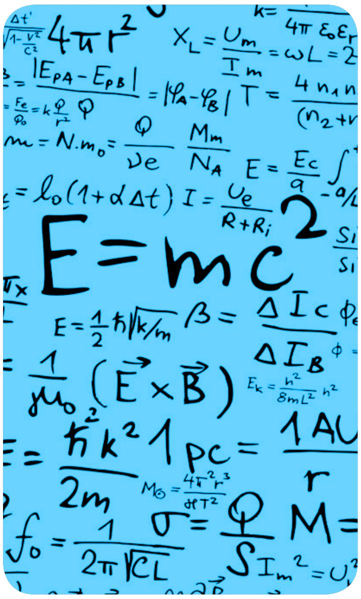




MÁSTERES de la UAM

Facultad de Formación de Profesorado y Educación /13-14

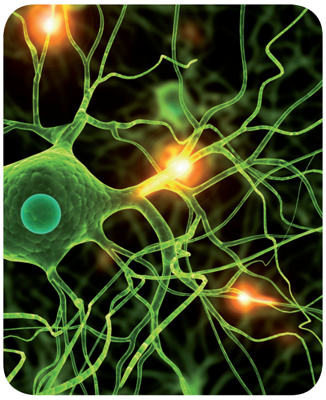
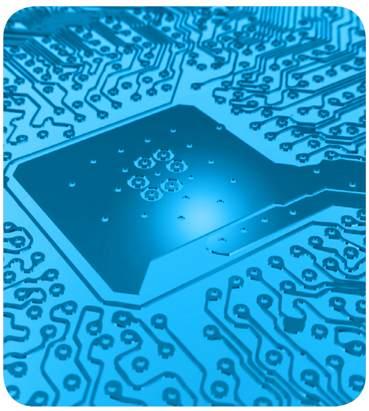
Máster de Formación de Profesorado de E.S.O. y Bachillerato

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Campus Internacional excelencia UAM CSIC+

La Historia de los sólidos platónicos y sus aplicaciones en el aula

Raquel Palacios Sadornil


UAM EDICIONES

RESUMEN

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo principal crear una propuesta para una posible solución ante el rechazo que, en ocasiones, se respira en el aula con respecto al estudio de las matemáticas. En concreto, se busca como acercar la geometría a los estudiantes con una doble vía, por un lado, humanizando las matemáticas a través de sus personajes; por otro, buscando una metodología que permita hacer la geometría manejable y tangible para los estudiantes.

Teniendo como eje principal los poliedros regulares a lo largo de la historia, se propone una serie de actividades que pueden llevarse a cabo en el aula y que ayudaran a una mejor comprensión y aprendizaje de la geometría en la ESO.

PALABRAS CLAVES

Poliedros regulares, historia, motivación, humanización de las matemáticas, matemáticas tangibles.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas pueden resultar emocionantes para algunos de nosotros, pero ¿qué ocurre con todos esos estudiantes que se ven obligados a estudiarlas y para los que acaban convirtiéndose en una pesadilla?

1.1 Motivación

La motivación de este proyecto surge como búsqueda de una solución para el rechazo que a veces se respira hacia las matemáticas en el aula.

Inconscientemente, ya desde la infancia, se introduce la idea en los niños de que las matemáticas son esa asignatura tan difícil, imposible de entender y la pesadilla que están obligados a estudiar, les guste o no. Pero, ¿por qué ocurre esto? Las matemáticas se vuelven más y más abstractas a medida que se avanza en su estudio, pero ¿es realmente este el problema que causa el rechazo hacia ellas?

Posiblemente el reto de llegar a entenderlas no sea el problema principal, quizás la frialdad con la que se imparten sea uno de los factores principales que producen el desinterés en los alumnos por el estudio de las matemáticas y esta falta de motivación la que evite que se disfrute de su estudio.

Si lográsemos humanizar las matemáticas poniéndoles cara, a través de los personajes que han tomado parte en su desarrollo, conociendo los problemas a los que quisieron dar respuesta y los métodos que llevaron a cabo para ello, los alumnos podrían sentirse identificados. Quizá lográsemos a través de la empatía con los protagonistas de estos momentos históricos un mayor interés y, sobre todo, una mayor sensación de capacidad: si otras personas lo lograron antes que ellos y con menos medios, por qué no iban a ser nuestros alumnos capaces de conseguirlo.

La incorporación de la historia a la clase de matemáticas puede ser beneficiosa en muchos aspectos. A través de las anécdotas ligadas a la historia se puede llegar a despertar el interés en los alumnos mientras conseguimos una mayor comprensión de las matemáticas. Si no se llegara a encontrar una respuesta a través de la historia, por lo menos, se ayudará a evitar errores del pasado.

Además, la abstracción de las matemáticas es un importante obstáculo a superar para las mentes de los alumnos que, en ocasiones, no están aún suficientemente desarrolladas para lograr este paso del mundo tangible al pensamiento abstracto. Por ello, otro de los problemas a los que se debería buscar solución es la forma de acercar las matemáticas haciéndolas manejables, palpables, materiales en las manos del alumno.

Es decir, el objetivo es dar solución a la lejanía de las matemáticas convirtiéndolas en algo cercano y familiar para los alumnos, con una doble vía de actuación: acercando las matemáticas a través de su historia y sus protagonistas; y buscando estrategias y actividades que transformen las matemáticas en algo tangible.

Este proyecto, en concreto, se enfocará en el estudio de la geometría partiendo de la historia que envuelve a los fascinantes sólidos platónicos o poliedros regulares.

1.2 ¿Qué son los poliedros regulares?

"Llamamos poliedro regular a todo poliedro convexo en el que sus caras son regulares e iguales y tal que en cada vértice concurren el mismo número de aristas."
(Fernández, 1981)

¿Qué significa todo eso? ¿Qué significa que sea un "poliedro convexo y regular"?

Dentro de los cuerpos geométricos, que son aquellos que ocupan un volumen en el espacio, encontramos los poliedros, los cuales se caracterizan por estar formados por caras planas poligonales. Más concretamente:

"Un poliedro es aquella porción del espacio cerrada y limitada por superficies planas poligonales de tal forma que cada lado pertenece simultáneamente a dos polígonos continuos y dos polígonos cualesquiera con un lado común pertenecen a distintos planos"
(Romá, 2003)

"Un poliedro es convexo cuando todo él está ubicado en el mismo semiespacio determinado por los planos que forman sus caras."
(Romá, 2003)

Pues bien, existen únicamente cinco poliedros regulares, los cuales podemos ver en la figura1. Conocidos, de izquierda a derecha, como tetraedro, cubo o hexaedro, dodecaedro, octaedro e icosaedro.

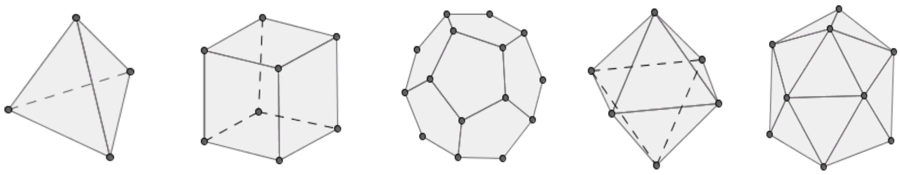


Figura 1: Los cinco poliedros regulares

¿Por qué no se puede formar ningún otro? ¿Por qué son tan importantes los sólidos platónicos? ¿Qué papeles tienen y han tenido en el desarrollo de la humanidad?

2. CONTEXTO HISTÓRICO

Los poliedros regulares han fascinado al hombre desde siempre. Puede que haya sido por observarlo en la naturaleza, tal vez en los cristales minerales como la Pirita o la sal común que cristalizan en cubos, o por otras razones; pero la belleza de los sólidos regulares ha intrigado a los hombres desde siempre.

Figura 2: Pirita y sal común cristalizadas en forma de cubo
Fuentes: http://www.mineral-s.com/pirita.html, http://www.cabalaytarot.com/06/cubo.html

2.1 Los Griegos

2.1.1 *Pitágoras y los pitagóricos:*

Pitágoras fue un filósofo y matemático que vivió alrededor del año 554 a.C. Formó la hermandad llamada Orden de los pitagóricos, la cual estudiaba diferentes disciplinas como la filosofía o la cosmología, entre otras.

Al igual que el propio Pitágoras, los pitagóricos estaban fascinados por los sólidos regulares, sobre todo por el dodecaedro debido a la presencia del pentágono en sus caras. El pentágono estrellado era el símbolo que representaba la Escuela Pitagórica y la presencia de las proporciones áureas en las dimensiones de éste era algo que los hechizaba.

