



MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación de
Profesorado y Educación /13-14

Máster de Formación
de Profesorado de
E.S.O. y Bachillerato



Trabajo cooperativo en el aprendizaje de las matemáticas

*Maria Teresa Gutiérrez
Yelsbak*



RESUMEN

El siguiente trabajo tiene como objetivo principal el estudio del aprendizaje cooperativo en el área de matemáticas con alumnos de secundaria. Se muestran las distintas aportaciones que nos proporciona esta metodología en nuestro actual modelo educativo y un nuevo enfoque en la enseñanza de las matemáticas.

Para realizar el estudio, establecimos de forma práctica esta nueva metodología de enseñanza y aprendizaje en una clase de 3º de ESO a través de la unidad de Funciones. Hemos evaluado el rendimiento de los estudiantes y sus relaciones sociales en comparación con otra clase del mismo nivel que siguieron con la metodología habitual de aprendizaje individual.

Se expone el estudio previo a la práctica, dónde se muestran las distintas técnicas cooperativas utilizadas, obtenidas de investigaciones anteriores, y las distintas pautas a seguir para poder implantarlo. Los resultados nos muestran las ventajas que obtenemos a través de ésta técnica en comparación con la enseñanza magistral y las dificultades que encontramos al aplicarlo.

Palabras clave: Aprendizaje cooperativo, interdependencia positiva, interacción social, cohesión grupal, integración, autoevaluación.

ABSTRACT

The following paper has as its main goal the study of cooperative learning in mathematics with high-school students. It shows all different contributions that this methodology gives us in our present educational model and a new approach in mathematics' teaching.

In order to have this study done, we established this new teaching and learning methodology in a 3º ESO class through the Functions lesson, and conducted in a practical way. We have evaluated the students' performance and their social relationships and we have compared them with another same-level class that followed the usual methodology.

We also provide the pre-practice study, where it shows the different used cooperative techniques that we obtained from previous researches and the different paths to follow in order to implement it. Results show us the advantages that we get through this technique in comparison with the mastery teaching and the difficulties that we find when we apply it.

Keywords: Cooperative learning, positive interdependence, social interaction, group cohesion, integration, self-evaluation.

ÍNDICE

RESUMEN	2
ABSTRACT	2
INTRODUCCIÓN	5
¿QUÉ ES EL APRENDIZAJE COOPERATIVO?	5
¿POR QUÉ UTILIZAR EL APRENDIZAJE COOPERATIVO EN MATEMÁTICAS?	6
TIPOS DE APRENDIZAJE EN LAS AULAS	7
ANTECEDENTES	9
ESTUDIOS ANTERIORES	9
DIVERSIDAD EN LAS AULAS	10
OBJETIVOS	11
OBJETIVOS DEL APRENDIZAJE COOPERATIVO EN MATEMÁTICAS	11
OBJETIVOS DEL PROYECTO	11
COMPETENCIAS Y CAPACIDADES	13
METODOLOGÍA Y PRÁCTICA	15
PROYECTO DE APRENDIZAJE COOPERATIVO	15
¿CÓMO APLICAR DE FORMA ADECUADA EL APRENDIZAJE COOPERATIVO?	15
ESQUEMA DE TRABAJO EN CLASE	16
OBJETIVO COMÚN	17
ORGANIZACIÓN DIARIA	17
NOMBRE DEL GRUPO	18
ROLES	19
SISTEMA DE POSITIVOS	20
GRUPOS DE TRABAJO	21
DISTRIBUCIÓN DE LOS GRUPOS	21
DISPOSICIÓN DEL AULA	23
CONTENIDOS Y TAREAS	24
MÉTODOS PRÁCTICOS	24
CONTENIDOS	25
TIPO DE TAREAS	26
EVALUACIÓN	28

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	29
EVALUACIÓN GRUPAL E INDIVIDUAL	29
TORNEO POR EQUIPOS	30
AUTOEVALUACIÓN	33
CALIFICACIÓN	34
PAPEL DEL PROFESOR	34
RESULTADOS	37
DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	37
DIFICULTADES	38
CONCLUSIONES	39
BIBLIOGRAFÍA	41
ANEXOS	42
TABLA ACTIVIDADES-OBJETIVOS-COMPETENCIAS	42
TAREAS	44
EXAMEN INDIVIDUAL	50
HOJA DE AUTOEVALUACIÓN	51

INTRODUCCIÓN

Dentro del campo de la enseñanza, profesores y alumnos se ven envueltos en retos diarios difíciles de superar, y aunque diferentes, estos retos están muy relacionados.

Los profesores encuentran dificultades a la hora de impartir clase y enseñar al alumnado, en el interés de éstos por su materia, o en la aglomeración y diversidad en las aulas. Los alumnos, por su parte, encuentran dificultades en el aprendizaje de las distintas materias, en su desmotivación hacia ellas o en el hecho de sentirse aceptados e integrados por un grupo de iguales.

Algunas de estas cuestiones que podemos encontrar, muchas veces, están vinculadas a los métodos de enseñanza que se imparten en las aulas y la motivación del alumnado. Los profesores tienden a repetir la misma metodología año tras año, esperando que de alguna forma funcione siempre y que los alumnos aprendan de forma satisfactoria.

Pero el alumnado cambia, y surgen nuevas necesidades en las aulas que hay que abordar, viéndonos en la necesidad de adaptarse a nuevos contenidos con otras metodologías y materiales que nos ayuden a enseñar de la forma más adecuada.

En este trabajo se va a abordar otra metodología distinta a la que se suele utilizar en las aulas, el aprendizaje cooperativo, orientado al área de matemáticas.

La asignatura de matemáticas siempre ha estado enfocada como una de las peores materias o más difíciles para los alumnos. Los resultados apoyan esta teoría, pero a pesar de eso, la metodología en las aulas, en muchos casos, sigue siendo la misma.

Los alumnos necesitan enfocar de otra forma esta materia, asimilarla, entenderla y aprender a aplicarla. Las matemáticas nos abren las puertas a desarrollar en nuestros alumnos una mente crítica, abstracta, razonada, que piense y que obtenga resultados con ello.

El aprendizaje cooperativo nos aporta una herramienta para que nuestros alumnos desarrollen esas características a la vez que mejoran sus relaciones sociales y su autoestima.

¿Qué es el aprendizaje cooperativo?

El aprendizaje cooperativo es una técnica didáctica que permite una interacción del alumnado en grupos pequeños y la existencia de una interdependencia en la que cada integrante del grupo se siente motivado para enseñar a sus compañeros y a la vez aprender de ellos.

Cooperar implica ayudar y ser ayudado, tener la responsabilidad individual como integrante de realizar una tarea con el fin de que todo el grupo, incluido uno mismo, se beneficie del resultado.

Dentro de las aulas, el aprendizaje cooperativo se utiliza como técnica de trabajo grupal, con la característica de que el grupo tenga un objetivo común. Esa será la principal

motivación del alumnado a la hora de responsabilizarse de su aprendizaje y el de sus compañeros.

En el área de matemáticas el aprendizaje cooperativo permite que el alumnado de forma conjunta interactúe con los problemas y razone una solución, a través del diálogo, la propuesta de ideas y la experimentación. La teoría es aprendida a través de la práctica y no por memorización. Lo que proporciona un aprendizaje significativo, que relaciona lo aprendido con lo que ya saben, y no un aprendizaje memorístico, que lo único que les proporciona es una acumulación de datos con falta de significado y ninguna relación con lo visto anteriormente.

Los cinco elementos esenciales que se deben incorporar dentro del trabajo cooperativo para que éste funcione son los siguientes (Johnson & Johnson, 1994, citado en Johnson, 1999):

- **La interdependencia positiva:** Los integrantes del grupo tienen que tener una tarea clara con un objetivo común, lo que les proporcionará la idea de que trabajando juntos conseguirán su objetivo. Por lo que el esfuerzo de cada uno se convierte en el éxito de todos. Es la base del trabajo cooperativo.
- **Responsabilidad individual y grupal:** Con un objetivo común, cada integrante del grupo debe asumir la responsabilidad de llevar a cabo su parte del trabajo, y el grupo, a su vez, debe hacerse responsable de que cada integrante lo cumpla y dar respaldo si se necesitara, alcanzando sus objetivos. La evaluación del desempeño individual es imprescindible en este punto ya que contribuye al trabajo del equipo.
- **Interacción estimuladora, cara a cara:** El aprendizaje cooperativo proporciona dentro del grupo una interacción constante entre sus integrantes, ya sea para ayudarse, felicitarse o apoyarse en el desarrollo de su aprendizaje. Las explicaciones deben ser verbales y de forma visual ya que proporciona confianza y mayor atención.
- **Prácticas interpersonales y grupales:** Los alumnos deben saber a trabajar como equipo, lo que implica respetar y tomar decisiones, crear confianza y hacer que todos los miembros se sientan aceptados y valorados, saber tratar los conflictos, solucionarlos y sentirse motivado.
- **Evaluación grupal:** La eficacia del aprendizaje debe maximizarse, por lo que todos los miembros del grupo de forma común deben ser conscientes de su actitud o progreso y el de sus compañeros. De esta forma el equipo puede tomar las respectivas decisiones que les conducirán a la mejora de las condiciones grupales y por consiguiente al cumplimiento de los objetivos de forma exitosa.

¿Por qué utilizar el aprendizaje cooperativo en matemáticas?

El aprendizaje cooperativo, en general, nos ayuda a mejorar la relación social entre alumnos. La cohesión e interacción del grupo, facilita la relación entre los alumnos y su integración dentro de la clase. Mejora la convivencia y solidaridad, además de fomentar el diálogo para la resolución de conflictos. Es una herramienta muy útil ante la diversidad y heterogeneidad del alumnado, ya que nos aporta la posibilidad de atender de forma más personal e individualizada a nuestros alumnos y proporcionarles un ritmo más adecuado de aprendizaje y no el que lleve la mayoría de la clase.

La materia de matemáticas, como se ha comentado anteriormente, produce una pérdida de interés y desmotivación muy grande por parte de un elevado número de estudiantes. Principalmente se podría achacar a la falta de comprensión por parte del alumnado, pero entonces, el problema vendría derivado de la metodología empleada por los profesores y la impartición de ésta en las aulas.

El aprendizaje cooperativo nos proporciona un cambio en la forma de impartir esta materia, alejándonos del modelo de profesor magistral que transmite todos sus conocimientos a sus alumnos, los cuales deben mantener una actitud pasiva ante la información que se les aporta.

De esta forma, cambiamos la comunicación unidireccional profesor-alumno, a la comunicación entre alumnos e intercambio de ideas. Pasando de esta forma, al modelo de profesor “guía”, el cual se encarga de ayudar a sus alumnos a superar los obstáculos que se puedan encontrar y encaminarles a encontrar la solución y conseguir sus objetivos.

Con el trabajo cooperativo, los alumnos encuentran en sus compañeros una ayuda y un apoyo para la comprensión de esta materia, a la vez que superan sus miedos de fracaso y dificultades de aprendizaje. Entre todos, discuten las ideas y razonan, reflexionan sobre las estrategias utilizadas y mejoran su análisis crítico y su lógica. El resolver los problemas, aunque sea de forma grupal, les proporciona una mayor confianza en ellos mismos, ya que han formado parte en su resolución. De otra forma, posiblemente, no lo habrían conseguido.

Los alumnos encuentran dificultades en la comprensión y estudio de las matemáticas, ya sea por el lenguaje empleado, la abstracción de los contenidos, la asimilación del significado de los símbolos, etc. Si se les proporciona la oportunidad de que la explicación venga dada por sus compañeros, el lenguaje empleado o la forma de hacerlo, es más cercana y comprensible para ellos, por lo que el entendimiento será mayor. Si además ven, que no sólo ellos tienen dudas, sino que otros compañeros las comparten, se animarán a preguntar e intentar resolverlas, lo que en una clase con enseñanza magistral no se da, ya sea por vergüenza o por desaprobación del profesor.

El trabajo cooperativo, como podemos observar, es una gran herramienta ante la diversidad en las aulas y las dificultades que puedan surgir en el aprendizaje de las matemáticas. La adaptación de la materia al ritmo de cada alumno y a su nivel cognitivo sería lo ideal, y una buena aproximación a este modelo se consigue a través del aprendizaje cooperativo.

Tipos de aprendizaje en las aulas

En la mayoría de los centros educativos el modelo de aprendizaje que nos encontramos es el individualista. Convirtiéndose algunas veces, de forma indirecta, en uno competitivo. Esto se consigue en situaciones muy comunes como puede ser hacer una pregunta en clase de forma general. El alumno espera la aprobación del profesor por encima de sus compañeros, por lo que aguarda que el compañero al que le formulan la pregunta se equivoque, así él podrá contestarla de forma correcta y que será felicitado o premiado por ello.

En otras ocasiones el individualista se combina con el cooperativo, pero de forma muy esporádica. Se utiliza en casos de exposición de un trabajo, proyectos de corta duración, trabajo por parejas, etc.

Por lo tanto, los tres tipos de aprendizaje que nos podemos encontrar son: el individualista, el competitivo y el cooperativo.

- **Aprendizaje individual:** Los alumnos trabajan de forma individual, sin interactuar con el resto de sus compañeros. Su aprendizaje depende de lo que hagan ellos mismos y no de lo que consigan sus compañeros. Cada uno debe cumplir los objetivos fijados por el profesor, y si tiene dudas con los contenidos o problemas, será el profesor el que se las resuelva. La interacción con el resto de compañeros se ve como una actitud negativa, el alumno debe mantenerse pasivo ante las explicaciones del profesor y preocuparse por sí mismo y su actitud.
- **Aprendizaje competitivo:** Los alumnos trabajan de forma individual, pero en este caso sí existe interacción entre ellos, para fijarse en lo que hacen sus compañeros y disputarse el puesto del "mejor de la clase". Cada alumno debe cumplir los objetivos fijados por el profesor, pero antes que el resto de sus compañeros y de mejor forma. Si lo consiguen es que el resto no lo hizo, y eso para ellos es bueno. Por lo que se crea entre los alumnos una interdependencia muy negativa y un ambiente de clase tenso y agobiante.
- **Aprendizaje cooperativo:** Los alumnos trabajan en pequeños grupos, preferiblemente heterogéneos, por lo que existe interdependencia con sus compañeros. La finalidad de este aprendizaje es que dentro del grupo cada alumno se preocupe por aprender y porque sus compañeros aprendan. Los objetivos no se cumplen si algún compañero no aprende. De esta forma los alumnos se ven apoyados y animados por su trabajo a través de sus compañeros y además aprenden a trabajar en equipo. Algo muy importante en la sociedad en la que vivimos.

ANTECEDENTES

Estudios anteriores

Las primeras investigaciones socio-psicopedagógicas sobre cooperación comenzaron sobre los años veinte (Slavin, 1999), pero las aplicadas en el aula no empezaron hasta los años setenta. Actualmente existen distintos métodos prácticos desarrollados e investigados sobre aprendizaje cooperativo para grupos reducidos (3, 4 o 5 personas), algunos de ellos son los siguientes:

- El rompecabezas (*"Jigsaw"*)

Es una técnica de Elliot Aronson (1978) que consiste en la división de los conceptos y contenidos que hay que aprender para la realización de la tarea grupal. El método propone que cada integrante del grupo se haga "experto" de una porción de la materia de estudio, y que se la prepare con los demás integrantes de otros grupos que tengan la misma materia. De esa forma, cuando vuelve con su grupo inicial, es responsable de explicar su parte, y aprender la de sus compañeros. Lo que nos proporciona una interdependencia entre los integrantes, viéndose en la necesidad de cooperar unos con otros para conseguir sus objetivos.

