t) + O(e^{-2t_j}); \\ e^{-\frac{3t}{4}} &= \sum_{n=0}^{N_j^2-1} \frac{1}{n!} \left(-\frac{3t}{4}\right)^n + \sum_{n=N_j^2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{3t}{4}\right)^n = \tilde{P}_j(t) + O(e^{-2t_j}); \end{aligned}$$

donde, nótese que P_j y $\tilde{P}_j$ denotan cada uno un polinomio de grado a lo sumo $N_j^2 - 1$. Con esto, multiplicando ambas cantidades inferimos que $\Psi(t)$ se puede aproximar uniformemente en el intervalo $[t_j - 1, t_j + 1]$ mediante un polinomio $Q_j = P_j \cdot \tilde{P}_j$ de grado³ N_j^4 con un error de orden menor que e^{-t_j} .

En vista de la desigualdad en (9.5), se tiene que:⁴

$$\max_{t \in [t_j-1, t_j+1]} |\Re(Q_j(t))| > \frac{1}{2} e^{-(1-\delta')t_j} \quad \text{ó} \quad \max_{t \in [t_j-1, t_j+1]} |\Im(Q_j(t))| > \frac{1}{2} e^{-(1-\delta')t_j}.$$

Así pues, sin pérdida de generalidad, supongamos que es cierto para la parte real. Definamos

$$\mu := \max_{t \in [t_j-1, t_j+1]} |\Re(Q_j(t))|,$$

³En realidad es de grado menor, pero nos bastará con esta estimación en lo que sigue.

⁴Para j suficientemente grande si hiciera falta.

entonces existe cierto $\xi \in [t_j - 1, t_j + 1]$ tal que $\mu = |\Re(Q_j(\xi))|$. Apelando al teorema del valor medio se tiene que para todo $t \in [t_j - 1, t_j + 1]$ existe τ en el mismo intervalo de modo que:

$$|\Re(Q_j(\xi)) - \Re(Q_j(t))| = |\Re(Q'_j(\tau))| |\xi - t|.$$

Ahora, acotando la cantidad $|\Re(Q'_j(\tau))|$ a partir de la desigualdad de Markov deducimos que

$$|\Re(Q_j(\xi)) - \Re(Q_j(t))| \leq \mu N_j^8 |\xi - t|.$$

Y por consiguiente, si $|\xi - t| \leq \frac{1}{2N_j^8}$, despejando adecuadamente se tiene que

$$|\Re(Q_j(t))| \geq |\Re(Q_j(\xi))| - \frac{\mu}{2} = \frac{\mu}{2} > \frac{1}{4} e^{-(1-\delta')t_j}.$$

Esto es, para j suficientemente grande existen intervalos $[\sigma_j, \sigma_j + \nu_j]$ de longitud mayor o igual que $\frac{1}{2N_j^8}$ dentro de $[t_j - 1, t_j + 1]$, tales que todos sus puntos satisfacen:

$$|\Re(\Psi(t))| = \pi R^2 |\Re(Q_j(t))| + O(e^{-t_j}) \gg \frac{1}{4} e^{-(1-\delta')t_j}.$$

Por el teorema de los números primos, teorema 7.3, tenemos que para cierta constante $c > 0$

$$\begin{aligned} \pi(e^{\sigma_j + \nu_j}) - \pi(e^{\sigma_j}) &= \int_{e^{\sigma_j}}^{e^{\sigma_j + \nu_j}} \frac{dt}{\log t} + O\left(e^{\sigma_j - c\sqrt{\sigma_j + \nu_j}}\right) = \frac{e^{\sigma_j + \nu_j}}{\sigma_j + \nu_j} - \frac{e^{\sigma_j}}{\sigma_j} + O\left(e^{\sigma_j - c\sqrt{\sigma_j + \nu_j}}\right) \\ &\gg \frac{e^{\sigma_j}}{\sigma_j + \nu_j} \cdot (e^{\nu_j} - 1) + e^{\sigma_j} \cdot e^{-c\sqrt{\sigma_j}} \gg \frac{e^{t_j}}{t_j^9}. \end{aligned}$$

Nótese que dicha cantidad tiende a infinito cuando $j \rightarrow +\infty$. Vamos a usar esta estimación para demostrar la existencia de las subseries de $\sum_{k \geq 1} \langle \Upsilon_k, \varphi \rangle$ que buscamos como sigue:

Para encontrar la subserie de $\sum_{k \geq 1} \langle \Upsilon_k, \varphi \rangle$ divergente a $+\infty$ escogeremos los primos $p_k \in [e^{\sigma_j}, e^{\sigma_j + \nu_j}]$ tales que $k \equiv 0 \pmod{4}$:

$$\sum_{\substack{k \equiv 0 \pmod{4} \\ p_k \in [e^{\sigma_j}, e^{\sigma_j + \nu_j}]}} \langle \Upsilon_k, \varphi \rangle = \sum_{\substack{k \equiv 0 \pmod{4} \\ p_k \in [e^{\sigma_j}, e^{\sigma_j + \nu_j}]}} \Re\left(e^{\frac{-2\pi i k}{4}} \Psi(\log p_k)\right) \gg \frac{1}{4} e^{-(1-\delta')t_j} \cdot \frac{e^{t_j}}{t_j^9} \gg \frac{e^{\delta' t_j}}{t_j^9}$$

que diverge a $+\infty$ cuando $t_j \rightarrow +\infty$. Análogamente, para encontrar la subserie que diverge a $-\infty$ escogeremos los p_k tales que $k \equiv 2 \pmod{4}$.

Por consiguiente, en virtud del teorema de Pechersky se deriva la existencia de una reordenación de la serie $\sum_{k \geq 1} u_k(z)$ tal que

$$\sum_{j=1}^m u_{k_j}(z) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} g\left(\frac{z}{\kappa^2}\right)$$

en la norma del espacio de Bergman $A^2(\mathbb{D}(0, R))$.