Se cree que el interés de Pitágoras por estos sólidos surgió de observar las formas en los minerales durante su niñez, pues su padre era tallador de piedras preciosas. (González Urbaneja, 2001)

Figura 3: Pitágoras explicando a sus discípulos (fragmento de la Escuela de Atenas de Rafael Sazio)
Fuente: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=3326&limitstart=3

A Pitágoras se le atribuye la construcción de, al menos, tres de los sólidos regulares, como señala Proclo en sus Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides. Él y sus seguidores concebían los sólidos regulares como figuras místicas con las que explicar y entender el universo, asociando los cuatro elementos primarios: fuego, tierra, aire y agua, con los cuatro sólidos: tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro. En lo que respecta al dodecaedro lo relacionaban con el Cosmos y el Universo. Éste último es el único que puede circunscribir a todos los demás y en el hallamos la proporción áurea. Por ello, consideraban que esta proporción estaba presente en el origen del universo y le asignaron el nombre de proporción divina. (Corbalán, 2010; González Urbaneja, 2003)

Era tal la fascinación que sentían los pitagóricos por el dodecaedro y lo creían tan importante, que guardaban en completo secreto su construcción. De forma que, incluso, se llegó a formar una leyenda sobre cómo sufriría la peor de las muertes aquel que osara desvelar los misterios del dodecaedro. (González Urbaneja, 2001)

2.1.2 *Platón y Teeteto*

Como se señalaba, a los Pitagóricos se les atribuye el conocimiento del tetraedro, del cubo y del dodecaedro. Sin embargo, el icosaedro y el octaedro se deben a un amigo de Platón llamado Teeteto. (González Urbaneja, 2001)

Platón (Atenas, 427 a 347 a.C.) fue un gran filósofo y matemático griego que fundó la Academia de Atenas. Cabe destacar su libro el *Timeo,* en el que los poliedros regulares tienen un papel destacado y por esto mismo, a estos cinco cuerpos se les conoce como *Sólidos Platónicos*. En esta obra se expone la asociación que ya había hecho Pitágoras entre el tetraedro, el cubo, el icosaedro y el octaedro con los 4 elementos primarios de la naturaleza. La veneración que hacían los Pitagóricos del dodecaedro conduce a Platón a considerar este como la *quintaesencia* o quinto elemento, la sustancia que creía que formaban los cuerpos celestiales, el símbolo del Cosmos. (González Urbaneja, 2001)

Figura 4: Sólidos platónicos asociados con los cuatro elementos con las figuras que dibujó Kepler

Como Díaz Caballero y Canino Ramos (2012) nos relatan, en el *Timeo*, su protagonista Timeo de Locri hace la siguiente reflexión: “El fuego está formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua, de icosaedros; la tierra, de cubos y como aún es posible una quita forma, Dios ha utilizado esta, el dodecaedro pentagonal, para que sirva de límite del mundo.”

2.1.3 *Euclides*

A pesar de ser conocidos como Sólidos Platónicos, es Euclides quién verdaderamente formaliza los sólidos platónicos como elementos matemáticos y realiza construcciones de los mismos. En su libro los *Elementos* incluye un primer ejemplo de teorema de clasificación y una definición para cada uno de los poliedros regulares. Según González Urbaneja (2001) el objetivo de los Teoremas del Libro XIII de Euclides es el de inscribir cada uno de los poliedros regulares en una esfera, hallando, posteriormente, la razón entre la arista de cada sólido con el radio de la esfera circunscrita con radio fijo R.

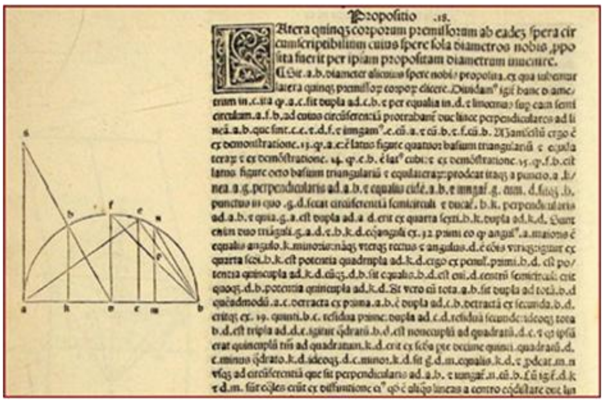


Figura 5: Fragmento de la última Proposición (XIII.18) de Los Elementos de Euclides.
Fuente: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3393%3Aeuclides-el-teorema-de-los-poliedros-en-la-ma-proposicie-los-elementos-de-euclides&catid=39%3Aaso-hicieron&directory=67&showall=1

Podemos ver que, en la última proposición de Euclides, y como nos explica González Urbaneja (2001) éste construye la siguiente figura:

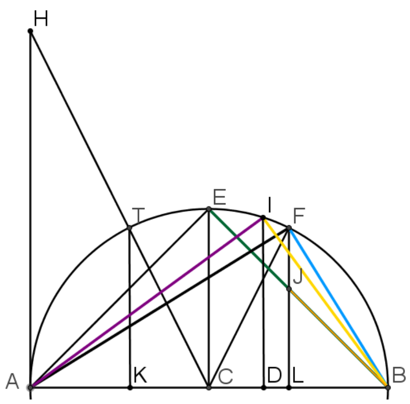


Figura 6: Reproducción del dibujo realizado por Euclides

Donde:
AB es el diámetro de la esfera.
C es el punto medio del segmento AB.
La longitud AH es igual a AB y CL es igual a KC, donde K es la proyección de T, que a su vez es la intersección entre la esfera y el segmento HC.

Con esta figura, utilizando diferentes proposiciones relacionadas, entre otras cosas, con la sección aurea demuestra que:

AI es la arista del tetraedro
BI es la arista del cubo
BE es la arista del octaedro
FB es la arista del icosaedro
JB es la arista del dodecaedro

Resultando, de esta forma, las siguientes relaciones:

Poliedro	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Icosaedro	Dodecaedro
Arista	$\frac{2}{3}R\sqrt{6}$	$R\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}R\sqrt{3}$	$\frac{R}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$	$\frac{R}{3}(\sqrt{15}-\sqrt{3})$

A diferencia de los polígonos regulares que se pueden formar con el número de aristas que se desee, los poliedros regulares son finitos.

Así, Euclides estudia las clases de polígonos que pueden formar las caras de los poliedros regulares, ante la restricción de que la suma de los ángulos planos de los polígonos que concurren en un ángulo sólido del vértice debe ser menor que cuatro ángulos rectos, es decir, menor de 360°. Pues inspirándose en los mosaicos griegos, cae en la cuenta de que de sumar 360° los polígonos llenan el plano y es imposible crear un cuerpo convexo con volumen.

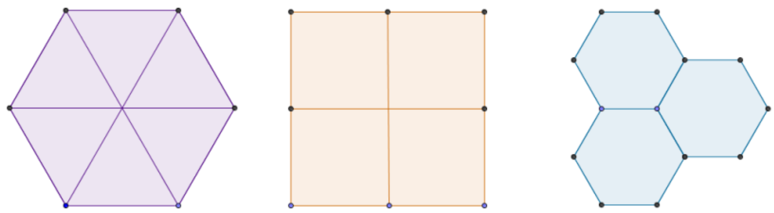


Figura 7: Emulación de mosaicos

De esta forma, Euclides demuestra que no se puede construir ninguna otra figura, además de estas cinco, con polígonos regulares.

La demostración que hizo Euclides es muy sencilla, y podemos desarrollarla sin dificultad:

Si tenemos un poliedro regular con m polígonos regulares de n lados que confluyen en cada vértice, entonces la suma (m sumandos) de los ángulos ($\frac{(n-2)180°}{n}$) que determinan las aristas es menor que 360°. Es decir, $\frac{m(n-2)180°}{n} < 360°$ entonces $\frac{m(n-2)}{n} < 2$

Entonces:

Si m= 3 ⇒ $\frac{3(n-2)}{n} < 2$ ⇒ 3n – 6 < 2n ⇒ n < 6. Luego se puede formar un poliedro regular con n=3 (Tetraedro), n=4 (Cubo) y n= 5 (Dodecaedro)

Es decir, un poliedro que en cada uno de sus vértices confluyan tres caras, siendo éstas triángulos equiláteros, cuadrados o pentágonos regulares. Hemos encontrado los casos del tetraedro, el hexaedro y el dodecaedro.

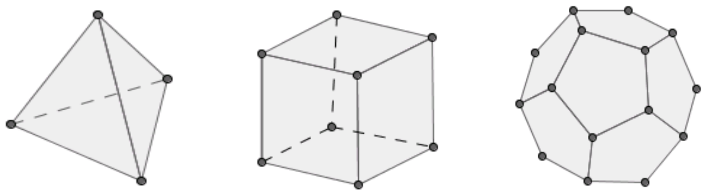


Figura 8: Tetraedro, cubo y dodecaedro dibujados con Geogebra

Si m= 4 ⇒ $\frac{4(n-2)}{n} < 2$ ⇒ 4n – 8 < 2n ⇒ 2n < 8 ⇒ n < 4. Luego se puede formar un único poliedro con n=3 (Octaedro)

Es decir, un poliedro que en cada uno de sus vértices confluyan cuatro caras con tres aristas cada una, es decir triángulos equiláteros. Hemos encontrado el caso del octaedro.

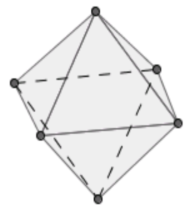


Figura 9: Octaedro dibujados con Geogebra

Si m= 5 ⇒ $\frac{5(n-2)}{n} < 2$ ⇒ 5n – 10 < 2n ⇒ 3n < 10 ⇒ n <$\frac{10}{3}$. Luego se puede formar un único poliedro con n=3 (Icosaedro)

Es decir, un poliedro que en cada uno de sus vértices confluyan cinco caras, las cuales están delimitadas por tres aristas, es decir triángulos equiláteros. Hemos encontrado el caso del icosaedro.

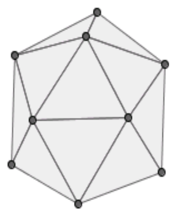


Figura 10: Icosaedro dibujado con Geogebra

Si m= 6 ⇒ $\frac{6(n-2)}{n} < 2$ ⇒ 6n – 12 < 2n ⇒ 4n < 12 ⇒ n < 3. Es imposible, pues n ≥ 3 para poder formar un polígono. Luego, no es posible que concurran en un vértice más de cinco caras, por lo que no pueden formarse más poliedros regulares que esos cinco.

2.1.4 *Sólidos Arquimedianos (o semi-regulares)*

Ha quedado demostrado que existen únicamente cinco poliedros regulares. Sin embargo, ¿qué ocurriría si permitiéramos que hubiera diferentes tipos de caras?