- El rompecabezas II (*"Jigsaw II"*)

Es una variante de la técnica explicada anteriormente. La metodología es muy parecida: se dividen los contenidos, cada integrante del equipo se prepara su parte junto con otros compañeros que tengan su mismo tema y después lo pone en común con su grupo inicial. Una de las variantes es la implantación de puntuaciones grupales, asegurándonos de que todos los miembros aprendan todo el tema.

Otra variante es la interdependencia grupal. En el Jigsaw original únicamente cada miembro del grupo tenía su propio tema, en cambio, en esta modalidad, todos los integrantes pueden acceder a toda la información. De esta forma, se facilita el trabajo al profesor, ya que se utilizan materiales curriculares ordinarios (no facilitados para trabajo cooperativo), pero nos vemos en la necesidad de motivar e incentivar a los alumnos para ayudarse entre ellos.

- Trabajo en Equipo-Logro Individual (*TELI*)

Esta técnica consiste en crear grupos heterogéneos de 4 miembros, en los cuales, los integrantes del grupo trabajan juntos hasta que todos dominan el tema. Después son examinados de forma individual con cuestionarios, entregándoles puntos dependiendo de su superación personal. El resultado final será la suma de las distintas puntuaciones de cada integrante, que compararemos con la del resto de equipos, recompensando al grupo con mayor puntuación.

- Torneos de Juegos por Equipos (TJE)

Desarrollada por David DeVries y Keith Edwards (Slavin, 1999), se basa en la misma metodología que el Trabajo en Equipo-Logro, sustituyendo los cuestionarios finales por

torneos entre equipos. Cada componente del grupo se enfrentará a otros participantes del resto de equipos con la finalidad de conseguir puntos para su equipo. De esta forma mantenemos un nivel de motivación a través de la competencia entre equipos, sin olvidar la integración y el apoyo dentro de cada grupo.

Todas estas técnicas y otras son utilizadas basándose en los 5 componentes esenciales para el trabajo cooperativo que se han descrito anteriormente. La motivación es clave para el aprendizaje cooperativo, y ésta se puede conseguir a través de competiciones entre equipos, premios u otras recompensas que interesen al alumnado y les proporcione un objetivo común.

Diversidad en las aulas

La atención a la diversidad de necesidades educativas en las aulas se estableció como un concepto renovado de lo que anteriormente se conocía como integración social. Éste nuevo concepto lo que engloba no es sólo atender a un grupo concreto de alumnos por sus necesidades especiales, sino encontrar la forma de atender a todos dentro de la diversidad de una escuela común. De esta forma crear una sociedad inclusiva, tolerante y no discriminatoria.

Distintos estudios sobre programas especiales para niños con dificultades de aprendizaje, que los aislaban de las aulas comunes para poder darles una educación mejor, demostraron que perjudicaban su desarrollo social y el concepto sobre sí mismos ya que eran aislados y rechazados por el resto de niños a causa de su incompetencia académica (Johnson, 1950; Shattuck 1946).

Esta nueva visión educativa, la cultura de la diversidad (López Melero, 1990,1997; Arnáiz e Illán, 1996) promueve una "escuela para todos" donde todos los alumnos se sientan acogidos e integrados, con las mismas oportunidades educativas y que aprendan a relacionarse y crecer de forma conjunta.

Nos encontramos, de esta forma, aulas con un alumnado diverso con necesidades propias y especiales, a los que hay que atender de forma adaptada y al mismo tiempo. Los recursos educativos en los centros no son muchos, y por ello, el papel del profesor y sus decisiones didácticas se vuelven cruciales.

Muchos centros educativos coinciden en la idea de incluir a los alumnos con necesidades especiales dentro de los planes educativos elaborados por la mayoría, sin olvidar sus necesidades y las del resto.

El aprendizaje cooperativo ha proporcionado una herramienta de inclusión social y aprendizaje conjunto. Con esta metodología dejamos que los alumnos se relacionen y trabajen conjuntamente, ayudándose entre ellos, alejándonos del modelo individualista y competitivo que fomenta la disgregación social.

De esta forma, el profesor, puede atender de forma más individualizada a los alumnos que lo necesiten, sin descuidar al resto, que trabajan y aprenden a un ritmo autorregulado y adaptado a sus necesidades.

OBJETIVOS

Objetivos del aprendizaje cooperativo en matemáticas

Los objetivos que podemos alcanzar empleando aprendizaje cooperativo en el aula son muchos. Dependerán de la metodología que apliquemos, el área en la que estemos trabajando y el tiempo del que dispongamos.

En general, los objetivos principales del trabajo cooperativo se basan en el desarrollo cognitivo de los alumnos a través de la interacción social. Por lo que nos encontramos con objetivos como:

- Integrar a los alumnos potencialmente con riesgo de exclusión.
- Atender a los alumnos con necesidades educativas especiales.
- Adquirir relaciones sociales positivas entre los alumnos (simpatía, atención, respeto,...) y mejorar el ambiente del grupo-clase.
- Mejorar su autoestima.
- Mejorar el rendimiento y productividad de los alumnos en clase.
- Desarrollar un aprendizaje activo y participativo por parte de los estudiantes.
- Adquirir conciencia de grupo y saber trabajar de forma adecuada (Resolución de conflictos, consenso,...).
- Aprender a compartir.

En el área de matemáticas, el aprendizaje cooperativo aporta técnicas y métodos que mejoran distintas capacidades y competencias a nivel individual y grupal. Los objetivos que podemos alcanzar para el desarrollo de estas capacidades y competencias, a través de esta metodología, son los siguientes:

- Elaborar y utilizar estrategias para la resolución de problemas.
- Adquirir confianza en la capacidad de resolución de problemas.
- Mejorar el análisis crítico, el razonamiento, la reflexión y la argumentación.
- Saber interpretar enunciados y expresarlos en lenguaje matemático.
- Mejorar la expresión oral y escrita en la formulación de las ideas, a través de un léxico adecuado en matemáticas (sintético, simbólico y abstracto).

Objetivos del proyecto

El objetivo principal que quiero alcanzar con este proyecto es concienciar a los lectores de la excesiva práctica del aprendizaje individualista y competitivo que se hace en nuestras aulas. Hacerles ver que el aprendizaje cooperativo es tan importante como los otros dos y que enriquece el desarrollo cognitivo y social de nuestros alumnos, aportándoles conciencia social y habilidades para la resolución de conflictos. No debemos verlo únicamente como una metodología para motivar al alumnado o para realizar actividades puntuales. El valor social debe ser un pilar en nuestros centros educativos, y el aprendizaje cooperativo nos ofrece las herramientas para poder inculcarlo.

Mostrar que se puede poner en práctica en nuestras aulas si le dedicamos tiempo, ganas y los recursos son suficientes. En este caso de forma muy simple, pero lo ideal sería implantarlo como un aprendizaje tan importante como el individualista o competitivo. Convirtiéndose en un reto profesional para los docentes, ya que habría que adaptar el currículo, la didáctica habitual de nuestros centros, los contenidos y el material escolar, que no está muy destinado a este tipo de aprendizaje.

En torno a las matemáticas, los objetivos particulares que quiero conseguir a través de mi proyecto son los siguientes:

- Mostrar que se puede aplicar otro método para la enseñanza de las matemáticas avalado por distintos estudios que mejora la actitud ante la resolución de problemas y el razonamiento crítico, necesarios para el estudio de las matemáticas.
- Intentar combatir distintos obstáculos epistemológicos que surgen en el aprendizaje de las matemáticas a través de los grupos cooperativos de trabajo con: debates entre alumnos, puesta en común de sus conocimientos y argumentaciones, y razonamiento de lo expuesto.
- Motivar a los alumnos (muchos de ellos frustrados por los resultados obtenidos en los trimestres anteriores) implantando una nueva metodología en clase que les proporcione un cambio en la forma de ver y estudiar la asignatura.
- Hacer que mis alumnos aprendan y valoren en qué consiste el aprendizaje cooperativo. Mostrar las aportaciones que les ofrece tanto dentro como fuera de la asignatura de matemáticas.
- Combatir el fracaso escolar e intentar reenganchar a los alumnos que han dado por perdida la asignatura.
- Implantar en clase un aprendizaje activo y participativo por parte de todos los alumnos basado en el respeto. Mostrarles que pueden opinar respetando el turno de palabra, criticar de forma constructiva y razonar sin denigrar o ridiculizar a ninguno de sus compañeros.
- Mentalizar a mis alumnos que errar en una respuesta no es algo negativo, sino una oportunidad de aprender y buscar una solución correcta a través de otras estrategias (experimentación).
- Enseñarles a ayudar a todos sus compañeros en lo que puedan y a aceptar que ellos también pueden ser ayudados en esta asignatura o en otras.

Los objetivos específicos que queremos alcanzar a través de la unidad que vamos a impartir, la de Funciones y Gráficas y que nos ayudarán a evaluar el nivel cognitivo alcanzado, el desarrollo de competencias y los conocimientos adquiridos por mis alumnos son los siguientes:

- Conocer el concepto de función y sus características
- Identificar las variables dependiente e independiente y saber expresarlas de forma gráfica y en tablas.
- Elaborar gráficas a través de tablas de valores, expresiones algebraicas y enunciados (fenómenos de la vida cotidiana).
- Analizar la continuidad de una función, su crecimiento y decrecimiento, tendencia, e identificar los máximos y mínimos y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

- Saber formular la expresión analítica de una función a través de un enunciado o datos.
- Identificar y saber representar las funciones lineales en sus distintas formas de expresión, las funciones constantes y las proporcionales.
- Saber hallar la pendiente de una función y entender su concepto.
- Conocer y saber hallar las distintas expresiones de una recta (explícita, general y punto-pendiente). Saber pasar de una expresión a otra.
- Utilizar las funciones para representar y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

Competencias y capacidades

El aprendizaje cooperativo nos refuerza, dentro de la asignatura de matemáticas, algunos aspectos necesarios para el desarrollo de distintas competencias y capacidades educativas del alumnado.

El currículo nos muestra las distintas competencias básicas que debemos desarrollar en nuestros alumnos durante toda la etapa de secundaria, además de los objetivos, criterios de evaluación y contenidos que debemos cumplir para lograrlo. Pero somos los profesores los que debemos decidir la mejor forma de hacerlo a través de la didáctica.

Una buena metodología basada en el aprendizaje cooperativo dentro de la asignatura de matemáticas nos puede ayudar a desarrollar competencias, que con el aprendizaje habitual (individual o competitivo) no se da.

La principal competencia que desarrollamos en nuestra área a través de los contenidos y forma de trabajo habitual (constructivismo) es la competencia matemática.

Competencia matemática: *Habilidad para utilizar de forma correcta y razonada la relación entre números, operaciones básicas, símbolos o expresiones matemáticas. Resolver problemas cotidianos, sabiendo interpretar y expresar la información, manejar los datos y elementos matemáticos, identificar las ideas fundamentales y llegar a una conclusión. Saber seguir procesos de pensamiento.*

Por otra parte, una de las competencias que desde mi punto de vista se debería desarrollar bastante en la asignatura de matemáticas es la de aprender a aprender.

Competencia para aprender a aprender: *Disponer de las capacidades y conocimientos necesarios para aprender y seguir aprendiendo de forma eficaz y autónoma, dependiendo de los propios objetivos y necesidades. Así como ser conscientes de lo que se puede hacer por uno mismo o con la ayuda de otras personas.*

Esta competencia se desarrolla en los alumnos a través de una capacidad autónoma para el aprendizaje, perseverancia, sistematización y reflexión crítica. Cualidades de las que deben dotarse nuestros alumnos si quieren aprender y disfrutar de las matemáticas. En cambio, esta situación, no se da en todas las ocasiones. Hay alumnos que ven obstaculizado su aprendizaje por distintas razones, alcanzando niveles de frustración y de prejuicios hacia las matemáticas que les impiden aprender de forma autónoma. De esta forma, pierden interés, evitan reflexionar y acaban aprendiendo, si lo hacen, de forma memorística.

Otra competencia que no se desarrolla mucho en matemáticas, ya que no está dirigida principalmente para esta asignatura es la competencia social y ciudadana.

Competencia social y ciudadana: *Saber comprender la realidad social, cooperar, convivir y ejercer los derechos democráticos. Participar de forma activa en la toma de decisiones y ser consciente de su responsabilidad, de los valores y el juicio moral individual.*

El aprendizaje cooperativo nos proporciona las herramientas complementarias para desarrollar estas dos competencias, tanto la de aprender a aprender como la social y ciudadana.

El aprendizaje cooperativo tiene como base que el profesor sea un mero guía en clase y sean los propios alumnos los que avancen a su ritmo. Construyendo su aprendizaje a partir de su desempeño y el de sus compañeros en las tareas que se les asignen. De esta forma reforzamos la competencia de aprender a aprender.

La interacción social es la mejor manera de ampliar las capacidades necesarias para el desarrollo de la competencia social. Además desarrollamos las capacidades de:

- **Equilibrio personal:** Conocimiento y aceptación de nuestros conocimientos y destrezas en matemáticas. Nivel de autoestima adecuado y confianza en los conocimientos.
- **Relación interpersonal:** Desarrollo e integración de los estudiantes dentro de temas o actividades relacionadas con las matemáticas.
- **Inserción y actuación social:** Integración de los estudiantes a la sociedad aportando conocimientos de matemáticas a la vida cotidiana y valorándolos dentro de nuestra cultura.

Con el trabajo en grupos cooperativos aprenden a valorar las aportaciones ajenas y las propias, a enfocar de forma constructivista los errores, a tomar decisiones de forma razonada y consensuada. Al hacerlo todo el grupo de forma autónoma, reforzamos su autoestima y sus capacidades de equilibrio personal. Lo que reforzará la seguridad en sí mismos y sus destrezas en el área de matemáticas. Evitando así el abandono de la asignatura y el temor por ella.

METODOLOGÍA Y PRÁCTICA

Proyecto de aprendizaje cooperativo

El proyecto llevado a cabo en este trabajo ha consistido en la implantación y estudio de una metodología alternativa (el aprendizaje cooperativo) frente a la habitual (aprendizaje individualista) dentro de un aula de 3º de ESO durante mis prácticas en el colegio Fuhem Montserrat. Se han utilizado distintas actividades didácticas, expuestas a continuación, dentro del área de matemáticas, más concretamente, en la unidad de Funciones, cubriendo los temas de Funciones y gráficas y Funciones lineales.

El estudio ha consistido en una comparativa de los resultados obtenidos por la clase de 3º de ESO en la que se aplicó el aprendizaje cooperativo frente a otra clase del mismo curso en la que se siguió con el tipo de enseñanza habitual. Se han podido observar diferencias entre el tipo de trabajo realizado por parte del profesor como del alumnado, la actitud de éste y su motivación, las relaciones sociales dentro del aula y las dificultades ante la adquisición de nuevos conocimientos.

Durante la puesta en práctica de mi propuesta, surgieron distintas dificultades que hicieron que el proyecto inicial se fuera modificando a lo largo de las semanas que tuve de prácticas. El mayor de los problemas, y que siempre hay que tener en cuenta a la hora de implantar una nueva metodología, es la falta de tiempo.

