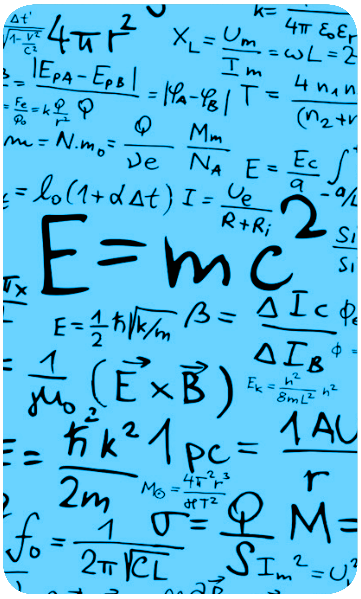


MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación de Profesorado y Educación / 14-15

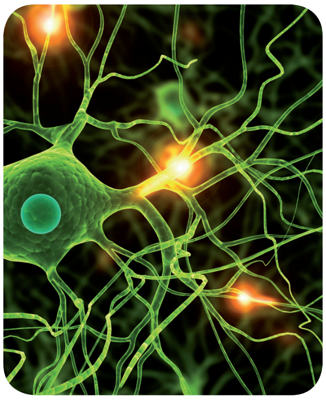
UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

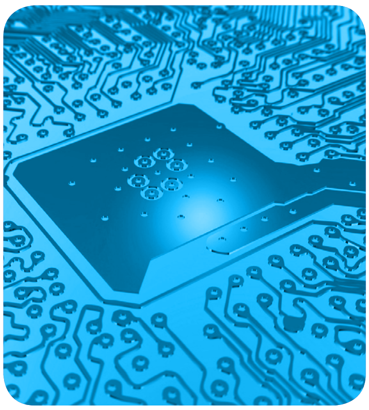
Campus Internacional excelencia UAM CSIC+

Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (Matemáticas)

Sistema Zome. Aprendiendo geometría por descubrimiento

Mª del Pilar Nieto Pérez





UAM EDICIONES

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Sistema Zome. Aprendiendo geometría por descubrimiento

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Autora: Mª del Pilar Nieto Pérez

Director: Eugenio Hernández

20 de Junio de 2015

SISTEMA ZOME. APRENDIENDO GEOMETRÍA POR DESCUBRIMIENTO

1. RESUMEN

En el presente trabajo se expone una propuesta de desarrollo de las unidades didácticas del bloque de Geometría para un curso de 3º de ESO utilizando una metodología de trabajo colaborativo donde los alumnos aprenderán mediante la construcción y manipulación de figuras y cuerpos geométricos.

El objetivo principal de esta metodología de aprendizaje es aumentar la motivación del estudio de las Matemáticas y transferir los conocimientos adquiridos a otros ámbitos de las Ciencias y las Artes.

2. INTRODUCCIÓN

Con la herramienta *Zome* el estudio de las Matemáticas llega a ser más manipulativo. Los alumnos pueden estar construyendo y viendo la relación entre las formas, y así mejorar sus habilidades visuales y espaciales. Además, se relaciona la Geometría con otros ámbitos de las Matemáticas y se ponen los conocimientos matemáticos en relación con otras ramas de la ciencia como son la Tecnología, la Arquitectura, la Bilogía o la Geología; y con las Artes plásticas.

Todas las imágenes de polígonos y poliedros construidos con *Zome* son fotografías tomadas de modelos que yo misma he construido.

3. CONTEXTO EDUCATIVO

La Geometría es un bloque de la programación del currículo de Educación Secundaria que en casi todos los centros educativos se suele dejar para el final del curso académico, y los alumnos lo relacionan con una parte aislada donde “hay que aprenderse fórmulas”. Esto nos indica que no se está enseñando la geometría de forma adecuada desde los centros de Educación Secundaria.

El estudio de la geometría requiere en muchos casos relacionar elementos y tener una visión espacial que, usando una metodología tradicional únicamente a base de libro, cuaderno y pizarra, es difícil adquirir. Por ejemplo, durante el período de prácticas he encontrado que los alumnos de secundaria obligatoria, e incluso muchos alumnos de bachillerato, tenían problemas para ver en un objeto la relación de perpendicularidad entre elementos por la distorsión que produce la perspectiva al representarlos. Manipulando el objeto, tocándolo y girándolo, les quedaban perfectamente claras las relaciones.

Cuando hablamos de geometría también estamos hablando de proporción, de estructuras bidimensionales y tridimensionales, de relaciones entre partes para formar un todo… Quizás la geometría sea la parte más experimental de la matemática y la podemos relacionar muy fácilmente con problemas de la vida cotidiana, para así mejorar las competencias básicas de los alumnos.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA

Explicaremos una manera de desarrollar las unidades didácticas del bloque de Geometría en el tercer curso de la Educación Secundaria haciendo uso de una herramienta manipulativa como lo es el sistema *Zome.*

- U.D. 1: “Geometría del plano”.
- U.D. 2: “Geometría del espacio”.

4.1. CONTEXTO.

Nivel: 3º ESO

Bloque de contenidos: se constituye como base de contenidos los incluidos en el bloque 3 de Geometría por el Decreto 48/2015, de 14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria [3]. No obstante, al tratarse de un proyecto de innovación educativa habrá contenidos que se desarrollen en estas unidades didácticas y que no aparezcan en el currículum.

Muchos de los conceptos, especialmente los referidos a polígonos, poliedros y a cuerpos redondos, ya los habrán trabajado en cursos anteriores.

Algunos contenidos relacionados con las figuras curvas y cuerpos de revolución no están incluidos en estas unidades didácticas por su imposibilidad de construcción mediante el sistema *Zome.*

4.2. CONTRIBUCIÓN A LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS BÁSICAS.

La LOMCE define siete competencias clave que deben estar integradas en cada una de las materias durante la etapa educativa. Con esta unidad pretendemos que nuestros alumnos/as trabajen los siguientes indicadores:

<u>Comunicación lingüística.</u>

- Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de las cuestiones y retos planteados durante las sesiones.
- Saber describir un objeto utilizando correctamente el vocabulario geométrico.

<u>Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.</u>

- Dominar los elementos de la geometría como medio para resolver problemas.
- Utilizar los conceptos geométricos aprendidos para describir elementos del mundo físico.

<u>Competencia digital.</u>

- Fotografiar las construcciones realizadas y presentarlas al resto de compañeros haciendo uso de herramientas tecnológicas.
- Buscar y seleccionar información en la red valorando su fiabilidad.

Aprender a aprender.

- Ser capaz de analizar el propio dominio de los conceptos geométricos adquiridos.
- Planificar el trabajo.
- Descubrir formas diferentes de resolver un reto o una práctica a través de la propia experimentación y el razonamiento.
- Desarrollar la capacidad de reflexión y el sentido crítico, aprendiendo de los errores cometidos.
- Tener conciencia y control de las propias capacidades y del propio proceso de aprendizaje.

Competencias sociales y cívicas.

- Desarrollar actitudes adecuadas para el trabajo en equipo: saber escuchar, valorar la aportación de los compañeros, saber encajar y aprender de las críticas, ser capaz de detectar los errores cometidos por los compañeros y ayudarles a corregirlos.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.

- Tomar decisiones en los procesos de resolución de problemas valorando la conveniencia del proceso por su sencillez y utilidad.
- Mostrar una actitud de curiosidad e indagación.

Conciencia y expresiones culturales.

- Identificar la geometría en la naturaleza, en el arte y en las construcciones humanas.

4.3. OBJETIVOS

U.D. 1: "GEOMETRIA DEL PLANO".

- Determinar los ángulos formados al intersecar dos rectas.
- Distinguir de entre distintas construcciones cuáles de ellas corresponden a polígonos y saber clasificarlos.
- Calcular la suma de ángulos interiores de un polígono y determinar el ángulo interior de un polígono regular.
- Determinar la existencia de relación de semejanza entre dos polígonos, saber calcular la razón de semejanza y establecer relaciones de proporcionalidad entre elementos homólogos de polígonos semejantes utilizando el teorema de Tales.
- Calcular áreas de polígonos semejantes.
- Identificar centros y ejes de simetría en polígonos y otros elementos de la naturaleza.
- Reconocer y analizar transformaciones geométricas que llevan de una figura a otra.

U.D. 2: "GEOMETRÍA DEL ESPACIO".

- Conocer qué es un ángulo diedro.
- Conocer la definición, elementos y tipos de poliedros.
- Saber diferenciar los cinco poliedros regulares y razonar por qué sólo existen cinco.
- Relacionar el número de aristas, caras y vértices mediante el teorema de Euler.

- Aplicar el teorema de Descartes a la construcción de poliedros.
- Identificar ejes y planos de simetría en poliedros.
- Conocer las características de los poliedros semirregulares e identificarlos.
- Calcular volúmenes de poliedros semejantes.
- Conocer cómo se generan los cuerpos de revolución a partir de la rotación de una figura plana sobre un eje.

4.4. CONTENIDOS

U.D. 1: "GEOMETRÍA DEL PLANO".

- Ángulos.
- Polígonos. Suma de ángulos interiores.
- Semejanza de polígonos. Teorema de Tales.
- Proporción. Escalas.
- Perímetro y área de polígonos.
- Simetría. Ejes y centro de simetría.
- Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías.

U.D. 2: "GEOMETRÍA DEL ESPACIO".

- Ángulos diedros.
- Poliedros. Prismas, antiprismas y pirámides.
- Poliedros regulares.
- Vértices, aristas y caras. Teorema de Euler. Topología.
- Teorema de Descartes.
- Ejes y planos de simetría.
- Poliedros semirregulares.
- Volumen.

4.5. METODOLOGÍA

Zome es una herramienta que ayuda a entender conceptos e ideas geométricas en dos y tres dimensiones, especialmente ideas sobre poliedros. Cuando los alumnos manipulan objetos y son ellos mismos quienes construyen la geometría, contribuimos a aumentar su motivación por el estudio de esta área.

4.5.1. Metodología didáctica. Aprendiendo por descubrimiento.

La primera vez que el profesor lleva a clase el Sistema *Zome,* es bueno que les permita investigar y manipular las piezas para que puedan deducir cómo funciona. Este proceso estimula la curiosidad de los alumnos y les permite descubrir nuevas ideas que retan a los conocimientos previos.

Casi todas las sesiones empezarán con una actividad inicial. Esta actividad en algunos casos podrá estar guiada por el profesor, pero en otros serán los alumnos quienes experimenten y descubran por ellos mismos. Partirán de los conocimientos previos adquiridos durante el curso anterior y sesiones anteriores.

Los alumnos trabajarán por grupos de 5 alumnos y heterogéneos formados por el profesor, persiguiendo un aprendizaje colaborativo. Esta forma de trabajo tiene varias ventajas, entre otras:

- Les permite discutir sobre los retos propuestos por el profesor en las actividades iniciales, y mediante la formación de grupos heterogéneos los alumnos más avanzados pueden mostrar los hallazgos descubiertos al resto de compañeros, contribuyendo a atender a la diversidad del alumnado en el aula.
- Los alumnos se comunican con sus compañeros haciendo uso del lenguaje matemático.
- Se requieren menos piezas *Zome*.
- Se trabajan competencias sociales: ayudar al compañero, reforzar los logros del equipo, encajar críticas, establecer una comunicación fluida, resolver conflictos, negociar, convencer y demás habilidades sociales.
- Se crea una interdependencia positiva. Cada alumno asumirá un rol en el grupo, y se complementarán para conseguir un producto fruto del trabajo de todos ellos. No hay lugar para los éxitos individuales, tanto los éxitos como los fracasos son el resultado de un trabajo grupal.

El profesor se paseará durante las sesiones por el aula viendo cómo trabajan los distintos equipos y planteando cuestiones. No deberá contestar de forma directa a las preguntas hechas por los alumnos sino que actuará como guía del proceso enseñanza-aprendizaje y deberá hacer participar al resto de alumnos con preguntas del tipo: "¿qué crees tú?, ¿qué pensáis los demás?, ¿estáis de acuerdo?, ¿alguien tiene una idea diferente?..." evitando el principal inconveniente del trabajo en grupo: la "elusión de responsabilidades".

No sólo debemos trabajar "jugando" con *Zome,* sino que también debemos dedicar un tiempo a la reflexión. Por ello deberá haber dos zonas separadas en el aula: una zona de construcción y otra zona de reflexión y discusión desde la que se pueda ver los objetos construidos por todos los grupos de trabajo. Es importante ver lo que otros hacen porque no se trata de competir, y así, en caso de bloqueo, un grupo puede encontrar un punto de inicio fijándose en lo que está haciendo otro grupo, o puede que dé un paso más en la dirección planteada por otro equipo. Se deben alternar estas dos actividades: construcción-reflexión, de manera que los alumnos no pierdan la atención.

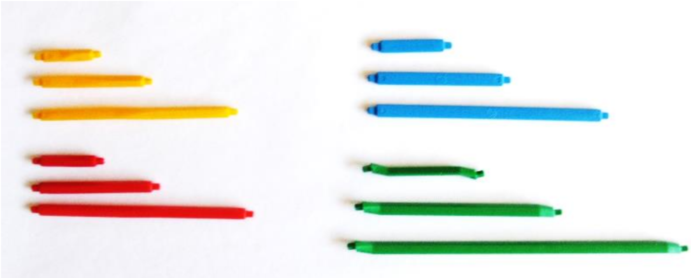
Después de cada clase siempre es desmotivador deshacer el trabajo de los alumnos, por ello las figuras geométricas se deben dejar un tiempo construidas para que los alumnos puedan verlas y estudiarlas. Si esto no fuera posible porque se necesitaran las piezas para la clase siguiente o para otra actividad, es recomendable hacer fotos o grabar las figuras producidas para que quede constancia del trabajo realizado.

4.5.2. Funcionamiento del sistema *Zome*.

Las piezas:

- **Nodos:** Tienen forma de rombicosidodecaedro con tres tipos de agujeros: de forma triangular, rectangular y pentagonal. Sirven de unión de conectores.

- **Conectores.** Hay cuatro tipos de conectores o barras que denotaremos por su inicial en inglés: azules (b), amarillos (y), rojos (r) y verdes (g). Éstos últimos son opcionales y no todos los kits de *Zome* los incluyen. De cada tipo hay tres longitudes relacionadas como veremos más adelante: pequeña (0), mediana (1) y grande (2) cuyos números están marcados en cada una de las barras. Así tenemos las siguientes barras: b_0, b_1, b_2, y_0, y_1, y_2, r_0, r_1, r_2, g_0, g_1, g_2.



Cada punta del conector ensambla en un tipo de agujero del nodo: el conector azul encaja solamente en el agujero rectangular, el amarillo en el agujero triangular y los rojos y verdes en el agujero pentagonal.

Hay otro tipo de conectores no disponibles en nuestro kit *Zome*, las barras verde-azul (*g-b*). Son de color azul por tener la misma longitud que las barras azules, pero encajan en los agujeros pentagonales como las verdes.

Las estructuras nunca deben ser forzadas para encajarse en una posición que no le corresponda. Para ver si una estructura encaja entre dos nodos, hay que mirar a través de uno al otro. Los agujeros estarán alineados y su forma te indicará qué tipo de barra se necesita.

4.5.3. Materiales

- Tizas o rotuladores de los mismos colores que nuestras piezas *Zome*.
- Kit *Zome* (uno por cada grupo de trabajo).
- Cuaderno, lápiz y lápices de colores.
- Espejo de mano.
- Barreño con agua y jabón.
- Pajita.
- Hilo.
- Flexo.
- Retroproyector.

- Proyector.
- Cámara de fotos.
- Ordenador con conexión a internet.

4.6. DESARROLLO DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS.

Para el desarrollo de las actividades propuestas en estas dos unidades didácticas me he basado en el libro *Zome Geometry. Hands-on Learning with Zome™ Models,* de George W. Hart y Henri Picciotto [7] y la página web *Zometool lesson plans* 1.1 [18].

U.D. 1: GEOMETRÍA DEL PLANO.

1. 1. ÁNGULOS

Objetivos:

- Determinar los ángulos formados al intersecar dos rectas.
- Conocer todos los ángulos que podemos construir con las estructuras *Zome* para la posterior construcción de polígonos, ya que no es posible construir cualquier ángulo con esta herramienta.

Actividad inicial: Estimar ángulos entre dos barras (sin incluir las estructuras verdes).

Conocimientos previos requeridos: cuando estén discutiendo ángulos, es útil tener terminología para describir el plano en el que se encuentra el ángulo. Los tres tipos de planos serán nombrados por el color de la barra que encaje en los agujeros de los polos cuando del plano está en el ecuador.

Planos amarillo, rojo y azul:

Explicaremos los tres planos que existen en el sistema *Zome* para que a continuación deduzcan los ángulos: (Piezas necesarias: 3 nodos, 21 barras azules, 5 barras amarillas y 5 barras rojas.)

- Cuando en el polo norte y sur haya un agujero triangular, el plano del ecuador es el plano amarillo. En él se pueden colocar sólo 6 barras azules. Luego el ángulo entre ellas: 360°/6 = 60°.
- Cuando en el polo norte y sur haya un agujero pentagonal, el plano del ecuador es el plano rojo y tan sólo puedes colocar en él 10 barras azules. Luego el ángulo entre cada una de las barras será de 360°/10 = 36°.
- Cuando en el polo norte y sur haya un agujero rectangular, el plano del ecuador es el plano azul. En él se pueden colocar 12 barras:
  - 4 barras azules formando 4 ángulos rectos (360°/4 = 90°)
  - 4 barras rojas (36°·2 = 72° y 36°·3 = 108°)*
  - 4 barras amarillas. (36° y 36°·4 = 144°)*

  Ángulo amarillo – azul en plano azul: 36°/2 = 18° y 36°·2 = 72°*
  Ángulo rojo – azul en plano azul: 36° y 90° - 36° = 54°*
  Ángulo amarillo – rojo: 36° y 36°·3 = 108°*

*NOTA: se trata de ángulos aproximados, porque necesitaríamos de la trigonometría para deducirlos.

Actividades:

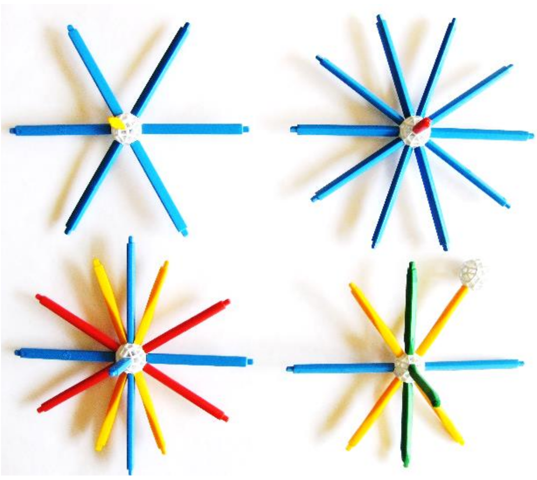
1. **Enumera todos los ángulos que puedes formar con dos barras azules. Pista: primero descubre en qué plano están las dos barras.**
   Solución: 36°, 60°, 72°, 90°, 108°, 120°, 144° y 180°.