Se dice que un poliedro convexo es semiregular si sus caras son polígonos regulares de dos o más tipos. A estos sólidos se les llama sólidos Arquimedianos debido a que a que el matemático alejandrino Pappus en el siglo IV d.C. afirmara que habían sido descubiertos por Arquímedes. (Martín Casalderrey, 2000)

Arquímedes vivió en Siracusa en el siglo III a.C. Es común conocerlo por correr sin ropa por las calles de la ciudad gritando "Eureka" tras descubrir en los baños su teoría de los cuerpos sumergidos en un fluido o por su frase "*dadme un punto de apoyo y moveré el mundo*". (Argüelles Rodríguez, 1989).

Al margen de las anécdotas de sus descubrimientos, es considerado el más grande de los matemáticos griegos y un gran geómetra (Colerus, 1972) y en este trabajo vamos a destacar su labor por el estudio de estos cuerpos semi-regulares.

Los sólidos Arquimedianos se obtienen por truncamiento de los sólidos Platónicos, es decir, cortándoles las esquinas a los poliedros. Este corte se puede llevar a cabo de dos formas: dividiendo las aristas en tres partes y cortando por las divisiones o cortándolas por la mitad. Con este último proceso solo obtenemos dos nuevos sólidos el cuboctaedro y el icosidodecaedro. Estos nombres provienen de realizar este proceso de truncamiento tanto en el cubo como en el octaedro que obtenemos el mismo poliedro. (Esto está relacionado con la dualidad entre los sólidos platónicos). Puede repetirse el procedimiento con los nuevos sólidos truncados obtenidos, consiguiendo así otros cuerpos semiregulares diferentes. Son trece cuerpos los que se obtienen, con caras polígonos regulares de dos o tres tipos diferentes las que concurren en un vértice. (González Urbaneja, 2001)

A continuación se muestra un esquema de los trece sólidos semi regulares:

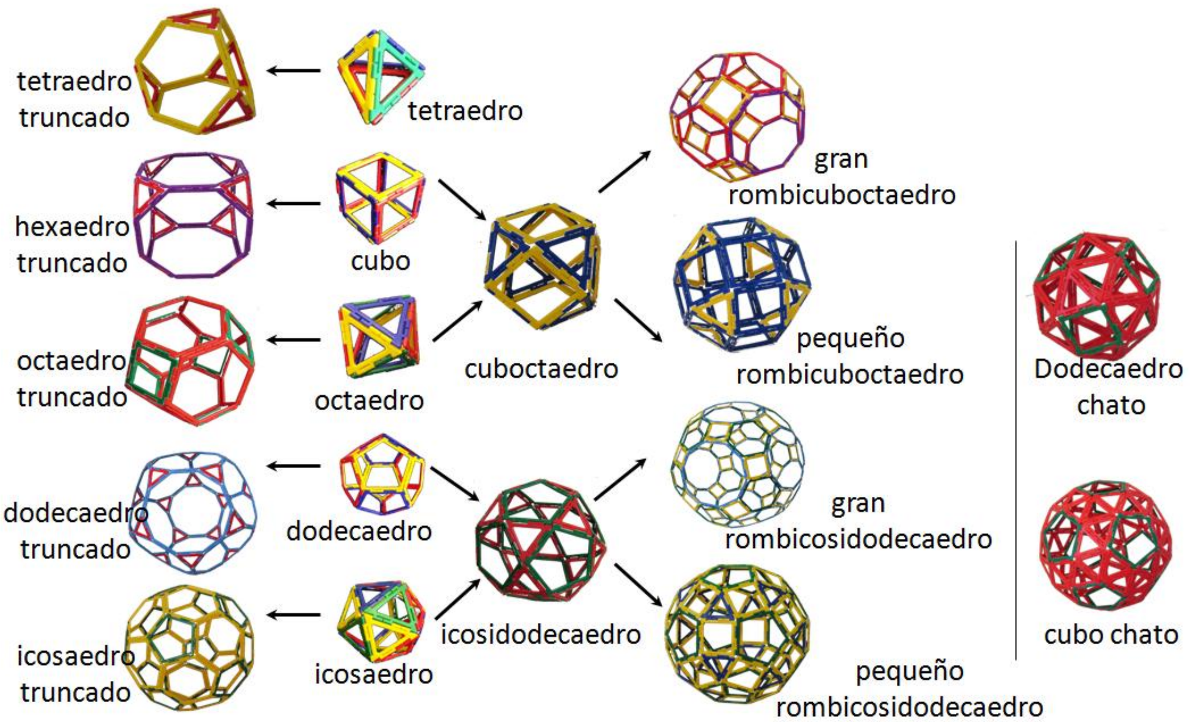


Figura 11: Los trece sólidos arquimedianos y su procedencia.
(Fuente: Imagen cedida por Mari Luz García Escamilla)

2.2 El Renacimiento

2.2.1 *Piero della Francesca.*

Piero della Francesca fue un pintor italiano del siglo XV que fue conocido como un gran geómetra y matemático. En su obra *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus* realiza un estudio más completo de los poliedros regulares y los sólidos arquimedianos. En él, demuestra ser un experto en relacionar los diversos poliedros ya que logró obtener unos a partir de otros y los inscribió sucesivamente. De esta forma, encontró una diferencia notable entre los polígonos regulares y los poliedros regulares: *"mientras que en el plano, el triángulo, el cuadrado y el pentágono, por ejemplo, son geométrica y algebraicamente* *independientes unos de otros, los cinco poliedros regulares guardan entre sí íntimas relaciones estructurales."* (González Urbaneja, 2001)

2.2.2 *Luca Pacioli*

Luca Pacioli fue un matemático italiano precursor del cálculo de probabilidades. En su obra titulada La Divina Proporción, realiza un estudio exhaustivo de los sólidos platónicos y arquimedianos. Lleva a cabo este trabajo inspirándose en las ideas platónicas y euclídeas, en la obra de Vitrubio y en los trabajos de Piero della Francesca. Además, le encarga a Leonardo Da Vinci que dibuje las imágenes para ilustrarlo. (González Urbaneja, 2001)

2.2.3 *Alberto Durero*

Alberto Durero fue un pintor y grabador alemán del siglo XVI que colaboró en el estudio de los poliedros regulares. Una gran parte del Libro IV de su obra está dedicada a los sólidos platónicos y arquimedianos, en él describe uno a uno los cinco poliedros regulares indicando el número de caras, aristas y vértices. Además, representó cada uno de sus desarrollos y las proyecciones ortogonales sobre el plano vertical y horizontal. (González Urbaneja, 2001)

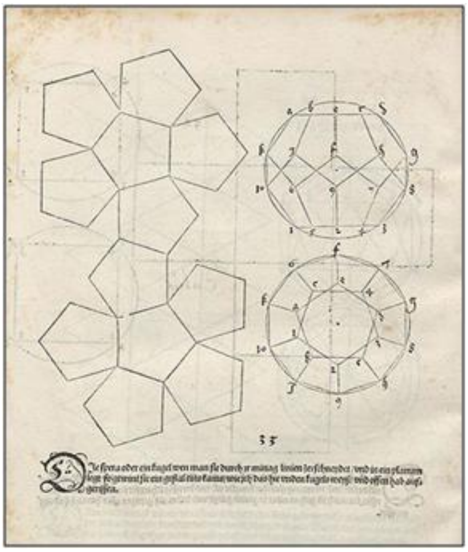


Figura 12: Desarrollo plano y proyecciones ortogonales del dodecaedro dibujadas por Durero (Fuente: http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/dodecahedronnet.html

Estos desarrollos que dibujó permiten reconstruir los cuerpos en tres dimensiones, plegando el papel por las aristas y pegándolo.

2.3 Siglos XVII y XVIII

2.3.1 *Kepler*

Johannes Kepler fue un astrónomo, matemático y físico alemán, uno de los creadores de la astronomía moderna. En este camino hacia la astronomía moderna también tuvieron su papel los sólidos platónicos y las ideas pitagóricas.

Aunque anteriormente no se ha comentado, los pitagóricos consideraban que las relaciones en la música, los poliedros, los polígonos y los números enteros son muestras del orden universal. Así, Pitágoras utilizó el análisis musical para estudiar los movimientos de los astros, naciendo con ello La música de las esferas. (Díaz Caballero & Canino Ramos, 2012)

Con esta idea unida a su interés en las propiedades de los sólidos platónicos, Kepler creyó haber encontrado un modelo cosmológico con el que dar una respuesta a las proporciones entre las órbitas de los diferentes planetas. Fue en 1596, cuando escribió un folleto bajo el título *Mysterium Cosmographicum* en el que publicó este modelo. En esta época se conocían únicamente seis planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno. El modelo que proponía era un modelo Copérnico, es decir, con el Sol en el centro alrededor del cual giraban los planetas. En él usaba las proporciones que surgían de inscribir y circunscribir unos poliedros regulares fuera y dentro de otros para modelar las órbitas que seguían los planetas. (Corbalán, 2010; Díaz Caballero & Canino Ramos, 2012)