Como el proyecto consistía en una comparativa entre dos clases, la de 3º A que aprendía a través de trabajo cooperativo y la de 3º B que aprendía de forma magistral, ambas debían dar el mismo temario, pero la velocidad de las clases, era muy distinta. El tiempo que se invertía en una clase de aprendizaje cooperativo para ver y asimilar cualquier concepto era casi el doble de lo que se invertía en la de 3º B, ya que no sólo quería que conocieran el concepto, sino que lo pusieran en práctica dentro de cada grupo, que trabajaran con él y además discutieran la metodología aplicada y el resultado obtenido.

Además hay que añadir las huelgas, los días de excursión y las vacaciones de Semana Santa que fueron justo en medio. Por lo que los días que se establecieron en la programación para impartir todo el bloque de funciones fueron algo escasos, lo que provocó que parte del tema de funciones lineales se impartiera algo más rápido y de forma magistral.

¿Cómo aplicar de forma adecuada el aprendizaje cooperativo?

Para llevar a cabo mi proyecto, puse en práctica distintos métodos de aprendizaje cooperativo explicados anteriormente, pero adaptándolos al temario, necesidades de los estudiantes y recursos disponibles.

Hay que tener en cuenta que los métodos de aprendizaje cooperativo explicados anteriormente se utilizan de forma general, es decir, para cualquier asignatura y para grupos reducidos de alumnos. Si queremos incluir en nuestras escuelas este tipo de trabajo en clase, hay que ser conscientes de los actuales problemas de espacio y números de alumnos en las

aulas, las necesidades de cada uno y de los recursos de los que se dispone, que actualmente no son muchos.

En mi caso, tuve total apoyo por parte de mi tutor y el jefe del departamento, que me proporcionaron todos los recursos de los que se disponía y total libertad a la hora de dar las clases y en la toma de decisiones.

Otro punto muy importante para un buen desarrollo del proyecto son los alumnos. Es importante que ellos sean conscientes desde el principio de la metodología que se va a seguir en el aula, cómo se les va a evaluar, que actitud deben tener y cómo trabajar, que lo entiendan y que estén de acuerdo. La motivación del alumnado es clave para que haya un buen ambiente de trabajo y que todos se impliquen dentro del grupo.

El primer día expliqué en el aula en qué consistía el trabajo cooperativo para que los alumnos lo entendieran, la forma de evaluación que tendrían y contesté a todas sus dudas. Di la opción de dar las clases de forma habitual si algún alumno no estaba de acuerdo con la forma de trabajo que exponía, pero todos estuvieron de acuerdo y además conseguí que se comprometieran con el proyecto. Para ellos era una oportunidad de cambio, ya que la gran mayoría estaban decepcionados por el fracaso que habían sufrido en matemáticas y otras muchas asignaturas durante el segundo trimestre y a consecuencia de las innumerables llamadas de atención que habían tenido por su comportamiento y la poca implicación en clase.

Para poder aplicar el aprendizaje cooperativo en la asignatura de matemáticas es importante el tema que se vaya a impartir y los objetivos que queramos alcanzar con esta metodología. Hay distintos temas en el área de matemáticas que pueden ser más “aptos” para el trabajo cooperativo que otros, ya sea por el tipo de problemas o la división del trabajo. Pero esto no debe impedirnos poder adaptarlo al tema que queramos, aunque tenga mayor dificultad. Lo importante es introducir siempre los cinco elementos del trabajo cooperativo expuestos anteriormente para que el proyecto funcione:

- Interdependencia positiva
- Responsabilidad individual y como grupo
- Interacción estimuladora, cara a cara
- Prácticas interpersonales y grupales
- Evaluación grupal

Esquema de trabajo en clase

Para facilitar el trabajo del alumnado y dejar clara su responsabilidad y labor en clase, se debe explicar con claridad que proyecto de aprendizaje seguiremos, el objetivo que queremos alcanzar (de forma individual y grupal) y los pasos que iremos dando para conseguirlo.

Debemos tener en cuenta que el aprendizaje cooperativo no es una técnica que se suela trabajar de forma habitual, y que por tanto nuestros alumnos no saben trabajar en equipo. Podemos dividir una clase en grupos, y decir a nuestros alumnos que trabajen juntos, pero si no les explicamos y les damos los medios para que lo hagan de forma

correcta, es decir, de forma cooperativa, ellos tenderán a realizarlo como saben, de forma individual. Acabarán realizando el trabajo que se les encomendó pensando en su propia nota y en su recompensa personal, despreocupándose del trabajo que puedan hacer sus compañeros y de su aprendizaje.

Para evitar que mis alumnos cometieran este error, el primer día explique en qué consistía el trabajo cooperativo y el proyecto de aprendizaje que seguiríamos, centrándome en lo más importante, el objetivo que debería conseguir cada grupo y cómo hacerlo, introduciendo de esta forma el primer elemento, la interdependencia positiva con el objetivo común.

Objetivo común

Es importante que el objetivo que elijamos sea atractivo para todos los integrantes del grupo, ya que su interés y motivación nos ayudará a alcanzar el siguiente elemento esencial, la responsabilidad individual y grupal.

En mi caso, el objetivo que escogí para cada grupo era ganar al resto de grupos. Sabía que a la mayoría de mis alumnos no les gustaban las matemáticas, o por lo menos, que no sabían que les gustaban; ya que les resultaban monótonas, aburridas y no las entendían. Por ello decidí transformar el método de enseñanza en un juego. Este juego tenía una finalidad, un torneo, en el que cada equipo competiría en conocimientos y destrezas contra los otros equipos. Finalmente, el equipo ganador, conseguiría un premio.

De esta forma, utilicé el método TJE (Torneo de Juegos por Equipos) adaptándolo a los objetivos que quería alcanzar, las necesidades de mis alumnos y los recursos de los que disponía. Además de utilizarlo como método de evaluación por equipos.

Conseguí con este objetivo que mis alumnos se unieran como grupo, que estrecharán lazos sociales y de apoyo con sus compañeros de equipo, y a la vez competirían de forma sana en un torneo con el resto de sus compañeros, para hacer la asignatura más emocionante y llamativa para ellos.

Como nuestra finalidad en el proyecto de clase era ganar el torneo, cada equipo necesitaba que todos sus integrantes tuvieran los conocimientos necesarios para llevarlo a cabo con éxito. Además sabían que el torneo sería la forma de evaluar sus conocimientos adquiridos como grupo, y que la puntuación que sacarían en conjunto sería la nota de todos, por lo que eran responsables no sólo de su nota, sino la de sus compañeros.

Introducimos así la responsabilidad individual como integrante del grupo, y la responsabilidad grupal de alcanzar el objetivo. Cada integrante debe aprender para ganar el torneo, pero también tiene que conseguir que aprendan sus compañeros para que ellos también ganen y de esa forma, ganen todos.

Organización diaria

Con los objetivos fijados, comenzamos a explicar la organización que llevaremos de forma diaria.

Para que mis alumnos tuvieran claro lo que tenían que hacer cada día, sin perder tiempo todos los días en explicárselo, les entregué una hoja con las pautas a seguir de forma diaria, teniendo en cuenta que la actividad o tarea sería distinta dependiendo del día y que habría que explicarla para que pudieran realizarla.

ORGANIZACIÓN DIARIA DE LOS EQUIPOS DE TRABAJO COOPERATIVO

1. Elección del nombre del grupo. (Sólo el primer día)
2. Repartición de los roles:
 - **Moderador:** Encargado de los turnos de palabra, de respetar el nivel de ruido y de dirigirse al profesor con las dudas de grupo.
 - **Organizador:** Encargado de supervisar que se cumpla el trabajo de grupo y de dirigir la distribución de las tareas con ayuda del resto de integrantes.
 - **Escriba:** Encargado de escribir el trabajo grupal realizado durante la sesión y la hoja de evaluación diaria, además de tomar nota de todas las ideas que surjan de los integrantes del grupo.
 - **Cooperante:** Encargado de procurar que todos los integrantes del grupo aprendan y avancen TODOS a la vez. Debe encargarse de que todos los integrantes cooperen en la tarea.
3. Leemos la hoja de la tarea asignada resolviendo todas las dudas que surjan dentro del grupo.
4. Organizamos y distribuimos el trabajo que haya que hacer durante la sesión de clase.
5. Rellenamos la primera parte de la ficha de Evaluación de grupo.
6. Realizamos el trabajo que nos hayamos propuesto de forma cooperativa y respetando nuestros roles asignados. Deberemos terminar la tarea en el tiempo estimado.
7. Terminamos de rellenar la ficha de Evaluación de grupo, con las conclusiones adquiridas en la sesión de cada día.

Nombre del grupo

La elección de nombre de grupo es la primera tarea asignada a cada equipo. Los alumnos de cada grupo deben elegir de forma consensuada un nombre que los unirá e identificará como colectivo.

Puede parecer que esta tarea tiene como única función poder identificar a nuestros alumnos en clase para poder tratarlos de forma grupal. Pero más allá de lo que podamos pensar, esta tarea es esencial en el trabajo cooperativo.

Los alumnos necesitan tener un buen ambiente de trabajo para sentirse aceptados y cooperar con sus compañeros. Si no, perderán el interés y la motivación en las tareas. Por ello debemos hacer que el equipo esté unido, que se sientan bien trabajando juntos y necesiten hacerlo. Una de las formas es la elección de nombre de grupo. Eso les da una señal de identidad, un lazo para estrechar las relaciones sociales y sentirse apoyados. Si se sienten un grupo, trabajarán como grupo.

Para interactuar con la asignatura y desarrollar la creatividad, propuse a mis alumnos que pusieran nombres que estuvieran relacionados con la asignatura, lo que dio lugar a equipos como: los π -tufos, los Radicales o los "Sin solución".

Roles

Elegido el nombre del grupo disponemos a nuestros alumnos unos roles que deberán ejercer durante las tareas diarias.

Los roles se deben disponer si queremos que el trabajo grupal sea productivo y que todos los miembros tengan una función. Muchas veces nuestros alumnos se sienten perdidos dentro de grupos de trabajo reducidos. No saben cómo contribuir o qué esperar del resto de sus compañeros, provocando muchas veces una actitud pasiva o incluso dominante.

Además nos encontramos con alumnos que nunca han trabajado de forma cooperativa, que no saben qué aportar y cómo hacerlo. Para fomentar la responsabilidad individual y la interdependencia de los miembros del grupo los profesores deben incentivar unas pautas a seguir y aportar un cometido a cada miembro del grupo. De esta forma se irán adaptando poco a poco a la mecánica de grupo, y mejorando el ambiente de trabajo dentro del grupo, y en la clase.

Los roles se pueden clasificar de distintas formas, en este caso lo expongo según su función (Johnson & Johnson, 1994, citado en Johnson, 1999):

- Roles que ayudan a la conformación del grupo: supervisor de ruido, turnos de palabra, tono de voz,...
- Roles que ayudan al funcionamiento (alcanzar objetivos, mantener las buenas relaciones grupales, etc.): encargado de fomentar la participación, de explicar ideas,...
- Roles que ayudan a formular lo que saben e integrarlo con lo aprendido: corrector, encargado de verificar la comprensión, analista,...
- Roles que ayudan a incentivar el pensamiento y mejorar el razonamiento de los alumnos: Crítico de ideas, productor de opciones, encargado de ampliar,...

Para grupos de alumnos con poca experiencia o ninguna dentro del aprendizaje cooperativo se recomiendo que los roles sean sencillos para poder trabajar de forma cooperativa pero de forma sostenida y que más adelante se vayan introduciendo otros más complicados.

En mi caso decidí que los roles fueran los siguientes:

Moderador: Encargado de los turnos de palabra, de respetar el nivel de ruido y de dirigirse al profesor con las dudas de grupo.

Es un rol que ayuda a la conformación del grupo. Es un rol sencillo, que los alumnos entienden y que nos ayuda a mantener un buen ambiente de trabajo tanto dentro como fuera del grupo. Decidí que fuera el moderador el único que se dirigiera al profesor para asegurarme de que el grupo hablaba, se ponía de acuerdo y que las dudas o conflictos que pudieran surgir se debatían antes de pedirme ayuda.

Organizador: Encargado de supervisar que se cumpla el trabajo de grupo y de dirigir la distribución de las tareas con ayuda del resto de integrantes.

Es un rol que ayuda al funcionamiento del grupo. Con este rol me aseguro que mis alumnos acaben las tareas en el tiempo estipulado y que cada uno tenga una función de trabajo. Así me evito que tengan una actitud pasiva. Como la organización tiene que ser entre todos, aunque dirigida por el organizador, también me aseguro que se evite una actitud dominante por parte del organizador y que todos los integrantes estén a gusto con la función que se les haya asignado.

Escriba: Encargado de escribir el trabajo grupal realizado durante la sesión y la hoja de evaluación diaria, además de tomar nota de todas las ideas que surjan de los integrantes del grupo.

Es un rol que podríamos asignar tanto de ayuda al funcionamiento como de ayuda a formular e integrarlo con lo aprendido. El escriba se encarga de escribir, pero también tiene en cuenta todo lo que sus compañeros dicen. Eso les ayuda a relacionar sus opiniones con lo aprendido, reflexionar sus aportaciones al problema y experimentar teniendo en cuenta las estrategias realizadas anteriormente.

Cooperante: Encargado de procurar que todos los integrantes del grupo aprendan y avancen todos a la vez. Debe encargarse de que todos los integrantes cooperen en la tarea.

Es un rol que ayuda a formular lo que se sabe e integrarlo con lo aprendido. Es uno de los roles más importantes, ya que con él nos aseguramos que se siga un aprendizaje cooperativo y se tenga en cuenta a todos los integrantes del equipo. Lo más importante es que nuestros alumnos entiendan que todos tienen que aprender y que tienen que avanzar todos juntos. Tener en cuenta todas las opiniones y reflexiones que se aporten, debatirlas, y así favorecer el análisis crítico y la socialización de los alumnos.

Con estos roles me aseguro de cubrir prácticamente todas las funciones que pueden surgir dentro del aprendizaje cooperativo de forma sencilla y ayudar a mis alumnos a promover una labor productiva y maximizar el trabajo realizado.

Los roles que ayudan a incentivar el pensamiento y mejorar el razonamiento de los alumnos son muy útiles en los proyectos cooperativos de matemáticas. En este caso no he utilizado ninguno relacionado con esa función ya que he considerado que eran roles muy elaborados. Como estamos poniendo en práctica un método nuevo al que los alumnos no están acostumbrados y el tiempo no es el suficiente para ir incorporando nuevos roles poco a poco, decidí mantener los expuestos anteriormente durante todo el proyecto y que mis alumnos fueran rotando cada vez que cambiaran de tarea. Esto les permitía apreciar todos los puestos y valorar el trabajo realizado por sus compañeros.

Sistema de positivos

El sistema de positivos consistía en un método para recopilar el máximo número de positivos en clase, que luego les serviría a cada grupo para intercambiarlos por comodines en el Torneo. Cada cuatro positivos, era un comodín.

Los positivos sólo los podían conseguir de forma grupal, a través de acciones que mejoraban la convivencia y el ambiente en clase o como premio por un trabajo cooperativo eficiente.