2. **¿Cómo podemos formar un ángulo recto? Actividad guiada.**
   Primero les daremos dos estructuras amarillas y una esfera y no conseguirán formar un ángulo recto. Después les daremos dos estructuras rojas y tampoco. Finalmente les daremos dos barras azules y ya sí deberán formar el ángulo recto.
   Después les pediremos que formen un ángulo recto combinando dos colores. Con una pieza amarilla y otro azul pueden formar un ángulo de 90° y con una azul y otra roja también.
   Solución-Explicación: *En un plano amarillo, si colocamos una barra amarilla en el agujero triangular del polo norte o del polo sur, formará con las 6 barras azules un ángulo recto. En un plano rojo, si colocamos una barra roja en el agujero pentagonal de los polos, forma con cualquiera de las 10 barras azules un ángulo recto. En un plano azul si colocamos una barra azul en el agujero rectangular del polo, formará un ángulo recto con cualquier barra del ecuador.*

Plano verde:

3. **Construcción de un triángulo isósceles con dos barras amarillas y una barra azul.**
   Observarán que no está en ninguno de los tres planos (amarillo, rojo o azul), no hay agujero en el polo de ninguna esfera. La dirección polar (perpendicular al plano) sólo es posible encajando una barra verde en un agujero pentagonal. Luego el plano estará en el plano verde.

   Imagen de los planos amarillo, rojo, azul y verde:



4. **¿Cuántas barras podemos poner en un plano verde? ¿Cómo son sus ángulos?**
   Solución: podemos poner 8 barras
   a. *4 barras amarillas (70° y 110°)**

b. 2 barras azules (ángulo 180°)
c. 2 barras verdes (ángulo 180°)
d. Barra verde – azul (ángulo 90°)

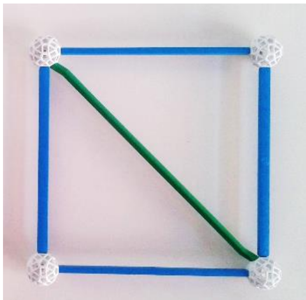
*NOTA: se trata de ángulos aproximados, porque necesitaríamos de la trigonometría para deducirlos.

Explicación:

Las estructuras verdes funcionan de forma diferente al resto porque no se encajan de forma recta en el agujero pentagonal de la esfera, sino que hace un pequeño giro. Con estas estructuras podemos conseguir ángulos no disponibles en la esfera del sistema *Zome*.

Cuando prolongamos dos estructuras verdes, se alinean a pesar del pequeño zigzag de la barra. Hay 5 maneras de orientar una estructura verde en cualquiera de los 12 agujeros pentagonales de la esfera, con lo cual podría apuntar a 60 direcciones en el espacio. Por eso el uso de las barras verdes puede ser complicado y es preferible evitarlas siempre que se pueda con alumnos que se estén iniciando en el uso de la herramienta.

5. **Vamos a construir un cuadrado con 4 barras azules y su diagonal con una barra verde. ¿Qué ángulo forman los lados y la diagonal del cuadrado azul – verde?**
Solución: 45°.



Explicación:

Cuando tengamos que construir una estructura verde es útil servirse de una estructura base azul, ya que cualquier estructura verde es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles hecho con barras azules.

1.2. POLÍGONOS

<u>Objetivos:</u>

- Distinguir de entre las distintas construcciones aquellas que son polígonos y clasificarlos.
- Conocer la suma de los ángulos interiores de un polígono.

- Conocer el ángulo interior de un polígono regular para posteriormente razonar si su construcción es posible mediante el sistema *Zome* y saber orientar las esferas para construirlo.

Actividad inicial: realizar una construcción y después explicar si la construcción realizada es un polígono.

Los polígonos son figuras cerradas que descansan sobre un plano. Para saber si una figura cerrada es un polígono bastará con posarla sobre la mesa y si todos sus nodos tocan la superficie del tablero, la figura será un polígono.

Explicaremos la clasificación de polígonos: convexos, cóncavos, regulares e irregulares.

1.2.1. *Suma de los ángulos de un polígono.*

Deduciremos la fórmula para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono, partiendo de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Dividiendo distintos polígonos en triángulos a través de las diagonales trazadas desde un mismo vértice, vamos calculando la suma de sus ángulos para llegar a deducir la fórmula general.

Actividades:

1. **Vamos a construir un rombo en el plano azul con cuatro barras rojas y 4 nodos. ¿Cuánto miden sus ángulos? ¿Cuánto suman?**

Solución: 108° y 72°.

2. **Ahora construimos un rombo en el plano azul con 4 barras amarillas y 4 esferas. ¿Cuánto miden sus ángulos? ¿Cuánto suman?**

Solución: 144° y 36°.

Nota: Es útil tener en la pizarra o en el proyector, una imagen de los 4 planos *Zome*, para conocer la amplitud de cada ángulo.

1.2.2. *Polígonos regulares.*

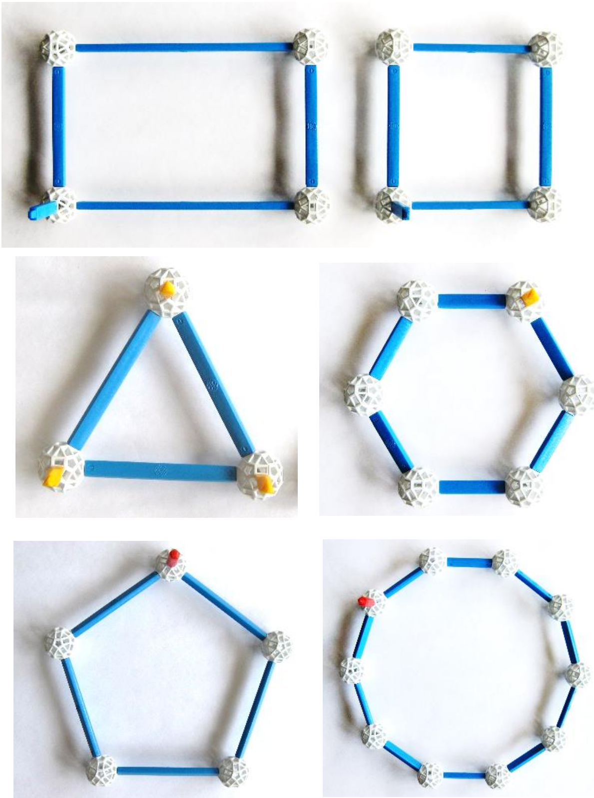
Un polígono es regular si todos sus lados y todos sus ángulos interiores son iguales.

Actividades:

1. **Construcción de polígonos regulares usando las barras azules. ¿Qué polígonos regulares podemos construir en cada uno de los planos azul, amarillo y rojo?**

Cuando todos los alumnos hayan construido uno de los cinco polígonos regulares que podemos construir con *Zome* utilizando las barras azules (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono y decágono*)*, pídeles que lo pongan sobre la mesa para que comprueben si todos los vértices apoyan en ella.

Explicación: El rectángulo y el cuadrado se encuentran situados en el plano azul, el triángulo y el hexágono regular se encuentran situados en el plano amarillo y el pentágono y el decágono se encuentran en el plano rojo.



Para poder construir un octógono regular necesitamos unas piezas especiales llamadas “verdes-azules”, no disponibles en nuestro kit *Zome.* Tienen la misma longitud que las barras de color azul, pero el conector tiene forma de pentágono y hace el mismo giro que las barras verdes.

Sin este tipo de estructuras sólo podríamos hacer un octógono con barras azules y barras verdes, pero no sería un polígono regular, pues tienen diferente longitud:

$$g_0 = \sqrt{2}b_0$$

$$g_1 = \sqrt{2}b_1$$

$$g_2 = \sqrt{2}b_2$$

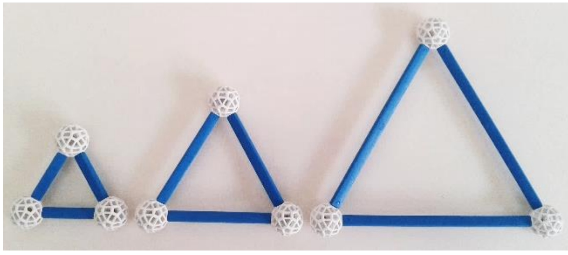
1.3. SEMEJANZA

Objetivos:

- Conocer los tres criterios de semejanza de triángulos.
- Distinguir si dos polígonos son semejantes.
- Establecer relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes y calcular su razón de semejanza.
- Utilizar el teorema de Tales para realizar medidas de elementos desconocidos.
- Conocer las propiedades de los números metálicos, en especial el número de oro.
- Usar la semejanza para escalar modelos construidos con *Zome*.

1.3.1. Triángulos semejantes.

Actividad inicial: Construir tres triángulos equiláteros: uno con b_0s, otro con b_1s y otro con b_2s. ¿Son semejantes? Nota: sólo es posible construir triángulos equiláteros con barras azules y en el plano amarillo (60°).

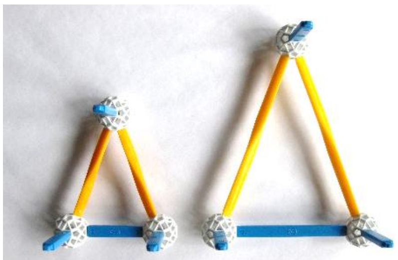


Explicación: Semejanza de triángulos.

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales. Para saber si dos triángulos son semejantes no es necesario conocer los tres lados y los tres ángulos, basta con que se cumpla uno de estos criterios:

1. Tener dos ángulos iguales.
2. Tener los tres lados proporcionales.
3. Tener dos lados proporcionales y el ángulo comprendido igual.

Construimos ahora un triángulo con $2y_0$s y $1b_0$ y a continuación construimos otro con $2y_1$ y $1b_1$ ¿Son semejantes?



Fijándonos en la posición de los nodos podemos determinar que sí son semejantes por el criterio 1.

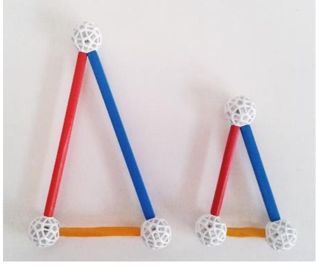
<u>Actividad guiada:</u> El profesor decide por adelantado un único modelo de triángulo que pueda construirse con el Sistema *Zome* y anota sus componentes en la pizarra. Por ejemplo: **una barra azul grande (b_2), una barra roja grande (r_2), una barra amarilla mediana (y_1) y tres nodos.**

Repartimos las piezas y les indicamos que tienen que construir distintas figuras geométricas utilizando únicamente las piezas de la "receta". Las figuras deben ser cerradas de modo que el extremo de cada varilla esté unido a otra y deben estar sobre un plano. **¿Cuántas figuras diferentes pueden construirse con esas 3 varillas y 3 esferas?**

Algunos alumnos se darán cuenta de que tan sólo puede hacerse un único triángulo. Aun así, la mayoría tendrá que trabajar con las varillas y los nodos para llegar a esta conclusión. Mientras los alumnos trabajan, pasea entre ellos y ve recogiendo todos los triángulos colgándolos de una cuerda. Asegúrate de que siempre cuelgas los triángulos por el mismo vértice (lo mejor es hacerlo por el ángulo más agudo). Ver los triángulos colgados por el mismo vértice permite una visión muy clara de que son iguales.

¿Cuántas figuras distintas han hecho? ¿Por qué construyeron todos ellos el mismo triángulo?

Repite el ejercicio con una "receta" diferente, utilizando **una varilla azul mediana (b_1), una varilla roja mediana (r_1), una varilla amarilla pequeña (y_0) y tres nodos**. Antes de que acabes



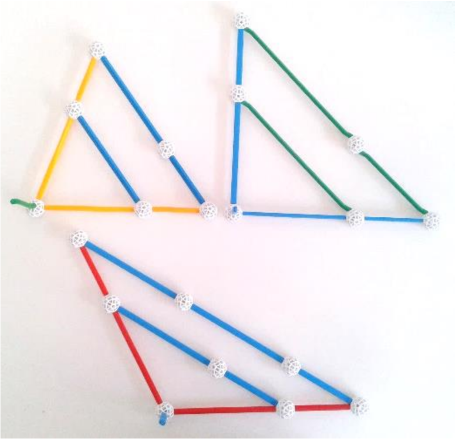
de recoger los triángulos que los alumnos construyan, habrán comprendido que los triángulos son "todos iguales, pero de distintos tamaños", es decir, son triángulos semejantes.

Explicación: definición de semejanza de polígonos.

Dos polígonos son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales. Para determinar si dos polígonos guardan relación de semejanza, los descompondremos en triángulos. Si los triángulos son semejantes, los polígonos también lo serán.

1.3.2. Teorema de Tales.

<u>Actividad inicial:</u> El profesor construye triángulos en posición de Tales. Se puede construir un triángulo rectángulo, un triángulo acutángulo y otro obtusángulo. El trabajo de los alumnos será de reflexión.



Pon atención a las esferas: Observa en qué posición están ¿Qué ángulo forman las barras amarillas y azules en los triángulos acutángulos? ¿Y las barras azules y verdes en el triángulo rectángulo? ¿Y las rojas y azules en el obtusángulo?

Observarán que las esferas están en la misma posición, luego el ángulo que determinan es el mismo. Entonces uno de los lados del segundo triángulo es paralelo a otro lado del primero. Decimos entonces que los dos triángulos son semejantes.

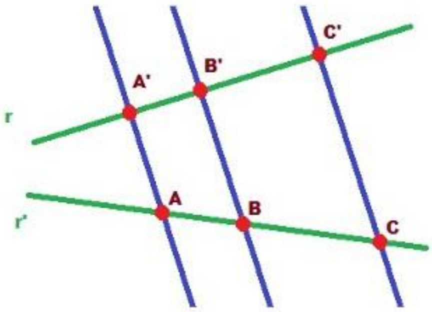
Explicación: Teorema de Tales.

Explicaremos el teorema de Tales haciendo una introducción histórica previa basándonos en el libro *A History of Greek Mathematics,* de T. Heath [8].

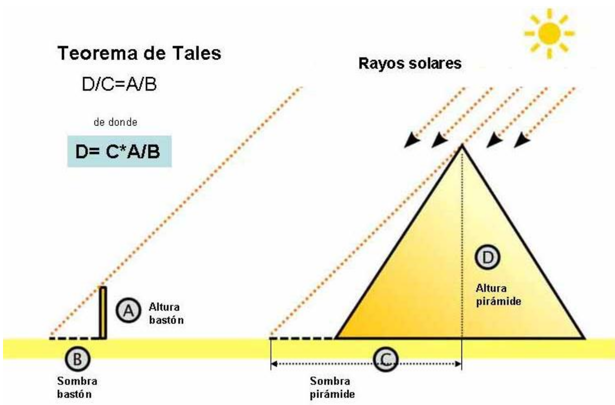
Tales de Mileto (624 a.C. - 546 a.C.), comerciante, matemático, filósofo, ingeniero y astrónomo griego. Tomó prestada la geometría de los egipcios y dio en ella un avance fundamental ya que fue el primero en emprender la tarea de demostrar exposiciones matemáticas mediante series regulares de argumentos. En otras palabras, inventó la matemática deductiva. Se le asignan entre otros los siguientes teoremas:

- Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.
- Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
- Los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales.
- Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas, son iguales.
- Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.
- Si dos rectas r y r’ se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$



Se cuenta que en uno de sus viajes a Egipto determinó la altura de la pirámide de Keops, aprovechando la sombra que esta producía en un determinado momento: aquel en el que la longitud de la sombra es igual a la de la pirámide (los rayos del Sol deben tener una inclinación de 45°) y además es perpendicular a la base. Hay dudas de que esto fuese cierto ya que estas ideas se habían manejado con mucha anterioridad en Egipto y Mesopotamia. Es más probable que Tales hubiese sido un intérprete de estas ideas.



Actividad:

1. **Construye una pirámide con *Zome*. ¿Podrías calcular su altura a partir de la longitud de su sombra y la sombra que proyecta una barra de longitud conocida?** Nota: necesitamos una linterna.

1.3.3. Razón de semejanza en Zome.

Conocimientos previos: que los alumnos tengan nociones de semejanza y conozcan el teorema de Tales.

Actividad guiada:

Objetivo de la actividad: Encontrar la relación entre la longitud de las barras de un mismo color. La longitud de la barra es considerada como la distancia entre los centros de las esferas situadas a ambos extremos de la barra.

1. **Vamos a hacer un paralelogramo repartiendo 6 nodos y 6 barras: b_0, b_1, b_2, r_0, r_1, r_2. ¿Puedes probar que tu figura es un paralelogramo?**

2. **Haz otro paralelogramo usando 6 nodos y 6 barras: b_0, b_1, b_2, y_0, y_1, y_2. Prueba que tu figura es un paralelogramo.**

3. **Haz un paralelogramo usando 6 nodos y 6 barras: r_0, r_1, r_2, y_0, y_1, y_2. Prueba que la figura es un paralelogramo.**
   Deberían ser capaces de ver la relación entre las barras de un mismo color, el patrón suma:
   $b_2 = b_0 + b_1$; $r_2 = r_0 + r_1$; $y_2 = y_0 + y_1$.

4. Vamos a usar 4 nodos y 4 barras azules para construir un triángulo isósceles en el plano rojo. Usa el patrón suma cuando construyas los dos lados iguales. Conecta el nodo que no es vértice del triángulo con el vértice opuesto.
   Prueba que la figura incluye dos triángulos isósceles semejantes y calcula la razón de semejanza.
$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_0 + b_1}{b_1} = \frac{b_2}{b_1} = \varphi \cong 1{,}62$$

5. Vamos a usar 5 nodos y 6 barras para construir un triángulo isósceles en el plano rojo. Usa el patrón suma de barras amarillas para construir los dos lados iguales. El lado desigual estará formado por la suma b_0+b_1. Conecta el nodo que no es vértice del triángulo con el vértice opuesto.
   Prueba que la figura incluye dos triángulos isósceles semejantes y calcula la razón de semejanza:
$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{y_2}{y_1} = \varphi \cong 1{,}62$$

6. **Usa el patrón suma para las barras rojas para construir un triángulo isósceles en el plano azul, usando como lado desigual b_0+b_1.** Conecta los nodos que no son vértices.
$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{r_2}{r_1} = \varphi \cong 1{,}62$$

1.3.4. Número áureo.

La razón entre la longitud de una estructura y la siguiente más pequeña del mismo color (φ) se denomina razón áurea. Además las longitudes de las barras de cualquiera de los cuatro colores x_0, x_1, x_2, forman una **sucesión de recurrencia**. Veámoslo:

Sin pérdida de generalidad, supondremos que $b_0 = 1$.

1. **Usa una razón de proporcionalidad para encontrar el valor de b_1 y b_2 en términos de φ.**

Solución: $b_1 = \varphi$, $b_2 = \varphi^2$.

2. **Escribe con el patrón suma una ecuación en función de φ.**

Solución: $\varphi^2 = \varphi + 1$

3. **Resuelve la ecuación.** Nota: La raíz negativa es irrelevante cuando estamos hablando de longitudes.

Solución: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4. **Considera la secuencia 1, φ, φ², φ³,… Cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un factor. ¿Cuál es ese factor? ¿Se trata de una progresión aritmética o geométrica?**

Solución: φ. Progresión geométrica.