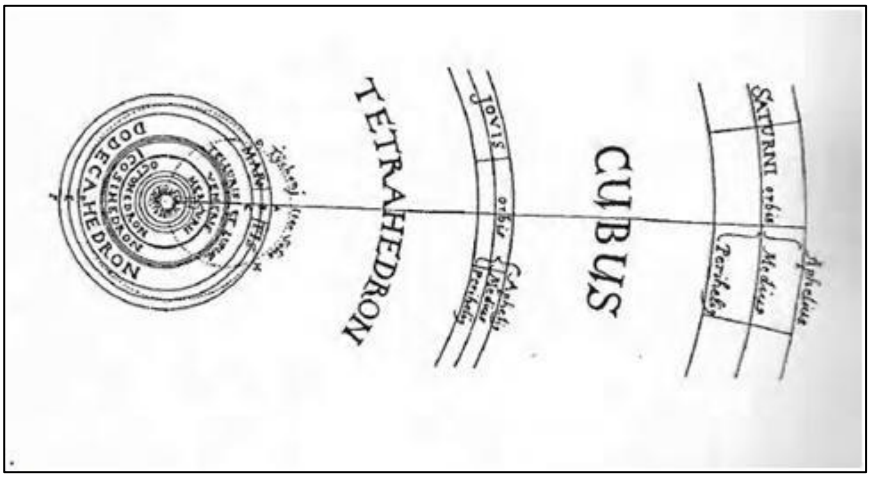


Figura 13: Órbitas en relación con los poliedros regulares
Fuente: Kepler's Geometrical Cosmology de J.V. Field

Resultaba que las dimensiones de las órbitas planetarias eran tales que si se circunscribía un cubo en la superficie de la órbita de Saturno, la esfera inscrita a ese cubo coincidía con la superficie externa de la órbita de Júpiter. Si se inscribía un tetraedro en esa esfera, la esfera inscrita al tetraedro correspondería con la órbita de Marte. Si, después, se inscribiera un dodecaedro en dicha esfera, la esfera inscrita en el interior del dodecaedro correspondería con la órbita de La Tierra. Si se inscribiera un icosaedro a esta esfera, la esfera inscrita a éste sería la órbita de Venus. Si, por último, se inscribiera un octaedro a la esfera de la órbita de Venus, y se inscribiera una esfera en él, ésta correspondería con la órbita de Mercurio. (Flield, 1988)

Para la representación del modelo se inspiró en las representaciones que había hecho Leonardo Da Vinci para La Divina Proporción de Pacioli. (González Urbaneja, 2003)

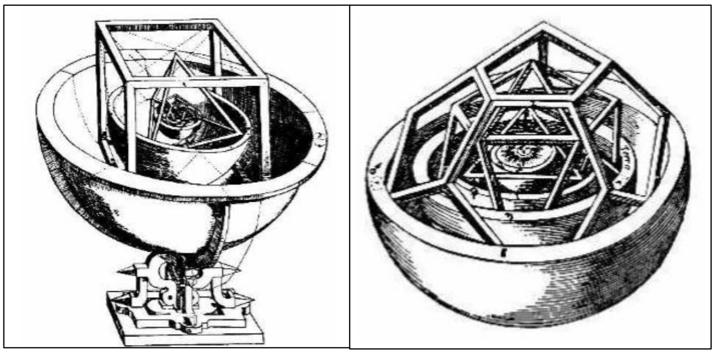


Figura 14: Modelo cosmológico de Kepler (grabado de la obra Misterium Cosmographicum, 1596)
Fuente: http://www.epsilones.com/paginas/historias/historias-013-matematicamisticismo.html

A pesar de que este modelo encajaba con las observaciones y cálculos de la época,salvo por pequeños errores, posteriormente, el mismo Kepler tuvo que reconocer que no coincidía con la realidad.

2.3.2 *La fórmula de Euler*

Al escuchar *fórmula de Euler*, a muchos les vendrá a la cabeza aquella que une 0, 1, π y *e* en una sola expresión: $e^{\pi i} + 1 = 0$, considerada la más bella del mundo. Sin embargo, la fórmula de Euler que aquí se destaca es la que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo, en general, y homeomorfo a la esfera, en concreto. Ésta dice lo siguiente: Sea V es el número de vértices del poliedro, A el número de aristas y C el número de caras de éste, entonces se satisface que V –A + C =2 (Devlin, 2002; Richeson, 2008)

A pesar de atribuirse su hallazgo a René Descartes (1956-1650), éste no fue capaz de dar una demostración, y esta fórmula, aplicada a los poliedros, es más conocida como la fórmula de Euler. (Devlin, 2002)

La prueba que realizó Euler no era del todo rigurosa. Utilizó el método de la disección para reducir poliedros complicados, con numerosos vértices, a otros más simples. Extrayendo vértices, de uno en uno, hasta dejar únicamente cuatro, obteniendo una pirámide triangular. Vigilando la relación entre vértices, caras y aristas en cada una de las fases y usando las propiedades ya conocidas de la pirámide fue capaz de concluir que C – A + V = 2. (Richeson, 2008).

Richeson (2008) reproduce la demostración que llevó a cabo Euler para demostrar su fórmula. A continuación se muestra paso a paso cómo lo hizo:

Sea un poliedro con V vértices, C caras y A aristas.

Si eliminamos uno de los vértices del poliedro, ¿qué ocurre con las caras y las aristas?
Los vértices se eliminarán quitando pirámides al poliedro.

Supongamos que m es el número de poliedros regulares que confluyen en el vértice que hemos extraído y llamemos O a dicho vértice.

Euler vio que para quitar O se necesitaban quitar m-2 pirámides triangulares que se formaban en dicho vértice.

Por ejemplo, en el poliedro que se muestra en la figura, el vértice está formado por cinco caras, y se extrae cortando tres pirámides.

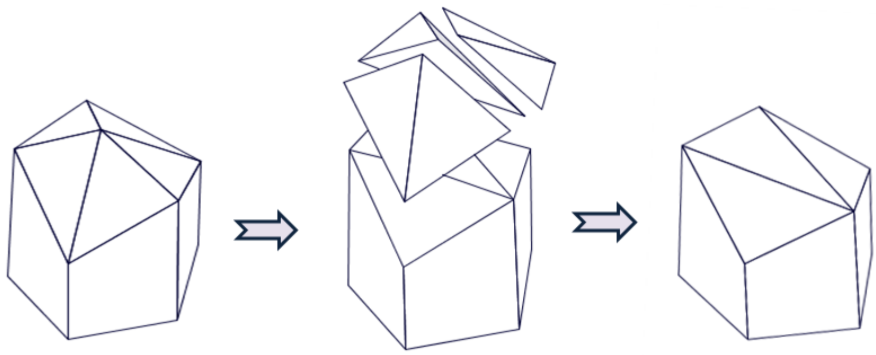


Figura 15: Extracción del vértice con caras triangulares

Sin embargo, si la cara no es triangular, al eliminar el vértice se añade una nueva cara y una nueva arista, como se pude ver a continuación.

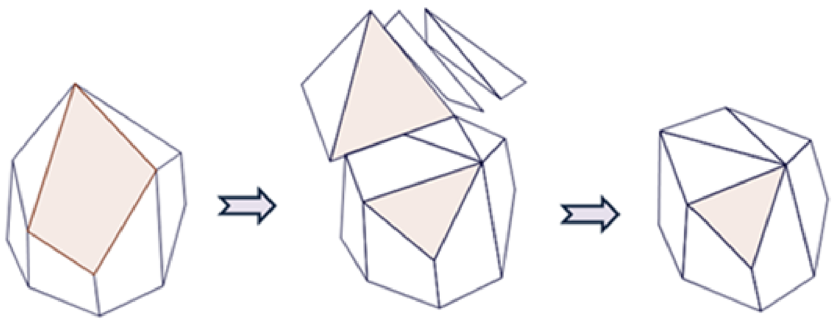


Figura 16: Extracción del vértice con cara no triangular

Por ello, se deberán mirar por separado los tres casos especiales.

En el caso más sencillo, en el que todas las caras que concluyen son triangulares, si se quitara el vértice O, se estarían extrayendo m caras y como se cortan m-2 pirámides, tendríamos m-2 caras triangulares nuevas, que caerían en planos diferentes. Por lo tanto, tendríamos:
C – m + (m-2) = C – 2 siendo C, el número de caras que teníamos originalmente.

Al tiempo que se extrajeron estos elementos, se eliminaron también las m aristas que se unían en el vértice. Sin embargo, al añadir las m-3 nuevas aristas que están entre los m-2 triángulos nuevos, el número de aristas queda: A – m + (m-3) = A – 3, con A número de aristas al principio.

Se han asumido dos cosas al principio. La primera, que todas las caras que llegaban al vértice eran triangulares; la segunda, que las caras nuevas no eran coplanarias.

Si una de las caras que confluyen en O no es triangular, entonces la cara no desaparece por completo al eliminar el vértice. Además, se añade una nueva arista al poliedro. Entonces, el número de caras y aristas del poliedro ha aumentado con respecto al principio. Luego, si el poliedro constaba de t caras no-triangulares que confluían en O, entonces el número de caras y el número de aristas habrán aumentado t unidades cada uno. De esta forma, el número de caras del nuevo poliedro será $(C - 2 + t)$ y el número de aristas, $(A - 3 + t)$.

Por otra parte, si dos de las nuevas caras triangulares son adyacentes y caen en el mismo plano, darán como resultado un cuadrilátero en lugar de dos caras triangulares. Entonces habrá una cara menos de lo que se habría pensado y una arista menos, pues no habrá arista entre las dos caras.

Si esto ocurriese k veces, tendríamos k aristas y k caras menos. Luego, el poliedro resultante contará con $(C - 2 + t - k)$ caras y $(A - 3 + t - k)$ aristas.

Estos resultados parecen bastante liosos, teniendo en cuenta que se obtienen al eliminar un simple vértice. Afortunadamente, Euler hizo una observación que facilita bastante esta situación. Si se restan las dos expresiones: $(A - 3 + t - k) - (C - 2 + t - k) = A - C - 1$
Es decir, la diferencia entre el número de aristas y el número de caras es exactamente uno menos de los que teníamos al principio. Por lo que tras quitar n vértices, la diferencia entre aristas y caras será $A - C - n$.