Me pareció un método muy eficaz para mantener la motivación de los alumnos, su buen comportamiento en clase y para que se sintieran animados y valorados por el esfuerzo que estaban realizando.

Grupos de trabajo

Distribución de los grupos

La elección de los grupos de trabajo es un aspecto que el profesor debe tener en cuenta antes de comenzar con el proyecto. Una correcta distribución nos ayudará a cumplir ciertos objetivos que hayamos fijado anteriormente.

Hay distintos aspectos que hay que tener en cuenta antes de seleccionar los grupos de trabajo cooperativo, como pueden ser:

- **El número de alumnos**

Nos encamina a seleccionar un determinado tamaño de los grupos de trabajo. Obtener un número óptimo de grupos nos habilita una buena disposición del aula.

- **El tamaño de los grupos**

Un número adecuado de alumnos por grupo depende mucho del tipo de proyecto y los objetivos que vayamos a seguir. Se recomiendan grupos reducidos (2, 3 o 4 personas). Cuantos más alumnos por grupo, aumentamos las destrezas, capacidades y diversidad de opiniones, que enriquecen y mejoran el desarrollo del trabajo. Pero si el número de integrantes es demasiado grande perdemos coordinación, consenso, cohesión y responsabilidad individual.

- **La destreza y experiencia de los alumnos en trabajo cooperativo**

Cuanto mayor es la experiencia de los alumnos en este tipo de aprendizaje, mayor será su disposición y menor el tiempo que necesiten para organizarse. Por lo que la composición de los grupos podría ser más aleatoria. Es beneficioso para nuestros alumnos que sepan trabajar y cooperar con todos sus compañeros. Eso creará lazos, mejorando sus relaciones sociales y disposición en la resolución de conflictos.

- **El tiempo de duración del proyecto**

El tamaño del grupo o su disposición en el aula depende del tiempo que vayamos a dar a una tarea. Si queremos un grupo de trabajo para un rato, como puede ser corregir un ejercicio o hacer un esquema, lo más eficaz es hacerlo por parejas, ya que no perdemos tiempo ni en la colocación ni en la coordinación del equipo. Para proyectos más duraderos podemos utilizar grupos mayores. Si disponemos de un semestre o un curso entero podemos disponerlos de forma flexible y que roten. De esta forma podrán trabajar con todos sus compañeros de clase y tendrán la oportunidad de aprender a solucionar los conflictos que puedan surgir.

- **La edad**

Cuanto mayor es la edad, mayor confianza y libertad de actuación y coordinación podemos concederles. Por lo que los grupos pueden ser mayores o más dispuestos a sus inclinaciones.

- **Los objetivos**

Los grupos pueden diferenciarse entre homogéneos y heterogéneos. Si los objetivos que queremos alcanzar para un determinado conjunto de alumnos son muy concretos: el desarrollo de una destreza o capacidad concreta, la ampliación de un concepto que algunos alumnos ya dominan, etc., crearemos grupos homogéneos. En cambio, si queremos hacer una práctica general y que todos los alumnos dominen un tema y desarrollen sus capacidades sociales, haremos grupos heterogéneos.

Las distintas formas de distribuir a los alumnos dependiendo de los aspectos explicados anteriormente son las siguientes:

- Distribución al azar: Destinada a alumnos con experiencia en trabajo cooperativo.
- Distribución estratificada: Igual que la anterior, con la variedad de que nos aseguramos la asistencia de alumnos concretos en determinados grupos.
- Distribución por el docente: Desde mi punto de vista, la más adecuada y responsable para poner en práctica por primera vez el trabajo cooperativo. Nos evitamos aislamiento de alumnos, posibles problemas de cohesión, etc.
- Distribución por los alumnos: Es la más imprudente, ya que se acaban creando grupos muy homogéneos y cerrados.

Cuanto mayor es el número de alumnos en clase, mayor es el número de complicaciones que surgen en la disposición del aula, la disciplina, la dedicación y atención que pueda ofrecer el docente, etc.

Durante mis prácticas, me dispusieron dos clases de tercero de ESO para la realización de mi proyecto, 3ºA con 24 alumnos y 3ºB con 35 alumnos. A la hora de elegir la clase dónde realizar el aprendizaje cooperativo me vi inducida a elegir la que tenía menor número de alumnos. De esta forma tendría mayor facilidad al solicitar atención y reflejar autoridad, además de poder dedicarles una mayor atención a mis alumnos. En este caso no tuve en cuenta la predisposición de la clase ni su habitual comportamiento.

Los grupos fueron heterogéneos en sexo, nivel cognitivo y destreza matemática. El número de alumnos por grupo fue de 4, saliendo 6 grupos. Así cumplían mejor los objetivos y proporcionaban una buena disposición en clase.

La distribución la hice con ayuda de mi tutor para evitar el aislamiento de cualquier alumno dentro de su grupo y una mayor cohesión entre los integrantes. Para conseguirlo distribuimos a los alumnos más conflictivos o con falta de interés en grupos en los que estuvieran con compañeros con los que se llevaran bien, con interés en la asignatura y que les pudieran ayudar. De esta forma se implicarían más, no obstaculizarían el trabajo y no serían aislados. También evitamos meter en el mismo grupo a alumnos que no tuvieran buenas relaciones, o al contrario, que se llevarán demasiado bien y eso provocara su distracción en clase. De esta forma favorecemos la aplicación del cuarto elemento del

trabajo cooperativo, las prácticas interpersonales. Si tenemos un buen equipo, se valoraran más, se ayudarán, sabrán resolver los conflictos, etc.

En general los grupos funcionaron bastante bien y los alumnos se supieron adaptar, a pesar de no haber trabajado nunca de forma cooperativa. Con algo más de práctica y tiempo se podría haber llegado a una mecánica más productiva. Se produjo algún conflicto por falta de implicación y por intolerancia que costó solucionar, pero que con el tiempo seguramente se hubiera corregido del todo.

Disposición del aula

La disposición del aula es esencial para obtener un buen funcionamiento dentro del grupo-clase. Es importante en general que el aula tenga un buen aspecto físico, que esté ordenada, limpia y los alumnos se sientan cómodos en ella. Esto permitirá una mayor atención visual por parte del alumnado y mayor movilidad del docente.

Las pautas generales para una buena disposición del aula en aprendizaje cooperativo son las siguientes (D. W. Johnson, 1979, citado en Johnson, 1999):

- Sentarse juntos mirándose a la cara. Se desarrolla así el tercer elemento, la interacción estimuladora “cara a cara”. Se evitan molestias, se interactúa mejor,...
- Ver con comodidad al docente.
- Colocar a los grupos separados para que no interfieran unos con otros y para favorecer la movilidad del profesor por la clase.
- Buena circulación de paso, de modo que haya fácil acceso a los compañeros, al docente y a los materiales necesarios.
- Disposición del aula flexible. Favorece el cambio de la composición de los grupos si fuera necesario.

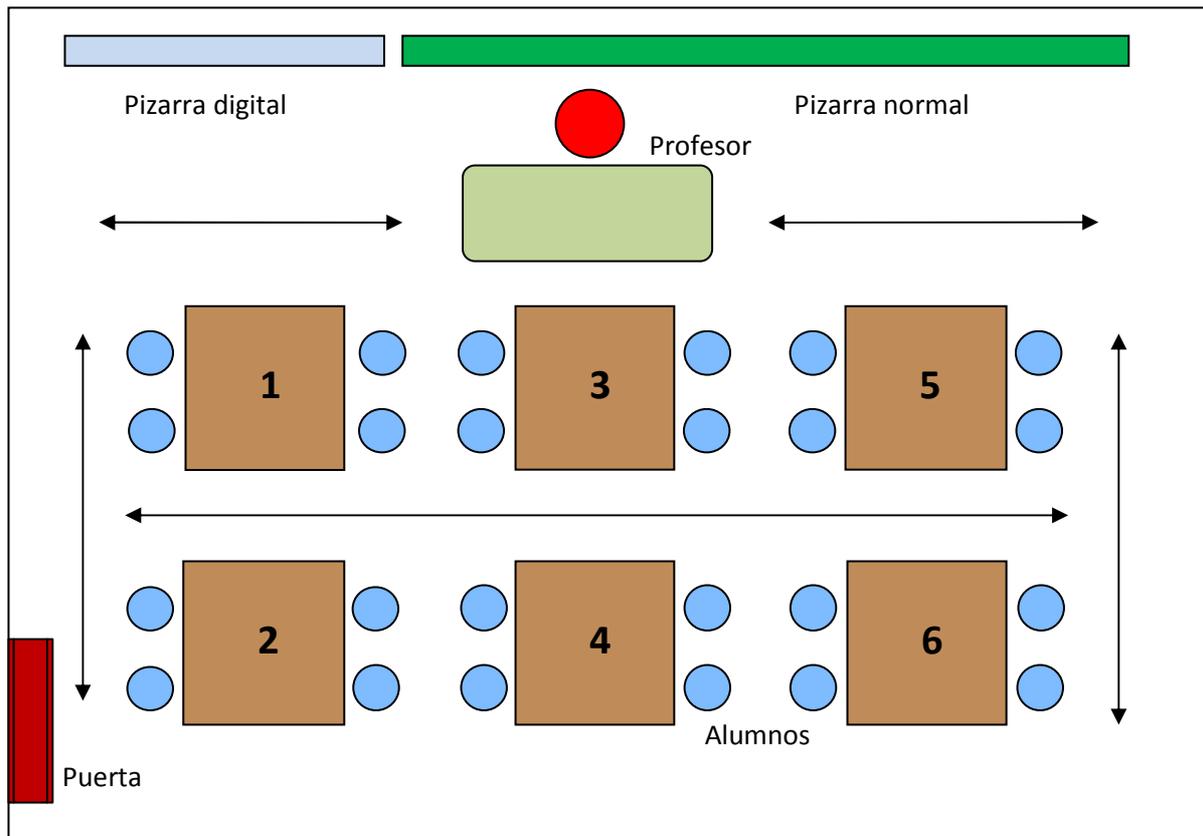
Fijé una disposición que se mantendría durante todo el proyecto, lo que me evitaba tener en cuenta la quinta pauta. En cambio, sí que seguí las otras cuatro.

Como eran grupos de cuatro, hice que formaran dos filas de tres grupos, cada grupo con cuatro mesas individuales, enfrente dos a dos. Enumeramos la formación para evitar complicaciones en la colocación de la clase cada vez que dábamos matemáticas. Para no perder tiempo, la disposición del aula se hacía durante los 5 minutos del cambio de clase, y la recolocación a su estado habitual al finalizar.

Como muchas veces explicaba cosas en la pizarra, la disposición elegida les ofrecía la posibilidad de poder verla de forma cómoda girando un poco la cabeza. Evitaba utilizar la pizarra digital ya que el grupo 5 y 6 prácticamente no alcanzaban a verla. Por lo que la relegué para presentaciones introductorias de conceptos concretos en las puestas en común como grupo-clase.

Los grupos mantenían una distancia adecuada para no interferir unos con otros, pero la justa para poder ayudarse si lo necesitaban. Para mí la cooperación entre alumnos no se centraba sólo dentro de cada grupo, tenían permiso para preguntar a sus compañeros si lo veían necesario, o coger material de otras mesas si no disponían del suyo, pero dentro de las pautas estipuladas de nivel de ruido y alteración de la clase.

Dispuse la clase de la siguiente forma:



Las flechas de la ilustración muestran el espacio del que disponía para moverme por el aula. Éste me permitía acercarme a todas las mesas y poder moverme con soltura, atendiendo a todos mis alumnos. De esta forma cumplimos las pautas generales de disposición del aula.

Contenidos y tareas

En matemáticas, es imprescindible que los conocimientos se pongan en práctica. Para aprender hay que realizar distintas tareas o actividades que desafíen el intelecto de nuestros estudiantes y los motive, que relacionen los contenidos con la práctica y que el nivel sea el adecuado. Las actividades o tareas hay que estructurarlas de forma clara y poniendo en práctica los distintos métodos prácticos del aprendizaje cooperativo.

Métodos prácticos

En mi proyecto, puse en práctica tres métodos distintos de aprendizaje cooperativo que ya hemos explicado anteriormente:

- Trabajo en Equipo-Logro Individual (TELI)
- El Rompecabezas II
- Torneos de Juegos por Equipos (TJE)

Para elaborar mi investigación, utilicé cada método con un objetivo distinto. El TELI me serviría como base para todo el aprendizaje, el rompecabezas II para englobar y

relacionar todos los contenidos de representación y análisis de funciones, y el TJE para la evaluación final de la unidad.

Mis alumnos tenían que jugar un torneo, pero además, tenían que hacer un examen individual como en el resto de unidades. Por lo que, como objetivo individual, necesitaban aprender y entender la unidad de funciones si querían aprobar el examen. El TELI nos ofrecía esa opción de aprendizaje. Todo el grupo estudiaría junto para dominar el tema de funciones, no sólo para ganar el torneo como equipo, sino también, para examinarse de forma individual. De esta forma, se fija el TELI como método general de trabajo cooperativo en clase.

Contenidos

Los contenidos que impartimos según el tema fueron los siguientes:

- I. Funciones y gráficas: Análisis y representación.
 - a. Concepto de función
 - b. Ejes cartesianos y variables
 - i. Concepto de variable dependiente e independiente
 - ii. Punto en coordenadas
 - iii. Tipos de ejes (eje de ordenadas y eje de abscisas)
 - iv. Puntos de corte con los ejes x e y
 - c. Escalas
 - d. Dominio y recorrido
 - i. Concepto de intervalo abierto y cerrado
 - ii. Imagen de un punto
 - e. Continuidad y discontinuidad de una función
 - f. Crecimiento y decrecimiento
 - g. Máximos y mínimos
 - h. Tendencia de una función y periodicidad
 - i. Introducción al concepto de límite de forma visual
 - i. Expresión analítica de una función
 - i. Tabla de valores
 - ii. Representación gráfica de una función a través de la expresión analítica.
- II. Funciones lineales
 - a. Función LINEAL $y = mx + n$ (Rectas)
 - i. Concepto de pendiente (m) como variación de la y cuando x aumenta.
 - ii. Definición de n (ordenada en el origen).
 - iii. Diferenciación entre función afín (cuando $n \neq 0$) y función de proporcionalidad directa (cuando $n = 0$).
 - iv. Signo de la pendiente y análisis del crecimiento de la función
 - b. Recta de la que se conoce un punto y la pendiente
 - i. Expresión de la ecuación PUNTO-PENDIENTE
 - ii. Representación
 - c. Recta de la que se conocen dos puntos
 - i. Obtención de la pendiente
 - d. Forma GENERAL de la ecuación de una recta

- i. Transformación de la ecuación de una expresión a otra
- e. Estudio conjunto de dos funciones lineales
 - i. Punto de intersección de dos rectas como solución

Se distribuyeron en cuatro sesiones a la semana durante seis semanas (del 17 de marzo al 25 de abril). Quitando la semana de Semana Santa, quedaron 15 sesiones de clase y 3 para el torneo (la última semana).