Acabamos la demostración del lema fundamental razonando de la manera siguiente: apela-mos al corolario 2.5, lo que nos da la convergencia uniforme sobre compactos (y por ende, la convergencia puntual) en $\mathbb{D}(0, R)$, esto es:

$$\max_{|z| \leq R} \left| \sum_{j=1}^m u_{k_j}(z) - g\left(\frac{z}{\kappa^2}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

para m suficientemente grande y tal que $N \leq \max_{0 \leq j \leq m} k_j$; nótese que en tal caso, el conjunto $M := \{p_{k_j} : 0 \leq j \leq m\}$ satisface las hipótesis del enunciado, pues contiene a todos los primos $p \leq N$, y por definición

$$\log \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) := \sum_{j=1}^m u_{k_j}(z).$$

De donde teniendo en cuenta la desigualdad en (9.2), con una simple acotación concluimos la demostración:

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leq r} \left| \log \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) - g(z) \right| &\leq \max_{|z| \leq r} \left| \sum_{j=1}^m u_{k_j}(z) - g \left(\frac{z}{\kappa^2} \right) \right| + \max_{|z| \leq r} \left| g(z) - g \left(\frac{z}{\kappa^2} \right) \right| \\ &\leq \max_{|z| \leq R} \left| \sum_{j=1}^m u_{k_j}(z) - g \left(\frac{z}{\kappa^2} \right) \right| + \max_{|z| \leq r} \left| g(z) - g \left(\frac{z}{\kappa^2} \right) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Es evidente que podemos deshacernos del «molesto» logaritmo que acompaña a la función ζ_M en el enunciado del lema fundamental. Para ello, apelaremos a un conocido hecho en variable compleja: toda función $f(z)$ holomorfa en un simplemente conexo D y que no se anula, tiene un logaritmo holomorfo; esto es, existe $g(z)$ holomorfa en D tal que

$$f(z) = e^{g(z)}, \text{ para todo } z \in D.$$

Apelaremos a este hecho para demostrar el siguiente corolario del lema fundamental:

Proposición 9.5. *Sean $0 < r < \frac{1}{4}$ y $f(z)$ una función holomorfa en el disco $\mathbb{D}(0, r)$ y continua hasta la frontera que no se anula en ningún punto. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y todo entero positivo N existe un conjunto finito de primos M que contiene a todos los primos $p \leq N$, de modo que*

$$\max_{|z| \leq r} \left| f(z) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) \right| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Fijado $\varepsilon > 0$, sea $\kappa > 1$ tal que $\kappa r < \frac{1}{4}$ y

$$\max_{|z| \leq r} \left| f(z) - f \left(\frac{z}{\kappa} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $g(z)$ la función holomorfa tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \mathbb{D}(0, r)$. Teniendo en cuenta que $e^z - 1 = O(|z|)$ y que

$$f(z) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) = f(z) \cdot \left(1 - e^{\log \zeta_M(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda}) - g(z)} \right),$$

se deducen las siguientes cotas:

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leq r} \left| f(z) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) \right| &\leq \max_{|z| \leq r} \left| f(z) - f \left(\frac{z}{\kappa} \right) \right| + \max_{|z| \leq r} \left| f \left(\frac{z}{\kappa} \right) \left(1 - e^{\log \zeta_M(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda}) - g(\frac{z}{\kappa})} \right) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \max_{|z| \leq r} \left| f \left(\frac{z}{\kappa} \right) \right| \cdot \max_{|z| \leq r} \left| e^{\log \zeta_M(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda}) - g(\frac{z}{\kappa})} - 1 \right| \\ &\ll \frac{\varepsilon}{2} + \max_{|z| \leq r} \left| \log \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) - g \left(\frac{z}{\kappa} \right) \right|, \end{aligned}$$

que puede hacerse arbitrariamente pequeño en virtud del lema fundamental. □

9.2. El final de la demostración

Recordemos el enunciado del teorema de Voronin:

Teorema 9.2 (Teorema de universalidad de Voronin, 1975). *Sean $0 < r < \frac{1}{4}$ y $f(z)$ una función holomorfa en $\mathbb{D}(0, r)$ y continua hasta la frontera que no se anula en ningún punto. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número real $T = T(\varepsilon)$ de modo que*

$$\max_{|z| \leq r} \left| f(z) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + iT \right) \right| < \varepsilon. \quad (9.1)$$

Nótese que el teorema de Voronin es en cierto sentido una continuación del lema fundamental; de hecho, veremos que si somos capaces de aproximar adecuadamente la función ζ por truncamientos de la forma ζ_M con M finito, algo que a priori no parece muy descabellado, habremos probado el teorema de Voronin. Es por esto que como decíamos el lema fundamental es el «corazón de la demostración» del teorema de universalidad Voronin.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE UNIVERSALIDAD DE VORONIN. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera; para demostrar el teorema de Voronin probaremos el siguiente lema:

Lema 9.6. *Sea $0 < r < \frac{1}{4}$. Entonces para toda g holomorfa en $\mathbb{D}(0, r)$ y continua hasta la frontera que no se anula en ningún punto, existe un número real $T = T(\varepsilon)$ de modo que*

$$\iint_{|z| \leq r} \left| g(z) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + iT \right) \right|^2 dx dy < \varepsilon. \quad (9.6)$$

En primer lugar, veamos que la veracidad del lema anterior implica la del teorema de Voronin:

DEMOSTRACIÓN DE QUE EL LEMA 9.6 IMPLICA EL TEOREMA DE VORONIN. Supongamos cierto el lema 9.6. Por ser f continua en $\text{cl}(\mathbb{D}(0, r))$, escojamos $\kappa > 1$ de modo que $\kappa r < \frac{1}{4}$ y

$$\max_{|z| \leq r} \left| f(z) - f\left(\frac{z}{\kappa}\right) \right| < \varepsilon.$$

Ahora, para todo $\tau > 0$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$\max_{|z| \leq r} \left| f(z) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right| \leq \max_{|z| \leq r} \left| f(z) - f\left(\frac{z}{\kappa}\right) \right| + \max_{|z| \leq r} \left| f\left(\frac{z}{\kappa}\right) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|.$$

Apelando al teorema 2.4, acotamos el segundo sumando del lado derecho de la desigualdad del siguiente modo:

$$\max_{|z| \leq r} \left| f\left(\frac{z}{\kappa}\right) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right| \leq \frac{1}{\pi^{1/2} r (\kappa - 1)} \cdot \left(\iint_{|z| \leq \kappa r} \left| f\left(\frac{z}{\kappa}\right) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Por último, nótese que $f\left(\frac{z}{\kappa}\right)$ cumple en $|z| \leq \kappa r < \frac{1}{4}$ las hipótesis del lema 9.6; de donde se deduce que el lema implica el teorema de Voronin. ■

Probaremos el lema 9.6 demostrando que el conjunto de los $\tau \in [0, T]$ para los que se satisface la desigualdad (9.6) tiene densidad positiva. La demostración constará de varias aproximaciones que se irán indicando según vayan apareciendo con el objetivo de la buena orientación del lector. La primera de dichas aproximaciones es justamente la que llevamos a cabo en el lema fundamental, para ser más precisos, la de la proposición 9.5: dado $N > 0$ cualquiera (más adelante

precisaremos su elección), escojamos un conjunto finito de primos M que incluya a todos los primos $p \leq N$ de modo que

$$\max_{|z| \leq r} \left| g(z) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) \right| < \varepsilon. \quad (9.7)$$