La idea era llegar hasta la pirámide triangular de 4 vértices, pues no existe un poliedro menor. Luego, se supondrá que $V - n = 4$, es decir, $n = V - 4$.

Para la pirámide triangular, la diferencia entre el número de aristas y de caras es $6 - 4 = 2$, pero se ha visto que también es $A - C - n$. Por lo tanto, $A - C - n = 2$ y $n = V - 4$.

Por último, sustituyendo n, $A - C - (V - 4) = 2 \Rightarrow A - C - V + 4 = 2 \Rightarrow V - A + C = 2$.

Como se mencionó, no es muy riguroso pues, a pesar de tener mucho cuidado con contar adecuadamente las caras y aristas al eliminar el vértice, Euler no determinó la forma en que se contarían las pirámides y estos cortes podrían dar lugar a poliedros no convexos.

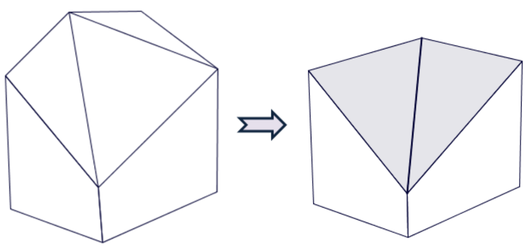


Figura 17: Corte de pirámides que dan lugar a un poliedro convexo

Como se señaló al comienzo, esta relación no es exclusiva de los poliedros regulares, sin embargo, también es aplicable a éstos y útil para demostrar aspectos relacionados con los sólidos platónicos. A partir de esta fórmula se puede demostrar por procedimientos elementales la proposición de Euclides de la existencia de únicamente cinco poliedros regulares. Es una demostración similar a la que se mostraba anteriormente, pero esta vez, valiéndonos de la fórmula de Euler para encontrar la condición.

Primero, démosle a cada poliedro la siguiente notación *(m, n)* donde m representa el número de polígonos que concurren en un vértice y n el número de aristas de cada cara poligonal.

Por ejemplo, nombraríamos al octaedro con (4,3) pues a cada cara llegan cuatro triángulos equiláteros.

En el caso de un poliedro regular, se verifica además que m · V = 2 · A = n · C (Coxeter, 1961) pues cada vértice comparte m caras, cada cara n vértices y cada arista es compartida por dos caras y dos vértices.

Entonces, podemos escribirlo como $\frac{V}{\frac{1}{m}} = \frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{C}{\frac{1}{n}}$

Por tanto, utilizando la característica de Euler y las propiedades de la proporcionalidad,

$$\frac{V}{\frac{1}{m}} = \frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{C}{\frac{1}{n}} = \frac{V-A+C}{\frac{1}{m}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} = \frac{2}{\frac{2n-mn+2m}{2mn}} = \frac{4mn}{2n-mn+2m}$$

Como m y n son positivos y también A, V y C, imprescindiblemente (2n – mn + 2m) > 0, ó escrito de otra forma (m-2)·(n-2) < 4.

Si m= 3 entonces n-2 < 4 ⇒ n < 6. Es decir n ϵ {3, 4, 5}
Entonces, tendremos los casos (3,3) el tetraedro, (3, 4) el cubo y (3,5) el dodecaedro

Si m=4, entonces 2(n-2) < 4 ⇒ 2n – 4 < 4 ⇒ 2n < 8 ⇒ n< 4
Entonces, tendremos un único caso (4, 3) el caso del octaedro.

Si m=5, entonces 3(n-2) < 4 ⇒ 3n – 6 < 4 ⇒ 3n < 10 ⇒ n< $\frac{10}{3}$
Entonces, la única opción es (5,3) el caso del icosaedro.

Para cualquier otro valor de m>5, comprobamos que (6-2)(n-2)<4 ⇒ 4n – 8 < 4 ⇒ 4n < 12 ⇒ n< 3, pero n ≥ 3 pues de lo contrario, no habría polígono con el que formar la cara del poliedro.

Por lo tanto, se ha demostrado que no pueden existir más que los cinco poliedros regulares ya nombrados.

2.4 Siglo XX y XXI

Durante este siglo, al igual que durante el renacimiento, los sólidos platónicos tienen un papel notable en el arte y la arquitectura.

2.4.1 *Gaudí*

Antonio Gaudí (1852-1926) fue un arquitecto español, reconocido internacionalmente como uno de los arquitectos más grandes de su época. Entre sus obras destaca La Sagrada Familia de Barcelona. En ella se puede apreciar la presencia de los sólidos platónicos, formando parte de su estructura a la vez que tienen un papel decorativo, tanto en el exterior como en la decoración interior.

Figura 18: Lámpara dodecaédrica y aguja en la Sagrada Familia
Fuente: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&id=3386%3Alos-sos-platos-historia-de-los-poliedros-regulares&directory=67&showall=1

2.4.2 *Dalí*

Salvador Dalí fue un pintor surrealista español del siglo XX con un estilo personal inconfundible. Para él, al igual que para otros muchos artistas, la Geometría ha servido de inspiración y guía para sus obras. Concretamente, la Divina Proporción y los poliedros regulares, los cuales, además de su aportación estética, adquiere también una connotación científica, teológica y simbólica. (González Urbaneja, 2001).

Figura 19: El Sacramento de la Eucaristía en la Última Cena de Dalí (1955)
Fuente: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&id=3386%3Alos-sos-platos-historia-de-los-poliedros-regulares&directory=67&showall=1

Incorpora en muchas de sus obras estos cuerpos geométricos, haciendo referencia a la simbología griega. Por ejemplo, en *El Sacramento de la Eucaristía en la Última Cena*, cuadro que pintó en 1955, presenta un dodecaedro, el símbolo del universo.

2.4.3 *Escher*

Maurits C. Escher es un artista contemporáneo que nació en Leeuwarden (Holanda) en 1898 que estudió en la Escuela de Arquitectura y Diseño Ornamental de Haarlem. A pesar de ser artista el mismo afirma: “con frecuencia me siento más próximo a los matemáticos que a mis colegas los artistas”. A pesar de haber un carácter surrealista en sus obras, no denota esa fantasía que se verá en las obras de Salvador Dalí. (Gardner, 1981)

Escher también toma los sólidos platónicos como parte principal de muchas de sus pinturas.

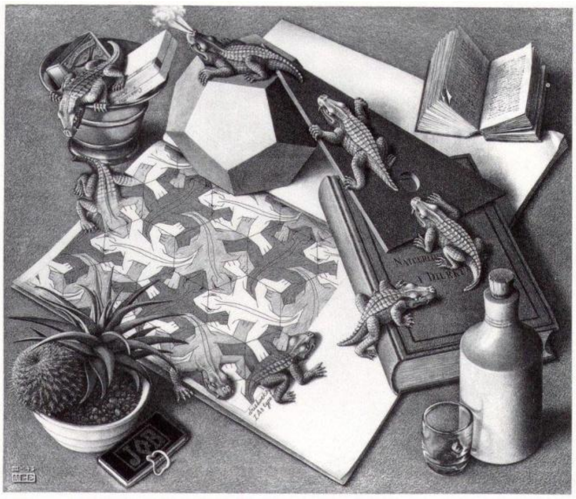


Figura 20: Reptiles de Escher (1943)
Fuente: http://www.escapeintolife.com/essays/the-strange-worlds-of-m-c-escher/

En su litografía *Reptiles* se representan conexiones entre el plano y el espacio. Podemos ver como un cocodrilo sale del embaldosado del plano para vivir una pequeña aventura en el mundo tridimensional que acaba en la cima de un dodecaedro.

2.4.4 *En el día a día*

Son muchas las aplicaciones que tienen los sólidos platónicos y al mirar alrededor se puede ver que están presentes en la vida cotidiana.

Por ejemplo, en la cocina, el tetrabrik que actualmente tiene forma de ortoedro, toma su nombre del tetraedro. Esto se debe a que en su origen tenía esa forma, pues era una forma sencilla y barata de fabricar. Sin embargo, la forma de tetraedro, convertía el almacenar de estos envases en algo demasiado complicado y se perdía una gran cantidad de espacio. Por ello, se cambió a la forma actual de los envases tetrabrik, aunque mantuvieron su nombre original. Los tetrabrik con forma de tetraedro aun se siguen usando en muchos países del Tercer Mundo. (Corbalán, 2010)

Los sólidos platónicos también están presentes en muchos otros ámbitos, algunos de ellos lúdicos. Por ejemplo, se utilizan como dados en juegos de Roll, o en los cubos de Rubik que toman su forma de estos poliedros regulares. A parte del clásico Cubo de Rubik en forma de hexaedro, en los últimos años se han puesto a la venta el tetraedro de Rubik y el dodecaedro de Rubik.

Además, hay un sólido que aunque no sea platónico sino arquimediano, es muy popular hoy en día, el balón de fútbol. Éste tiene la forma de un icosaedro truncado, debido a que se asemeja bastante a la esfera.

Estos son sólo algunos ejemplos, pero si se presta atención, se pueden encontrar muchos otros ámbitos en los que los sólidos platónicos toman parte.

3. ACTUALIDAD

3.1 En el aula

El estudio de los poliedros en la educación secundaria, comienza en primero de la ESO conociendo sus nombres y el número de caras, vértices y aristas que poseen, así como, la noción de regularidad. Pero no es hasta segundo y tercero de ESO cuando se hace un estudio un poco más profundo, donde se introduce también el concepto de volumen, simetría y ejes de giros de los poliedros.

Las clases de geometría, desde primero hasta tercer curso de la ESO, en general, repiten la misma metodología: resolver ejercicios sobre papel en los que calcular alguna dimensión el área o el volumen de algún cuerpo.