Tipo de tareas

Las sesiones se pueden clasificar de tres formas distintas, dependiendo del tipo de actividad que vayamos a realizar:

- **Introductoria**

Tarea en grupo-clase. Preparaba una presentación en PowerPoint y debatíamos en clase. Los alumnos se motivaban y realizaban preguntas. Después les preguntaba yo de forma aleatoria para ver si lo habían entendido y realizábamos un ejercicio conjunto. Hubo tres tareas introductorias:

- ¿Esto es una función?: Presentación con distintas representaciones gráficas, en la que debían decidir si eran funciones o no.
- Las escalas nos engañan: Presentación de distintas gráficas de funciones que representaban los mismos datos con una escala y con otra. Mostrar que visualmente todo cambia, y que la prensa se aprovecha de eso. Decidir cuál de las escalas era más realista para mostrar los datos.
- Escalando montañas: Presentación de distintas pendientes, para su cálculo y relación con las rectas. Introducción al signo de la pendiente.

- **Tareas a entregar**

Se trataba de fichas que les preparaba para que se entregaran al finalizar la clase, para su evaluación y calificación. Como el libro no me proporcionaba los recursos suficientes para poder impartir las clases de forma cooperativa, elaboré algunas fichas de trabajo diario. De esa forma, podía trabajar mejor las técnicas que estaba llevando a cabo. Además se ponía en práctica la responsabilidad individual y de grupo, ya que debían saber organizarse para acabar a tiempo la actividad. Si no, les tocaba acabarla fuera del horario de clase y presentármela al día siguiente. Esto les motivaba, porque si la terminaban, no se llevaban deberes a casa.

Hubo distintas hojas de tareas (ANEXOS):

- Las funciones, representación gráfica e interpretación.
- Expertos en representación de funciones.
- Expertos en análisis de funciones.
- Compañías telefónicas.
- Transformaciones de la ecuación. La misma recta, distinta expresión.

Las dos hojas de tareas, expertos en representación y expertos en análisis, no siguieron el método TELI como el resto. En esta ocasión puse en práctica el método del Rompecabezas II. Este método consiste en que cada integrante del grupo aprenda un concepto concreto y que en conjunto completen una tarea. El grupo necesita los conocimientos de todos, para que se enseñen y todos aprendan lo mismo. En mi caso, no pudo hacerse de forma individual, sino en parejas. Dedicamos una sesión para que cada pareja del grupo se convirtiera en experta en representación o análisis de funciones. Y después realizamos un ejercicio grupal en el que necesitaban las dos partes para poder realizarlo.

La tarea de compañías telefónicas fue la única que duró más de una sesión. En el segundo ejercicio cada grupo debía hacer una presentación a la clase de su propia tarifa telefónica comparándola con las que habían visto en los ejemplos. Después eran evaluados de forma común por sus compañeros. Es importante que en matemáticas también se trabaje la exposición. Nos permite saber si los alumnos han aprendido bien los conceptos, saben explicárselos a sus compañeros y contestar a sus preguntas.

- **Actividades en grupos**

Las actividades en grupo, eran ejercicios cortos que se realizaban para poner en práctica la teoría y que luego corregíamos en común toda la clase. Todo el grupo trabaja cooperativamente para realizar la actividad, pero sólo uno de ellos y elegido al azar salía a corregirlo a la pizarra. Así comprobábamos que todos lo habían entendido. Los grupos se iban turnando para salir a la pizarra o contestar preguntas rápidas relacionadas con el ejercicio. Estas preguntas eran suposiciones que cambiaban un poco el ejercicio, y ellos debían explicar cómo variaba eso en su resolución. Estas actividades desarrollaban cognitivamente al alumnado a la hora de elaborar estrategias y razonar los supuestos.

Una de las sesiones, destinada a actividades rápidas, trataba sobre cómo hallar la ecuación de una recta expresada en punto pendiente. Les expuse a mis alumnos distintos supuestos para que lo hicieran en grupo:

- Hallar la expresión de la recta que pasa por el punto (1,2) y tiene como pendiente $m = 3$.
- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1,0) y (-4,-5).
- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,3) y es paralela a la recta $y = 2x - 7$

Cuando terminaron y salieron a corregirlo uno de mis los alumnos me hizo una pregunta:

¿Siempre nos van a dar al menos un punto por dónde pase la recta?

No me esperaba esa pregunta, pero me dio pie a contestarle con otro ejercicio. Tuve que adelantar el tema de intersección de dos rectas con solución, pero aproveché para que ellos tuvieran que pensar y razonar en grupo cómo podrían resolver ese ejercicio sin explicárselo. Tuve en cuenta que anteriormente ya habían dado sistemas de ecuaciones. Por lo que le conteste:

No tiene por qué. Imagínate que se te plantea este problema: Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto en el que se cortan las rectas: $y = 3x - 10$ e $y = -2x + 10$ y tiene como pendiente $m = -5$. ¿Cómo lo haríais?

Como era de esperar, todos los grupos resolvieron el ejercicio teniendo en cuenta los conocimientos más recientes, representación de funciones. Ninguno se paró a pensar en el tema de sistemas de ecuaciones. Y cuando les pregunté si se les ocurría otra forma de resolverlo sin representar la función, en el momento, me dijeron que no. Tuve que dejar ese ejercicio pendiente porque acabó la clase, pero, si hubieran tenido tiempo suficiente, con alguna indicación que otra, lo hubieran resuelto, y hubiera sido muy gratificante para ellos.

Una de las actividades en grupos que realizamos un día fue un juego, para motivar a mis alumnos y provocar su interés en las funciones lineales.

- Juego de cartas:

El juego consistía en reunir las familias de cinco cartas que juntas representaban a la misma función. Cada carta de la familia representa un elemento de la función.

Las cartas eran: la representación gráfica, la pendiente de la recta, la ecuación explícita, la ecuación general y la ecuación punto-pendiente.

El juego tenía dos variantes: la cooperativa consistía en repartir las cartas mezcladas de 4 familias distintas, por lo que cada integrante del grupo tendría 5 cartas. Cada alumno del grupo debía poner una carta encima de la mesa, de uno en uno, diferenciando las cuatro familias e ir completándolas todos juntos (utilizamos la técnica del Rompecabezas). La variante competitiva consiste en jugar a burro con las cartas. El primero que consiga reunir las cinco cartas de una familia gana.

De esta forma se estructuraban las distintas sesiones y se repartieron todos los contenidos. Aunque los contenidos estén organizados por sesiones, no se puede evitar que haya imprevistos, o que los alumnos tengan un ritmo de aprendizaje más lento o más rápido del que se había previsto. Por eso, a veces, cambiaba las clases según lo necesitaran mis alumnos, como ya hemos visto. Para mí lo más importante a la hora de dar clase, era que ellos marcaran el ritmo de aprendizaje, y que fueran ellos los que quisieran aprender y esforzarse, y no el profesor el que les obligara a hacerlo.

Evaluación

La evaluación de los alumnos es imprescindible en cualquier sistema de enseñanza. Debemos saber si nuestros alumnos aprenden y si es eficaz el método que estamos utilizando. Los alumnos deben alcanzar el nivel estipulado en el currículo tanto en contenidos, como en capacidades y en competencias.

Criterios de evaluación

Para evaluar a los alumnos en contenidos, capacidades y competencias seguimos los siguientes criterios de evaluación, basados en los objetivos que queremos alcanzar con esta unidad:

- Entiende el concepto de función y sus características
- Identifica las variables dependiente e independiente y sabe expresarlas de forma gráfica y en tablas.
- Elabora gráficas a través de tablas de valores, expresiones algebraicas y enunciados (fenómenos de la vida cotidiana).
- Analiza la continuidad de una función, su crecimiento y decrecimiento, tendencia, e identifica los máximos y mínimos y puntos de corte.
- Formula la expresión analítica de una función a través de un enunciado o datos.
- Identifica y representa las funciones lineales en sus distintas formas de expresión, las funciones constantes y las proporcionales.
- Sabe hallar la pendiente de una función y entiende su concepto.
- Conoce y halla las distintas expresiones de una recta (explícita, general y punto-pendiente). Sabe pasar de una expresión a otra.
- Utiliza las funciones para representar y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

Los criterios que nos proporciona la metodología serán en general: que hayan aprendido a trabajar en grupo de forma cooperativa, hayan cumplido sus roles, solucionado los conflictos y el equipo haya sabido salir adelante sin dejar a ninguno de sus miembros atrás.

Evaluación grupal e individual

La evaluación grupal e individual de mis alumnos se hizo teniendo en cuenta distintos elementos. Para evaluarles previamente al aprendizaje de contenidos nuevos de forma individual, utilizaba las actividades de introducción. A través de la puesta en común y de las preguntas que realizaba en clase de forma conjunta, podía saber la relación que hacían mis alumnos de los contenidos que ya sabían con los que íbamos a ver. De forma grupal se veía a través de la puesta en común y el debate. Como respetaban el turno de palabra, su forma de discutir una idea, de razonarla, de valorar la opinión de sus compañeros, etc.

Para la evaluación formativa grupal, utilizaba las tareas que me entregaban, las preguntas aleatorias después de las actividades grupales y las hojas de autoevaluación grupal que me entregaban. Así podía ver, tanto si entendían, aprendían y sabían poner en práctica los conceptos nuevos, como la evolución que seguían como grupo de trabajo cooperativo. Para la evaluación formativa individual utilizaba la corrección de las actividades grupales y las preguntas aleatorias de razonamiento que hacía después. Y con respecto al trabajo individual, la observación de los grupos y sus hojas de autoevaluación.

Para la evaluación final de contenidos y competencias del grupo, utilicé el método de Torneos de Juegos por Equipos (TJE) y la evaluación que habían tenido como grupo cooperativo. Y para la individual, el examen individual que harían las dos clases de 3º.

Torneo por equipos

Para evaluar de forma grupal utilicé la técnica TJE algo modificada y la llamé El Torneo de Funciones.

Ambas técnicas, tanto TELI como TJE tienen como objetivo final evaluar a los estudiantes con un cuestionario final individual, siendo la nota final, la media de las notas de cada integrante del grupo. La diferencia es que en TJE el cuestionario final es un torneo entre equipos. Lo que yo hice fue una mezcla de ambas técnicas. Utilice para trabajar en clase la técnica TELI (que tendría su cuestionario final, el examen individual) pero no se realizaría la media, y para examinarlos de forma grupal y motivarlos el TJE. Hay que ser conscientes que estas técnicas son generales para todo tipo de asignaturas y grupos, y que hay que saber adaptarlas a nuestras necesidades.

El Torneo consistía en tres pruebas:

- **Ejercicio por relevos:** Un ejercicio de cuatro apartados. Cada apartado lo realiza un integrante del grupo de forma individual y por orden. La dificultad del ejercicio radica en que se necesita la solución del apartado anterior para realizar el siguiente. El ejercicio que puse fue el siguiente:

EJERCICIO POR RELEVOS

Nombre del equipo:

Nombre del participante según el apartado

Apartado a:

Apartado b:

Apartado c:

Apartado d:

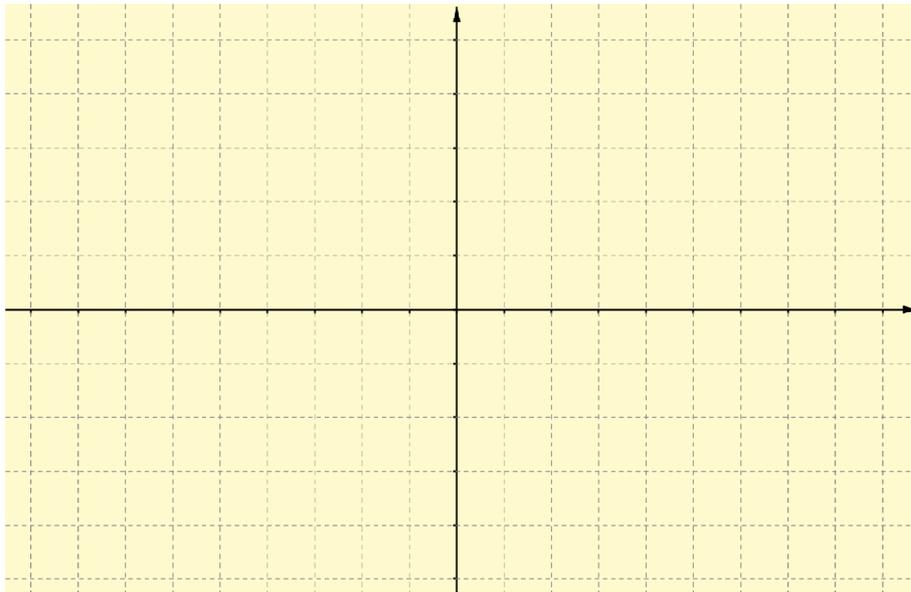
Recuerda: El ejercicio lo tiene que hacer todo el equipo. La nota de tus compañeros dependerá de tu trabajo. Para facilitar las cosas, no te olvides de recuadrar la solución, para que tus compañeros la encuentren sin problemas.

- a) *Halla el punto de intersección (punto de coincidencia) de las siguientes rectas, r y s , sin representarlas.*

$$r: y = -\frac{2}{3}x + 4 \quad s: y = 2x - 4$$

- b) *Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-3,-1)$ y el punto que le haya salido a tu compañero en el apartado anterior.*
- c) *Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto que haya salido en el apartado a) y tiene como pendiente la del apartado b). Escribe la ecuación de la recta de dos formas distintas.*

- d) Representa gráficamente la ecuación de la recta que le haya salido a tu compañero en el apartado anterior. (Tienes la cuadrícula con los ejes ya dibujados)



- **Ejercicio individual:** Ejercicio que tenían que hacer todos los alumnos de cada grupo, pero por separado. La nota sería la media de las notas de cada integrante. En esta actividad quise mezclar la comprensión lectora y el análisis de funciones de forma visual. El ejercicio fue el siguiente:

Nombre:

EJERCICIO COMÚN: Ejercicio que haréis todos los del equipo, pero por separado. Puntuará más cuanto mayor sea el número de aciertos grupales, no individuales. Recuerda, de tu trabajo dependerá la nota de todo tu equipo.

1. Representa de forma gráfica la relación velocidad-tiempo, de la siguiente descripción de un viaje en coche. Elige una escala ADECUADA, e indica cual sería la variable dependiente e independiente.

Una familia sale de su casa por la mañana para realizar un viaje que durará 3 horas.

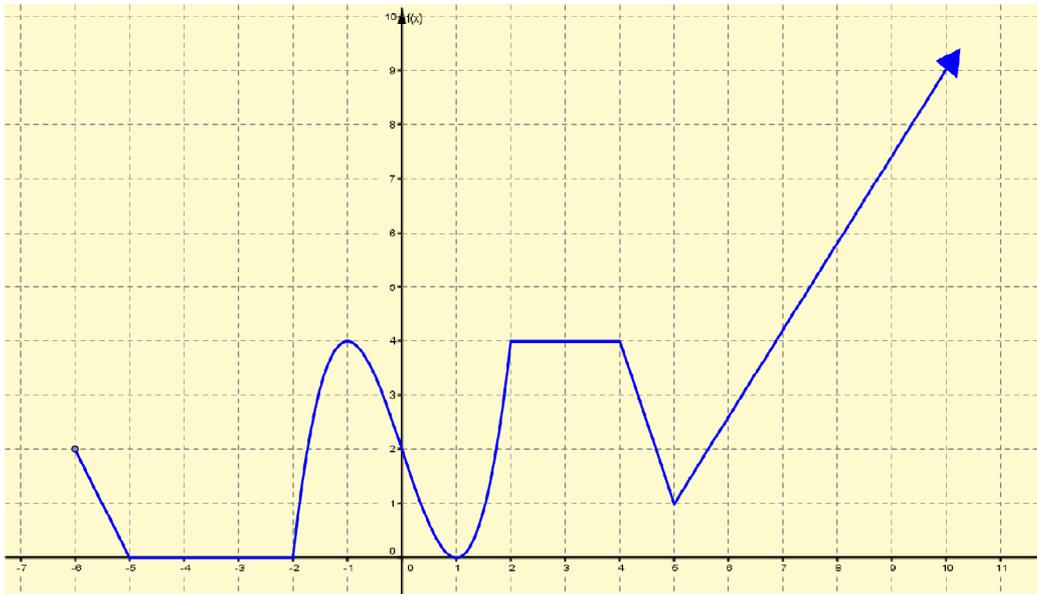
Se montan en el coche y encienden el motor, aumentando su velocidad de forma progresiva a 40 Km/h en 10 minutos. Durante los siguientes 20 minutos se mantienen a esa misma velocidad, ya que circulan por la ciudad. Nada más salir de la ciudad, en los siguientes 10 minutos, se ponen a 120Km/h de forma progresiva, porque van por la autopista.