Apelando ahora a la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma

$$|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2), \quad (9.8)$$

tenemos para $|z| \leq r$:

$$\begin{aligned} \left| g(z) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 &\leq 2 \left| g(z) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) \right|^2 + 2 \left| \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 \\ &\leq 2 \cdot \left| \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Por lo que, como afirmábamos antes de comenzar con la demostración, necesitamos aproximar adecuadamente la función ζ por sus truncamientos ζ_M : esa va a ser nuestro objetivo en lo que resta de demostración:

Para ello, en primer lugar, debido a la continuidad de $\zeta_M(z, \omega)$ en la variable ω , se infiere la existencia de $\delta > 0$ de modo que:

$$\max_{|z| \leq r} \left| \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \omega' \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \right| < \varepsilon$$

siempre que $\|\omega'_p - \omega_p\|_{\mathbb{T}} < \delta$ para todo $p \in M$. Ahora, teniendo en cuenta la igualdad

$$\zeta_M \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) = \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{1}{p^{(z + \frac{3}{4} + i\tau)}} \right)^{-1} = \prod_{p \in M} \left(1 - \frac{e^{-2\pi i \tau \frac{\log p}{2\pi}}}{p^{(z + \frac{3}{4})}} \right)^{-1} =: \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \tilde{\omega}(\tau) \right),$$

definamos $\tilde{\omega}(\tau) := \left(\tau \frac{\log 2}{2\pi}, \tau \frac{\log 3}{2\pi}, \tau \frac{\log 5}{2\pi}, \dots \right)$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{B}_T := \left\{ \tau \in [0, T] : \left\| \tau \frac{\log p}{2\pi} - \Lambda_p \right\|_{\mathbb{T}} < \delta, \forall p \in M \right\};$$

cuya densidad en $[0, T]$, como consecuencia de la nota 5.1.1 y la proposición 5.17, tiende al volumen de la bola de radio δ en el toro $\#M$ -dimensional. Por tanto, si $\tau \in \mathcal{B}_T$ se cumple

$$\max_{|z| \leq r} \left| \zeta_M \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) \right| < \varepsilon. \quad (9.9)$$

Para demostrar el lema 9.6 estimaremos la siguiente integral

$$\mathcal{I}_T := \frac{1}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| g(z) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy d\tau;$$

que teniendo en cuenta todas las estimaciones que hemos ido obteniendo, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_T &\leq \frac{2}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \mathbf{\Lambda} \right) \right|^2 dx dy d\tau + O(\varepsilon^2) \\ &\leq \frac{4}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy d\tau + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Por lo que para demostrar el lema 9.6, bastará con estimar la integral que aparece en la ecuación (9.10).

Aproximaremos ζ por sus truncamientos ζ_M en dos pasos; para ello, consideremos el conjunto $\mathcal{Q}_k := \{p \text{ primo} : p \leq k\}$ con $k > \max_{p \in M} p$ (de modo que $M \subset \mathcal{Q}_k$); entonces, aplicando de nuevo la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la forma (9.8) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_T &\leq \frac{4}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy d\tau \\ &\leq \frac{8}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy d\tau \\ &\quad + \leq \frac{8}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy d\tau =: 8S_1 + 8S_2. \end{aligned}$$

(i) Estimación asintótica de S_1 : en primer lugar, reordenemos la integral de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy d\tau \\ &= \iint_{|z| \leq r} \left(\frac{1}{T} \int_{\mathcal{B}_T} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 d\tau \right) dx dy \\ &= \iint_{|z| \leq r} \left(\frac{1}{T} \int_{\mathcal{B}_T} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4}, \tilde{\omega}(\tau) \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \tilde{\omega}(\tau) \right) \right|^2 d\tau \right) dx dy. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que la curva $\tilde{\omega}(\tau)$ está uniformemente distribuida (de nuevo, léase la nota 5.1.1) y que la familia de funciones

$$\left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4}, \tilde{\omega}(\tau) \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \tilde{\omega}(\tau) \right) \right|^2$$

es equicontinua y uniformemente acotada en la variable $|z| \leq r$; se sigue del teorema 5.25 que, uniformemente para z se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\mathcal{B}_T} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4}, \tilde{\omega}(\tau) \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \tilde{\omega}(\tau) \right) \right|^2 d\tau \\ = \int_{\mathcal{D}} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \right|^2 d\omega \end{aligned}$$

donde $\mathcal{D} = \{\omega : \forall p \in M, \|\omega_p - \Lambda_p\|_T < \delta\}$. Además, en virtud de la igualdad

$$\zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) = \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \cdot \zeta_{\mathcal{Q}_k \setminus M} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right),$$

se deduce

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \right|^2 d\omega &= \int_{\mathcal{D}} \left| \zeta_M \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \right|^2 \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k \setminus M} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \right|^2 d\omega \\ &\leq \max_{|z| \leq r} |g(z)| + 2\varepsilon \int_{\mathcal{D}} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k \setminus M} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \right|^2 d\omega; \end{aligned}$$

pero como $\mathcal{D}$ está definida por restricciones en los $p \in M$, puede cambiarse el orden de integración para obtener:

$$\int_{\mathcal{D}} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k \setminus M} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \right|^2 d\omega = m(\mathcal{D}) \cdot \int_0^1 \int_0^1 \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k \setminus M} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \right|^2 d\omega$$

donde, cuidado lector, $d\omega$ en esta última integral indica que estamos integrando exclusivamente con respecto a los $p \in \mathcal{Q}_k \setminus M$. Ahora, considerando la serie de Dirichlet de $\zeta_{\mathcal{Q}_k \setminus M} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right)$ y acotando mediante la desigualdad triangular, obtenemos:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k \setminus M} \left(z + \frac{3}{4}, \omega \right) \right|^2 d\omega \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^{2(\frac{3}{4}-r)}} \leq \int_N^\infty \frac{dt}{(t-1)^{\frac{3}{2}-2r}} = O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}-2r}}\right).$$

Por consiguiente, llegamos a la primera de las estimaciones asintóticas:

$$S_1 = \frac{1}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy d\tau = O\left(\frac{m(\mathcal{D})}{N^{\frac{1}{2}-2r}}\right).$$

De donde se deduce que podemos fijar N de modo que para T suficientemente grande se tenga:

$$S_1 = \frac{1}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_M \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy d\tau < \frac{m(\mathcal{D})}{32} \cdot \varepsilon. \quad (9.11)$$

Fijemos dicho N , en la estimación que viene fijaremos la k .