Los alumnos acaban tomando como resumen de las lecciones que deben aprenderse las fórmulas para el cálculo de áreas en figuras planas y las correspondientes a las áreas y volúmenes de poliedros y cuerpos de revolución. Pero, ¿Por qué reducir la geometría a un cálculo, muchas veces inconsciente, sin el más mínimo razonamiento?

3.1.1 *Las dificultades*

En la mayoría de los casos, como se ha podido comprobar en el periodo de prácticas, las clases se desarrollan mediante una explicación sobre la pizarra seguida de una batería de ejercicios y actividades para que los alumnos lleven a cabo. Si los alumnos tienen suerte, estas actividades se complementan con alguna sesión de ordenadores.

El hecho de que la mayoría de profesores utilicen el libro de texto como herramienta principal puede convertirse en un factor negativo para la clase ya que los ejercicios propuestos en ellos suelen ser algo monótonos y repetitivos. Estas tareas pueden causar la desmotivación y falta de interés de los alumnos. Por lo que, en ciertos casos, puede ser más recomendable buscar actividades alternativas que ayuden a la comprensión y el aprendizaje de los alumnos.

Con esto, no quiero decir que la responsabilidad de esta metodología sea responsabilidad de los docentes. Existen múltiples factores que dificultan la acción de los profesores y que afectan negativamente al desarrollo de la enseñanza y el aprendizaje:

- El interés de la sociedad por los resultados, mejor dicho, por las calificaciones, en lugar de sopesar lo aprendido.
- El incremento del número de alumnos en las aulas, que dificulta una atención más personalizada.
- La presión a la que están sometidos los docentes por terminar a tiempo la programación oficial planificada desde el comienzo de curso.
- La actitud y desinterés por parte de los estudiantes hacia aquello que no es estrictamente necesario para aprobar o que no entra en el examen.
- La mentalidad y el miedo a equivocarse de los alumnos, que prefieren esperar la respuesta del profesor o de sus compañeros en lugar de arriesgarse a buscar una que puede resultar errónea.

Otro aspecto que puede resultar negativo de los libros de texto es que éstos organizan como unidades diferentes la geometría del espacio y la plana; con lo que obtenemos como resultado que nuestros estudiantes no relacionen la geometría en tres dimensiones con el plano. Es importante conseguir que esto no ocurra y que, entre otras cosas, sean capaces de visualizar cuerpos en tres dimensiones desde su representación en el plano.

No basta con contar y escribir lo que los profesores sabemos en la pizarra. Es importante que los estudiantes observen, construyan, examinen y practiquen. En ocasiones, debemos dejar a un lado el uso de la pizarra, al menos, en las situaciones en las que lo que queremos mostrar forma parte del mundo real. ¿Qué quiero decir con ello? Pues que si estamos trabajando los cuerpos geométricos y estamos explicando los prismas, carece de sentido limitarnos a dibujar un prisma en la pizarra cuando podemos mostrar a los alumnos una caja, por ejemplo, de galletas o de zapatos.

3.2 En la LOE

En el momento del desarrollo de esta propuesta está vigente la Ley Orgánica de Educación (LOE), sin embargo, en el curso siguiente 2014/2015 entrará en vigor la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), que significará ciertos cambios en los objetivos y contenidos que a continuación se recogen.

En el Real Decreto 1631/2006 por el que se establecen las enseñanzas mínimas en la Educación Secundaria Obligatoria aparece el siguiente párrafo:

"La Geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la Geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con

otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención”

(BOE 29/12/2006 p. 751)

Posteriormente, continúa:

“La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico. Especial interés presentan los programas de geometría dinámica al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarla”

(BOE 29/12/2006 p. 751)

Ambos aspectos serán puntos claves esta propuesta.

Para desarrollar este proyecto, debemos tener en cuenta los objetivos y los contenidos mínimos que nos marca la ley y que queremos cubrir y, en función de ellos, planificar nuestras actividades y metodología para hacerlo de la manera más adecuada.

3.2.1 *Objetivos generales*

Entre los objetivos generales del área de Matemáticas encontramos:

“Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.”

“Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.”

“Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.”

“Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.”

“Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.”

(BOE 29/12/2006 p. 752)

3.2.2 *Contenidos del bloque de Geometría de 1º ESO*

Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico.

Medida y cálculo de ángulos en figuras planas.

Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.

(BOE 29/12/2006 p. 752)

3.2.3 *Contenidos del bloque de Geometría de 2º ESO*

Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza.

Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.

Desarrollos planos y elementos característicos. Clasificación atendiendo a distintos criterios. Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.

Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.

Utilización de procedimientos tales como la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento, deformación o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.

(BOE 29/12/2006 p. 752)

3.2.1 *Contenidos del bloque de Geometría de 3º ESO*

Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.

Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.

Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas.

Planos de simetría en los poliedros.

Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.

Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

(BOE 29/12/2006 p. 752)

4. PROPUESTA EN EL IES ROSA CHACEL DE COLMENAR VIEJO

4.1 Contextualización

Se asignó el centro IES Rosa Chacel de Colmenar Viejo para realizar las prácticas. Éste es un centro de enseñanza público creado en 1992. En él se pueden cursar los diferentes niveles de ESO y de Bachillerato, en las modalidades de Humanidades y Ciencias Sociales, Ciencias de la Naturaleza y la Salud y bachillerato Tecnológico, así como Bachillerato Internacional y un Programa de Cualificación Profesional Inicial (PCPI) de "Auxiliar de montaje y mantenimiento de equipos informáticos".

El centro cuenta con el programa de Instituto Tecnológico para la ESO, por el cual un mínimo del 30% de las horas lectivas de ciertas asignaturas, entre ellas matemáticas, han de darse en un aula tecnológica y utilizando las TIC. El IES Rosa Chacel cuenta con aulas tecnológicas que constan de redes de ordenadores con acceso a internet. Así, los horarios de los alumnos están organizados de forma que alternan el aula tradicional y el aula tecnológica para cada dos grupos. Tanto las aulas tecnológicas como en las tradicionales cuentan con una pizarra digital a excepción de aula de música, la cual está equipada con una pizarra y un proyector.

Allí se podían escuchar diferentes opiniones sobre la utilidad del uso de los ordenadores en tan alto porcentaje de clases. Algunos estaban a favor de su uso y de la gran ventaja que ofrecían a las clases, mientras que otros opinaban que era un obstáculo para el desarrollo de la programación y, en ocasiones, que resultaba más un impedimento que una ayuda.

En concreto, en el caso del departamento de matemáticas, aproximadamente la mitad del departamento apreciaba y estaba a favor de su uso. De hecho esta parte, utilizaba las TIC en casi todas las clases que impartían.

Casi el mismo número de personas, opinaban totalmente lo contrario, que la obligación del uso de los ordenadores era un aspecto negativo para ellos. Muchos de ellos explicaban que se debía a que no habían recibido una formación adecuada para esto. Si bien habían asistido a un pequeño cursillo sobre pizarra digital al comienzo de curso, no era suficiente como para desenvolverse e incluir en sus clases otros recursos o aplicaciones digitales.

Entonces, ¿cómo afecta el programa de instituto tecnológico a la especialidad de matemáticas?

En la siguiente matriz DAFO se exponen los aspectos más relevantes que se han podido observar en el periodo de prácticas y que influyen de manera positiva o negativa en la enseñanza de las matemáticas o en el desarrollo de las clases de esta materia.

Debilidades	Amenazas
Falta de motivación y formación del profesorado en el uso de las TIC	Disposición a convertir el uso de ordenadores en un factor en contra
Falta de comunicación entre centros con un desarrollo similar	No todos los alumnos cuentan con internet y un ordenador en su domicilio
Rechazo de algunos docentes ante el uso de los ordenadores en el aula	Uso no del todo adecuado de los ordenadores, desvío de los objetivos principales o del currículo de educación
	Distracción de los alumnos
Fortalezas	**Oportunidades**
Inclusión de las TIC en la educación.	Puede colaborar en la mejora de la calidad educativa
La biblioteca está a disposición de los alumnos por la tarde por si necesitan acceder a los ordenadores.	Los alumnos que no pueden acceder a internet o a los ordenadores en su casa, tienen la oportunidad de familiarizarse con ellos en el aula
Disposición de un ordenador por alumno	Supone para los docentes una razón para renovarse y seguir formándose

Como se introdujo al inicio, el objetivo de esta propuesta es la búsqueda de una solución para lograr acercar las matemáticas a los estudiantes, logrando humanizar las matemáticas y convirtiéndolas en algo tangible para los alumnos.

La propuesta está compuesta por una serie de actividades pensadas para su aplicación en el uso de diferentes partes de la geometría y se pensó para ser enfocada a segundo o tercer curso de la ESO. Sin embargo, debido a las restricciones del centro de prácticas, algunas de las actividades se llevaron a cabo en el curso de primero de ESO que me había sido asignado. Por lo que fueron modificadas levemente, para poder realizarse también en primer curso de ESO.

4.1.1 *El grupo 1º AB de ESO*

En este centro, se realiza un desdoble por niveles para matemáticas en los cursos de primero de la ESO. Con los cuatro grupos que conforman primero, se dividen en tres niveles: alto, medio y bajo.

Uno de los grupos con el que se trabajará es 1º AB de ESO, el nivel más bajo de matemáticas. Es un grupo de dieciocho alumnos de los cuales la cuarta parte son repetidores.

Son once alumnas y siete alumnos, quizá un grupo homogéneo en el nivel académico, pero dispar en cuanto al país de procedencia: dos de los alumnos proceden de países árabes, seis de ellos de países sudamericanos, una de las alumnas es de etnia gitana y la mayoría de alumnos proceden de familias con un nivel socio-económico bajo.