A la media hora, se encuentran con un atasco, por lo que reducen su velocidad hasta los 50km/h de forma progresiva en 5 minutos, pero de inmediato vuelven a acelerar poniéndose de forma progresiva a 70Km/h en 10 minutos.

En los siguientes 15 minutos de viaje, deciden parar a tomar algo, descendiendo su velocidad hasta parar el coche de forma progresiva en 5 minutos.

Reanudan el viaje a los 15 minutos, y ascienden en 5 minutos a una velocidad de 100Km/h. Pudiendo entonces ir a esa velocidad el resto del viaje, hasta 5 minutos antes de llegar, que descenderá su velocidad de forma progresiva hasta parar el coche.

2. Analiza la siguiente función, $f(x)$, gráficamente y contesta a las preguntas:



- Indica el dominio y recorrido de la función $f(x)$. Explica si la función es continua o discontinua.
- Indica los tramos o intervalos de crecimiento, decrecimiento y constantes, que aparezcan en la gráfica.
- Si aparece algún mínimo o máximo en la función, indícalo, señalando las coordenadas del punto en el que se encuentra.
- Cuando la x aumenta, ¿qué podríamos decir sobre la tendencia de la función?
- ¿Cuánto vale $f(-2)$ y $f(4)$? Y si $f(x)=2$, ¿cuánto vale x ?

- **Preguntas rápidas:** Era un ejercicio de competición entre equipos por tiempo. Esta actividad consistía en que todos los grupos intentarían resolver un ejercicio. El primer grupo que lo hiciera y contestara bien ganaba un punto, sino había rebote y contestaba el siguiente más rápido. Así sucesivamente.

El punto se sumaría a la nota media de los otros dos ejercicios del torneo. Esta puntuación no serviría para la nota de la evaluación grupal, sólo como prueba para confirmarse el ganador del torneo.

La actividad constaba de cuatro preguntas, una para cada integrante del grupo. El grupo debía elegir que integrante la contestaría antes de leerla, solo sabiendo el tipo de problema que sería: de representación de funciones, problema de cálculo, de rectas, etc.

Como ayuda, el integrante podía utilizar el comodín de “cooperación de grupo”, o el de “intercambio de preguntas”.

La cooperación de grupo era un comodín que consistía en que en vez de resolver un único integrante la pregunta, la podía resolver todo el grupo conjuntamente. Había un comodín por cada cuatro positivos que consiguieran durante las clases (Sistema de positivos), hasta un máximo de 4 comodines.

El intercambio de preguntas era una opción que sólo se podía utilizar una vez. Un integrante del equipo podía intercambiarse con otro si no sabía resolver la pregunta, pero sólo por uno al que todavía no le hubiese tocado contestar ninguna pregunta. Las preguntas rápidas del torneo fueron las siguientes:

Representación:

Representa gráficamente la recta que cumpla las siguientes condiciones:

- *Que pase por el punto $P=(0,-2)$*
- *Sea paralela a la recta $y = \frac{3}{2}x + 5$*
- *Esté comprendida en el intervalo $[-5,8)$*

Problema:

El precio de un viaje en tren depende de los kilómetros recorridos. Por un trayecto de 140 Km, pagamos 17€. Y si se recorren 360 Km, cuesta 39€. Escribe y representa la ecuación de la recta que relaciona los kilómetros recorridos, x , con el precio del billete, y .

Transformación de ecuaciones:

Transforma la siguiente ecuación de la recta de la forma punto pendiente a la forma explícita y a la general.

$$y - 3 = -2(x + 1)$$

Pendiente:

Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1,-2)$ y $(3, -8)$ y su ordenada en el origen. Escribe la expresión de dicha recta.

El torneo duró tres días. Uno para el ejercicio por relevos, otro para el individual y dos preguntas rápidas y el último para terminar las preguntas rápidas y comentar que les había parecido el torneo.

Con todos estos ejercicios podemos comprobar si nuestros alumnos cumplen con los objetivos fijados de la unidad, y con todo su trabajo en general, el desarrollo de las distintas competencias.

Autoevaluación

El quinto elemento del trabajo cooperativo que nos falta por introducir es la evaluación grupal. Ésta se produce cuando los miembros del grupo son capaces de medir la eficacia de su trabajo como equipo y del progreso individual. Saber cuáles son sus puntos fuertes y cuáles los débiles, saber resolver los conflictos que vayan surgiendo, reconocer las acciones de los miembros que ayudan o entorpecen el trabajo de grupo,...

Para ayudar a mis alumnos a poder ver mejor el trabajo grupal y ser conscientes, también, de su trabajo individual, les entregaba en cada sesión una hoja de autoevaluación (ANEXOS) que debían cumplimentar y entregar después de clase. Esa hoja me ayudaba a mí también a ver el nivel de compromiso de grupo, su organización, su nivel de resolución de

conflictos y su opinión acerca de las actividades de clase o de la metodología en general. Al día siguiente comentábamos en clase, conjuntamente, lo que me resultaba más relevante de las hojas de evaluación, para que el resto de grupos también aprendiera y se anticipara a futuros problemas de entendimiento. De esa forma también trabajábamos las prácticas interpersonales y grupales.

Calificación

La calificación del trabajo realizado por mis alumnos y de su nivel alcanzado en contenidos, competencias y capacidades se distribuye de la siguiente forma:

TRABAJO DE CLASE								
TAREAS	Tarea 1	Tarea 2		Tarea 3	Tarea 4	Exposición	Actividades	Actitud de grupo
NOTAS	A	B'	B= media B' y B''	C	D	E	F	G
		B''						
NOTA TAREAS	0,8*media(A,B,C,D y E)+0,2*media(F y G)							

TORNEO						
FASES	Relevos	Ejercicio común		Nota evaluación	Preguntas rápidas	NOTA TOTAL TORNEO
NOTAS	A	B	F= media (B, C, D Y E)	Media(A y F)	G=nº de puntos (hasta 4)	Nota evaluación +G
		C				
		D				
		E				

La nota Final de la Unidad es: $0,3*(\text{Nota total tareas}) + 0,7*(\text{Nota evaluación})$

Papel del profesor

Son muchas las tareas que debe realizar el profesor, antes, durante y después de aplicar el aprendizaje cooperativo en el aula. El trabajo del profesor es esencial para que el proyecto funcione.

Las decisiones que debe tomar el profesor antes de comenzar con el proyecto en clase son las que ya hemos visto desarrolladas:

- Los objetivos que queremos conseguir de la unidad a través del trabajo cooperativo.
- La organización de los grupos y su disposición en el aula.
- La elección de roles.
- La organización diaria y distribución del tiempo.

- La elección adecuada de tareas que cumplan los objetivos de la asignatura y las pautas del aprendizaje cooperativo.
- Decidir que pautas seguiremos para favorecer la atención a la diversidad en clase.
- Los criterios de evaluación y calificación.

Después de tomar las decisiones previas al desarrollo del proyecto y antes de ponerlas en marcha, hay que motivar a los alumnos con el trabajo cooperativo, a través de juegos, o actividades que les hagan valorarlo y entender por qué lo ponemos en práctica. Después hay que explicar a los alumnos en que va a consistir el proyecto y cuál será su tarea. Es importante que la explicación sea clara, y que los alumnos entiendan qué deben hacer, cómo hacerlo y qué se espera de ellos.

En mi caso, no me hizo falta utilizar ningún tipo de juego ni actividad para motivarles con el trabajo cooperativo. Durante la semana anterior habían trabajado con su tutor (el profesor de tecnología) distintos métodos para entender en qué consistía la cooperación y para qué servía, como el conocido juego del astronauta. Por suerte, también trabajarían este tipo de metodología en clase de tecnología.

Después de los pasos previos el profesor tendrá que presentar la unidad didáctica. Explicar los contenidos que se van a ver, los objetivos generales que se pretenden alcanzar, el tipo de tareas y las técnicas cooperativas que utilizaremos, y como se les evaluará al respecto. De esta forma reducimos su ansiedad ante lo inesperado y mejoran su rendimiento.

Cada día deberemos explicar la tarea a realizar, qué conceptos necesitan para realizarla, el método que deben seguir, las estrategias que pueden emplear y cómo se les va a evaluar al respecto. Si queremos hacerlo por proyectos, se deberá explicar esto el primer día, y después los alumnos deberán trabajar de forma autónoma el tiempo que se establezca.

Antes de empezar la explicación del día, y para aclarar las dudas sobre los contenidos, me gustaba exponer en la pizarra un esquema de los conceptos vistos y los que quedaban por ver. De esta forma, los alumnos podían relacionar lo que ya sabían con lo que estaban viendo, e ir estructurando sus conocimientos.

Después entregaba la ficha de tareas, o explicaba el ejercicio que íbamos a realizar, dependiendo del tipo de clase que fuéramos a dar ese día. Dejando claro, como hemos expuesto anteriormente, qué tenían que hacer, cómo tenían que hacerlo y qué objetivos alcanzarían.

Es importante que los alumnos sepan qué deben hacer, sino, se sentirán confusos, se frustrarán, se distraerán y no querrán avanzar. Para aclarar todas sus dudas, el docente debe estar abierto a contestar todas las preguntas que le hagan sus alumnos, sin llegar a ser repetitivo.

Durante el proceso de aprendizaje y trabajo cooperativo, el profesor debe supervisar a los grupos. Se debe observar a los alumnos para ver qué tipo de prácticas sociales están llevando, si interactúan de forma correcta y siguiendo sus roles. Para facilitar este trabajo y

anticiparse a posibles conflictos que puedan surgir, se puede elaborar una hoja de observaciones con todos los datos, de forma que veamos cómo van evolucionando y si es necesaria nuestra intervención.

La interacción con nuestros alumnos debe ser mínima. El papel que debe tomar el profesor es de guía. A través de preguntas a los alumnos, estos deben obtener el camino y reflexionar para encontrar la solución de su problema. Si cada vez que nos preguntan nuestros alumnos, les damos la respuesta, nunca podrán desarrollar una mente analítica y razonada. El aprendizaje cooperativo se basa en el intercambio de ideas y aportaciones que nos conduzcan a la resolución de un problema, y eso es lo que tenemos que reflejar a nuestros alumnos.

La interacción con los distintos equipos y escucharles mientras exponen sus ideas también debe servirnos para comprobar que avanzan, que entienden todo y para corregir posibles errores de conceptos. A la hora de evaluar su trabajo, las observaciones que hagamos también deben ayudarnos a decidir si han puesto en práctica de forma correcta el trabajo cooperativo y si su nivel de eficacia es el adecuado.

RESULTADOS

Los resultados en las notas grupales fueron los siguientes:

GRUPOS	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6
NOTA TAREAS	5,35	8,28	8,35	7,5	7,1	8
NOTA EVALUACIÓN	5,72	7,63	6,53	7,97	7,78	6,16
NOTA FINAL	5,61	7,83	7,08	7,83	7,58	6,71

La nota media de la clase de 3ªA en el examen individual fue de un 4,5 y la de la clase de 3ªB de 4,3.

La actitud en general de la clase de 3ªA fue muy buena e hicieron un gran trabajo en la asignatura. Hubo un caso de un alumno muy dominante e independiente en un grupo y otro caso de otro alumno que se implicó poco en las tareas. Ambos casos se pudieron solucionar a través del dialogo y la concienciación de ambos alumnos ante un comportamiento que lo único que hacía era perjudicar a sus compañeros de grupo y a ellos mismos.

En cambio el comportamiento de la clase de 3ªB fue pésimo. Los días que me tocó darles alguna clase de problemas no fueron muy fructíferos. Me encontré con distintos problemas de disciplina y poco interés hacía la asignatura.

Discusión de los resultados

Los resultados en las calificaciones fueron en parte los esperados. Hubiera preferido una mejor nota media en el examen individual, pero la actitud del alumnado ante un examen es de nerviosismo, frustración y bloqueo mental. Eso produjo que estudiaran y se lo prepararan de la misma forma que habían hecho anteriormente, por lo que las notas fueron las que habían estado teniendo durante todo curso.

En cambio, ante el Torneo, a pesar de ser una actividad evaluable, los alumnos se lo tomaron de otra forma y estuvieron más optimistas y animados que de costumbre.

Los resultados ante la actitud de trabajo y el ambiente de clase fueron excelentes. A pesar de que era una clase muy conflictiva, como ya me habían comentado el resto de sus profesores, por su continua distracción en todas las asignaturas, en la mía fueron totalmente distintos. Fueron muy participativos y eso se debió a la metodología que se impartió en clase, el trabajo cooperativo.

El ambiente, dentro los grupos, fue muy bueno. El grupo 5 fue el que tuvo los mayores problemas de cohesión, a causa de la actitud dominante de uno de los integrantes.

En general se pueden considerar unos resultados muy buenos, debidos al gran apoyo de mi tutor y de la implicación de mis alumnos durante todo el proyecto. Mis alumnos

aprendieron mucho y mejoraron su actitud en la asignatura, y a mí me resultó una experiencia muy enriquecedora y de la que aprendí mucho.

Dificultades

Las principales dificultades con las que me encontré fueron dos, el tiempo y la asimilación de mis alumnos al estilo de trabajo.

Como tuvimos menos días de los que se habían fijado antes de comenzar la unidad, a causa de la huelga, excursiones, y la prueba del CDI, mis alumnos no pudieron llevar bien preparado el tema de funciones lineales, ya que no pudimos dar todo el temario de forma cooperativa. Eso les perjudicó en el examen final individual, que prácticamente era todo de funciones lineales.

La otra dificultad fue la asimilación del tipo de metodología en clase, tanto en la evaluación, como en la forma de trabajo.

En un principio les gustó mucho la idea de cambiar el estilo de impartir las clases. El problema surgió cuando les expliqué como serían evaluados. Muchos de ellos no aceptaban que su nota de evaluación fuera la nota media del todo grupo, y que su nota dependiera del trabajo de sus compañeros. Querían una forma de trabajo en grupo, pero que se les evaluara de forma individual. Más adelante vieron que en eso consistía el trabajo cooperativo y que era lo más correcto, para mejorar la implicación y la motivación de todo el grupo. Pero les llevó tiempo convencerse de ello y aceptarlo.