5. **Usa la calculadora para encontrar un valor numérico para 1/φ y para φ².**

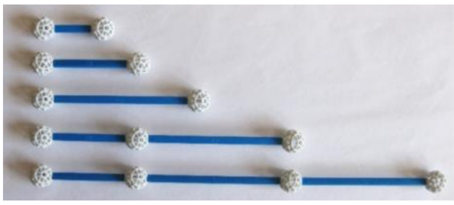
Solución: 1/φ = 0,618…; φ² = 2,618…

6. **Sabemos que 1+φ = φ². Prueba que se cumple:**

$$\boldsymbol{\varphi^{n} + \varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n+2)}}$$

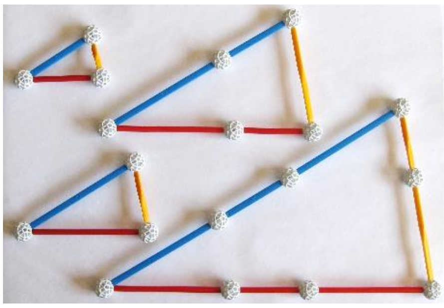
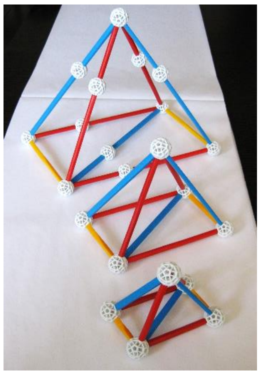
7. **¿Cómo podemos hacer estructuras de longitud x_3 y x_4 usando sólo las estructuras disponibles x_0, x_1 y x_2?**

Solución: $x_3 = x_1 + x_2$; $x_4 = x_1 + 2x_2$.



Los patrones suma y producto son útiles para escalar construcciones en *Zome*.

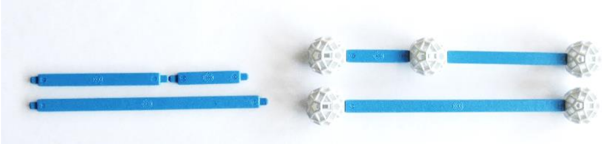
8. **Haz un triángulo y_0, b_1, r_1, y después haz al menos tres triángulos semejantes al primero, pero mayores.**
9. **Haz un poliedro usando más de un tipo de estructura. Después construye otro semejante más grande y más pequeño usando respectivamente un factor de escala φ y 1/φ.**

10. **Explica por qué se cuenta la longitud del conector como la distancia de centro a centro de nodo y no sólo la longitud de la barra.**

Solución: Si llamamos "d" al diámetro del nodo, (b_0 – d) será la longitud de barra azul más corta.

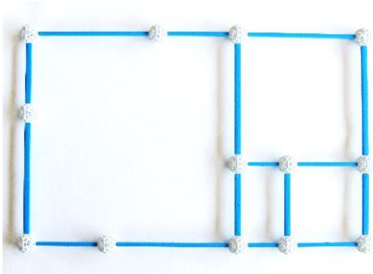
Si sumamos $(b_0 – d) + (b_1 – d) = b_0 + b_1 – 2d = b_2 – 2d$. Esto es incorrecto, puesto que sabemos que la longitud de la barra es $(b_2 – d)$.



<u>Actividades de ampliación:</u>

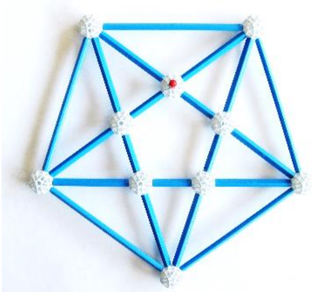
A. Espiral arquimediana.

Construye un rectángulo áureo (b_1 x b_0). Se llama así porque sus lados están en razón φ.



Ahora construye otro rectángulo áureo adosando al rectángulo áureo inicial un cuadrado de lado b_1. Si continuamos el proceso obtenemos una sucesión de rectángulos áureos. Inscribiendo cuartos de círculo en los cuadrados es posible dibujar una espiral áurea.

B. Estrella pentagonal.



Construye un pentágono regular (en el plano rojo) usando $5b_0$s.

Añade a cada lado un triángulo áureo (72°, 72°, 36°).

Después conecta cada vértice creando un pentágono mayor.

¿Cuál es el factor de escala?

Solución: ϕ^2. Porque el lado del pentágono pasa de ser b_0 a b_2.

C. Sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,… es la más conocida de las sucesiones de recurrencia. Cada término se obtiene mediante la suma de los dos términos anteriores.

$$\boldsymbol{F_i + F_{i+1} = F_{i+2}}$$

Si hacemos la razón de términos sucesivos, tenemos la siguiente secuencia:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots, \frac{F_{i+1}}{F_i}$$

Descubre el valor de la razón de proporción. ¿Qué ocurre cuando *i* se hace muy grande? Dibuja un gráfico en papel milimetrado que represente dicha razón.

Solución: Si i adquiere valores muy grandes, la razón de proporción se aproxima cada vez más al número de oro (φ). Les pediremos que dibujen un gráfico que represente la razón de proporción de términos sucesivos. Trazaremos una horizontal por φ~1,61803398… y verán cómo los puntos van saltando por encima y por debajo de la horizontal, pero acercándose cada vez más a ese valor al ir aumentando i.

1.4. ÁREA DE POLÍGONOS Y ESCALADO DE MODELOS.

Objetivos:

- Conocer el concepto de área y calcular áreas de polígonos.
- Conocer la relación que existe entre área y factor de escala.

1.4.1. Área de un polígono.

Actividad inicial: construye con *Zome* el polígono con la menor área posible.

Explicación: El cálculo del área de un polígono es una de las aplicaciones prácticas más importantes de la geometría. Surge en Egipto por la necesidad de delimitar los terrenos agrícolas tras las crecidas del Nilo.

La unidad de área más pequeña en *Zome* es b_0^2. Todas las áreas en *Zome* pueden expresarse en la forma $\theta b_0^2 \ \forall\, \theta \in R > 0$.

Como ya sabemos, el área de un triángulo es la mitad del área de un rectángulo.

$$S_{triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Actividad: Calcular el área de un triángulo de lados $2b_0$ y $1b_1$.

Explicación: A veces no resulta fácil determinar la altura de un triángulo escaleno, sobre todo si se trata de un triángulo escaleno. Un método alternativo para calcular el área de un triángulo lo descubrió Herón hace más de 2000 años. La **fórmula de Herón** es útil cuando conocemos los tres lados del triángulo (x, y, z).

Puedes consultar el libro *Viaje a través de los genios. Teoremas de los grandes matemáticos,* de William Durham [5], donde presenta una demostración sencilla del teorema de Herón.

$$S_{triángulo} = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

Donde *s* es el semiperímetro del triángulo:

$$s = \frac{x+y+z}{2}$$

Actividades:

1. **Construye un triángulo mediante $2b_1$s y una b_0.**
   a. **Calcula su área usando ambos métodos.**
   b. **Calcula el área de un pentágono de lado b_0. (Pista: divídelo en triángulos)**
   c. **Calcula el área de un decágono de lado b_0.**
   d. **Calcula el área de un rombo de lado r_0.**
   e. **¿Puedes construir dos rombos diferentes usando las barras amarillas? ¿Cuáles son sus áreas?**

1.4.2. Escalado de áreas.

Objetivo: investigar cómo varía la superficie de un polígono al escalar el modelo.

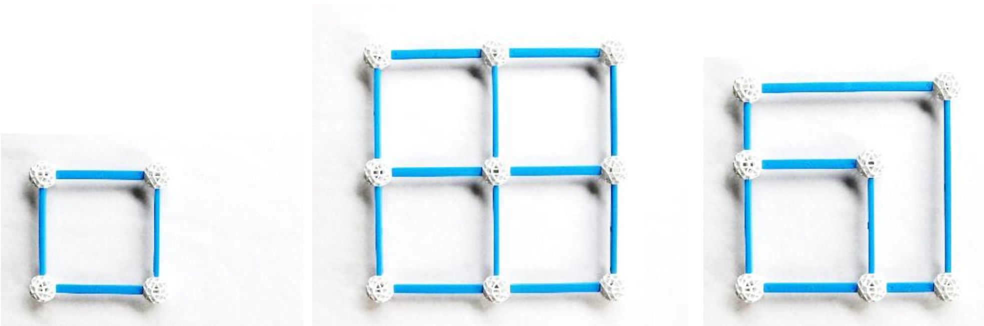
Conocimientos previos: los alumnos deberán tener nociones de semejanza de polígonos, cálculo de la razón de semejanza y cálculo de áreas de polígonos.

Actividad inicial: construye tres rectángulos diferentes que tengan la misma área (usando sólo cuatro barras para cada rectángulo). Pista: si construyen los rectángulos sobre una hoja cuadriculada, es muy fácil probar que todos tienen la misma área si encierran el mismo número de cuadrados de la hoja.

Actividades:

1. **Construimos un cuadrado b_0. A continuación construimos un cuadrado de lado $2b_0$. ¿Cómo ha variado la superficie? ¿Cómo se relaciona el área con el factor de escala?**

Solución: A= b_0^2. Al escalarlo por un factor k, $A'=k^2\cdot b_0^2 \Rightarrow A'=k^2\cdot A$



2. **Construimos un cuadrado de lado b_1 y a continuación aumentamos su lado obteniendo un cuadrado de lado b_2. Recuerda que $b_2=b_0 + b_1$ ¿Cuál es el factor de escala de los lados? ¿Cómo varía la superficie?** (Recuerda lo estudiado en el apartado "Proporción y escalado de figuras").

   Solución: A= b_1^2. El cuadrado de lado b_1 lo escalamos por un factor ϕ. El lado pasa a ser $b_2 = \phi\cdot b_1 \Rightarrow A' = b_2^2 = \phi^2\cdot b_1^2 = \phi^2\cdot A$

3. **Construye un triángulo y a continuación escálalo al triple. ¿Cuántos triángulos pequeños caben dentro del triángulo grande? Haz un argumento algebraico que relacione el área con el factor de escala.**
   Solución: $A' = k^2 A$

Explicación: La proporción del área es el cuadrado del factor de escala.

1.5. SIMETRÍAS

Objetivos:

- Discutir sobre simetría y objetos simétricos en el plano.
- Identificar centros y ejes de simetría en polígonos.
- Distinguir e identificar los distintos tipos de simetría que pueden existir en un objeto.

Materiales:

- Elementos naturales o imágenes de: un plátano, un pimiento, un trébol, un pepino, flores de 3, 6 o 9 pétalos, un panal, un copo de nieve, una manzana, una pera, un calabacín, una estrella de mar, flores de 5 o 10 pétalos, una hoja de arce, etc.)
- Cuchillo.
- Espejo de mano.

Explicación: Simetría en biología.

Para la biología, la simetría es la correspondencia ideal en el cuerpo de un ser vivo con respecto a un centro, un plano o un eje. De acuerdo a esta correspondencia, se distribuyen los órganos o partes equivalentes en un cierto orden.

Un alumno voluntario servirá como ejemplo de simetría en el cuerpo humano. **¿Qué es un plano de simetría? Si pudiéramos cortar al alumno en dos, ¿por dónde podríamos cortarlo de forma que las dos mitades sean iguales?** Nuestros cuerpos no son perfectamente simétricos debido a manchas faciales, el lugar donde están colocados nuestros órganos internos, nos peinamos de forma asimétrica… Podríamos decir que somos casi simétricos. Podemos colocar un espejo por el centro de la cara y mostrar que casi es una imagen igual que la cara entera. **¿Sería posible encontrar más ejes de simetría?** Descubrirán que no, luego la ***simetría es bilateral.*** Casi la totalidad de las razas animales poseen esta forma de simetría, a excepción de algunos como la estrella o el erizo de mar, que ostentan una **simetría radial** secundaria que deriva de la bilateral.

Actividad inicial: Les mostraremos imágenes en el proyector u objetos naturales si fuera posible:

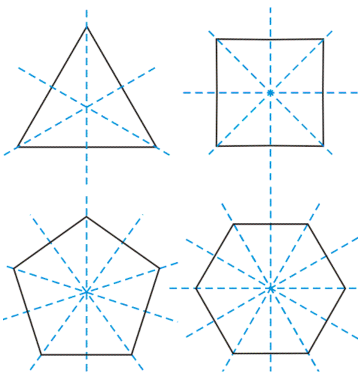
Objetos de la naturaleza con simetría de orden 3: un plátano, un pimiento, un trébol, un pepino, flores de 3, 6 o 9 pétalos, un panal, un copo de nieve, etc.

Objetos de la naturaleza con simetría de orden 5: una manzana, una pera, un calabacín, una estrella de mar, flores de 5 o 10 pétalos, una hoja de arce, etc.

Deberán determinar los ejes y centros de simetría.

Explicación: Simetría en geometría.

Actividad inicial: Reparte por la clase piezas del Sistema Zome y pídeles que construyan estructuras simétricas. Los alumnos se darán cuenta de que frecuentemente una figura tiene más de un eje de simetría.



Actividad: Encontrar simetrías en los siguientes polígonos: un cuadrado, un rectángulo, un triángulo equilátero, un pentágono regular y un hexágono regular.

Cada grupo trabajará sobre dos polígonos diferentes.

Mientras que un par de personas del grupo construyen los polígonos, los demás deberán dibujarlos en el cuaderno. Después discutirán sobre los ejes de simetría de las figuras y los irán dibujando con lápiz de color o mediante línea discontinua. Mientras tanto nosotros nos pasaremos por las mesas con el espejo de mano para que lo puedan colocar sobre los ejes de simetría que han trazado y así comprobar si son correctos. Cada grupo explicará a los demás los ejes de simetría de los polígonos sobre los que han trabajado.

Los alumnos deben darse cuenta que el número de líneas de simetría coincide con el número de lados y de vértices en los polígonos regulares. El sistema *Zome* muestra la relación en el espacio de los números 2, 3 y 5:

Los modelos en **plano azul** muestran el número 2. En el rectángulo aparecen dos lados iguales dos a dos y 2 ejes de simetría. En el cuadrado (2·2 = 4) hay cuatro lados iguales, 4 vértices iguales y 4 ejes de simetría.

Los modelos en el **plano amarillo** muestran el número 3. El triángulo equilátero tiene 3 vértices iguales, 3 lados iguales, 3 ejes de simetría. El hexágono regular representa el número 3 porque tiene (3·2 = 6) 6 vértices iguales, 6 lados iguales y 6 ejes de simetría.

Los modelos en el **plano rojo** muestran el número 5. El pentágono regular tiene 5 lados iguales, 5 vértices iguales y 5 ejes de simetría; y el decágono regular (5·2 = 10) 10 lados iguales, 10 vértices iguales y 10 ejes de simetría.

Explicación:

<u>Simetría reflectiva o reflexión.</u>

Es la más fácil de detectar porque una mitad es la imagen en el espejo de la otra mitad. También se puede llamar simetría bilateral.

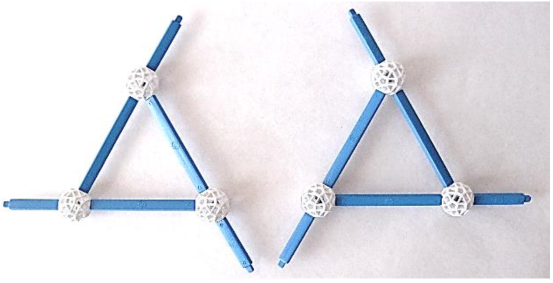
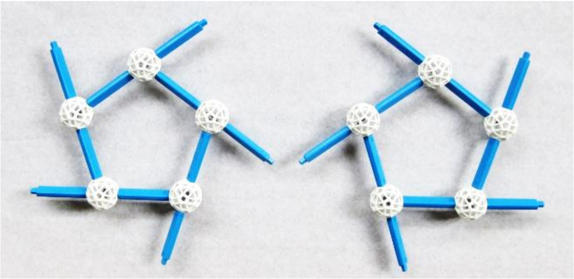
Si la figura tiene más de un eje de simetría reflectiva, todos ellos pasan por el centro, que es el centro de simetría.

<u>Simetría rotacional.</u>

Materiales: Para explicar la simetría rotacional necesitaremos piezas *Zome*, un espejo de mano y un molinete u otro objeto que tenga simetría rotacional.

<u>Actividad:</u>

1. Dibujaremos en la pizarra un triángulo equilátero y un pentágono regular a los que les hemos prolongado sus lados. Les preguntaremos: **¿tienen esas figuras simetría reflectiva?** Tras la respuesta usa el espejo para comprobar que no la tienen.

¿Qué se repite en esta forma? Tendrás que guiarles para que se den cuenta que lo que se repite es un elemento que va girando alrededor de un eje central. Se dice que tiene simetría rotacional.

<u>Actividad de investigación</u>: traer a clase una imagen de un elemento natural o artificial que tenga simetría rotacional. Al lado tendrán que escribir una definición de simetría rotacional.

1.6. MOVIMIENTOS EN EL PLANO: traslaciones, giros y simetrías.

<u>Objetivos:</u>

- Reconocer y analizar las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimientos en el plano.
- Identificar los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos y en obras de arte.
- Generar creaciones propias mediante la composición de movimientos.

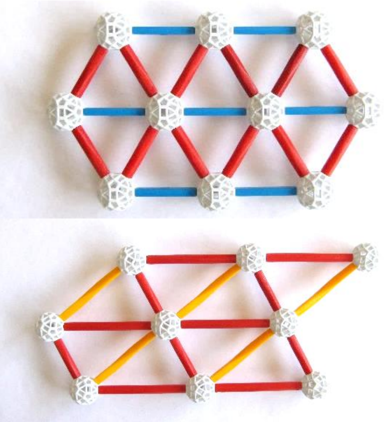
<u>Conocimientos previos:</u> los estudiantes deberán estar familiarizados con la suma de ángulos en triángulos y otros polígonos y los ángulos de los polígonos regulares. También deberán haber estudiado previamente los conceptos de simetría.

Se pueden hacer estas actividades mediante otras herramientas como por ejemplo el dibujo, pero las ventajas de usar *Zome* para crear mosaicos son que se puede construir ángulos y lados con precisión y que pueden levantarlo de la mesa y mostrarlo a los compañeros. La desventaja es que no se puede construir cualquier longitud y cualquier ángulo con este sistema.

<u>Actividad inicial:</u> Pediremos a cada grupo que construya un paralelogramo o un hexágono regular. Después irán repitiendo la misma figura poniendo un polígono a continuación del otro. **¿Qué tipo de simetría podemos encontrar?** La figura se mueve en una dirección fija a una distancia también fija un número infinito de veces. Esto se llama *simetría traslacional o traslación.* **¿Dónde podemos encontrarla en la vida real?**

¿Y en tres dimensiones? Los cristales están formados por átomos que se agrupan en las tres dimensiones siguiendo una simetría traslacional.