Es un grupo con poco interés por lo académico, por lo que es difícil motivarlos para que participen en la clase o trabajen esta asignatura. Pierden el interés muy fácilmente y es necesario cambiar de actividad constantemente.

4.1.2 *El grupo 3º B de ESO*

El otro grupo con el que se pondrá en práctica parte de la propuesta es 3º de ESO B.

Este grupo está compuesto por unos veinte alumnos, cinco de ellos procedentes de países árabes y de América del Sur. Aproximadamente, la mitad son varones.

Se trata de un grupo bastante homogéneo en lo que se refiere a su nivel académico. Son participativos y se muestran interesados por las matemáticas.

No cuenta con ninguna adaptación curricular significativa.

4.2 Metodología

El modelo de aprendizaje pensado para esta propuesta es el aprendizaje cooperativo. En este tipo de aprendizaje los alumnos se organizan en grupos donde se fomenta la colaboración, la participación y el aprendizaje activo entre iguales.

A la hora de establecer los grupos de alumnos, se tendrá en cuenta las capacidades, actitudes y motivación de los alumnos para que éstos queden equilibrados y se cumplan nuestros objetivos de aprendizaje.

Se buscará la construcción de conocimiento a partir de los conocimientos previos de los alumnos, con una enseñanza modelada a través de sus compañeros, dejando al profesor el papel de guía.

Se desarrollarán actividades que favorezcan el aprendizaje significativo que, según Díaz Barriga Arcea y Hernández Rojas (2002), es aquél en el que el alumno relaciona la información nueva con la que ya posee, reajustando y reconstruyendo ambas informaciones en este proceso, y siguiendo el principio de aprendizaje activo:

> *"El principio de aprendizaje activo significa que el aprendizaje significativo sucede cuando los alumnos se implican en un proceso cognitivo adecuado durante el aprendizaje, tal como prestar atención a la información relevante, organizar la información relevante en una estructura coherente e integrar mentalmente las presentaciones entre sí y con el conocimiento previo"*
>
> (Mayer, 2010)

Todo aprendizaje significativo requiere que el alumno se interese y se implique en él. Por eso es esencial motivarles despertando su interés y curiosidad, con los recursos adecuados.

Este proyecto tiene como eje principal la manipulación de modelos y representaciones palpables de los cuerpos geométricos y la búsqueda de la motivación de los estudiantes usando como herramienta la historia de los sólidos platónicos.

Será un punto clave de la metodología a seguir motivar a los alumnos introduciendo aspectos históricos y lúdicos. Buscando el origen de lo estudiado y su uso en la vida actual, al mismo tiempo que se fomentan hábitos de trabajo y de orden.

Además, se tratará de despertar en los estudiantes el interés por descubrir cuerpos geométricos en la realidad de su entorno, de manipular y transformar cuerpos geométricos, de trabajar la visión espacial a partir de los desarrollos en el plano y aplicar en la vida real los conceptos trabajados.

4.3 Actividades

A continuación se proponen una serie de actividades que podrían ser beneficiosas y útiles para el aprendizaje de la geometría de los estudiantes.

Se ha pretendido que las actividades se ajusten a los siguientes requisitos para que sean lo más útiles posibles y permitan el aprendizaje constructivo del alumno:

- Que sean motivadoras para el alumno
- Que partan de la realidad que rodea al alumno
- Que respondan a las necesidades que queremos cubrir
- Que dejen espacio para la creatividad
- Que ofrezcan alternativas para el desarrollo de las competencias básicas

4.3.1 *Demostración con piezas Polydron de que existen solamente 5 poliedros regulares*

El que no pueda construirse otro poliedro regular que no sean los cinco nombrados anteriormente, no es algo tan intuitivo. No es ilógico que nuestros alumnos puedan pensar que, al igual que se puede construir un polígono con cualquier número de lados, ocurriese lo mismo con los poliedros. Sin embargo es una muy buena oportunidad para mostrarles que porque algo funcione en algún caso, no se puede generalizar.

La demostración que hemos mostrado antes, basada en la de Euclides, es sencilla, sin embargo, para los estudiantes puede no serlo tanto. Como alternativa o como un complemento a esa demostración podemos utilizar las piezas polydron (esas piezas con forma de polígonos regulares, que encajan unas en otras y pueden formarse cuerpos con volumen). Así como Euclides cayó en la cuenta mirando los mosaicos griegos, podemos guiar a nuestros alumnos a que descubran que casos son posibles y por qué, con estas piezas de plástico.

Objetivo: Mostrar de una forma visual la demostración de la existencia de solamente cinco poliedros regulares. Se busca además el refuerzo de la autonomía, de la autoestima, la integración de los alumnos y el trabajo en equipo.

Descripción de la actividad:
Puede plantearse esta actividad como una demostración que el profesor le enseña a sus alumnos; sin embargo, como la describo a continuación está pensada para que sea un reto para que los estudiantes lleguen a la conclusión trabajando en equipo.

Al comienzo de la sesión, se les relatará a los alumnos que Euclides encontró una demostración observando los mosaicos que formaban el suelo y se les retará a ver si ellos también la encuentran.

El análisis se realizará estudiando un vértice, no el poliedro completo. Por tanto para cada equipo se entregará, al menos, seis triángulos equiláteros, cuatro cuadrados, tres pentágonos regulares y tres hexágonos.

Guiados por preguntas intencionadas que hará el profesor se tratará de que los alumnos lleguen a la conclusión de que la suma de los ángulos del vértice ha de ser menor de 360°. Esto lo harán uniendo piezas y tratando de formar el vértice de un poliedro regular.

Preguntas como las siguientes ayudarán al avance de nuestros estudiantes en sus conclusiones:

- *¿Qué ocurre al hacer concurrir tres triángulos equiláteros en un mismo vértice?*
- *¿Y si tratamos de unir más?*

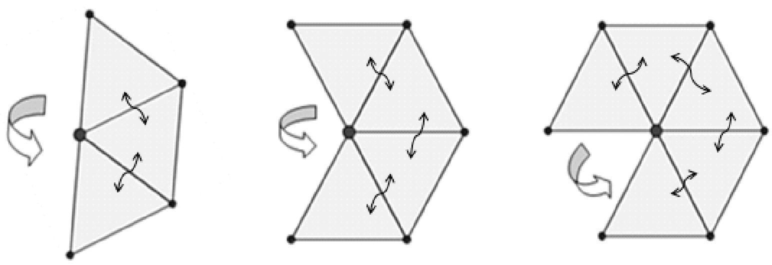


Figura 21: Emulación de cómo quedarían las piezas Polydron

- *En los tres primeros casos, para tres, cuatro y cinco triángulos equiláteros, pueden unirse formando un vértice de un cuerpo con volumen. Sin embargo, si juntamos seis triángulos ¿qué ocurre?*

Por último, los estudiantes deberán escribir en su cuaderno las conclusiones que hayan obtenido.

Duración: 1 sesión

Recursos materiales: Piezas Polydron, cuadernos, bolígrafos y lápices.

4.3.2 *Investigación hasta la demostración de la fórmula del volumen de la pirámide.*

(Basada en la idea de José María Arias)

Objetivo: Esta actividad tiene como objetivo la coordinación del uso de las TIC con la manipulación manual de materiales. Los alumnos usando Geogebra, dibujarán los desarrollos de un cubo y seis pirámides para demostrar de una forma visual la expresión para el cálculo del volumen de la pirámide.

Descripción de la actividad:
Esta actividad se llevará a cabo en el aula tecnológica o de ordenadores.

Primero, se deberá dibujar el desarrollo de un cubo, por ejemplo de arista 4 cm, en Geogebra. En principio, se dejará que los estudiantes decidan como construirlo, si por cuadrados situados unos detrás de otros o por segmentos paralelos o perpendiculares.

Conseguirán algo parecido a esto:

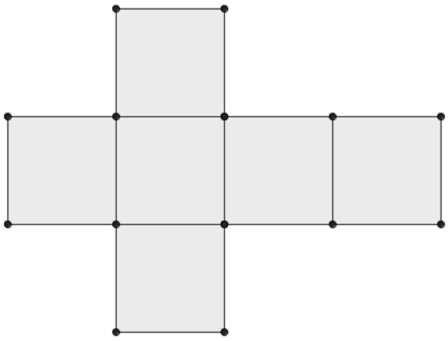


Figura 22: Desarrollo plano del cubo con Geogebra

Posteriormente, deberán pensar las medidas que deberán tener las pirámides que formarán el cubo. Para formar las pirámides se "cortará" el cubo por la mitad. Es decir:

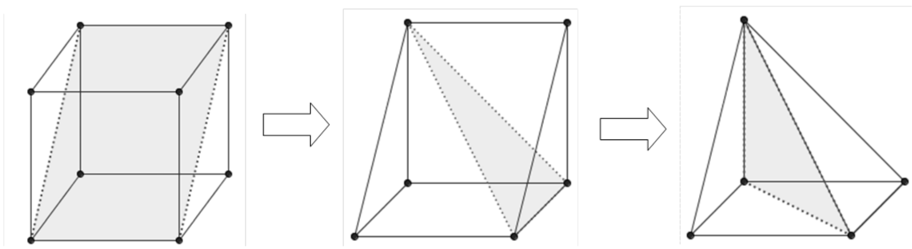


Figura 23: Cortes para hallar los tetraedros

Con este esquema los alumnos deberán calcular las medidas que habrá de tener el desarrollo que tendrán que construir con Geogebra. Tendrán que utilizar el Teorema de Pitágoras para un fin.

Una vez hayan calculado las medidas, procederán a hacer el desarrollo en Geogebra.

Deberán darse cuenta, o deberemos advertirles, de que obtenemos dos tipos de pirámides que son simétricas, por lo que deberán hacer dos desarrollos.