- (ii) Estimación asintótica de S_2 : vamos a valernos de un truco similar al que usamos para los teoremas 7.10 y de Bohr-Landau aprovechando la representación como serie de Dirichlet de la función η en $0 < \Re(z) < 1$. Para ello, cambiemos de nuevo el orden de integración:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy d\tau \\ &= \iint_{|z| \leq r} \left(\frac{1}{T} \int \left| \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 d\tau \right) dx dy \\ &\leq \iint_{|z| \leq r} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) - \zeta_{\mathcal{Q}_k} \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 d\tau \right) dx dy. \end{aligned}$$

Como $1 - 2^{1-z}$ se anula exclusivamente en algunos puntos de la recta $\Re(z) = 1$; multiplicando por $\left(1 - 2^{1-(z+\frac{3}{4}+i\tau)}\right)^2$ y apelando al teorema 6.9 obtenemos, uniformemente para z :

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \zeta\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) - \zeta_{\mathcal{Q}_k}\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right|^2 d\tau \\ & \ll \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| 1 - 2^{1-(z+\frac{3}{4}+i\tau)} \right|^2 \cdot \left| \zeta\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) - \zeta_{\mathcal{Q}_k}\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right|^2 d\tau \\ & \leq \sum_{n \geq k} \frac{1}{n^{2(\frac{3}{4}-r)}} = O\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-2r}}\right), \end{aligned}$$

y de esta manera llegamos a la segunda de las estimaciones asintóticas:

$$S_2 = \frac{1}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) - \zeta_{\mathcal{Q}_k}\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right|^2 dx dy d\tau = O\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{2}-2r}}\right).$$

De donde se deduce que podemos fijar k , de modo que $M \subset \mathcal{Q}_k$ y para T suficientemente grande se tenga:

$$S_2 = \frac{1}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| \zeta\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) - \zeta_{\mathcal{Q}_k}\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right|^2 dx dy d\tau < \frac{m(\mathcal{D})}{32} \cdot \varepsilon. \quad (9.12)$$

Fijemos dicho k y pasemos a usar las dos estimaciones obtenidas.

Considerando las cotas obtenidas para S_1 y S_2 en las ecuaciones (9.11) y (9.12), deducimos que para T suficientemente grande:

$$\mathcal{I}_T = \frac{1}{T} \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| g(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right|^2 dx dy d\tau < \frac{m(\mathcal{D})}{2} \cdot \varepsilon.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Chebyshev⁵ en $(\star)$ y la cota de la ecuación anterior en $(\dagger)$, vemos que:

$$\begin{aligned} & m\left(\left\{\tau \in [0, T] : \iint_{|z| \leq r} \left| g(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right|^2 dx dy < \varepsilon\right\}\right) \\ & \geq m\left(\left\{\tau \in \mathcal{B}_T : \iint_{|z| \leq r} \left| g(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right|^2 dx dy < \varepsilon\right\}\right) \\ & = m(\mathcal{B}_T) - m\left(\left\{\tau \in [0, T] : \iint_{|z| \leq r} \left| g(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right|^2 dx dy \geq \varepsilon\right\}\right) \\ & \stackrel{(\star)}{\geq} m(\mathcal{B}_T) - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int \iint_{\mathcal{B}_T, |z| \leq r} \left| g(z) - \zeta\left(z + \frac{3}{4} + i\tau\right) \right|^2 dx dy d\tau \\ & \stackrel{(\dagger)}{>} m(\mathcal{B}_T) - T \cdot \frac{m(\mathcal{D})}{2}. \end{aligned}$$

⁵Léase la nota 9.2.1 posterior a la demostración.

Finalmente, teniendo en cuenta que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} m(\mathcal{B}_T) = m(\mathcal{D})$, tomando el límite cuando $T \rightarrow +\infty$ se tiene

$$\begin{aligned} \liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \iint_{|z| \leq r} \left| g(z) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right|^2 dx dy < \varepsilon \right\} \right) \\ \geq \liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{m(\mathcal{B}_T)}{T} - \frac{m(\mathcal{D})}{2} = m(\mathcal{D}) - \frac{m(\mathcal{D})}{2} > 0, \end{aligned}$$

con lo que concluye la demostración del lema 9.6 y por descontado la del teorema de universalidad de Voronin. $\square$

Nótese que hemos demostrado un enunciado algo más fuerte que el del teorema 9.2, y que estamos teniendo en cuenta la densidad de los $\tau \in [0, T]$ para los que se cumple el teorema de universalidad de Voronin. ¡Sorprendentemente, hemos demostrado que dicha densidad es estrictamente positiva! Dejamos esta versión ergódica del teorema de universalidad de Voronin en forma de teorema:

Teorema 9.7 (Teorema de universalidad de Voronin, versión ergódica). *Sean $0 < r < \frac{1}{4}$ y $f(z)$ una función holomorfa en $\mathbb{D}(0, r)$ y continua hasta la frontera que no se anula para ningún $|z| \leq r$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \max_{|z| \leq r} \left| f(z) - \zeta \left(z + \frac{3}{4} + i\tau \right) \right| < \varepsilon \right\} \right) > 0.$$

Nota 9.2.1 (La desigualdad de Chebyshev): Durante la demostración del teorema de universalidad de Voronin apelamos a la conocida **desigualdad de Chebyshev**:

Teorema 9.8 (Desigualdad de Chebyshev). *Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces, para todo $\lambda > 0$ y todo $0 < p < +\infty$ se tiene:*

$$\mu(x \in X : |f(x)| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \cdot \int_{|f| > \lambda} |f|^p d\mu.$$

Para $p = 1$, que es el caso que aplicamos en la demostración del teorema de universalidad de Voronin, se la conoce como **desigualdad de Markov** (no confundir con la desigualdad de Markov sobre la que discutimos en el capítulo 3).

Vistos el enunciado y la demostración del teorema de universalidad de Voronin es natural plantearse algunas cuestiones sobre el tema.

En primera instancia, detengámonos momentáneamente y reflexionemos sobre la naturaleza de cada una de las hipótesis del teorema 9.7. Quizás el lector esté de acuerdo conmigo en que hay dos hipótesis que a priori pudieran parecer algo «raras» o «artificiales»: en primer lugar, ¿existe alguna razón para que el teorema sólo pueda enunciarse para discos, o acaso puede extenderse a alguna otra familia de conjuntos?; y en segundo lugar, ¿por qué es necesario que estén centrados en $\frac{3}{4}$ y no cualquier otro valor entre $\frac{1}{2}$ y 1? Bhaskar Bagchi (1954-) generalizó en su tesis doctoral (véase [3]) el resultado de Voronin usando herramientas probabilísticas. Antanas Laurinćikas (1948-) completó y generalizó los resultados obtenidos por Bagchi en varias direcciones, véase [29]. En particular, a día de hoy la versión más fuerte que se conoce del teorema de universalidad de Voronin es la siguiente, a la que apelaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 9.9. *Sea K un compacto en $\frac{1}{2} < \Re(z) < 1$ con complementario conexo y sea $f(z)$ una función holomorfa en $\text{int}(K)$ y continua hasta la frontera que no se anula. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \max_{z \in K} |\zeta(z + i\tau) - f(z)| < \varepsilon \right\} \right) > 0.$$

Otra cuestión que es natural plantearse es si el teorema de universalidad de Voronin puede generalizarse a otras funciones similares a la función ζ . La respuesta es afirmativa: hay una gran cantidad de funciones que satisfacen la propiedad de universalidad y todas ellas están íntimamente relacionadas con la función ζ ; para ejemplos más concretos el lector puede ojear los libros [29] o [48].