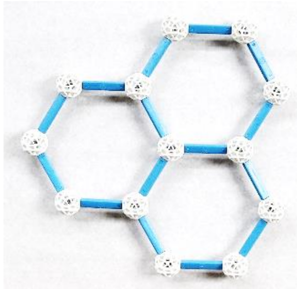
1.6.1. Mosaicos



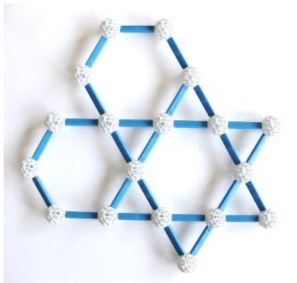
Un mosaico es un conjunto de polígonos llamados teselas colocados de forma que cubre el plano y se puede repetir indefinidamente en dos dimensiones sin espacios ni superposiciones. Se construye a partir de uno o varios polígonos, mediante giros y traslaciones. Para poder construir un mosaico los ángulos alrededor de un vértice deben sumar 360°.

Estudiaremos varios tipos:

- *Los mosaicos regulares* son los que están compuestos por una sola tesela que es un polígono regular. ¿Cuántos mosaicos regulares podemos construir? Sólo podemos construirlos usando triángulos, cuadrados y hexágonos [12]. Los más conocidos son los mosaicos de cuadrados del tablero de ajedrez y el hexagonal de los panales de abejas. ¿Podemos hacer mosaicos regulares usando pentágonos? Vemos que no, quedan huecos.



- *Mosaicos semirregulares o arquimedianos.* Son aquellos en los que intervienen dos o más tipos de polígonos regulares, con la misma composición en cada vértice. Ejemplos:
    - (3, 6, 3, 6). En cada vértice confluyen dos hexágonos regulares y dos triángulos equiláteros, pero de manera alterna.
    - (3, 3, 3, 3, 6)



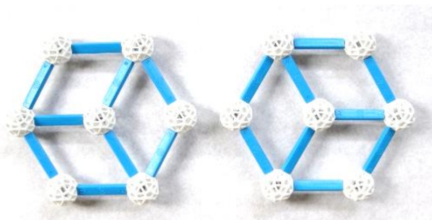
Para hacer otros tipos de mosaicos semirregulares se necesita otra herramienta diferente ya que los nodos de *Zome* no permiten construir cuadrados y triángulos o hexágonos en el mismo plano.

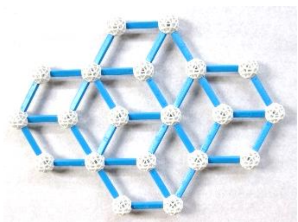
<u>Actividad:</u> Crea un mosaico y explica de qué tipo es. Nota: no es necesario que hagas la actividad usando el sistema *Zome*.

1.6.2. Tramas geométricas no periódicas.

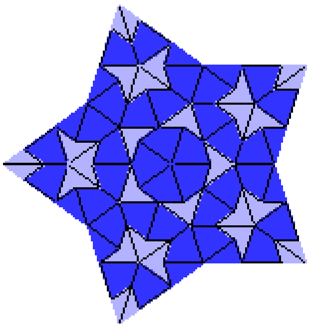
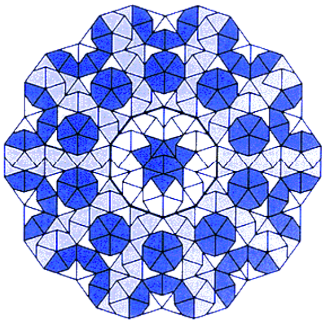
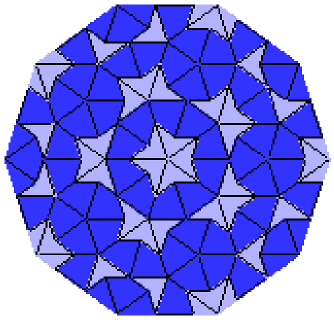
<u>Actividad</u>: rellena el plano con polígonos de manera que los vértices que se produzcan no sean iguales.

1. **Empezamos a trabajar con un hexágono regular.** El hexágono puede dividirse en tres rombos de ángulos 60° y 120°. Vamos a dividir un hexágono en tres rombos de dos maneras diferentes (gira el hexágono 60° para obtener la otra). Si cubres el plano con hexágonos divididos en rombos, y los vas eligiendo de los dos tipos de forma aleatoria, las regiones del plano no serán exactamente iguales. Habrá vértices con 3, 4, 5 y 6 aristas.





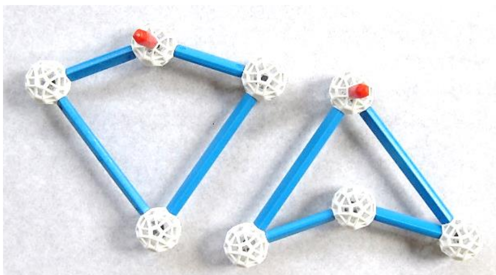
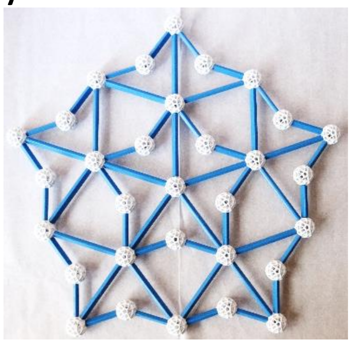
En los años 70, el matemático Roger Penrose descubrió maneras de cubrir un plano con polígonos de forma que el patrón no se repitiera, teselas aperiódicas, sin la necesidad de introducir la aleatoriedad [10]. En la figura vemos una trama no periódica formada a base de dos figuras: Dardo y Cometa, que podemos construir con barras azules b_0 y b_1 en el plano rojo:

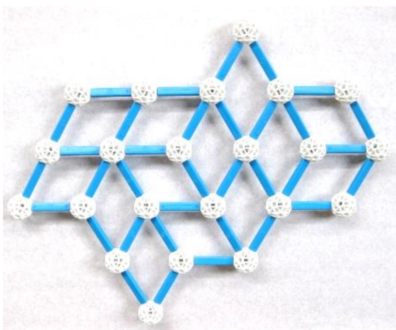
Este ejemplo es el más conocido de los conjuntos de teselas aperiódicos. Si nos fijamos en los vértices observamos que son diferentes, sin embargo si nos centramos en un ámbito más amplio, vemos que hay un cierto orden. Este mismo orden se encuentra en todos los mosaicos de Penrose.

2. **Determinad los ángulos de las dos figuras *Cometa* y *Dardo*.**
   Solución: Cometa: 3·72°+ 144° y Dardo: 2·36°+ 72°+216°.

3. **Cread un mosaico usando las *Cometas* y los Dardos de Penrose.**

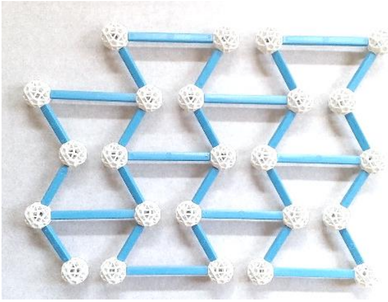
 

4. Penrose descubrió otra manera de cubrir el plano sin que exista regularidad: mediante dos rombos, el de 36° y el de 72°. **Crea una teselación aperiódica usando el rombo de Penrose.**

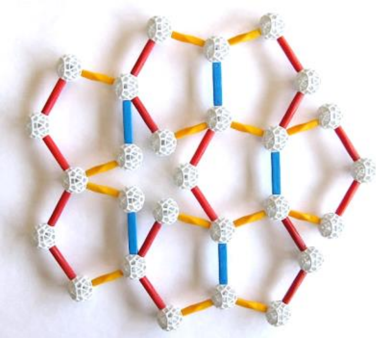


<u>Actividad de ampliación:</u> Cada equipo investigará sobre un tipo de teselación de las que se exponen a continuación y hará al menos un diseño que construirá con el sistema *Zome*. Se presentará un pequeño trabajo explicando el tipo de teselación, simetrías, traslaciones y rotaciones. (Nota: el equipo D no utilizará el sistema *Zome*, sino que buscará otras formas de representación: collage, dibujo…)

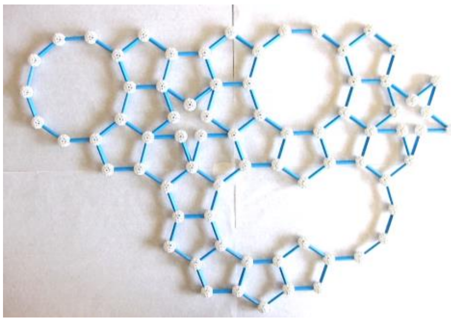
A. <u>Mosaico de poliedros no convexos</u>. Haz una teselación con un cuadrilátero no convexo.



B. <u>Mosaico pentagonal</u>. Si unimos varios pentágonos regulares por el vértice, vemos que como máximo podemos unir tres, pero no encajan perfectamente. ¿Puedes probarlo? ¿De cuántas formas podemos teselar con pentágonos junto a otra figura? ¿Qué otras figuras se necesitan para completar el mosaico? Haz una teselación usando pentágonos y sólo otro tipo de polígono (regular o irregular).

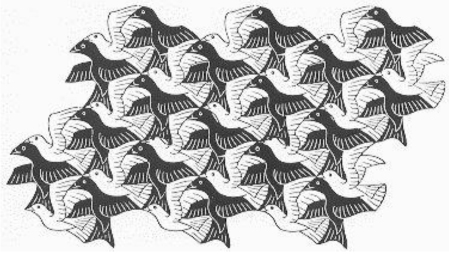


C. <u>Teselación de Kepler.</u> Kepler publicó a principio de 1600 una serie de teselaciones usando pentágonos, decágonos y otros polígonos regulares. Investiga y construye una de ellas.

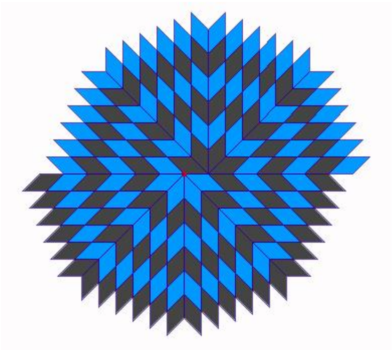
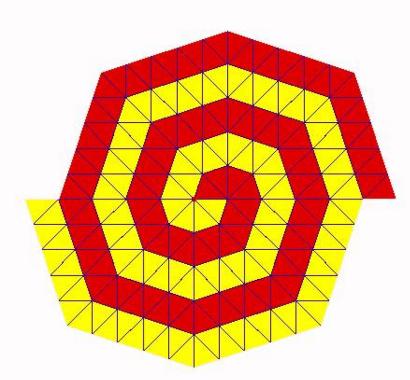


D. <u>Pentágonos y triángulos</u>. Mosaico a base de pentágonos y triángulos isósceles donde cada pentágono está en contacto con seis triángulos.

E. <u>Escher.</u> Escher modificó las aristas de teselaciones para hacer repetitivas formas humanas y animales que cubren el plano. Investiga y haz tu propio diseño. *http://www.mcescher.com/gallery/symmetry/* [14].



F. Mosaicos espirales. Construye una teselación de este tipo. Aquí tienes algunos ejemplos:

U.D. 2: GEOMETRÍA DEL ESPACIO

2.1. ÁNGULOS DIEDROS

Objetivo: familiarizarse con los ángulos que forman dos planos y saber calcularlo en función de la posición de los nodos de *Zome.*

Los ángulos diedros dependen únicamente de los planos, no de las aristas.

Actividad guiada: Construimos un prisma triangular recto con barras azules y amarillas (las azules serán las aristas básicas y las amarillas las laterales). A continuación quitamos dos barras azules (una de la base superior y otra de la inferior). El resultado es como una puerta abierta, el marco y la hoja, donde una de las barras amarillas hace de bisagra. **¿Cuál es el ángulo diedro entre los dos rectángulos? Fíjate en la posición del nodo.**

Ahora construye un paralelogramo entre los dos rectángulos usando las piezas rojas y amarillas**. ¿Cuál es el ángulo diedro entre el rectángulo y el paralelogramo?**

Añade un segundo rectángulo junto al primero, de nuevo compartiendo la barra amarilla. Este modelo muestra cómo un plano se extiende a ambos lados de su línea de intersección. Además la barra amarilla constituye un eje de simetría.

Observa las simetrías de ángulos en los dos planos que se intersecan y que hay dos posibles valores para el ángulo diedro entre planos. **¿Cuáles son?**

1.2. POLIEDROS.

<u>Objetivo:</u>

- Conocer la definición de poliedro.
- Conocer la definición y los elementos de los prismas, antiprismas y pirámides.
- Determinar qué prismas, antiprismas y pirámides pueden construirse con el sistema *Zome.*
- Conocer los cinco poliedros regulares y sus características.

<u>Actividad inicial</u>: recordar definiciones y clasificación de poliedros.

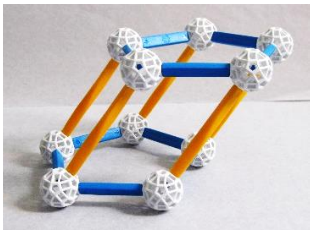
Poliedro: sólido formado por polígonos.

Tipos de poliedros: regulares, irregulares, semirregulares, convexos, cóncavos…

Se nombran por el número de caras si el poliedro es regular.

1.2.1. Prisma, antiprisma y pirámide.

<u>Prisma recto.</u> Sus bases son caras iguales y paralelas y se unen mediante rectángulos (caras laterales). Estos prismas se llaman rectos porque las caras laterales son perpendiculares a las bases. Las aristas laterales por tanto son vectores normales de la base.



<u>Prisma oblicuo.</u> Si el prisma es oblicuo las caras laterales no son todas iguales, y no son perpendiculares a las bases.

<u>Antiprisma.</u> Al igual que el prisma, sus bases son polígonos paralelos e iguales entre sí, pero las bases están rotadas una con respecto a la otra de forma que los vértices de la base superior quedan entre los vértices de la base inferior. Las caras laterales son triángulos en vez de rectángulos. Los antiprismas pueden ser rectos u oblicuos.

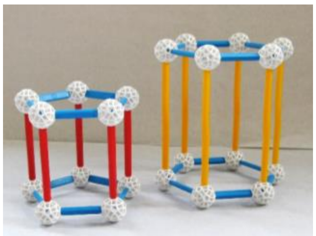
<u>Pirámide</u>. Tiene una sola base y sus caras laterales son triángulos con un vértice común llamado vértice de la pirámide.

La pirámide es recta si el vértice está situado sobre el centro de la base y las caras laterales son triángulos isósceles iguales entre sí.

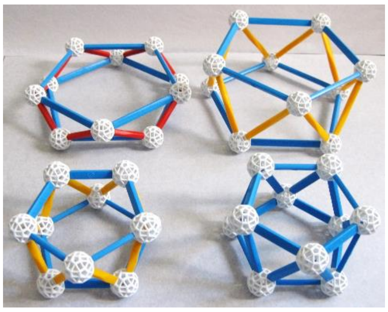
La pirámide es oblicua si el vértice no está situado sobre el centro de la base de la pirámide y las caras laterales son triángulos escalenos y distintos entre sí.

<u>Actividades:</u>

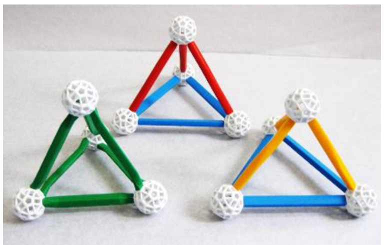
1. Construir un prisma recto. Se podrá hacer usando triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos o dodecágonos como base.



Si queremos construir un prisma pentagonal, primero realizaremos en el plano rojo un pentágono regular usando barras azules. Después colocaremos una barra roja en cada vértice perpendicular al pentágono. Y finalmente colocaremos otra esfera sobre la barra roja y las uniremos con otro pentágono regular de barras azules.



2. Construir un antiprisma pentagonal. Hay cinco tipos de antiprismas pentagonales que se pueden construir con el Sistema Zome, dependiendo de lo alejadas que estén las bases. El zigzag que cose las dos bases podría ser rojo, amarillo o azul. Recuerda que girando una de las bases te puede resultar más sencillo construirlo.

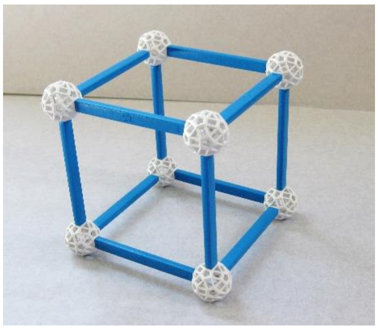


3. ¿Cuántas pirámides diferentes puedes construir con el Sistema Zome usando un triángulo equilátero como base?

1.2.2. Poliedros regulares

<u>Objetivos</u>: Los estudiantes deberán familiarizarse con los poliedros regulares o sólidos platónicos, ver las relaciones que hay entre ellos y probar que sólo hay cinco sólidos platónicos.

Un poliedro es regular si sus caras son iguales y están formadas por polígonos regulares, y en cada vértice confluyen el mismo número de caras. Hay cinco poliedros regulares o sólidos Platónicos:



CUBO.

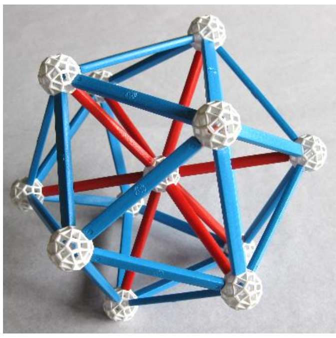
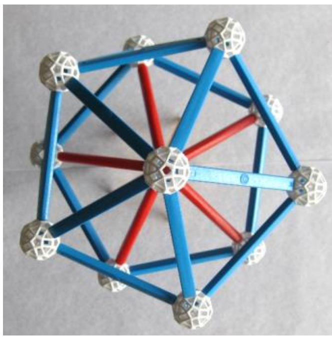
Un cubo es un prisma donde todas las caras son cuadradas y los ángulos diedros y poliedros son de 90°.

<u>Actividad.</u> Construye un cubo. No les indicaremos qué color de barra deben utilizar, para que ellos aprendan experimentando.

ICOSAEDRO

Icosa- o icosi- es el prefijo griego que significa 'veinte'. El icosaedro está formado por 20 triángulos equiláteros.

<u>Actividad:</u> Construye un icosaedro. Para que su construcción sea más sencilla, usa barras rojas como andamiaje colocando barras rojas (todas del mismo tamaño) en todos los agujeros pentagonales de un nodo. Pon otro nodo en el extremo de cada barra roja y únelos con barras azules. La estructura azul es el icosaedro.

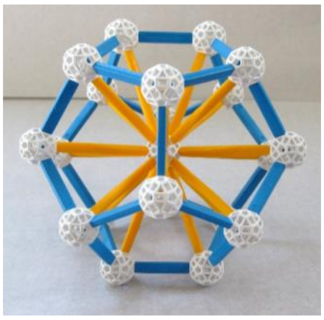
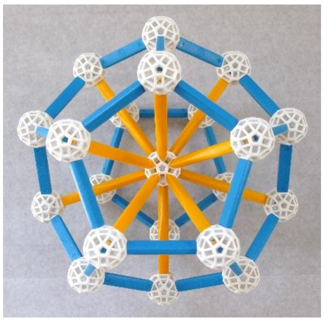
 

¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene? ¿Cuántas aristas hay en cada cara? ¿Cuántas aristas confluyen en cada vértice?