Con respecto a la adaptación de la forma de trabajo, tuvimos algunos problemas. La primera tarea no la pudieron terminar en el tiempo estipulado y me la tuvieron que entregar al día siguiente. Las primeras hojas de autoevaluación las rellenaban de forma escasa y cuando tocaba el timbre. Después de estos casos, ya comenzaron a organizarse de mejor forma. Pero también les costó adaptarse.

CONCLUSIONES

El proyecto de trabajo cooperativo en el aprendizaje de las matemáticas resultó ser muy satisfactorio para todos los que participamos en él. Conseguí impartirlo en clase sin demasiadas complicaciones y el resultado fue muy gratificante.

Aprendí mucho sobre cómo dar clase y qué aspectos debía mejorar, tanto como profesora como en la metodología impartida. Después de la experiencia de introducir la cooperación en las aulas de forma sencilla, estoy convencida que se debería incluir a mayor escala en nuestros centros. Impartir las clases de esta forma durante más tiempo y en distintas asignaturas a la vez, para que los alumnos se acostumbren y mejoren su forma de trabajo en grupo.

Mis alumnos agradecieron mucho el trabajo que hice y el aire fresco que llevé a clase. Se divirtieron mucho a la vez que aprendían, y conseguí captar su atención además de motivar a algún alumno que no había querido trabajar en todo el curso. Los resultados, aunque no muy buenos, fueron los esperados, por el poco tiempo que tuvimos y por la inexperiencia tanto mía como de mis alumnos en el aprendizaje cooperativo.

Se tiene que tener en cuenta que este tipo de metodología se trabaja de forma más lenta en clase, y que lleva más tiempo impartirla. A la hora de hacer una comparativa entre las dos clases, la mía trabajaba más despacio. Si hubiéramos dispuesto del tiempo estipulado creo que la nota media si hubiera tenido mayor diferencia entre ambas clases.

Los alumnos necesitaron tiempo para asimilar este tipo de metodología, y a la hora de implantarla hay que hacerlo de forma progresiva. No se puede implantar de golpe con un proyecto que vaya a durar dos meses, porque puede llegar a ser también muy pesado. Se puede empezar con tareas cortas en parejas, como la corrección de un ejercicio o la elaboración de un esquema y luego ir ampliándolo con unidades enteras o proyectos trimestrales.

El tema de la asignatura que se elija para emplear aprendizaje cooperativo en el aula es fundamental. A pesar de elegir el tema de funciones, que no fue el más indicado, se pudieron aplicar bien las técnicas cooperativas adaptando los contenidos. Hubiera sido más fácil el tema de geometría o estadística, ya que a la hora de aplicar la técnica del Rompecabezas, los contenidos tienen mayor facilidad para dividirse, y poder trabajar con ellos. Además de ser dos temas que los alumnos ven más fáciles y les interesan más; geometría por ser más visual y estadística por su relación con la vida cotidiana.

El ambiente de clase mejoró mucho. La interacción entre los alumnos fue la adecuada y se notó en el rendimiento. El proporcionar a los alumnos la oportunidad de relacionarse entre ellos a la vez que trabajaban, sin ver en esa actitud algo negativo, produjo que se evitaran distracciones, detenciones de la clase para llamar la atención o la expulsión de algún alumno de clase. La implicación activa en clase y en las tareas les proporcionaba un mejor aprendizaje y una mayor predisposición a la asignatura de matemáticas. Al manifestar opiniones contrapuestas dentro de los grupos de trabajo desarrollan una mente crítica y más razonada.

Los alumnos no aprenderán de verdad si ellos no quieren. No podemos esperar que bajo la presión de un profesor ellos asimilen todos los conocimientos que les proyectamos. Con esa actitud muchas veces lo único que se consigue es que los alumnos memoricen los conceptos sin entenderlos, para que después no sepan aplicarlos ni relacionarlos entre sí. Nuestros alumnos aprenden porque socialmente es lo correcto, no porque sientan interés por lo que están haciendo, y eso provoca a largo plazo desinterés y rechazo por el estudio, en nuestro caso, por las matemáticas.

Las matemáticas se consideran una de las asignaturas más difíciles de nuestro sistema educativo, lo que en realidad es falso. No es más difícil que otras asignaturas, pero estos prejuicios y concepciones erradas provocan en nuestros alumnos temor y un gran desinterés por el desarrollo de su destreza matemática. El trabajo cooperativo nos proporciona una herramienta para que nuestros alumnos participen de forma activa en la asignatura, desarrollen sus destrezas y mejoren su actitud. Las matemáticas se aprenden practicándolas, y cuanto mayor es la satisfacción al resolver un problema, mayor será el interés por ellas.

BIBLIOGRAFÍA

Johnson, D. W. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Buenos Aires: Paidós.

Pujolàs Maset, P. (2001). *Atención a la diversidad y aprendizaje cooperativo en la educación obligatoria*. Archidona: Aljibe.

Pujolàs Maset, P. (2008). *El aprendizaje cooperativo. 9 ideas clave*. Barcelona: Graó.

Serrano González-Tejero, J. M. (1997). *Aprendizaje cooperativo en matemáticas. Un método de aprendizaje cooperativo-individualizado para la enseñanza de las matemáticas*. Murcia: Serv. de Publicaciones, Universidad de Murcia.

Slavin, R. E. (1999). *Aprendizaje cooperativo. Teoría, investigación y práctica*. Buenos Aires: Aique.

Torrego Seijo, J. C. (2012). *Aprendizaje cooperativo en las aulas. Fundamentos y recursos para su implantación*. Madrid: Alianza Editorial.

Vinuesa Vilella, M. P. (2002). *Construir los valores. Currículum con aprendizaje cooperativo*. Bilbao: Desclée de Brouwer.

Berenguer, L.; Cobo, B.; Flores, P.; Moreno, A.; Navas, J. & Toquero, M. (2000). Trabajo cooperativo en clase de matemáticas. *Matemáticos y Matemáticas para el tercer milenio. IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "THALES"*, 261-264. Extraído el 10 de Marzo de 2014 desde www.ugr.es/~pflores/textos/otros/laxsanfernando.pdf

REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

DECRETO 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

ANEXOS

Tabla actividades-objetivos-competencias

En la siguiente tabla, se muestra la relación de los objetivos de la unidad didáctica establecidos anteriormente, con las distintas actividades propuestas que los cumplen y las competencias básicas que se desarrollan.

ACTIVIDADES		OBJETIVOS	COMPETENCIAS
Introductorias	¿Esto es una función?	Conocer el concepto de función.	C1, C4, C6, C7
	Las escalas nos engañan.	Conocer características de una función.	C1, C4, C6, C7
		Identificar las variables dependiente e independiente y saber expresarlas de forma gráfica.	C1, C2, C4, C6, C7
	Escalando montañas.	Entender el concepto de pendiente.	C1, C4, C6, C7
Tareas	Las funciones, representación gráfica e interpretación.	Entender el concepto de función.	C1, C4, C6, C7
		Identificar las variables dependiente e independiente y saber expresarlas de forma gráfica.	C1, C2, C4, C6, C7
		Elaborar gráficas a través de enunciados.	C1, C2, C4, C6, C7
	Expertos en representación de funciones.	Identificar las variables dependiente e independiente y saber expresarlas en tablas.	C1, C2, C4, C6, C7
		Elaborar gráficas a través de tablas de valores y enunciados.	C1, C2, C4, C6, C7
	Expertos en análisis de funciones.	Analizar la continuidad de una función, su crecimiento y decrecimiento e identificar los máximos y mínimos.	C1, C4, C6, C7
	Compañías telefónicas. (Tarea con presentación en clase de los alumnos)	Elaborar gráficas a través de expresiones algebraicas.	C1, C3, C4, C6, C7
		Saber formular la expresión analítica de una función a través de un enunciado o datos.	C1, C2, C3, C4, C6, C7
		Utilizar las funciones para representar y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.	C1, C2, C3, C4, C6, C7

	Transformaciones de la ecuación. La misma recta, distinta expresión.	Conocer y saber hallar las distintas expresiones de una recta (explícita, general y punto-pendiente). Saber pasar de una expresión a otra.	C1, C4, C6, C7
Actividades cortas	Ejercicios	Identificar y saber representar las funciones lineales en sus distintas formas de expresión, las funciones constantes y las proporcionales.	C1, C4, C6, C7
		Saber hallar la pendiente de una función.	C1, C4, C6, C7
		Saber hallar las distintas expresiones de una recta.	C1, C4, C6, C7
	Problemas	Utilizar las funciones para representar y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.	C1, C2, C4, C6, C7
		Saber formular la expresión analítica de una función a través de un enunciado o datos.	C1, C2, C4, C6, C7
Juego de cartas	Familias de funciones	Conocer y saber hallar las distintas expresiones de una recta.	C1, C4, C6, C7
		Saber hallar la pendiente de una función.	C1, C4, C6, C7
		Saber representar gráficamente las funciones lineales en sus distintas formas de expresión.	C1, C4, C6, C7

Hay que tener en cuenta que todas las actividades, aunque no se indique en la tabla, cumplen los objetivos particulares que nos aporta el trabajo cooperativo en clase. Por lo que también se desarrollarán en todas ellas tanto la competencia social y ciudadana, como la competencia de aprender a aprender y la lingüística.

• **Competencias:**

- **C1:** Competencia matemática.
- **C2:** Competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico.
- **C3:** Tratamiento de la información y competencia digital.
- **C4:** Competencia en comunicación lingüística.
- **C5:** Competencia cultural y artística.
- **C6:** Competencia para aprender a aprender.
- **C7:** Competencia social y ciudadana.

Tareas

TAREA GRUPAL

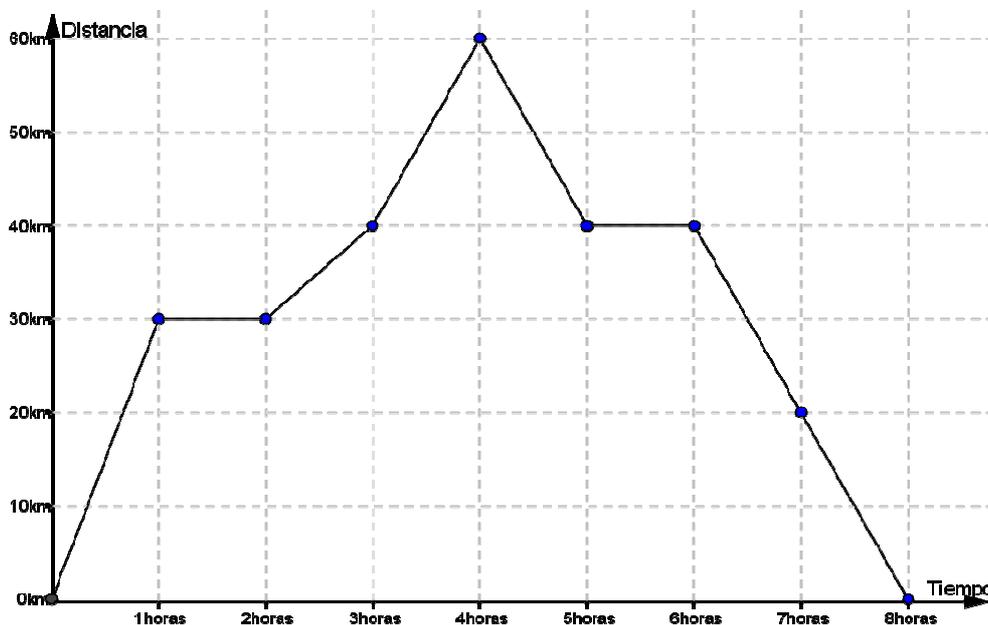
Tarea 1: Las funciones, representación gráfica e interpretación.

Objetivos:

- Entender el concepto de función.
- Reconocer las funciones de forma visual (gráficamente) y saber interpretarlas.
- Saber identificar la variable dependiente e independiente dentro de un problema.

Tarea: Realizar los siguientes ejercicios de forma grupal y cooperativamente.

EJERCICIO 1. En la siguiente gráfica se representa la distancia a la que se encuentra un viajero de su casa durante el tiempo que tarda en realizar una excursión.



- ¿La siguiente gráfica representa una función? Si es así, determinar las dos variables que relaciona, especificando cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.
- ¿Cuánto tiempo tarda el viajero en realizar la excursión y volver a casa?
- ¿A qué distancia se encuentra de su casa el viajero a la hora de haber comenzado la excursión? ¿Y a las 5 horas?
- ¿Qué distancia máxima se aleja el viajero de su casa?
- ¿Cuánto tarda el viajero en alejarse de su casa 40 km?
- Durante la excursión, el viajero realiza dos descansos, en los cuales, se queda parado. ¿Podrías localizar en qué momento realiza esos descansos? ¿Y cuánto dura cada descanso?

EJERCICIO 2: Representar en los siguientes ejes cartesianos una función, que relacione dos variables cualesquiera (por ejemplo: distancia-tiempo, altura-tiempo, número de ventas-euros, etc.) y describir la historia que represente nuestra gráfica (por ejemplo: un viaje en barco, el vuelo de un pájaro, las ventas de una librería, etc.)

TAREA GRUPAL (POR PAREJAS)

Tarea 2: Expertos en representación de funciones

Objetivos:

- Saber representar de forma gráfica los distintos datos de un problema, identificando las variables dependiente e independiente.
- Saber elegir de forma adecuada la escala de los ejes de coordenadas.
- Entender el concepto de dominio y recorrido y saber identificarlo.
- Saber identificar cuándo una gráfica será continua y cuándo discontinua.

Tarea: Leer detenidamente la teoría, entendiendo el ejemplo, y realizar el ejercicio.

Para representar una función, necesitaremos seguir los siguientes pasos:

1. Dibujar una tabla (si no nos la proporcionan) en la que exponamos los datos de ambas variables, la variable x arriba y la de y abajo.
2. Dibujar los ejes cartesianos.
3. Definir el eje x (eje de abscisas), con la variable independiente, y el eje y (eje de ordenadas) con la variable dependiente.
4. Dividir cada eje, en intervalos iguales, según la escala que elijamos. (La escala representa la diferencia de un punto al siguiente en cada eje). Los intervalos, podrán ir de 1 en 1, o de 5 en 5, o de 10 en 10, etc. (como queramos).
5. Representar en los ejes cartesianos las coordenadas (x,y) que nos proporcione la tabla de valores.
6. Unir los puntos, si la función es continua (eso se ve, según sea la variable x).