10

Universalidad e Hipótesis de Riemann: la autosemejanza de la función zeta

Como indica el título, en este capítulo estudiaremos a fondo las relaciones entre algunos temas afines a la universalidad de la función ζ y la Hipótesis de Riemann. En particular, la noción que explotaremos en mayor medida es la de autosemejanza y deduciremos de esta noción y de los teoremas de Bohr-Landau y de universalidad de Voronin un resultado equivalente la Hipótesis de Riemann: el teorema de equivalencia de Bagchi.

Las referencias principales para el desarrollo de este capítulo han sido [47] y [48] y además para la sección 10.3 se ha acudido también al artículo [33].

10.1. La autosemejanza de la función zeta y el teorema de equivalencia de Bagchi

Enunciado el teorema de universalidad de Voronin, es natural hacerse la siguiente pregunta: ¿es posible aproximar funciones con ceros mediante traslaciones de la función ζ ? Nótese que el teorema de universalidad de Voronin no nos da ninguna información sobre esta posibilidad: ni a favor, ni en contra. La respuesta a esta pregunta es en general negativa (veremos una demostración formal más adelante) y lo estudiaremos a conciencia para un caso muy concreto: la mismísima función ζ de Riemann. Llegados a este punto es necesaria la siguiente definición:

Definición 10.1. Sea f una función holomorfa en una banda vertical $\mathcal{B}$. Diremos que f satisface la propiedad de **autosemejanza** en el compacto $K \subset \mathcal{B}$ si puede aproximarse por ella misma en el siguiente sentido:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \max_{z \in K} |f(z + i\tau) - f(z)| < \varepsilon \right\} \right) > 0, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0. \quad (10.1)$$

En particular, en las siguientes páginas estaremos interesados en la autosemejanza de la función ζ y en las consecuencias que esto pudiera tener; más concretamente, en vista del teorema 9.9, estudiaremos la autosemejanza de ζ para compactos de la banda crítica y las relaciones que esto guarda con otros problemas referentes a la función ζ , como por ejemplo, la Hipótesis de Riemann.

Si la función ζ es autosemejante o no en la banda crítica es una cuestión que continúa abierta hoy en día, aunque sí se ha avanzado en algunas direcciones con respecto a este tema: uno de los resultados más interesantes en esta dirección es el **teorema de equivalencia de Bagchi**. Dicho teorema afirma que ζ es autosemejante en la banda crítica si y sólo si es cierta la Hipótesis de Riemann, poniendo en evidencia la relación entre la posición de los ceros de ζ y su propiedad de universalidad que anunciamos anteriormente.

Teorema 10.2 (Teorema de equivalencia de Bagchi, 1981). *La Hipótesis de Riemann es cierta si y sólo si para todo K compacto en $\frac{1}{2} < \Re(z) < 1$ con complementario conexo y para todo $\varepsilon > 0$ se tiene:*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \max_{z \in K} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z)| < \varepsilon \right\} \right) > 0.$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE EQUIVALENCIA DE BAGCHI.

($\Rightarrow$): Si la Hipótesis de Riemann es cierta, entonces la función ζ no tiene ningún cero en $\frac{1}{2} < \Re(z) < 1$ y por tanto, podemos aplicarle el teorema de universalidad de Voronin en su versión más fuerte, teorema 9.9; obteniendo de esta manera:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \max_{z \in K} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z)| < \varepsilon \right\} \right) > 0$$

donde K denota cualquier compacto de la banda $\frac{1}{2} < \Re(z) < 1$ cuyo complementario sea conexo.

($\Leftarrow$): Supongamos que la Hipótesis de Riemann no es cierta; entonces, existe un cero $\varrho \in \frac{1}{2} < \Re(z) < 1$. Veamos que es imposible que se satisfaga la siguiente desigualdad asintótica:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \max_{z \in K} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z)| < \varepsilon \right\} \right) > 0 \quad (10.2)$$

donde K es cierto compacto en $\frac{1}{2} < \Re(z) < 1$ tal que $\varrho \in K$, y que más adelante definiremos explícitamente.

Supongamos que sí se satisface la desigualdad de la ecuación (10.2): entonces, dado $\varepsilon > 0$, definamos

$$\delta := \inf \left\{ r > 0 : \varepsilon < \min_{|z - \varrho| = r} |\zeta(z)| \right\},$$

del teorema de los ceros aislados deducimos que $\delta > 0$. Por otro lado, por hipótesis se sigue la existencia de $\tau > 0$ de modo que

$$\max_{|z - \varrho| \leq \delta} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z)| = \max_{|z - \varrho| = \delta} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z)| < \varepsilon < \min_{|z - \varrho| = \delta} |\zeta(z)|. \quad (10.3)$$

Ahora, en virtud del teorema de Rouché¹, tenemos que $\zeta(z + i\tau)$ y $\zeta(z)$ tienen el mismo número de ceros en $\mathbb{D}(\varrho, \delta)$; por lo que existe $\tilde{\varrho} \in \{z + i\tau \in \mathbb{C} : |z - \varrho| \leq \delta\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - i\tau - \varrho| \leq \delta\}$ donde se anula la función ζ . Localmente, cerca de ϱ , el desarrollo de Taylor de la función ζ debe ser del tipo

$$\zeta(z) = c \cdot (z - \varrho)^m + O(|z - \varrho|^{m+1})$$

para ciertos $c \in \mathbb{C}$ no nulo y $m \geq 1$ entero; por lo que, en vista de (10.3) tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \varepsilon &> |\zeta(\tilde{\varrho}) - \zeta(\tilde{\varrho} - i\tau)| = |\zeta(\tilde{\varrho} - i\tau)| \geq |c| \cdot |\tilde{\varrho} - i\tau - \varrho|^m + O(|\tilde{\varrho} - i\tau - \varrho|^{m+1}) \\ &= |c| \cdot |\tilde{\varrho} - i\tau - \varrho|^m + O(\delta^{m+1}). \end{aligned}$$

Lo que, despejando, nos lleva a la siguiente estimación sobre la distancia entre los ceros ϱ y $\tilde{\varrho}$:

$$|\tilde{\varrho} - i\tau - \varrho| \leq \left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)^{\frac{1}{m}} + O\left(\delta^{1+\frac{1}{m}}\right).$$

Como $\delta = o(\varepsilon^{m+1})$, se sigue de esta última desigualdad que para δ suficientemente pequeño, se cumple

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < \Re(\varrho) - 2\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)^{\frac{1}{m}} < \Re(\tilde{\varrho}); \\ |\Im(\tilde{\varrho}) - (\tau - \Im(\varrho))| < 2\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)^{\frac{1}{m}}. \end{cases} \quad (10.4)$$