DODECAEDRO

Dodeca- es el prefijo griego que significa 'doce'. El dodecaedro está formado con 12 pentágonos regulares.

<u>Actividad.</u> Construye un dodecaedro. Si te resulta difícil, ayúdate de un andamiaje. Coloca sobre todos los agujeros triangulares de un nodo barras amarillas medianas o grandes (y_1 o y_2). En el extremo de cada barra amarilla coloca otro nodo. Une todos ellos con barras azules. La estructura azul es el dodecaedro.

¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene? ¿Cuántas aristas hay en cada cara? ¿Cuántas aristas confluyen en cada vértice?

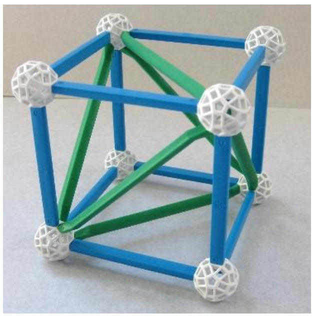
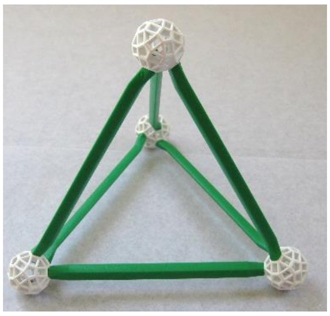
Compara los resultados obtenidos en el dodecaedro y en el icosaedro.

TETRAEDRO

Tetra- es el prefijo griego que significa 'cuatro'. Está formado por 4 triángulos equiláteros.

<u>Actividad.</u> Construcción de un tetraedro usando estructuras verdes. También se puede construir de forma aproximada sin estructuras verdes.

Usa como base las estructuras azules (la barra verde es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles). Construye un cubo con las barras azules. El tetraedro se formará mediante la diagonal de cada cara. Quita las barras azules para que sólo quede el tetraedro.

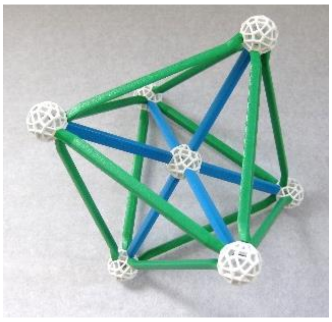
 

¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene? ¿Cuántas aristas hay en cada cara? ¿Cuántas aristas confluyen en cada vértice?

OCTAEDRO

Octa- es un prefijo griego que significa ‘ocho’. Está formado por 8 triángulos equiláteros.

<u>Actividad</u>. Construye un octaedro. Lo construiremos ayudándonos de un andamiaje azul: sobre un nodo coloca 6 b_1 formando tres líneas perpendiculares (como los ejes x, y, z). Añade 6 nodos en el otro extremo. Conecta los 12 ángulos rectos con 12 diagonales usando 12 barras g_1 y así construir un octaedro verde.



¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene? ¿Cuántas aristas hay en cada cara? ¿Cuántas aristas confluyen en cada vértice?

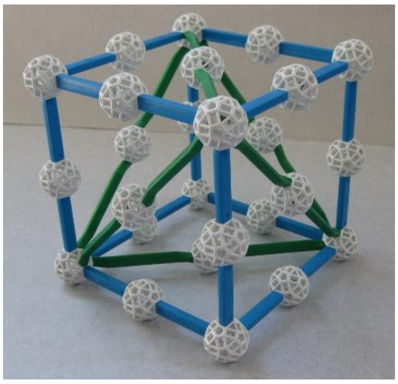
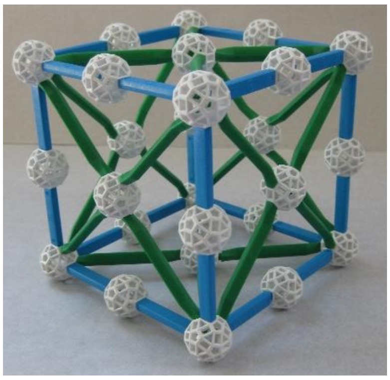
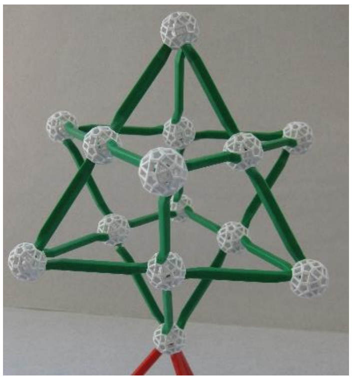
<u>Actividad:</u> Tetraedro y Octaedro.

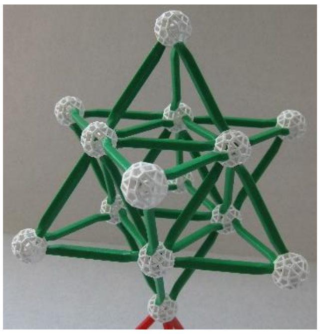
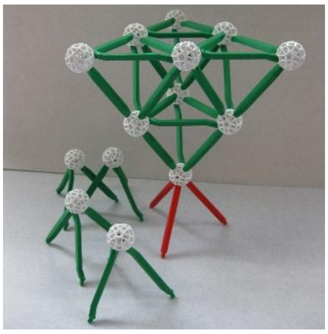
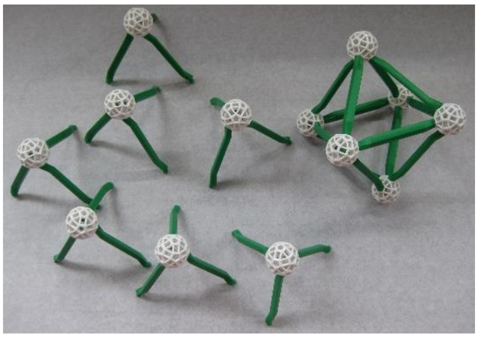
El tetraedro usa la mitad de los vértices del cubo. Si usamos los otros vértices, construiremos otro tetraedro en el mismo cubo. Lo comprobaremos construyendo un cubo nuevo utilizando como lado $2b_0$, e introduciendo las dos diagonales de cada cara mediante g_0. Podemos construir dos tetraedros intersecados por los puntos medios de sus aristas. Se obtiene la figura *Stella octángula o estrella de ocho puntas.*

¿Qué figura forma la intersección de los dos tetraedros? Conecta los puntos de corte con 12 barras g_0. Ahora el modelo puede ser visto como un octaedro rodeado de 8 pequeños tetraedros.

Quita 4 tetraedros pequeños para dejar un tetraedro grande. Esto muestra cómo un tetraedro puede ser diseccionado en un octaedro y 4 tetraedros más pequeños.

Ahora quita los 4 tetraedros pequeños restantes, para ver tan sólo el octaedro.

¿Por qué sólo cinco poliedros regulares?

Rellena la siguiente tabla. Las tres últimas columnas las tienes ya resueltas en el ejercicio anterior.

Poliedro	Lados del polígono	Caras que confluyen en un vértice	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro					
Octaedro					
Cubo					
Icosaedro					
Dodecaedro					

Para probar que sólo hay 5 posibilidades, piensa en la suma de los ángulos que confluyen en cada vértice. Examinemos las dos primeras columnas:

1. **¿Por qué en la primera columna debe haber al menos 3? ¿Y en la segunda?**
2. El cubo tendrá notación {4, 3} porque está formado por cuadrados y en cada vértice confluyen 3 cuadrados. Si fuera un {3, 6}, significaría que en cada vértice confluyen 6 triángulos equiláteros. El resultado no sería tridimensional. **Explícalo usando la suma de ángulos confluyentes en un vértice.**
3. **Explica por qué {3,6}, {3,7}, {3,8},… no pueden ser poliedros.**
4. **Explica por qué no se pueden construir los poliedros {4, 4}, {4, 5}, {4, 6},…**
5. **Explica por qué no se pueden construir los poliedros {5, 4}, {5, 5}, {5, 6},…**
6. **¿Podría ser el número de lados de cada cara 6 (hexágono regular) o superior?**

Las únicas posibilidades de poliedros con menos de 360° en cada vértice son los cinco poliedros regulares de la tabla.

<u>Investiga:</u> ¿por qué se les llama a los poliedros regulares sólidos platónicos? ¿Qué elemento representa cada poliedro?

1.3. TEOREMA DE EULER.

Objetivos:

- Relacionar el número de caras, aristas y vértices de un poliedro mediante la fórmula de Euler.
- Introducir la topología a través de los diagramas Schlegel de los poliedros y aplicarlo en la resolución de problemas.

El teorema de Euler se puede aplicar a cualquier poliedro convexo, regular o irregular, simétrico o asimétrico.

En 1750, Leonhard Euler observó que había una fórmula que relacionaba el número de caras, vértices y aristas en cualquier poliedro convexo. Un poliedro convexo es aquel que no tiene hendiduras.

Actividades:

1. **Observa la tabla que completamos en la sesión anterior sobre el número de caras, vértices y aristas de los poliedros regulares. ¿Podrías encontrar una fórmula que lo relacione?** Con esta actividad los alumnos descubrirán el teorema de Euler. Si tienen dificultades sugiéreles que trabajen sumando y restando el número de caras, aristas y vértices hasta encontrar una relación.
2. **Crea tus propios poliedros**. Puedes usar prismas, antiprismas, pirámides, poliedros regulares… Sé creativo. **Comprueba si se verifica el teorema de Euler** en esos poliedros. **¿Es cóncavo o convexo tu poliedro?**

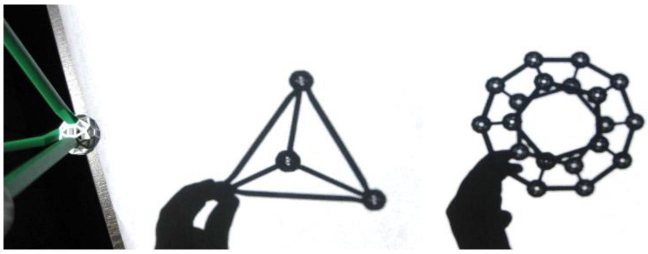
1.3.1. Topología

Materiales: retroproyector.

Actividad inicial: coloca un tetraedro sobre el retroproyector y pregúntales qué observan.

Explicación. La relación que hizo Euler entre los vértices, caras y aristas de un poliedro fue el inicio de la topología, un campo de las matemáticas que mira ciertos aspectos de la geometría.

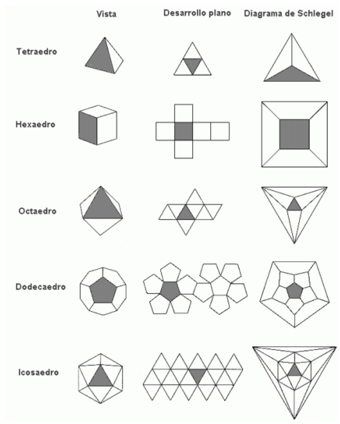
Topología hace referencia al número de aristas y vértices y sus conexiones. Cuando proyectamos la sombra de un poliedro en la pared o cuando aplanamos un poliedro estirando una de sus caras, el número de vértices, caras y aristas permanecen invariantes, sin embargo aparecen deformadas las caras puesto que los ángulos y las longitudes de las aristas se distorsionan. Estas son las propiedades topológicas del poliedro y el diagrama es conocido como Diagrama Schlegel, por Víctor Schlegel, 1843-1908, el matemático que primero los utilizó.



¡Cuidado! Cuando cuentes las caras en un diagrama Schlegel asegúrate de que cuentas la cara exterior.

<u>Actividad:</u> Dibuja el diagrama Schlegel de:

a. Un tetraedro regular.
b. Una pirámide pentagonal.
c. Un prisma pentagonal.
d. Un antiprisma pentagonal.
e. Un octaedro.
f. Un dodecaedro.



<u>Actividad de ampliación:</u> Imagina que vives en una provincia de 6 pueblos y 12 carreteras uniendo los pueblos como si fuera un octaedro. Tú vives en uno de los pueblos y quieres visitar los otros durante tus vacaciones pasando por cada uno una sola vez. En realidad debes encontrar un camino cerrado a través de las aristas de un octaedro que pase por cada vértice una sola vez. **Haz dibujos para esbozar el camino.**

1.4. TEOREMA DE DESCARTES

<u>Objetivo</u>: conocer y trabajar con el teorema de Descartes para aplicarlo a la construcción de poliedros.

Introducción histórica: René Descartes fue un matemático y filósofo francés. A él le debemos el llamado sistema de coordenadas Cartesiano y la célebre frase "Pienso, luego existo".

1.4.1. Déficit angular

El <u>déficit angular de un vértice</u> es lo que le falta a la suma de los ángulos interiores de las caras que confluyen en un vértice para alcanzar los 360°. Por ejemplo, en un cubo confluyen 3 caras, y el ángulo interior de cada una de ellas es de 90°. El déficit angular del vértice del cubo será por tanto: 360° - 3 · 90° = 360° - 270° = 90°.

El <u>déficit angular total</u> de un poliedro es la suma de los déficits angulares en cada vértice. El déficit angular de un cubo: 90°· 8 vértices = 720°.

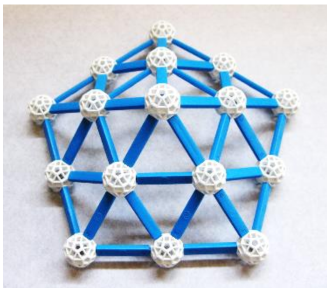
<u>Actividad:</u> Completa la tabla y a continuación haz una hipótesis sobre el déficit angular de cualquier poliedro.

Poliedro	Número de vértices	Déficit angular	
		De cada vértice	Total
Cubo	8	90	720
Icosaedro regular			
Octaedro regular			
Dodecaedro regular			
Tetraedro regular			
Prisma triangular			
Prisma pentagonal			
Prisma *n*-gonal			
Antiprisma pentagonal (con caras equiláteras)			
Antiprisma hexagonal (con caras equiláteras)			
Antiprisma *n*-gonal			

Si han contestado correctamente habrán descubierto el teorema de Descartes: el déficit angular total de cualquier poliedro convexo es 720°.

<u>**Actividades de ampliación:**</u>

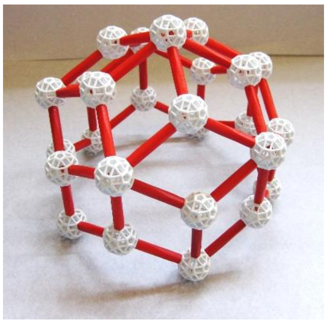
1. **Construye una bóveda icosaédrica.** Cada cara del icosaedro estará formada por un triángulo equilátero de lado $2b_0$. Si unimos los puntos medios de cada lado, conseguimos dividir cada cara en 4 triángulos equiláteros de lado b_0.



Esto es una bóveda icosaédrica de frecuencia 2. El número de frecuencia indica las partes en que se ha dividido la arista del icosaedro.

¿Cuál es el déficit angular? Ten cuidado porque hay dos tipos de vértices. Calcula primero el déficit angular de cada vértice y luego súmalo.

Solución: Vértices donde confluyen 6 triángulos: 360° - (60° · 6) = 0° déficit angular vértice.
Vértices donde confluyen 5 triángulos: 360° - (60° · 5) = 60° déficit angular vértice.
Déficit angular total: 60° · 12 = 720°.



2. **Construye un Triacontaedro rómbico.** Está compuesto por 30 rombos rojos. Los ángulos agudos se unen en grupos de 5 en 12 de los vértices del poliedro, y los ángulos obtusos del rombo se unen en grupos de 3 en 20 de los vértices del poliedro.
   Si quieres aprender más sobre el Triacontaedro rómbico visita esta página [17]:
   http://en.wikipedia.org/wiki/Rhombic_triacontahedron

Llama x al ángulo agudo del rombo.

a) Determina el ángulo obtuso en función de *x*.
b) ¿Cuál es el déficit angular total del triacontaedro rómbico? No necesitas calcular el valor de *x*.

Solución: a) 180°- x; b) (360° - 5x) · 12 + [360° - 3 · (180° - x)] · 20 = 720°

3. **Construye una pirámide de base pentagonal y caras laterales triángulos isósceles.** Llama *x* al ángulo que cada arista lateral forma con la arista básica.
   a) Determina el tercer ángulo del triángulo isósceles en función de *x*.
   b) ¿Cuál es el déficit angular total de la pirámide?

   Solución: a) 180° - 2x; b) [360° - (2x + 108°)] · 5 + [360° - 5 · (180° - 2x)] = 720°

1.5. SIMETRÍA EN LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS Y OTROS POLIEDROS.

<u>Objetivos:</u>

- Identificar ejes y planos de simetría en poliedros.

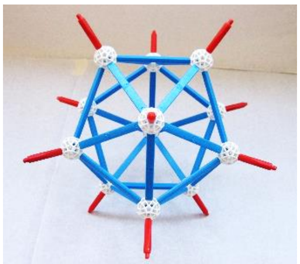
Conocimientos previos: simetrías en figuras planas.

Repasa los conceptos de líneas de simetría en polígonos regulares y centro de simetría rotacional: los polígonos regulares tienen un eje de simetría rotacional que contiene al centro de simetría rotacional y es perpendicular al plano en el que está contenido el polígono. Ese eje de simetría es la recta intersección de los planos de simetría del polígono.

1.5.1. Simetrías en el icosaedro y el dodecaedro.

Un **eje de simetría de tipo *n*** es una recta imaginaria con la propiedad de dejar invariante el objeto al girarlo 360/*n* grados alrededor de él.

Usamos un icosaedro construido con *Zome* para visualizar los ejes de simetría:



1. Si sostenemos el icosaedro por dos de sus esferas opuestas y lo hacemos girar, vemos que hay un **eje de simetría quíntuple**. Si giramos el icosaedro 360/5=72°, la posición parece que no cambiase.
   Hay un eje quíntuple por cada par de vértices opuestos. Como el icosaedro tiene 12 vértices, habrá 5 · 6 = 30 simetrías de este tipo.

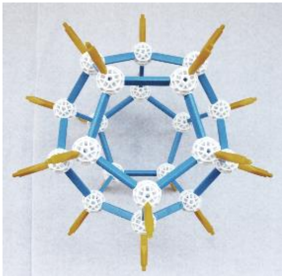
2. Si trazamos una línea imaginaria uniendo los centros de dos caras opuestas del icosaedro, y lo giramos alrededor de esa línea 360/3= 120°, vemos que parece que el aspecto de la figura se mantiene invariante. Tiene en esta posición una **simetría de eje triple**. Como el icosaedro tiene 20 caras, habrá 10 ejes de simetría triple, luego hay 3 · 10 = 30 simetrías de este segundo tipo.

3. Si ahora trazamos una nueva recta imaginaria uniendo los puntos medios de dos aristas opuestas y giramos el icosaedro alrededor de esta recta 360/2 = 180°, el modelo queda invariante. En esta posición tiene una simetría de eje doble. Luego tendrá un **eje de simetría doble** por cada par de aristas opuestas. Como un icosaedro tiene 30 aristas, en total el icosaedro tendrá 2 · 15 = 30 simetrías de este tercer tipo.