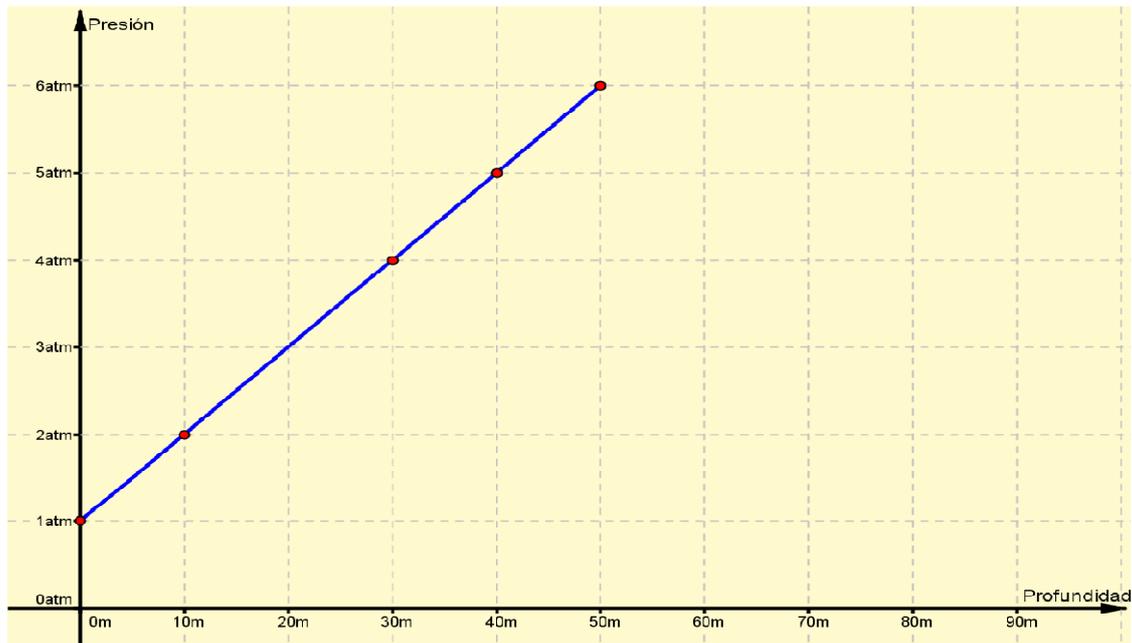
Dominio: El dominio son todos los valores de x para los cuales hay valores de y en la función. Se escribe por tramos.

Recorrido: El recorrido son los valores que toma y .

EJEMPLO: La siguiente tabla recoge la relación entre la profundidad que alcanza un submarinista dentro del mar y la presión que debe soportar según se vaya sumergiendo.

x (profundidad)	0	10	30	40	50
y (presión)	1	2	4	5	6

Representamos la gráfica:



La función es continua porque el submarinista puede sumergirse en las profundidades del mar de forma continua, es decir, no puede saltar de 10 metros a 30 metros sin pasar por los valores que hay entre medias, como por ejemplo, 20 metros.

El dominio es el intervalo: de 0 a 50 (metros). (Son los valores que toma x).

El recorrido es el intervalo: de 1 a 6 (atmósferas). (Son los valores que toma y).

EJERCICIO 1. La siguiente tabla recoge la medida del perímetro del cráneo de un niño en los primeros meses de vida:

Tiempo (meses)	0	3	9	15	21	27	33
Perímetro (cm)	34	40	44	46	47	48	49

- Haz una gráfica relacionando estas dos variables. Elige una escala adecuada.
- ¿La función es continua o discontinua? ¿Por qué?
- Indica el dominio y el recorrido de la función.
- ¿Cuánto crees que medirá el perímetro craneal de un niño de 3 años?

EJERCICIO 2. Dibuja una función que cumpla:

- Que su dominio esté entre -5 y 5.
- Que su recorrido sea siempre mayor que 0.
- Que pase por los puntos (-1, 3) y (4, 6).
- Que sea continua en todos los puntos, excepto en el intervalo de 1 a 2, que será discontinua, (en ese intervalo no habrá función).

TAREA GRUPAL (POR PAREJAS)

Tarea 2: Expertos en análisis de funciones.

Objetivos:

- Entender el concepto de crecimiento y decrecimiento de una función (por tramos) y saber identificarlos de forma visual.
- Identificar y entender el concepto de máximo y mínimo.
- Saber identificar cuándo una gráfica será continua y cuándo discontinua.

Tarea: Leer detenidamente la teoría, entendiendo el ejemplo, y realizar los ejercicios.

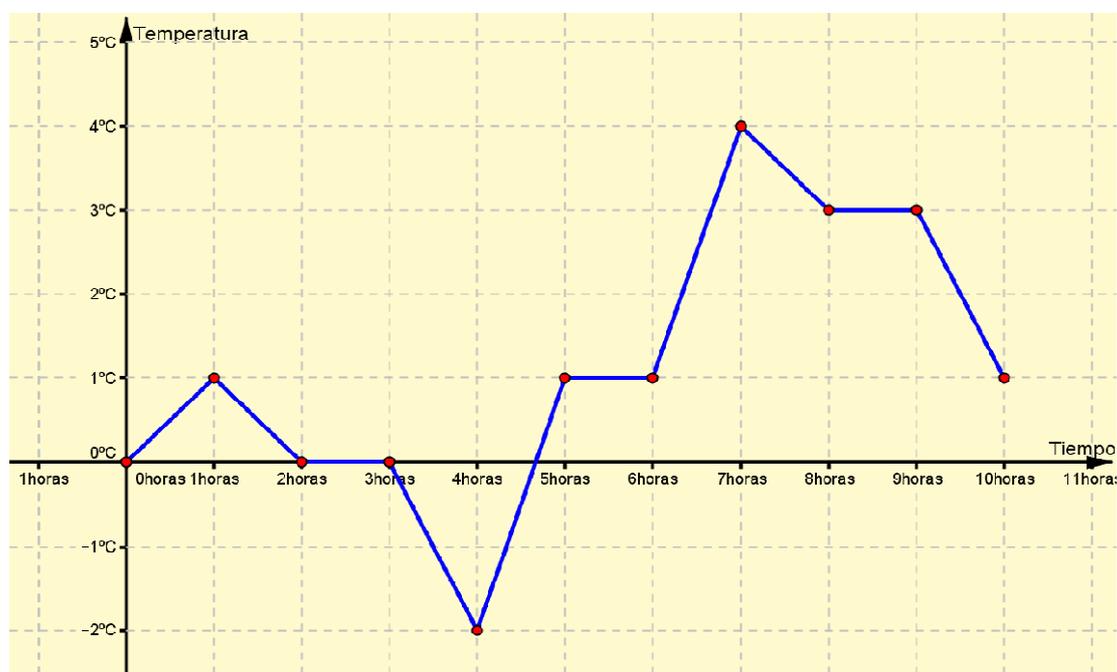
Función creciente: Un función o tramo de una función es creciente cuando al aumentar la variable independiente x , aumente la variable dependiente y .

Función decreciente: Una función o tramo es decreciente cuando al aumentar x , disminuye y .

Máximo: Un punto de una función es máximo si los puntos que lo rodean (tanto a la izquierda, como a la derecha) son menores que él. (Máximo = Pico de una función).

Mínimo: Un punto de una función es mínimo si los puntos que lo rodean (tanto a la izquierda, como a la derecha) son mayores que él. (Mínimo = Valle de una función)

EJEMPLO: La siguiente gráfica representa la temperatura de un determinado día de primavera



La función es **continua** porque el tiempo es continuo, y entre una hora y otra hay que analizar también la temperatura que hace.

Los **intervalos de crecimiento** de la función son: de 0 a 1 horas, de 4 a 5 horas y de 6 a 7 horas.

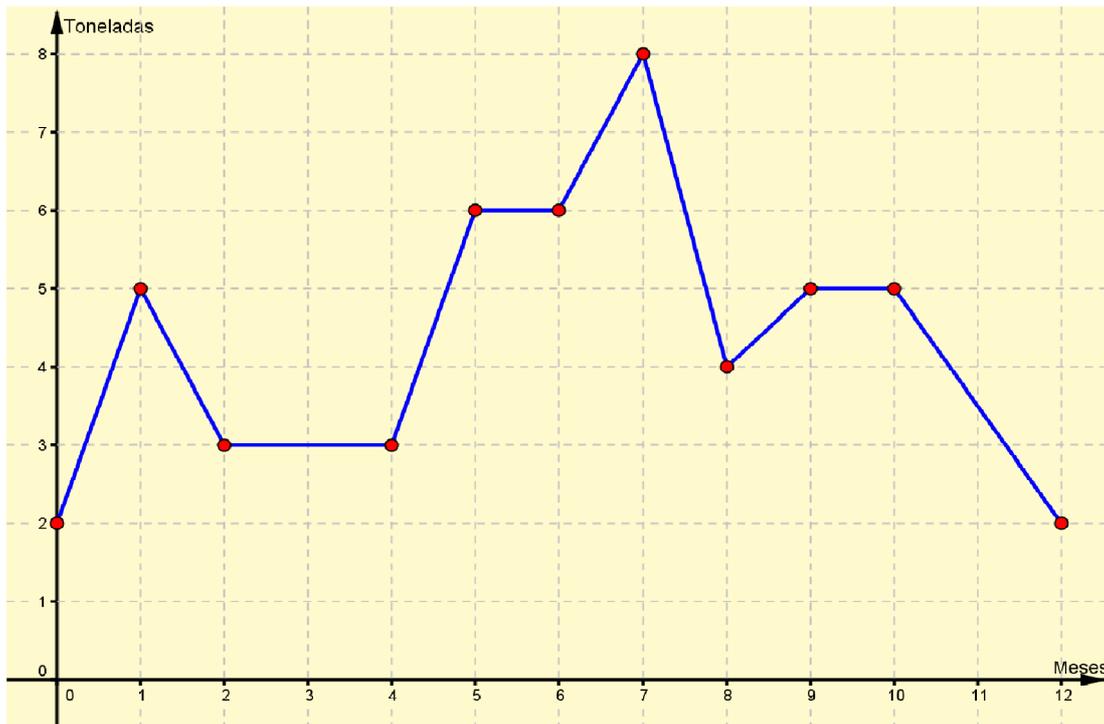
Los **intervalos de decrecimiento** de la función son: de 1 a 2 horas, de 3 a 4 horas, de 7 a 8 horas y de 9 a 10 horas.

Los **intervalos constantes** son: de 2 a 3 horas, de 5 a 6 horas y de 8 a 9 horas.

Máximos: En las coordenadas (1,1) y (7,4).

Mínimos: En la coordenada (4,-2)

EJERCICIO 1. La siguiente gráfica indica las toneladas de fruta exportada según el mes del año (desde Enero hasta Diciembre):



- e) Describe dos tramos (indicando los meses) en los que la función es creciente.
- f) Del mes 7 (Julio) hasta el mes 8 (Agosto) la función es decreciente (es decir, las toneladas de fruta exportada bajan). Indica otro tramo en el que ocurra lo mismo.
- g) ¿En qué meses la función alcanza un máximo? ¿Y un mínimo? Indica en ambos casos las toneladas de fruta que se exportan en dichos meses.
- h) En algunos tramos las toneladas de fruta exportada se mantienen constantes. Indica esos tramos.
- i) ¿Cuántas toneladas de fruta se mandan en Abril? ¿Y en Octubre?

EJERCICIO 2. Dibuja una función continua que cumpla:

- e) Que tenga un máximo en $x=0$ y $x=5$
- f) Que tenga un mínimo en $x=1$
- g) Que sea creciente en el intervalo de -2 a 0 .
- h) Que tenga un tramo constante entre 2 y 3 .

TAREA GRUPAL

Tarea 3: Compañías telefónicas (Expresión analítica del coste telefónico)

Objetivos:

- Saber expresar analíticamente de forma adecuada la relación entre dos variables.
- Saber representar y analizar dicha expresión en comparación con otras del mismo estilo.
- Introducción a las funciones lineales.

Tarea: Realizar el siguiente ejercicio y presentar a la clase los resultados obtenidos mediante una presentación creativa.

La **expresión analítica de una función** es una ecuación que relaciona algebraicamente las dos variables que intervienen.

EJERCICIO 1. Distintas compañías nos muestran las siguientes tarifas telefónicas:

Tarifa triángulo: Pagas 5€ fijos, más 20 céntimos por cada minuto hablado.

Tarifa cuadrado: Pagas 15€ fijos, más 10 céntimos por cada minuto hablado.

Tarifa pentágono (sólo pagas por lo que hablas): Pagas 30 céntimos por cada minuto hablado.

Tarifa círculo: Pagas 10€ los primeros 30 minutos, y luego pagas 25 céntimos por minuto hablado.

- a) Escribe la función que expresa analíticamente la relación entre el coste telefónico y el tiempo que hablamos de las anteriores tarifas telefónicas.
(Indicación: Elige de forma adecuada la variable dependiente y la independiente)
- b) Representa gráficamente las distintas funciones en una misma gráfica con una escala adecuada.
- c) ¿Podríamos decir que estas funciones son continuas o discontinuas?
- d) Indica el dominio y recorrido de las distintas funciones.
- e) Indica los intervalos crecientes, decrecientes y constantes de las distintas tarifas.
- f) Analiza la situación que se nos presenta en la gráfica y contesta:
 - a. ¿Qué tarifa le conviene más a una persona que mucho hable:
 - 30 minutos al mes
 - 60 minutos al mes
 - 120 minutos al mes
 - b. A la larga, ¿qué tarifa será la más cara? ¿y la más barata?
 - c. ¿Cuánto me costaría si hablara 50 minutos al mes con las distintas tarifas que tenemos? ¿Y si hablara 85 minutos?
 - d. Si contrato la tarifa pentágono y mi hermano la triángulo ¿Cuántos minutos tendremos que hablar para pagar lo mismo? ¿Y si tenemos la tarifa triángulo y la tarifa cuadrado?

EJERCICIO 2. Crear vuestra propia tarifa telefónica y convencer al resto de la clase para contratarla. (RECUERDA: ¡tienes que ganar lo máximo que puedas sin estafar a tu clientela!)

Examen individual

Realizado por mi tutor de prácticas, José Cimadevilla.

NOMBRE:

Funciones y rectas

1) Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(-9, -6)$. Después calcula su ordenada en el origen, su ecuación en forma punto pendiente, explícita y general. Sin representarla indica si la recta es creciente o decreciente y a qué altura corta al eje Y, justificando tu respuesta.

2) Escribe la ecuación de la recta en cada caso:

- a) Pasa por $P(3,4)$ y $Q(6, 4)$. ¿Cómo se llama este tipo de rectas?
- b) Pasa por el punto $R(-11, 47)$ y su pendiente es 4, en la forma punto pendiente.
- c) Pasa por el punto $S(2, 1)$ y su ordenada en el origen es -1, en forma explícita.
- d) Pasa por el punto $T(-1,3)$ y es paralela a $y = 3x + 5$, en forma general.

3) Representa las rectas $r: 2x + y = 4$ y $s: y = x - 3$ en los mismos ejes de coordenadas. Calcula, algebraicamente, el punto de corte entre ambas y comprueba que la solución obtenida es coherente con la representación que has hecho.

4) En la autoescuela "CUATROCURVAS" las tarifas son las siguientes:

Precio de cada clase..... 30 €
Matrícula..... 100 €

a) He utilizado los servicios de esta autoescuela y con 5 clases he conseguido el carné. ¿Por cuánto me ha salido? ¿Cuánto hubiese pagado por 6 clases? ¿Y con 7 clases?

b) Llama x al número de clases recibidas e y al dinero total que cuesta sacarse el carné. Haz una tabla de valores con los datos del apartado anterior y representa su gráfica. Escribe la fórmula de esta función.

Hoja de Autoevaluación

FICHA DE EVALUACIÓN

FECHA:

SESIÓN N°:

NOMBRE DEL GRUPO:

CURSO:

ANÁLISIS INDIVIDUAL:

INTEGRANTES	ROL ASIGNADO	CONTENIDOS APRENDIDOS

ANÁLISIS GRUPAL:

Objetivos de la sesión	Objetivos conseguidos	Objetivos no conseguidos (Queda por hacer...)

Dificultades o problemas encontrados	Forma de resolución

Evaluación general del equipo (opiniones):