Veamos como toda esta construcción contradice al teorema de Bohr-Landau, teorema 7.12. Hagamos la siguiente estimación sobre el número de ceros de ζ : puede ocurrir que diferentes valores de τ que satisfagan (10.3) den lugar al mismo cero; no obstante, las desigualdades (10.4) acotan dicha región en la que distintos τ pueden dar lugar al mismo cero. Usando la siguiente notación

$$\sigma_0 := \Re(\varrho) - 2\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)^{\frac{1}{m}},$$

del párrafo anterior se deduce la siguiente cota inferior para el número de ceros de ζ :

$$\begin{aligned} N\left(\sigma_0, T + \Im(\varrho) + 2\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)^{\frac{1}{m}}\right) \\ \geq \frac{1}{4}\left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot m \left(\left\{\tau \in [0, T] : \max_{|z - \varrho| \leq \delta} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z)| < \varepsilon\right\}\right), \end{aligned}$$

y pasando al límite, obtenemos:

$$\begin{aligned} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot N\left(\sigma_0, T + \Im(\varrho) + 2\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)^{\frac{1}{m}}\right) \\ \geq \frac{1}{4}\left(\frac{|c|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{\tau \in [0, T] : \max_{|z - \varrho| \leq \delta} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z)| < \varepsilon\right\}\right) > 0. \end{aligned}$$

Entrando en contradicción con el teorema de Bohr-Landau que afirma: $N(\sigma, T) = o(T)$ para todo $\sigma > \frac{1}{2}$.

□

¹Lea, lector, la nota posterior a esta demostración si tiene mala memoria.

Nota 10.1.1 (El teorema de los ceros de Rouché): Sumando y restando adecuadamente, pueden enunciarse varias versiones equivalentes del teorema de Rouché. La que damos aquí es la siguiente:

Teorema 10.3 (Teorema de Rouché). *Sean f, g funciones holomorfas en un dominio Ω ; y sea $C \subset \Omega$ un subconjunto con frontera ∂C continua. Entonces, si se cumple*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, \quad \text{para todo } z \in \partial C,$$

f y g tienen el mismo número de ceros en C .

10.2. Autosemejanza y casi periodicidad de la función zeta

Quizás sorprenda al lector conocer que ya en 1922 Harald Bohr demostró un enunciado íntimamente relacionado con el del teorema de equivalencia de Bagchi, véase [7]. Para enunciarlo, es necesario que vamos algunas definiciones previamente:

Definición 10.4. Sea $\chi : \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ un caracter multiplicativo módulo q . Se define su **función L de Dirichlet** como la función de variable compleja dada por:

$$L(z, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^z} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^z} \right)^{-1}.$$

Las funciones L de Dirichlet tienen un comportamiento muy similar al de las funciones ζ de Riemann o η de Dirichlet; de hecho, ambas pueden verse como casos particulares de funciones L . Al igual que para la función ζ , se conjetura que para todo caracter χ módulo q la función $L(z, \chi)$ no se anula en el semiplano $\Re(z) > \frac{1}{2}$; a dicha conjetura se la conoce como **Hipótesis de Riemann generalizada**.

El interés por toda esta historia radica en la siguiente noción, introducida por Bohr y profundamente relacionada con la propiedad de autosemejanza:

Definición 10.5. Diremos que la función $L(z) := L(z, \chi)$ es **casi periódica** en el compacto K si para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\dots < \tau_{-2} < \tau_{-1} < 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ tal que

$$\liminf_{m \rightarrow \pm\infty} (\tau_{m+1} - \tau_m) > 0 \quad \text{y} \quad \limsup_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{\tau_m}{m} < +\infty$$

y para la cual

$$|L(z + i\tau_m) - L(z)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } z \in K.$$

Reflexionemos en primer lugar sobre las relaciones que hay entre las nociones de autosemejanza y casi periodicidad: es evidente que toda función autosemejante en cierta región es asimismo casi periódica, sin embargo el recíproco no es cierto; por lo que en ningún caso son definiciones equivalentes.

Entre otras cosas, Bohr demostró que todas las funciones L de Dirichlet eran casi periódicas en su plano de convergencia absoluto. Aunque sin demostración, dejemos el enunciado en forma de teorema, véase [7].

Teorema 10.6. *Sea χ un caracter cualquiera y $L(z, \chi)$ su función L asociada. Entonces, $L(z, \chi)$ es casi periódica en su plano de convergencia absoluto.*

Aplicando este teorema a la función ζ se deduce:

Corolario 10.7. *La función ζ de Riemann es casi periódica en el semiplano $\Re(z) > 1$.*

Pero además, Bohr descubrió una interesantísima equivalencia entre la Hipótesis de Riemann y la propiedad de casi periodicidad:

Teorema 10.8. *Sea χ un caracter no trivial. Entonces, la Hipótesis de Riemann generalizada es cierta para $L(z, \chi)$ si y sólo si $L(z, \chi)$ es una función casi periódica en el semiplano $\Re(z) > \frac{1}{2}$.*

Nótese que las hipótesis del teorema 10.8 impiden al caracter χ ser el homomorfismo trivial, por lo que éste no puede aplicarse a la función ζ . En ese sentido, el teorema de equivalencia de Bagchi y la propiedad de autosemejanza rellenan ese caso que no tenía cabida en las hipótesis del teorema 10.8.

10.3. ¿Qué se sabe de la autosemejanza de la funcion zeta?

En esta sección enunciaremos sin demostrar algunos resultados que se conocen sobre la autosemejanza de la función ζ . El primer resultado que enunciaremos recuerda (y generaliza) al que vimos en el corolario 10.7 y afirma que la función ζ satisface la propiedad de autosemejanza en su plano de convergencia absoluta $\Re(z) > 1$. Aunque no lo demostraremos, puede darse una prueba usando algunas de las herramientas que Bohr empleó ya en 1922 en su artículo [7] para demostrar el teorema 10.6.