Un **plano de simetría** de un poliedro es un plano imaginario que tiene la propiedad de reflejar tras él el objeto, como si fuera un espejo, dejándolo invariante.

4. Imagina un plano que contuviese dos aristas opuestas del icosaedro. Si cortásemos el icosaedro por ese plano, se obtendrían dos mitades idénticas. Como el icosaedro tiene 30 aristas, tendremos 30/2 = 15 planos de simetría.

<u>Actividad.</u> Describe los ejes y planos de simetría que encuentras en un dodecaedro.



Solución: los ejes de simetría de cada tipo son 30 también en el dodecaedro, y los planos 15, luego el dodecaedro y el icosaedro tienen la misma simetría, se llama simetría icosaédrica.

1.5.2. Simetrías en poliedros simples: prismas, antiprismas y pirámides.

Cada grupo trabajará con un tipo de poliedro: prisma recto de base pentagonal regular, prisma recto de base hexagonal regular, antiprisma de base pentagonal regular, antiprisma de base hexagonal regular, pirámide recta de base pentagonal y pirámide recta de base hexagonal.

<u>Actividades:</u>

1. **Construye un prisma recto pentagonal regular y averigua sus simetrías.**
   Solución:
   Tiene 6 ejes de simetría:
      a. *un eje de simetría quíntuple que pasa por el centro de las bases.*
      b. *5 ejes de simetría dobles que pasan por el punto medio de la arista lateral y el punto medio de la cara lateral opuesta.*

   Tiene 6 planos de simetría:
      a. *Uno de ellos pasa por los puntos medios de las aristas laterales.*
      b. *Los otros cinco planos de simetría contienen una arista lateral y pasa por el centro de la cara lateral opuesta.*

2. **Construye un prisma recto de base un hexágono regular y describe sus simetrías.**
   Solución:
   Tiene 4 ejes de simetría:
      a. *Un eje de simetría séxtuple que pasa por el centro de las bases.*

   b. *3 ejes de simetría dobles que pasan por el punto medio de dos aristas laterales opuestas.*

Tiene 4 planos de simetría:

   a. *Un plano de simetría que es paralelo a las bases y pasa por los puntos medios de las aristas laterales.*
   b. *3 planos de simetría que son perpendiculares a las bases y que pasan por cada par de aristas laterales opuestas.*

3. **¿Podrías describir las simetrías de un prisma recto de base *n*-gonal regular según *n* sea par o impar?**

   n impar:

   a. *n+1 ejes de simetría: 1 eje de simetría de centro a centro de las bases con n simetrías y n ejes de simetría dobles de centro de arista lateral a centro de la cara lateral opuesta.*
   b. *n+1 planos de simetría: 1 plano de simetría paralelo a las bases por los puntos medios de las aristas laterales y n planos de simetría que contienen cada arista lateral y pasan por el punto medio de la cara lateral opuesta.*

   n par:

   a. *1+n/2 ejes de simetría: 1 eje de simetría de centro a centro de las bases con n simetrías y n/2 ejes de simetría dobles de centro de arista lateral a centro de arista lateral opuesta.*
   b. *1+n/2 planos de simetría: 1 plano de simetría paralelo a las bases por los puntos medios de las aristas laterales y n/2 planos de simetría que contienen las parejas de aristas laterales opuestas.*

4. **Hacemos la misma actividad con un antiprisma y con una pirámide.**

Solución:

El antiprisma se diferencia del prisma en que sólo tiene 1 eje con n simetrías y tiene n ejes de simetrías dobles que van de punto medio a punto medio de las aristas laterales opuestas. El antiprisma no tiene plano de simetría paralelo a las bases por el punto medio de las aristas laterales. Los planos de simetría perpendiculares a las bases no contienen los ejes de simetría dobles, sino que pasan por la mitad de los puntos medios de las caras laterales.

La pirámide tiene 1 sólo eje de n simetrías y planos de simetría perpendiculares a su base y que pasan por el vértice de la pirámide. Si n es impar, tendrá n planos de simetría perpendiculares a la base que pasan cada uno de los vértices básicos y el punto medio de la arista básica opuesta, y si n es par, tendrá n/2 planos de simetría pasando por cada par de vértices básicos opuestos.

1.5.3. Simetrías en el cubo.

<u>Actividad inicial</u>: ya hemos visto que el icosaedro y el dodecaedro tienen el mismo tipo de simetría. ¿Podrías encontrar otra pareja de poliedros regulares que también tengan el mismo tipo de simetría?
Solución: el cubo y el octaedro.

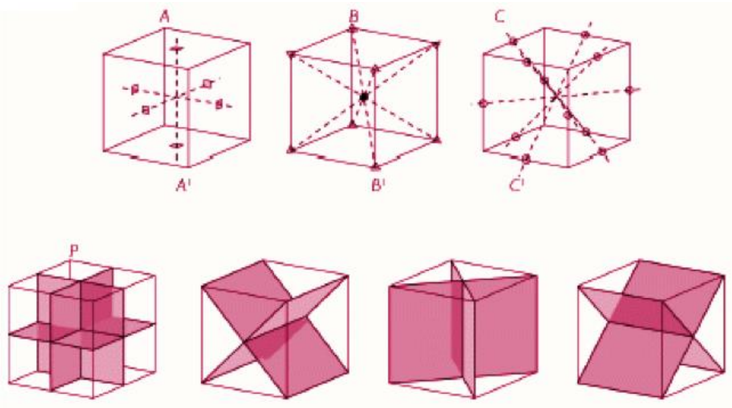
<u>Actividades:</u>

1. **Describe los ejes y planos de simetría de un cubo.**
   Solución:
   Hay tres tipos de ejes de simetrías:

- *3 ejes de simetría cuádruples de centro a centro de dos caras opuestas. Como un cubo tiene 6 caras, tendrá, 3 ejes de este tipo.*
- *4 ejes de simetría triples que pasan por cada pareja de vértices opuestos. Como un cubo tiene 8 vértices, tendrá 4 ejes de este tipo.*
- *6 ejes de simetría dobles de centro a centro de dos aristas opuestas. Como un cubo tiene 12 aristas, tendrá 6 ejes de este tipo.*

  Hay 9 planos de simetría:

- *3 planos de simetría paralelos a una cara, pasando por los puntos medios de las aristas.*
- *6 planos de simetría oblicuos conteniendo a las diagonales de dos caras opuestas. Como un cubo tiene 3 parejas de caras opuestas y en cada una de ellas hay dos diagonales, entonces hay 3 · 2 = 6 planos de este tipo.*



2. **Describe los ejes y planos de simetría de un octaedro. ¿Tienen algo en común con las simetrías de un cubo?**
   Solución:
   Hay tres tipos de ejes de simetría:

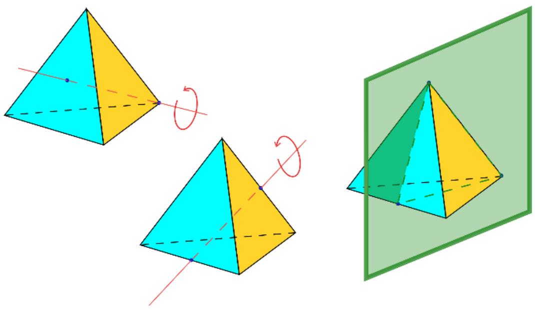
- *3 ejes de simetría cuádruples de vértice a vértice opuesto. Como en un octaedro hay 6 vértices: 6/2 = 3 ejes de este tipo.*
- *4 ejes de simetría triples de centro a centro de caras opuestas. Como en un octaedro hay 8 caras, 8/2 = 4 ejes de este tipo.*
- *6 ejes de simetría dobles de centro a centro de arista opuesta. Como en un octaedro hay 12 aristas, 12/2 = 6 ejes de este tipo.*

  Hay 9 planos de simetría:

- *3 planos de simetría rectos.*
- *6 planos de simetría oblicuos.*

El cubo y el icosaedro tienen el mismo tipo de simetría.

3. **Describe los ejes y planos de simetría de un tetraedro regular.**
   Solución:
- *4 ejes de simetría triples que pasan por cada vértice y el punto medio de la cara opuesta y 3 ejes de simetría dobles que pasan por los puntos medios de dos aristas opuestas.*
- *6 planos de simetría que contienen una arista y el punto medio de la arista opuesta.*



1.6. POLIEDROS SEMIRREGULARES.

<u>Objetivos:</u>

- Conocer las características de los poliedros semirregulares.
- Aplicar el teorema de Euler y otros conocimientos adquiridos previamente sobre suma de ángulos para razonar si sería posible construir determinados poliedros semirregulares.
- Construir poliedros semirregulares mediante la herramienta *Zome.*

<u>Introducción del tema</u>: mostramos un sólido arquimediano como por ejemplo un icosidodecaedro*,* y les preguntamos qué diferencias aprecian con respecto a un sólido platónico, ¿qué similitudes guardan con respecto a un dodecaedro y un icosaedro?

<u>Actividad inicial</u>: Construye tantos poliedros como puedas utilizando únicamente triángulos equiláteros y pentágonos regulares. (No uses ninguna otra figura, ni tampoco hagas un poliedro usando un solo tipo de polígono). Pista: hay seis poliedros convexos que cumplen esos requisitos. Cinco de ellos pueden construirse mediante la sustracción de barras de un icosaedro. El sexto es el icosidodecaedro, un poliedro arquimediano.

Explicación: Los sólidos arquimedianos son poliedros semirregulares. Son simétricos, convexos y compuestos por más de un tipo de polígono regular, siendo todos sus vértices iguales.

Una forma muy sencilla de nombrar a los poliedros es por los lados de las caras que confluyen en un vértice. Por ejemplo, en el icosidodecaedro confluyen 4 caras, y se van alternando los triángulos equiláteros y los pentágonos regulares, por ello se nombra (3, 5, 3, 5). Por acuerdo se empieza a nombrar por el más pequeño de los polígonos.

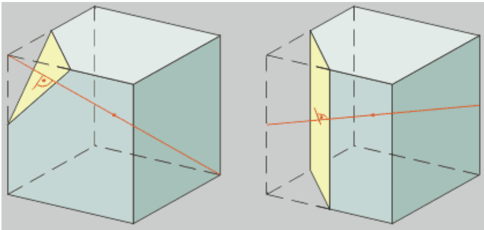
Aunque los prismas y antiprismas cumplen las condiciones de los poliedros arquimedianos, por ser muy numerosos, normalmente no se incluyen en este grupo.

Para explicar este apartado puedes apoyarte en el blog de Paulo Porta sobre Poliedros. *http://www.pauloporta.com/Xeometria/poliedros/epoliedros.html* [11].

1.6.1. Truncamiento.

Los poliedros semirregulares pueden construirse a partir de los regulares mediante algún tipo de modificación, como el truncamiento.

El truncamiento de un vértice supone seccionar el poliedro con un plano perpendicular a la diagonal del poliedro. El truncamiento de una arista se hace también con un plano perpendicular al radio de la circunferencia que une el centro del poliedro con el punto medio de la arista.



Los poliedros semirregulares obtenidos por truncamiento conservan los ejes y planos de simetría de los regulares.

<u>**Actividades:**</u>

1. **Haced una lista de todos los posibles sólidos arquimedianos usando la notación correspondiente.** Empieza con poliedros que ya se hayan construido y sigue inventando otros, teniendo en cuenta los conocimientos adquiridos sobre suma de ángulos alrededor de un vértice.
2. **Cada grupo construirá uno de los siguientes sólidos arquimedianos.**
   Los poliedros marcados con * requieren estructuras verdes para construirlos:
   a. **(3, 6, 6)* tetraedro truncado.**
   b. **(3, 8, 8)* cubo truncado.**
   c. **(4, 6, 6)* octaedro truncado.**
   d. **(5, 6, 6) icosaedro truncado.**
   e. **(3, 10, 10) dodecaedro truncado.**
   f. **(3, 4, 3, 4)* cuboctaedro.**
   g. **(3, 5, 3, 5) icosidodecaedro.**
   h. **(3, 4, 4, 4)* rombicuboctaedro.**
   i. **(3, 4, 5, 4) rombicosidodecaedro.**
   j. **(4, 6, 8)* cuboctaedro truncado.**
   k. **(4, 6, 10) icosidodecaedro truncado.**

   Cada grupo deberá hacer una ficha con la foto del poliedro; nombre; número de vértices, caras y aristas; y simetrías. ¿Cumplen el teorema de Euler estos poliedros? *Soluciones en ANEXO 7.1.*

2.7. VOLUMEN.

Objetivos:

- Calcular el volumen de prismas y pirámides.
- Calcular el volumen de poliedros mediante la disección del sólido en poliedros más sencillos (prismas y pirámides).
- Ver cómo varía el área y el volumen de un poliedro al aplicarle un factor de escala.

Actividad inicial: Construye un prisma con el menor volumen posible. Pista: puede que el prisma no sea recto.
Solución: La unidad de volumen en Zome será b_0^3, y por tanto cualquier volumen podrá expresarse como $\theta \cdot b_0^3\ \ \forall\, \theta \in N.$

2.7.1. Volumen de un prisma.

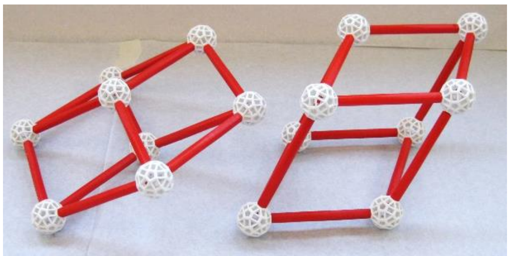
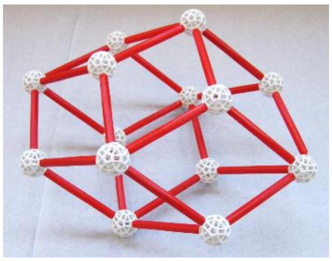
$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

Donde la altura (*h*) siempre es la distancia entre las bases y se mide en perpendicular.

1. **Construye un paralelepípedo áureo (prisma rectangular de dimensiones b_0, b_1 y b_2. Después construye un cubo de igual volumen.**
   Solución:
   $$V_{paralelepípedo} = b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 = b_0 \cdot \varphi b_0 \cdot \varphi^2 b_0 = \varphi^3 b_0^3$$
   $$V_{cubo\ b1} = b_1^3 = (\varphi b_0)^3 = \varphi^3 b_0^3$$

2. **Construye dos romboedros diferentes (romboedro agudo y romboedro obtuso) y calcula el volumen de ambos.** Nota: un romboedro podría usarse para referirse a cualquier poliedro compuesto por rombos, pero convencionalmente lo usamos para referirnos al hexaedro cuyas caras son rombos iguales. Tiene 6 caras congruentes y 12 aristas.
   Solución: Un romboedro podría ser similar a un prisma oblicuo de base un rombo. Construimos un rombo de lado $2r_0$ para calcular su área:
   $$A_{rombo} = \frac{\varphi}{2} \cdot b_0^2$$
   Romboedro obtuso: $h = b_0$
   Romboedro agudo: $h' = b_1 = \varphi \cdot b_0$
   $$A_{romboedro\ obtuso} = \frac{\varphi^2}{4} b_0^3$$
   $$A_{romboedro\ agudo} = \frac{\varphi}{4} b_0^3$$

3. **Construye un dodecaedro rómbico mediante la suma de dos romboedros agudos y dos romboedros obtusos. Calcula su volumen.**

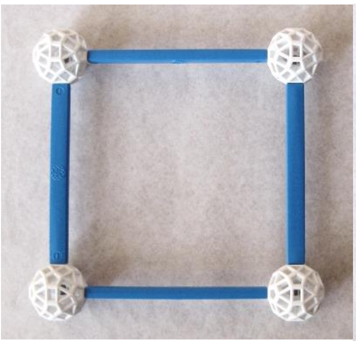
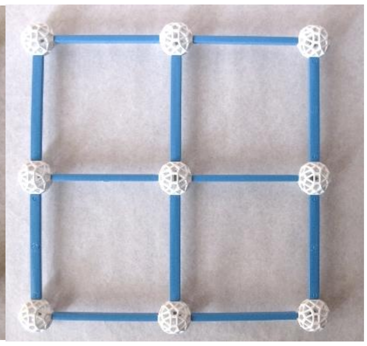



Solución:

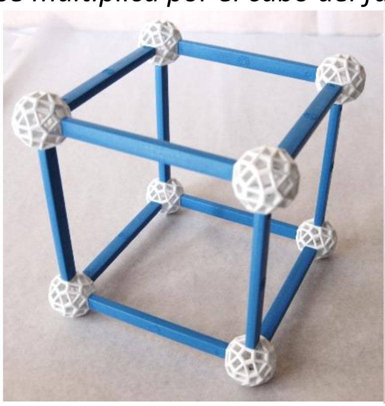
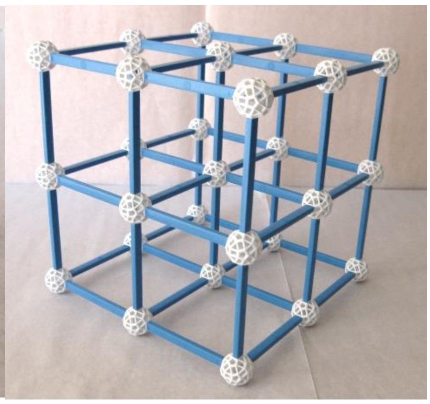
$$V_{dodecaedro\ rómbico} = 2 \cdot \frac{\varphi^2 b_0^3}{4} + 2 \cdot \frac{\varphi b_0^3}{4} = (\varphi + 1)\frac{\varphi}{2} b_0^3 = \frac{\varphi^3}{2} b_0^3$$

que es la mitad de un cubo de lado b_1.

4. **Escribe una expresión algebraica describiendo cómo varía el volumen al multiplicar por 2 el lado de un cuadrado.**
   Solución: Si construimos un cuadrado 1x1 y luego doblamos la longitud del lado obteniendo un cuadrado 2x2, vemos que el área se ha multiplicado por 4 es decir por (2^2).
   Al escalar un sólido vemos que su superficie se multiplica por el cuadrado del factor de escala.

5. **Escribe una expresión algebraica describiendo cómo varía el volumen al multiplicar por 2 el lado de un cubo.**
   Solución: Si ahora construimos un cubo 1x1x1 sobre el cuadrado inicial 1x1, y después construimos un cubo 2x2x2 sobre el cuadrado 2x2, vemos que el volumen se ha multiplicado por 8 es decir, por (2^3).
   El volumen se multiplica por el cubo del factor de escala.

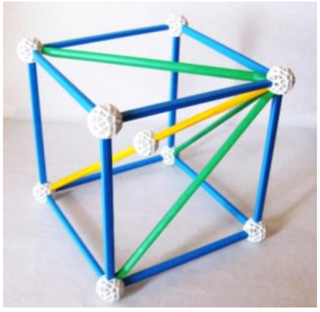



6. **Hacemos lo mismo con un cuadrado 3x3 y un cubo 3x3x3. ¿Por cuánto se ha multiplicado el perímetro con respecto al cuadrado inicial? ¿Y el área? ¿Y el volumen? Si el factor de escala es k, ¿cómo varía el área y el volumen?**
   Solución:
   P'= 3L·12= 3·P
   A' = 3L·3L·6= 3^2 A
   V' = 3^3·V
   En general:
   P'= kP, A'= k^2A, V'= k^3V

2.7.2. Volumen de pirámides:

Probaremos que si tenemos una pirámide y un prisma de igual área de base e igual altura, existe una relación entre sus volúmenes:

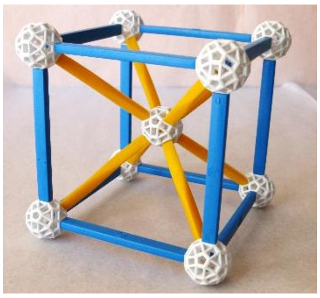
$$V_{pirámide} = \frac{1}{3}\, V_{prisma}$$



Para ello construiremos un cubo y con las barras verdes, construiremos las tres diagonales de las caras que confluyen en un mismo vértice. También construiremos con dos barras amarillas la diagonal del cubo que confluye en ese mismo vértice.

Podemos observar que hemos podido dividirlo en tres pirámides de base cuadrada y de altura la del cubo.

<u>**Actividad inicial:**</u> **Construye una pirámide de base un cuadrado de lado b_0 y aristas laterales y_0. ¿Cuál es su volumen?** Pista: construye el modelo dentro de un cubo de lado b_0, de esta forma se ve que la altura de pirámide es $b_0/2$ y que el volumen de la pirámide es 1/6 del volumen del cubo.



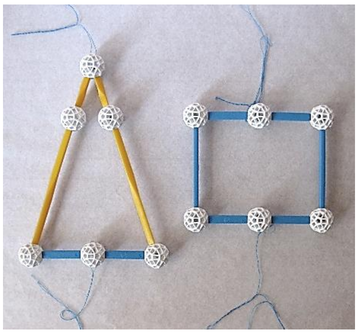
$$V_{pirámide} = \frac{b_0^2 \cdot \frac{b_0}{2}}{3} = \frac{b_0^3}{6} = \frac{V_{cubo}}{6}$$

El volumen de los poliedros más complejos deben calcularse diseccionando el modelo en poliedros más sencillos como prismas y cubos.

<u>**Actividades:**</u>

1. **Calcula el volumen de un dodecaedro rómbico de lado y_0.** Pista: se puede construir añadiendo pirámides en todas las caras de un cubo.
   Solución:
$$V_{dodecaedro\ rómbico} = 6.V_{pirámide} + V_{cubo} = 6 \cdot \frac{1}{6} b_0^3 + b_0^3 = 2b_0^3$$
2. **Calcula el volumen de una pirámide recta triangular de base $3b_0$ y arista lateral r_0.**
3. **Calcula el volumen de un icosaedro de lado 1m**. Pista: disecciona el icosaedro en 20 pirámides triangulares.
4. **Describe una estrategia para encontrar el volumen de un dodecaedro de lado b_0. ¿Puedes calcularlo?**

2.7.3. Volumen de cuerpos de revolución.



Explicaremos cómo se generan las superficies de revolución cono y cilindro haciendo girar un triángulo isósceles y un rectángulo.

2.8. PRACTICA TUS COMPETENCIAS.

Este apartado tiene como objetivo que los alumnos pongan en práctica todo lo aprendido a lo largo de las sesiones anteriores y transferir esos conocimientos adquiridos a otras ramas de las ciencias y/o de las artes.

2.8.1. ¿Sabías que…? Pompas de jabón. Superficie mínima.

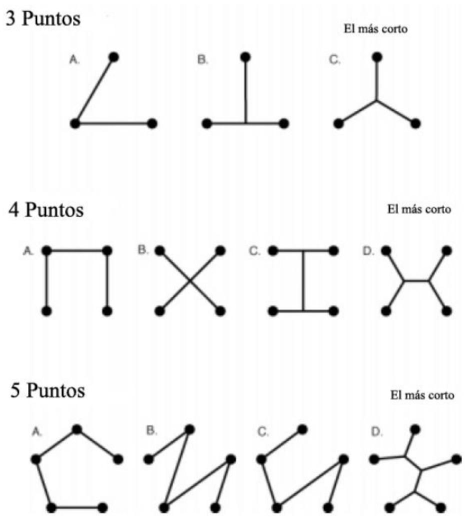
Objetivos:

- Calcular la distancia mínima entre varios puntos del plano.
- Comprobar las leyes de Plateau para configuraciones estables de películas jabonosas.

Materiales:

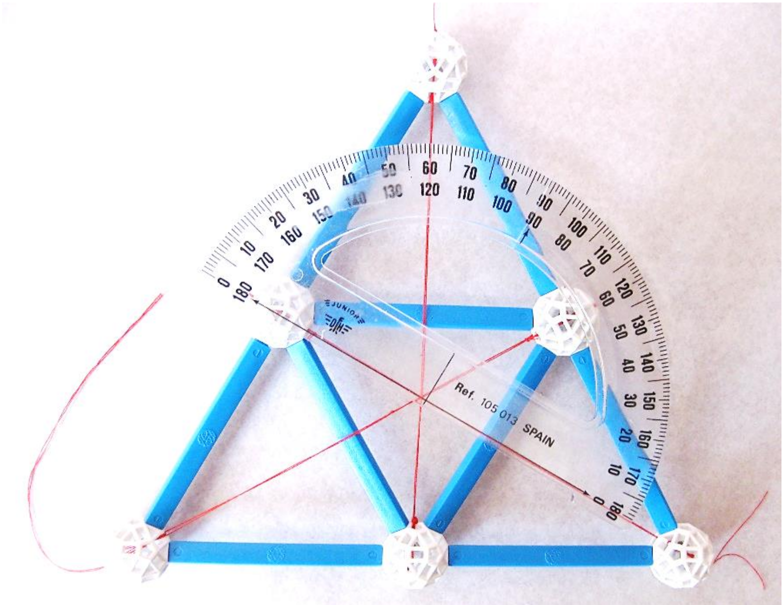
- Piezas Zome para construcción de polígonos.
- Hilo.
- Barreño con agua y jabón.
- Poliedros construidos.
- Transportador de ángulos.
- Pajitas.

Actividad inicial: haz que cada alumno dibuje estos conjuntos de tres, cuatro y cinco puntos como muestra la figura y pídeles que encuentren el camino más corto uniendo todos los puntos. Pueden medir el camino y compararlo. Actividad disponible en la página web *www.DivulgaMAT.net* [4].



Construyendo el punto de Fermat.

Construimos un triángulo ABC en el que el ángulo mayor sea menor de 120°. Sobre cada uno de los lados del triángulo construimos a su vez un triángulo equilátero. Unimos mediante segmentos cada vértice del triángulo ABC con el vértice opuesto del triángulo equilátero construido sobre su lado opuesto. El punto P donde se cortan los tres segmentos es el punto de Fermat. Si el triángulo ABC de partida es equilátero el punto de Fermat coincide con el Baricentro (punto donde se cortan las medianas). Si el ángulo mayor del triángulo fuera de 120°, el punto de Fermat se situaría sobre su vértice, y si el ángulo fuera mayor de 120° el punto de Fermat estaría situado fuera del triángulo en la dirección del ángulo mayor.



El punto de Fermat [2] es un punto cuya suma de distancias a los vértices del triángulo es mínima. Los segmentos que unen el punto de Fermat con los vértices del triángulo forman siempre entre sí ángulos de 120°.

Superficies mínimas.

Cuando sumergimos las estructuras poliédricas en la disolución la película jabonosa que se forma es la que tiene menor superficie. Para un mismo poliedro observaremos varias configuraciones de superficies distintas formadas por películas planas hacia el interior del sólido. Sacudiéndolas un poco o soplando se pasará de unas a otras quedando, al final, la más estable. Cada par de superficies forma una línea de contacto en su interior y cada cuatro aristas se cortarán en un punto. Pedimos a los alumnos que midan los ángulos.

Resultados esperados:

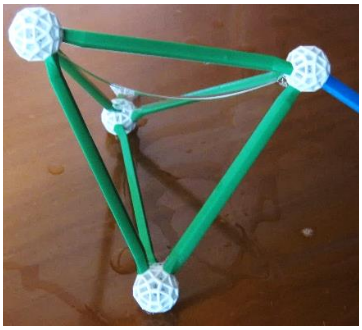
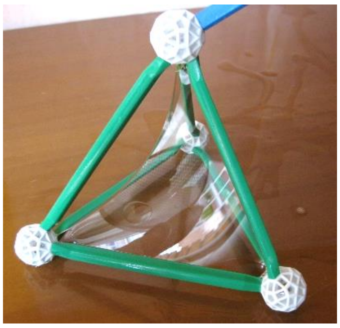
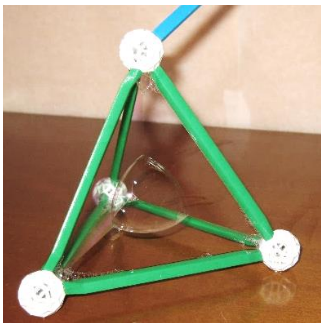
En la *estructura tetraédrica* se obtienen seis planos jabonosos que se apoyan en las aristas de la figura que se cortan en cuatro aristas y éstas a su vez se cortan en un punto central que es el baricentro del tetraedro y que es el equivalente al Punto de Fermat en tres dimensiones.

El baricentro del tetraedro es el punto de corte de las rectas que contienen a cada uno de los vértices y pasan por los baricentros de las caras opuestas.

El ángulo diedro entre cada par de planos es de 120° y el ángulo entre cada dos aristas que convergen en el baricentro es de 109° 28’, como postuló Plateau [6][15].

Si quitamos una de las láminas jabonosas obtendremos un paraboloide hiperbólico.

Si cogemos una pajita de beber refrescos, la introducimos en la disolución jabonosa y soplamos sobre el baricentro, observamos que se forma un tetraedro esférico. Vemos de nuevo que las películas de jabón se unen de tres en tres formando entre ellas ángulos de 120° y que las líneas que forman sus intersecciones lo hacen de cuatro en cuatro formando ángulos de 109° 28’.

En las *estructuras cúbicas* aparecerá una lámina plana y cuadrada en el centro sostenida por doce láminas en forma de trapecio. La simetría del cubo nos permite observar que habrá tres soluciones mínimas que corresponden a cada una de las posibles orientaciones de la lámina central. Pasaremos de una a otra moviendo la estructura. Soplando con una pajita podremos inscribir un cubo en el centro.

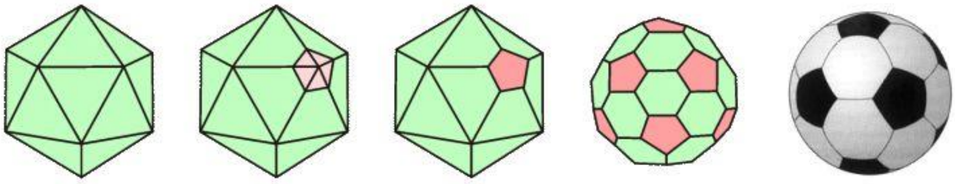

¿Sabías que el **Centro Acuático Nacional de Pekín**, conocido como el Cubo de Agua, fue una de las obras estelares para la Olimpiada de 2008?

El diseño de su piel exterior está basado en burbujas óptimas de llenado del espacio de Weaire-Phelan. Esta estructura es la que presentan los clatratos (hidratos de metano a baja temperatura).

El "cubo de agua" de Pekín. Imagen tomada del blog *https://mateturismo.wordpress.com*

2.8.2. ¿Sabías que…? Cúpulas Geodésicas.

El fútbol tiene mucho que ver con la geometría. ¿Sabías que el balón de fútbol es como un poliedro llamado fullereno descubierto en 1985?

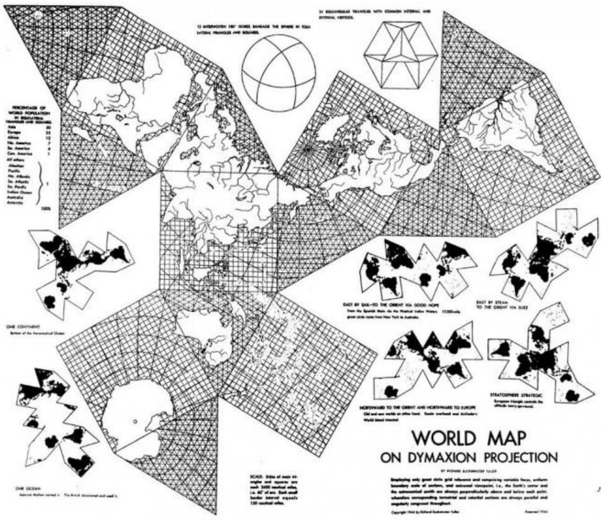


Los fullerenos son macromoléculas de carbono individuales con estructuras cerradas formadas por varias decenas de átomos de carbono. El fullereno más conocido se llama buckminsterfullereno. Su estructura es semejante a la de un balón de fútbol, constituido por 20 hexágonos y 12 pentágonos, con un átomo de carbono en cada una de las esquinas de los hexágonos. El nombre buckminsterfullereno viene del arquitecto Richard Buckminster Fuller, por el parecido con una de las construcciones del arquitecto.

1. **Investiga sobre las cúpulas geodésicas de Buckminster Fuller.**

El origen de las cúpulas geodésicas puede atribuirse a la ambiciosa búsqueda de orden en el universo llevada a cabo por Buckminster Fuller.

Fuller se asoció a su suegro, el arquitecto James Monroe Hewlett, en una empresa dedicada a la producción de bloques de construcción compuestos por fibras. El conocimiento del funcionamiento de la industria de la construcción de tipo artesanal (su ineficiente uso de los materiales y el análisis acientífico de los parámetros físicos que influyen en el proyecto de construcción) hizo que se afanase en una búsqueda de estructuras a escala micro, macro y humana basados en un análisis más racional de las fuerzas de la naturaleza que afectan a las estructuras.



Fuller también estaba preocupado por solucionar el problema del reparto eficiente y equilibrado de los recursos del planeta. Criticaba los sistemas de representación bidimensional de la superficie de la Tierra, que distorsionaban la forma y el tamaño de los continentes. Si quería hacer una valoración de los recursos mundiales primeramente necesitaría una proyección más precisa de la superficie terrestre: el *Dymaxion* o *cuboctaedro*, un polígono consistente en seis caras cuadradas y ocho caras con forma de triángulos equiláteros. Shoji Sadao, en su *Breve historia de las cúpulas geodésicas* publicada en la revista de arquitectura AV Monografías [13] lo describe de la siguiente manera: *“Los cuadrados esféricos quedaban subdivididos por una trama de círculos diametrales ortogonales que, al pasarse a las dos dimensiones, se transformaban en cuadrados planos con una malla ortogonal. Los triángulos esféricos quedaban subdivididos por una trama de círculos diametrales a 60° que al pasarse a las dos dimensiones se transformaban en triángulos equiláteros planos con una malla triangular oblicua.”*

En el siguiente enlace puede verse una animación del *Dymaxion* [15]:
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Dymaxion_2003_animation_small1.gif

La geometría geodésica es la triangulación de una esfera utilizando como punto de partida la forma esférica sobre los que se apoyan los vértices de los sólidos platónicos. El número de veces que las aristas del poliedro regular son subdivididas dando lugar a triángulos más pequeños se llama la frecuencia de la esfera o cúpula geodésica.

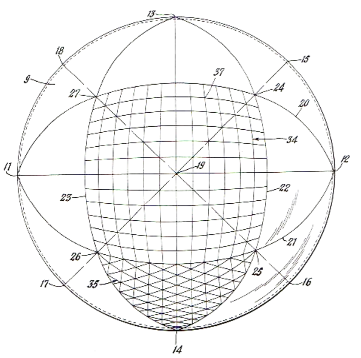
Fuller eligió una trama tridimensional por la estabilidad que presenta la forma triangular. El triángulo es un elemento estructuralmente estable con independencia de su tamaño, por ello la trama icosaédrica ha sido la más utilizada en el diseño de cúpulas geodésicas. Este principio junto con la idea de “menos es más” fue lo que llevó a Fuller a diseñar las cúpulas geodésicas.

En la página web Buckminster Fuller Institute [1] se detallan las ventajas que se encontraron en la utilización de cúpulas geodésicas:

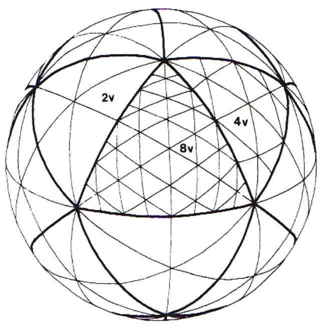
- <u>Eficiencia estructural:</u>
  - Puesto que se engloba el mayor volumen interior con la menor cantidad de superficie, ahorrando costes y material; e introduciendo la idea de que cuando se duplica el diámetro de una esfera, su superficie crece cuatro veces y su volumen ocho veces.

  - Resistencia. Fuller descubrió que si una estructura esférica fuese creada mediante triángulos, su resistencia sería incomparable a la de otras formas estructurales.
  - El empuje del viento es menor en una superficie esférica.
- <u>Eficiencia energética:</u>
  - Al reducir la superficie exterior al mínimo, se necesita menos cantidad de material de construcción, se disminuye la superficie en contacto con el exterior y por tanto con el frío en invierno y con el calor en verano.
  - El espacio interior cóncavo crea una corriente de aire natural que hace que el aire caliente y frío se mueva por la cúpula sin necesidad de conductos de retorno de aire.
  - El efecto del viento contribuye a evitar las pérdidas excesivas de calor en superficie.
- <u>Prefabricación: ahorro de tiempo y material.</u>

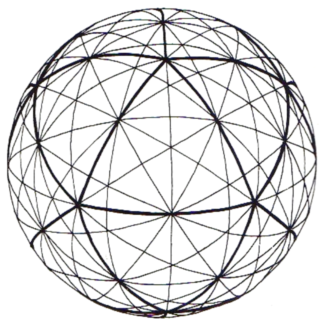
La primera cúpula geodésica que Fuller diseñó tenía la siguiente estructura icosaédrica: *"6 círculos diametrales uniendo los 12 vértices del icosaedro; 10 círculos más diametrales uniendo los centros de cada una de las 20 caras triangulares; y 15 círculos diametrales uniendo los puntos medios de cada una de las 30 aristas; total (6+10+15) 31 círculos diametrales. El principal inconveniente de este diseño era que había mucha diferencia de longitud entre las barras más cortas y más largas."*



Planta de la patente de proyección Dymaxion. Los seis cuadrados y ocho triángulos esféricos que surgen de la proyección del cuboctaedro se han dividido en una trama regular de cuadrados y triángulos equiláteros.



Trama 'regular', primera trama geodésica empleada en la construcción de cúpulas. La proyección del icosaedro esférico está resaltada. Los números indican las veces en que se ha dividido cada lado en partes iguales.



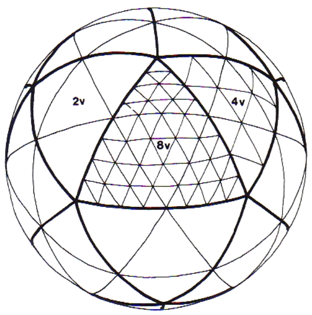
Trama de 31 círculos diametrales generada a partir de la subdivisión del icosaedro esférico con ejes en los 12 vértices, 20 centros de cada cara y 30 mitades de cada lado. La proyección del icosaedro está resaltada.