Teorema 10.9. *Sea K un compacto cualquiera en el semiplano $\Re(z) > 1$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \max_{z \in K} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z)| < \varepsilon \right\} \right) > 0.$$

Mi afán no es restarle mérito a la demostración del teorema anterior; sin embargo, teniendo en cuenta que para $\Re(z) > 1$ podemos valernos de la representación de la función ζ como serie de Dirichlet, no es de extrañar que la prueba del teorema 10.9 sea, a fin de cuentas, un ejercicio (complicado) de Análisis. Sin embargo, para probar la autosemejanza en $\frac{1}{2} < \Re(z) < 1$ ya no podemos valernos de esta herramienta explícita. Es por ello que las ideas que se usan para demostrar el teorema 10.9 no son extrapolables a la demostración del siguiente teorema:

Teorema 10.10 (Nakamura, 2012). *Para todo $r \in \mathbb{R}$ no nulo, $\varepsilon > 0$ y K un compacto de $\frac{1}{2} < \Re(z) < 1$, se tiene que*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot m \left(\left\{ \tau \in [0, T] : \max_{z \in K} |\zeta(z + i\tau) - \zeta(z + ir\tau)| < \varepsilon \right\} \right) > 0.$$

Aunque citemos a Takeshi Nakamura como autor del teorema, lo cierto es que varios autores han colaborado en su demostración: el primero de estos nombres es el de Łukasz Pańkowski, quien probó el teorema 10.10 para el caso en que $r \in \mathbb{R}$ fuese un número irracional, véase [36]; el segundo de estos nombre es el de Ramunas Garunkštis, quien probó de manera independiente a Takeshi Nakamura, el teorema 10.10 para el caso en que $r \in \mathbb{R}$ fuese un número racional no nulo, véase [18].

Así pues, lector, estamos a tan sólo un número de demostrar la Hipótesis de Riemann: pruebe por esta vía si lo tiene a bien, quizás llegue a buen puerto.

Índice alfabético

- abscisa de convergencia, 59
 - absoluta, 60
- Arzelà
 - Cesare, 55
- Ascoli
 - Giulio, 55
- autosemejanza, 105
- Bagchi
 - Bhaskar, 103
- banda crítica, 71
- bases polinómicas de Lagrange, 26
- Bergman
 - Stefan, 19
- Bernstein
 - Sergei, 25
- Birkhoff
 - George David, 85
- Bohr
 - Harald, 76
- ceros de ζ
 - no triviales, 70
 - triviales, 70
- cerrado simple, 51
- conjunto de valores, 9
- conjunto medible Jordan, 52
- contraejemplo de Marcinkiewicz, 13
- convergencia uniforme sobre compactos, 22
- Courant
 - Richard, 89
- criterio de Weyl
 - para curvas, 52
 - para sucesiones, 49
- De la Vallée Poussin
 - Charles-Jean, 73
- dependencia lineal, 45
- desigualdad
 - de Bernstein, 25, 33
 - de Chebyshev, 103
 - de Markov, 25
 - de Markov (teoría de la medida), 103
 - de Minkowski, 19
- Dirichlet, 57
- ecuación funcional de ζ , 70
- equidistribuida
 - curva, 51
 - sucesión, 47
- espacios de Bergman, 19
- Euler
 - Leonhard, 70
- fórmula
 - de Jensen, 74
- fórmula de Stirling
 - para $\Gamma(z)$, 65
- familia equicontinua, 55
- familia uniformemente acotada, 55
- Fekete
 - Mihály, 83
- función
 - $\Gamma(z)$ gamma, 65
 - $\eta(z)$ de Dirichlet, 61
 - $\pi(x)$ contadora de primos, 71
 - $\psi(x)$ de Chebyshev, 71
 - $\zeta(z)$ de Riemann, 69
 - L de Dirichlet, 108
- función casi periódica, 108
- Hadamard
 - Jacques, 73
- Hipótesis de Riemann, 71
 - generalizada, 108
- identidad de Euler, 70
- independencia lineal, 45
- interpolación
 - de Chebyshev, 29
 - de Lagrange, 26
- Jensen
 - Johan, 74

-
- Kronecker
 - Leopold, 45
 - línea de convergencia, 60
 - absoluta, 60
 - Lévy
 - Paul, 12
 - Landau
 - Edmund, 76
 - Laurinčikas
 - Antanas, 103
 - lema fundamental, 92
 - logaritmo integral, 73
 - Lucas
 - Édouard, 31
 - Félix, 31
 - Marcinkiewicz
 - Józef, 13
 - Markov
 - Andréi Andréyevich, 25
 - medida de Jordan, 51
 - Mendeléyev
 - Dmitri, 25
 - nodos de Chebyshev, 27
 - nodos de interpolación, 26
 - operadores hipercíclicos, 86
 - orden, 61
 - de una función, 61
 - finito, 61
 - Pólya
 - George, 29
 - Paley
 - Raymond, 35
 - plano de convergencia, 60
 - absoluta, 60
 - polinomio de Chebyshev, 27
 - polinomio interpolador, 26
 - producto de Euler, 70
 - finito, 92
 - parcial, 79
 - productos de Euler
 - parciales, 79
 - relativamente compacto, 55
 - reordenación, 9
 - Riemann
 - Bernhard, 71
 - serie
 - armónica alternada, 11
 - condicionalmente convergente, 10
 - convergente, 9
 - incondicionalmente convergente, 10
 - serie absolutamente convergente
 - de números, 10
 - de vectores, 12
 - series de Dirichlet, 57
 - ordinarias, 57
 - Steinitz
 - Ernst, 12
 - Szegő
 - Gábor, 29
 - teorema
 - de aproximación de Dirichlet, 44
 - de aproximación de Kronecker, 45
 - de aproximación de Weierstrass, 50
 - de Arzelà-Ascoli, 55
 - de Bohr-Courant, 89
 - de Bohr-Landau, 80
 - de convergencia de Weierstrass, 23
 - de Dvoretzky-Rogers, 14
 - de equivalencia de Bagchi, 106
 - de Gauss-Lucas, 32
 - de Lévy-Steinitz, 12
 - de los ceros de Rouché, 108
 - de los números primos, 73
 - de Marden, 32
 - de Mergelyan, 86
 - de Pechersky, 15
 - de Plancherel, 36
 - de reordenación de Riemann, 10
 - de separación de Hahn-Banach, 15
 - de Stone-Weierstrass, 50
 - de universalidad de Birkhoff, 85
 - de universalidad de Fekete, 83
 - de universalidad de Voronin, 90, 98
 - de universalidad de Voronin, versión ergódica, 103
 - teoremas
 - de Paley-Wiener, 39
 - tipo exponencial, 36
 - topología compacta-abierta, 54
 - toro
 - d -dimensional, 45
 - unidimensional, 44