Variantes de la primera cúpula geodésica:

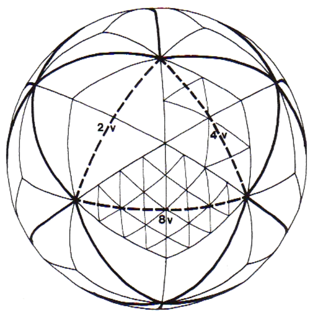
La primera variante que se llevó a cabo fue la trama *'alterna',* en la que cada triángulo se subdividía a mitad de arista. Este nuevo diseño hacía disminuir el número de elementos distintos.

El avance más significativo en el desarrollo de las tramas geodésicas se produjo cuando se diseñó la trama *Triacon*, consistente en reducir al mínimo el número de elementos distintos y también la diferencia de longitud entre las piezas más cortas y más largas. Para ello se utilizó como elemento base, el diamante esférico generado por la trama de 31 círculos diametrales en lugar del icosaedro esférico.

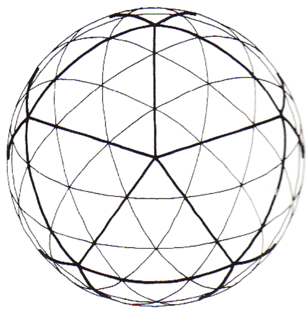
La última trama fue diseñada para dar respuesta al problema del apoyo de las bases de las cúpulas. Al utilizar cualquiera de las tramas mencionadas hasta ahora, la intersección de las aristas con una base plana por debajo del ecuador de la esfera resultaba en vértices que no caían dentro de la trama. Se descubrió que en tramas que alternaban frecuencias de tres, cuatro y cinco, podían establecerse vértices de modo que la base de la esfera truncada podía acomodarse a la nueva geometría, que se denominó *'truncable'* o *'paralela'*.



Trama 'alterna' con las divisiones del triángulo del icosaedro esférico, cuyos bordes aparecen resaltados. Los números indican las veces en que se ha dividido cada lado del icosaedro en partes iguales.



Trama Triacon, concebida por Duncan Stuart en la primavera de 1951. La proyección del icosaedro esférico está resaltada. Los números indican las veces en que se ha dividido cada lado en partes iguales.


Trama 'truncable', descubierta por William Wainwright. La planta muestra 6/10 de una esfera con una trama de frecuencia 3. El icosaedro esférico aparece resaltado. También existen tramas de frecuencias 4 y 5.

Una cúpula icónica:

La cúpula geodésica más conocida de las construidas por Buckminster Fuller fue la del pabellón de Estados Unidos para la Exposición Universal de 1967 celebrada en Montreal, Canadá. Imagen tomada del blog: *ggili.com.mx*

Podemos decir que Fuller fue un visionario de su época puesto que se preocupó de temas muy actuales como son la prefabricación y la eficiencia energética.

2. **Construye una cúpula geodésica.**
3. **Busca un ejemplo en tu ciudad o en la web de una bóveda geodésica construida.**
   En el espacio rehabilitado *Matadero* en Madrid, podemos encontrar una bóveda geodésica construida.

4.7. EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE.

La evaluación es un elemento fundamental para dotar de calidad al proceso de enseñanza-aprendizaje y deberá ser acorde y coherente con la metodología de enseñanza llevada a cabo. Si intentamos formar y valorar situaciones de aprendizaje en contextos colaborativos la evaluación no puede centrarse únicamente en la evaluación individual y en una prueba final.

De acuerdo a la metodología docente propuesta se realizará una evaluación individual y grupal a partir de la observación y supervisión de tres aspectos fundamentales:

- Funcionamiento del equipo de trabajo y responsabilización del estudiante en el proceso enseñanza-aprendizaje.
- Valoración del proceso de aprendizaje a través del trabajo diario grupal durante las diferentes sesiones: razonamientos, discusiones, calidad de las intervenciones, conexión de ideas, actitudes, creatividad en las ideas, etc.
- Valoración del producto construido por el grupo y adquisición de competencias.

Cuantos más variados y adaptados a la finalidad perseguida sean los instrumentos de evaluación, más fácilmente se podrán calibrar los resultados obtenidos. Deberemos considerar distintos tipos de evaluación (inicial, formativa y sumativa), distintas formas (autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación) y emplear distintos instrumentos: observación, diario de clase, entrevistas, debates, cuestionarios, etc. Además estará basada en criterios tales como: aspectos a evaluar, indicadores que se van a observar y qué ponderaciones van a tener esos indicadores. [9]

Tipos de evaluación y ponderación:

Evaluación inicial: al inicio de cada una de las sesiones se planteará un reto o actividad inicial que active los conocimientos previos adquiridos en cursos o sesiones anteriores.

Evaluación continua:

- El profesor deberá ir pasando por los grupos durante la sesión de trabajo, y los alumnos deberán explicarle sobre qué se está trabajando y cuál es la estrategia que están siguiendo. En caso de necesitarlo, se reorientará mediante preguntas y se reforzarán los logros conseguidos. (20%)
- Se valorará el diario de trabajo individual a través de la revisión de los cuadernos. (10%)
- Una vez por semana, el grupo presentará un informe que recoja las fotos de los modelos construidos y los hallazgos realizados durante esa semana. (40%)

Evaluación sumativa: Al finalizar cada unidad didáctica, se realizará una prueba individual a modo de comprobación de los conocimientos y destrezas individuales adquiridas. (30%)

Formas de evaluación:

Autoevaluación: En los informes de trabajo semanales, habrá una serie de preguntas encaminadas a autoevaluar el funcionamiento del grupo y el trabajo realizado por el mismo.

Coevaluación: Tras los momentos de construcción y reflexión habrá un tiempo de puesta en común en la que algún grupo explicará al resto de la clase sobre qué se ha trabajado y qué estrategia han seguido. El profesor hará preguntas al resto de grupos para que evalúen el trabajo realizado por sus compañeros.

Heteroevaluación:

- Profesor: Durante cada sesión y al finalizar la unidad didáctica el profesor evaluará el funcionamiento de los grupos de trabajo, el proceso de aprendizaje a través del trabajo diario y el producto final, presentado a través de informes y una prueba final individual.
- Alumnos: Al finalizar la unidad didáctica, los alumnos harán un cuestionario para evaluar el desarrollo de la unidad didáctica y la metodología didáctica seguida.

Instrumentos de evaluación:

Registros de observación para valorar el proceso grupal, roles dentro del grupo y el clima de trabajo en el grupo.

Diario. Se ordena cronológicamente el trabajo en el cuaderno y puede constar de anotaciones, documentos, investigaciones, análisis, reflexiones, gráficos, esquemas, etc. Esta herramienta supone un indicador muy valioso del progreso individual.

Memoria semanal grupal. Se trata de hacer una síntesis con los principales conocimientos adquiridos durante esa semana, insertando imágenes de los modelos construidos por el grupo y el método de trabajo seguido. Al final se hará una breve valoración del trabajo realizado y del funcionamiento del grupo. Esta herramienta es de gran ayuda para el profesor pues le permite poder valorar el progreso grupal. La forma de entrega podrá ser en formato digital o en papel según los recursos informáticos disponibles.

Entrevista con los grupos. El profesor irá pasando por las mesas mientras los grupos trabajan. Los alumnos deberán explicar qué proceso de trabajo están siguiendo y el profesor hará preguntas para hacer participar y conocer las opiniones de todos los miembros del grupo, y redirigir la actividad en el caso de ser necesario.

Cuestionarios para valorar la unidad didáctica y la metodología seguida.

Prueba escrita. Al finalizar la unidad didáctica se realizará una pequeña prueba escrita para comprobar los conocimientos adquiridos individualmente por los alumnos.

5. CONCLUSIONES

4.1. Evaluación de la herramienta *Zome*.

Mediante el manejo de la herramienta *Zome* para la preparación de este trabajo he detectado una serie de inconvenientes en su manejo que expongo a continuación:

- No se puede construir cualquier ángulo por la disposición de los agujeros de los nodos, por tanto no será posible construir ciertos polígonos y poliedros.
- El uso de barras verdes es complicado porque admiten muchas orientaciones por el pequeño giro que presentan las barras y puede resultar difícil para alumnos no avanzados en el manejo de la herramienta.
- Se pierde tiempo en la preparación, pero sobre todo a la hora de recoger las piezas.

- A veces no es posible conservar todas las producciones si no se requiere de suficiente espacio en el aula para poder analizarlas más tarde y aunque se haga una fotografía, los alumnos no lograrán entender bien las relaciones, y volveríamos al problema de aprendizaje mediante la visualización y no manipulación.
- En el estudio de poliedros, sobre todo los semirregulares, es laborioso tener que construirlos y se requiere de muchas barras *Zome*. Por ejemplo para construir el icosidodecaedro truncado es necesario más de un kit.

4.2. Evaluación de la metodología didáctica.

A priori, aunque no se haya ensayado previamente el desarrollo de esta unidad didáctica en el aula, parece que lo más complicado a la hora de llevarla a cabo sería conseguir un buen funcionamiento del grupo. Para ello sería fundamental que los grupos no fuesen muy numerosos o que hubiese más de un monitor para poder atender adecuadamente a todos los equipos.

No obstante, creo que son más las ventajas que los inconvenientes, ya explicadas al inicio del trabajo, las que suponen llevar a cabo una metodología colaborativa, basada en el aprendizaje autónomo aunque guiado por el profesor y el aprendizaje por descubrimiento.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] *Buckminster Fuller Institute.* Página web disponible en *http://staging.bfi-internal.org/about-fuller*

[2] Cárdenas, S. (2004). *El punto de Fermat*. Miscelánea Matemática 40, 77-85.

[3] BOCM. *Decreto 48/2015, de14 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.*

[4] *DivulgaMAT.* Centro virtual de divulgación de las matemáticas. Real Sociedad Matemática Española R.S.M.E. *http://www.divulgamat.net/*

[5] Dunham, W. (1992). *Viaje a través de los genios. Bibliografías y teoremas de los grandes matemáticos.* Ed. Pirámide.

[6] Estalmat. Estímulo del Talento Matemático. Real Academia de Ciencias. (2006). *Pompas de jabón*. Disponible en Materiales elaborados por los Profesores del Proyecto 4.13.8 *http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/Indice.htm*

[7] Hart, G.W. y Picciotto, H. (2001). *Zome Geometry. Hands-on Learning with Zome™ Models.* EEUU. Key Curriculum Press.

[8] Heath, T. (1921*). A History of Greek Mathematics*. Oxford University Press.

[9] Iborra Cuéllar, A. e Izquierdo Alonso, M. (2010). *¿Cómo afrontar la evaluación del aprendizaje colaborativo? Una propuesta valorando el proceso, el contenido y el producto de la actividad grupal*. Revista General de Información y Documentación. Vol. 20. 221-241.

[10] Penrose, R. (1978*). Pentaplexity, Eureka* 39, 16-32. Disponible en *http://www.ma.utexas.edu/users/radin/pentaplexity.html*

[11] Porta, P. *Poliedros.* Disponible en *http://www.pauloporta.com/Xeometria/poliedros/epoliedros.html*

[12] Quirós Gracián, A. (2007). *Teselaciones del plano*. Las matemáticas en "La biblioteca de Babel". El rincón de la ciencia nº 43. Disponible en *http://rincondelaciencia.educa.madrid.org/cyl/Babel/babel-3/babel-3b.html*

[13] Sadao, S. (2010). *Breve historia de las cúpulas geodésicas*. *Buckminster Fuller 1895-1983*, AV Monografías. Ivorypress & Arquitectura Viva. Nº 143, 86 - 93.

[14] Sarnat, A. y Bischoff, B. (2013). *Symmetry*. M. C. Escher Foundation. Disponible en *http://www.mcescher.com/gallery/symmetry/*

[15] Wikipedia*. Dymaxion map*. Disponible en *https://en.wikipedia.org/wiki/Dymaxion_map*

[16] Wikipedia. *Leyes de Plateau*. Disponible en *https://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Plateau*

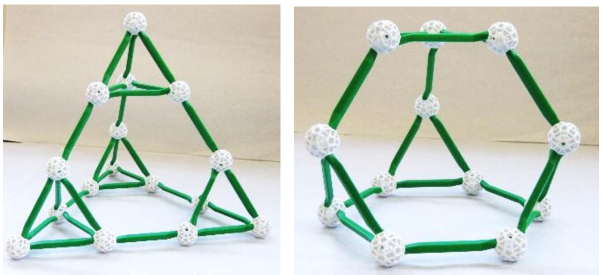
[17] Wikipedia. Triacontaedro rómbico. Disponible en *http://en.wikipedia.org/wiki/Rhombic_triacontahedron*

[18] *Zometool lesson plans 1.1.* Disponible en *http://www.zometool.com/*

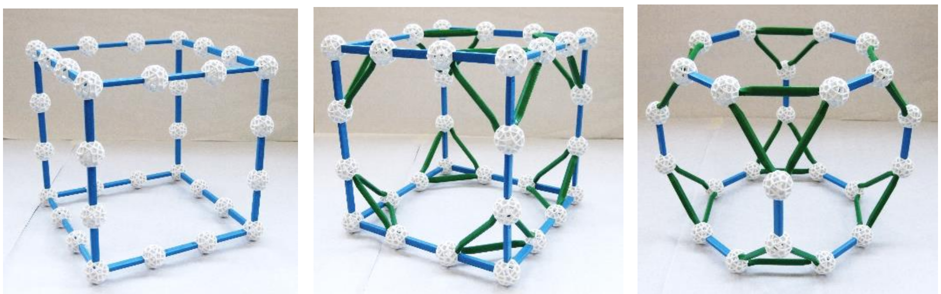
7. ANEXOS

7.1. Poliedros semirregulares.

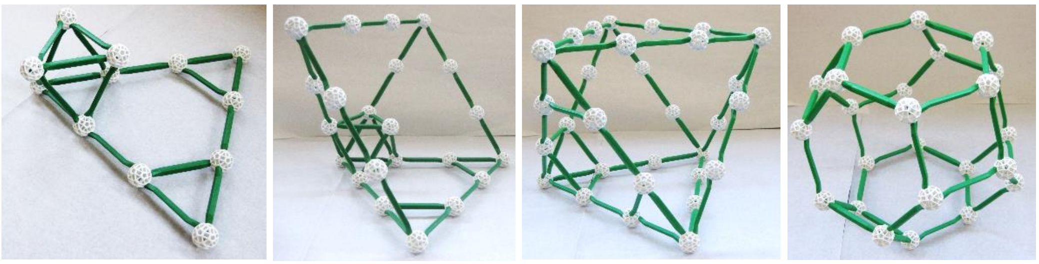
a) (3, 6, 6)* tetraedro truncado.



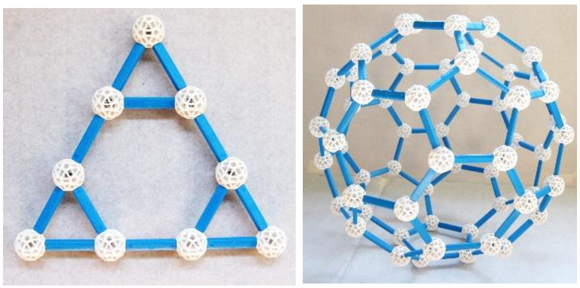
b) (3, 8, 8)* cubo truncado. *Truncando un cubo de lado 3b, los octógonos que se obtienen no son regulares. Si queremos construirlo mediante octógonos regulares necesitaremos estructuras verde-azules (g-b) no disponibles en nuestro kit Zome.*



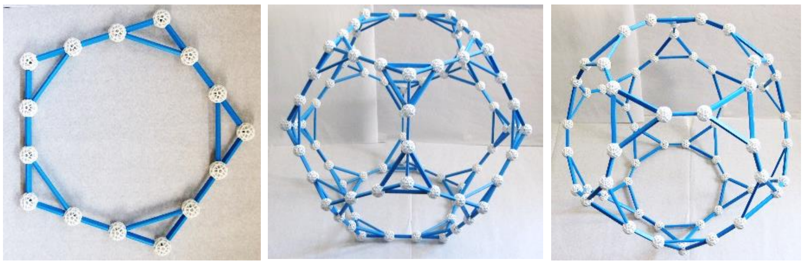
c) (4, 6, 6)* octaedro truncado.



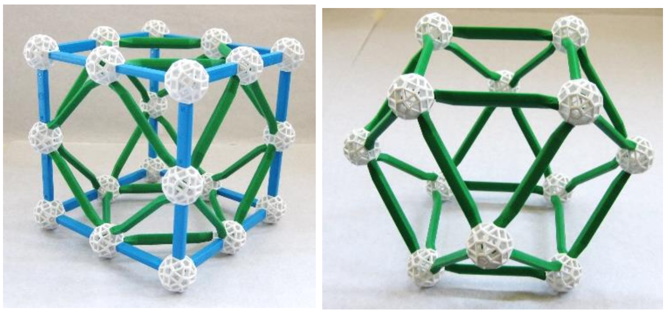
d) (5, 6, 6) icosaedro truncado.



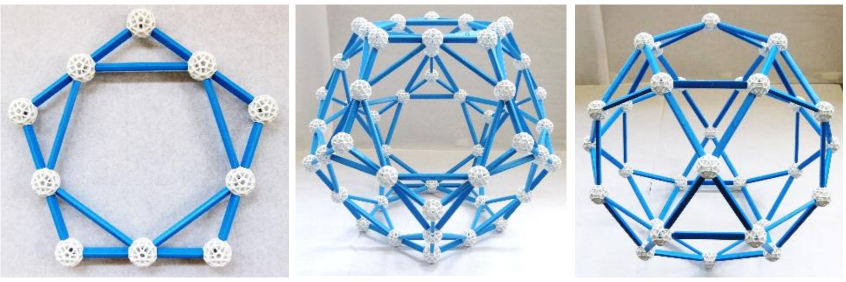
e) (3, 10, 10) dodecaedro truncado.



f) (3, 4, 3, 4)* cuboctaedro.

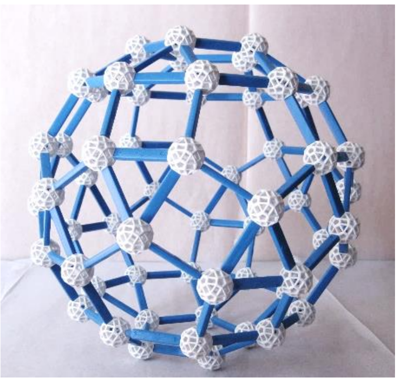


g) (3, 5, 3, 5) icosidodecaedro.



h) (3, 4, 4, 4)* rombicuboctaedro.
Para construir este poliedro necesitamos barras verdes-azules (g-b) no disponibles en nuestro kit Zome.

i) (3, 4, 5, 4) rombicosidodecaedro.



j) (4, 6, 8)* cuboctaedro truncado. *Para construir este poliedro necesitamos barras verdes-azules (g-b) no disponibles en nuestro kit Zome.*

k) (4, 6, 10) icosidodecaedro truncado.