transformada

de Fourier, 35

de Laplace, 36

uniformemente distribuida

curva, 51

sucesión, 47

universal

elemento, 83

universalidad, 83

Voronin

Sergei Mikhailovitch, 90

Weyl

Hermann, 48

Bibliografía

- [1] L.AHLFORS, *Complex analysis. An introduction to the theory of one complex variable*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 3^a Ed., (1979).
- [2] R.ARON & D.MARKOSE, *On universal functions*, J. Korean Math. Soc., **41**, (2004), no. 1, pp. 65-76.
- [3] B.BAGCHI, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta function and other allied Dirichlet series*, Tesis Doctoral, Indian Statistical Institute, Calcuta, (1981).
- [4] S.BERGMAN, *The kernel function and conformal mapping*, Amer. Math. Soc., 2^a Ed., (1970).
- [5] G.BIRKHOFF, *Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières*, Cr. R. Acad. Sci. Paris, **189**, (1929), pp. 473-475.
- [6] C.BLAIR & L.A.RUBEL, *Triply universal entire function*, Enseign. Math. (2), **30**, (1984), no. 3-4, pp. 269-274.
- [7] H.BOHR, *Über eine quasi-periodische Eigenschaft Dirichletscher Reigen mit Anwendung auf die Dirichletschen L-Funktionen*, Math. Ann., **85**, (1922), pp. 115-122.
- [8] H.BOHR & R.COURANT, *Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion*, Jour. für Reine und angew. Math., **144**, (1914), pp. 249-274.
- [9] H.BOHR & E.LANDAU, *Ein satz über dirichletsche reihen mit anwendung auf die ζ -funktion und die l-funktionen*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **37**, no. 1, (1914), pp. 269-272.
- [10] H.BOHR & E.LANDAU, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci., **158**, (1914), pp. 106-110.
- [11] J.BONET, *Reordenación de series. El teorema de Lévy Steinitz*, Gaceta de la RSME, **16**, no. 3, (2013).
- [12] N.L.CAROTHERS, *A short course on approximation theory*. Disponible en:
<http://personal.bgsu.edu/~carother/Notes/ApproxTheorySu09-Final.pdf>
- [13] P.DUREN & A.SCHUSTER, *Bergman spaces*, Mathematical surveys and monographs, **100**, Amer. Mathe. Soc., (2004).
- [14] A.DVORETZKY & C.A.ROGERS, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**, (1950), pp. 192-197.

-
- [15] H.M.EDWARDS, *Riemann's zeta function*, Pure and applied Mathematics, **58**, Academic Press, (1974).
 - [16] J.L.FERNÁNDEZ, *Variable compleja II*, en construcción.
 - [17] R.GARUNKŠTIS, *On the Voronin's universality theorem for the Riemann zeta-function*, Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb., **6**, (2003), pp. 29-33.
 - [18] R.GARUNKŠTIS, *Self-approximation of Dirichlet L-functions*, J. Number Theory, **131**, no. 7, (2011), pp. 1286–1295.
 - [19] G.GODEFROY & J.SHAPIRO, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal., **98**, (1991), no. 2, pp. 229-269.
 - [20] A.GRANVILLE, *Harald Cramér and the distribution of prime numbers*, Scandinavian Actuarial Journal, **1**, (1995), pp. 12-28.
 - [21] K-G.GROSSE-ERDMANN, *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc., **36**, no. 3, (1999), pp. 345-381.
 - [22] J.HADAMARD, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France, **24**, (1896), pp. 199–220.
 - [23] G.H.HARDY & M.RIESZ, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **18**, Cambridge Univ. Press, (1915).
 - [24] A.E.INGHAM, *The distribution of prime numbers*, Cambridge Univ. Press, **30**, (1932).
 - [25] D.KALMAN, *An elementary proof of Marden's Theorem*, Amer. Math. Monthly, **115**, (2008), pp. 330-338.
 - [26] C.KITAI, *Invariant closed sets for linear operators*, Dissertation, Univ. Toronto, (1982).
 - [27] L.KRONECKER, *Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen*, Berliner Sitzungsberichte, (1884), pp. 1179–1193, 1271–1299.
 - [28] L.KUIPERS & H.NIEDERREITER, *Uniform distributions of sequences*, Dover Publications Inc., Mineola, NY, (2006).
 - [29] A.LAURINČIKAS, *Limit theorems for the Riemann zeta-function*, Springer Science and Business media, **352**, (2013).
 - [30] P.LÉVY, *Sur les séries semi-convergentes*, Nouv. Annales, **5**, no. 4, (1905), p. 506.
 - [31] W.LUH, *Universalfunktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten*, Aequationes Mathematicae, **19**, no. 1, (1979), pp. 183-193.
 - [32] J.MARCINKIEWICZ, *Sur les nombres dérivés*, Fund. Math., **24**, (1935), pp. 305-308.
 - [33] T.NAKAMURA, *The generalized strong recurrence and the Riemann hypothesis*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B34**, (2012), pp. 265–275.
 - [34] V.NESTORIDIS, *A constructive proof of the existence of universal Taylor series*, preprint Département de Mathématiques, Université d'Orléans, BP. 6759, 45067 Orléans cedex 2, France (1996).

- [35] J.PÁL, *Zwei kleine Bemerkungen*, Tohoku Math. J., **6**, (1914/15), pp. 42-43.
- [36] Ł.PAŃKOWSKI, *Some remarks on the generalized strong recurrence for L-functions*, New directions in value-distribution theory of zeta and L-functions, Ber. Math., Shaker Verlag, Aachen, (2009), pp. 305–315.
- [37] S.J.PATTERSON, *Introduction to the theory of the Riemann zeta-function*, Cambridge studies in advanced mathematics, **14**, (1988).
- [38] D.V.PECHERSKY, *On the permutation of the terms of functional series*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **209**, (1973), pp. 1285-1287.
- [39] G.PÓLYA & G.SZEGŐ, *Problems and theorems in analysis II*, Springer-Verlag, (1976).
- [40] B.RIEMANN, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, Monatsberichte der Berliner Akad., (1859), pp. 671-680.
- [41] P.ROSENTHAL, *The remarkable theorem of Lévy and Steinitz*, Amer. Math. Monthly, **94**, (1987), pp. 342-351.
- [42] W.RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, (1966).
- [43] W.RUDIN, *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York, (1973).
- [44] YA.G.SINAI, *Introduction to ergodic theory*, Princeton Univ. Press, (1976).
- [45] M.SPIVAK, *Calculus*, Reverté S.A., 2^a Ed., (1992).
- [46] E.STEINITZ, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, Jour. für Reine und angew. Math., **143**, (1913), pp. 128-175; **144**, (1914), pp. 1-40.
- [47] J.STEUDING, *On the universality of the Riemann zeta-function*, (2002).
- [48] J.STEUDING, *Value-distribution of L-functions*, Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2007).
- [49] E.C.TITCHMARSH, *The theory of functions*, Oxford Univ. Press, 2^a ed., Oxford, (1939).
- [50] E.C.TITCHMARSH, *The zeta-function of Riemann*, Cambridge Univ. Press, Cambridge tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **26**, (1930).
- [51] C-J.DE LA VALLÉE POUSSIN, *Recherches analytiques de la théorie des nombres premiers*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **21B**, (1896), pp. 351-368.
- [52] S.M.VORONIN, *Theorem on the “universality” of the Riemann zeta-function*, Math. USSR Izvestija, **9**, (1975), no. 3, pp. 443-453.
- [53] H.WEYL, *Über die Gleichverteilung der Zahlen mod 1*, Math. Ann., **77**, no. 3, (1916), pp. 313–352.