La base y una de las caras de las pirámides son la mitad de la del cubo, dividiendo a éste por la diagonal de su cara. Las otras dos caras están formadas por una arista de tamaño la del cubo y otras dos aristas de longitud la diagonal de la cara del cubo. Por lo tanto, habrán de dibujar algo similar a esto:

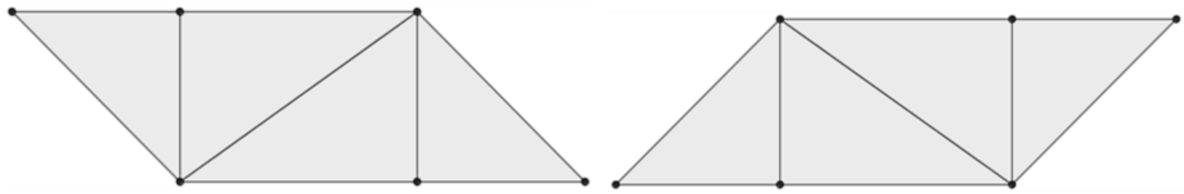


Figura 24: Desarrollo plano de las pirámides con Geogebra

Una vez dibujados los desarrollos los imprimirán en cartulina o en un folio para calcarlo después en cartulina.

Por último, deberán encontrar la relación del volumen del cubo con el volumen de dos de las pirámides, hallando así que el volumen de una pirámide de base y alturas las del cubo, es un tercio del volumen de éste.

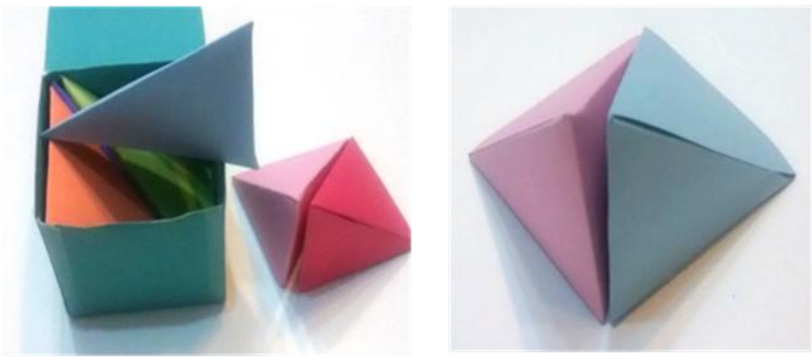


Figura 25: Construcción con cartulinas del cubo y los tetraedros

Duración: 2 sesiones (Puede llevarse a cabo en clase el cálculo de las dimensiones y el dibujo de los desarrollos en Geogebra y dejar a construcción y la reflexión sobre la demostración de la fórmula como tarea para casa)

Recursos materiales: Ordenadores, lápices, papel, cartulinas, escuadra, cartabón y regla, tijeras y pegamento o cello.

4.3.3 *Búsqueda del mejor balón de fútbol*

Objetivo: Se pretende que, motivados por la atracción que sientes los estudiantes por el fútbol, se conozcan y estudien los sólidos semi-regulares, con el objetivo de encontrar el mejor balón de fútbol para practicar este deporte.

Descripción de la actividad:

Esta actividad se llevará a cabo en el aula tradicional. Los alumnos serán organizados en grupos de dos o tres personas, dependiendo del número de alumnos que compongan la clase y sus características.

Nuestras condiciones para la construcción del balón son:

- Semejante a la esfera
- Las costuras que unan los trozos han de ser todas iguales

En resumen, aceptamos que esté formado por trozos regulares de cuero cosidos siempre de la misma forma. ¡Vamos a buscar un poliedro adecuado!

Lo primero que haremos para la búsqueda del balón de fútbol es descartar los sólidos platónicos pues, a pesar de cumplir las condiciones, tienen picos demasiado pronunciados y eso dificultaría el juego.

Nuestro siguiente objetivo será analizar los sólidos arquimedianos, lo nuevos candidatos para nuestro balón.

A cada equipo se le entregarán las piezas polydron adecuadas para la construcción del poliedro arquimediano que se les haya asignado.

Una vez hayan construido su poliedro, cada grupo, medirá la redondez de éste y apuntará sus características, es decir, el número de vértices y el número de caras que convergen en él, junto con el tipo de caras.

Para medir la redondez, se hará sumando los ángulos de los polígonos que llegan al vértice.

Por ejemplo, si estuviéramos trabajando con el tetraedro truncado:

Poliedro	Número de vértices	Configuración de cada vértice	Redondez
Tetraedro truncado	12	3-6-6	60 + 120+ 120= 300
…	…	…	…

Tendrán que compartir con sus compañeros la información que han recogido y entre todos se organizará en una tabla en la pizarra y que los alumnos deberán copiar en su cuaderno.

Tras analizar los resultados, vemos que los mejores candidatos a balón son:

Poliedro	Configuración de cada vértice	Redondez	Cercanía a la esfera	Imagen
Icosaedro Truncado	5-6-6	348	+	
Pequeño Rombicosidodecaedro	3-4-5-4	348	++	
Dodecaedro Chato	3-3-3-3-5	348	+++	

Llegamos a la conclusión, entonces, de que deberíamos elegir el dodecaedro chato como el mejor balón, pero los alumnos se habrán percatado de que el balón oficial tiene la forma de un icosaedro truncado. Esto es debido a que el icosaedro truncado tiene muchas menos costuras que cualquiera de los otros dos, y el coste de la fabricación también es importante. Por lo que a pesar de tener opciones que se asemejan más a la esfera, el icosaedro truncado es suficientemente cercano y además más económico.

Figura 26: Comparación icosaedro truncado con balón de fútbol

Duración: 2 sesiones

Recursos materiales: piezas polydron, pizarra o pizarra digital, cuaderno, lápices, bolígrafos.

4.3.4 *Deducción de la Fórmula de Euler a partir de modelos de papel construidos por los alumnos*

Objetivo: Con esta actividad se pretende que los alumnos investiguen los cinco sólidos platónicos. Construyan al menos dos de ellos (el octaedro y el cubo) y de la observación deduzcan la característica de Euler para los poliedros convexos, la cual manejarán después en algunos ejercicios. Se busca además el refuerzo de la autonomía, de la autoestima, la integración de los alumnos y el trabajo en equipo.

Descripción de la actividad:
Esta actividad se llevará a cabo en el aula tradicional. Los alumnos serán organizados por el profesor en grupos de 3 o 4 alumnos. A cada uno de los alumnos se entregarán seis cuadrados de colores para construir el octaedro, seis para el cubo y dos billetes de metro o tren usados para el tetraedro.

Primero, el profesor hará una pequeña introducción sobre los sólidos.
Contará que es un poliedro, que significa que sea regular y lo que significa que sea convexo. Como motivación para los alumnos introducirá algún hecho de la historia de estos sólidos, como su papel en la explicación de la naturaleza para los pitagóricos o en el modelo cosmológico de Kepler.

Después, se guiará a los alumnos en la construcción con papiroflexia modular del octaedro y el cubo.

Figura 27: Poliedros construidos mediante papiroflexia modular

A continuación, se muestran las instrucciones para hacerlo:

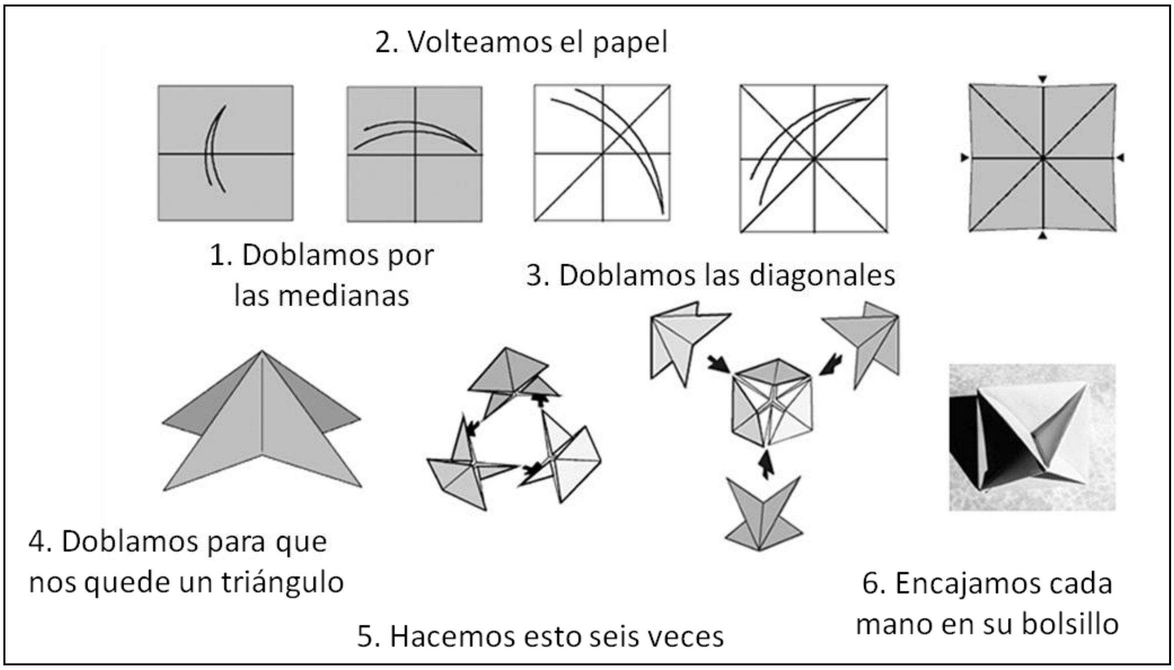


Figura 28: Instrucciones para construir un octaedro de papel (Simon, Armstein & Gurkewitz, 2012)

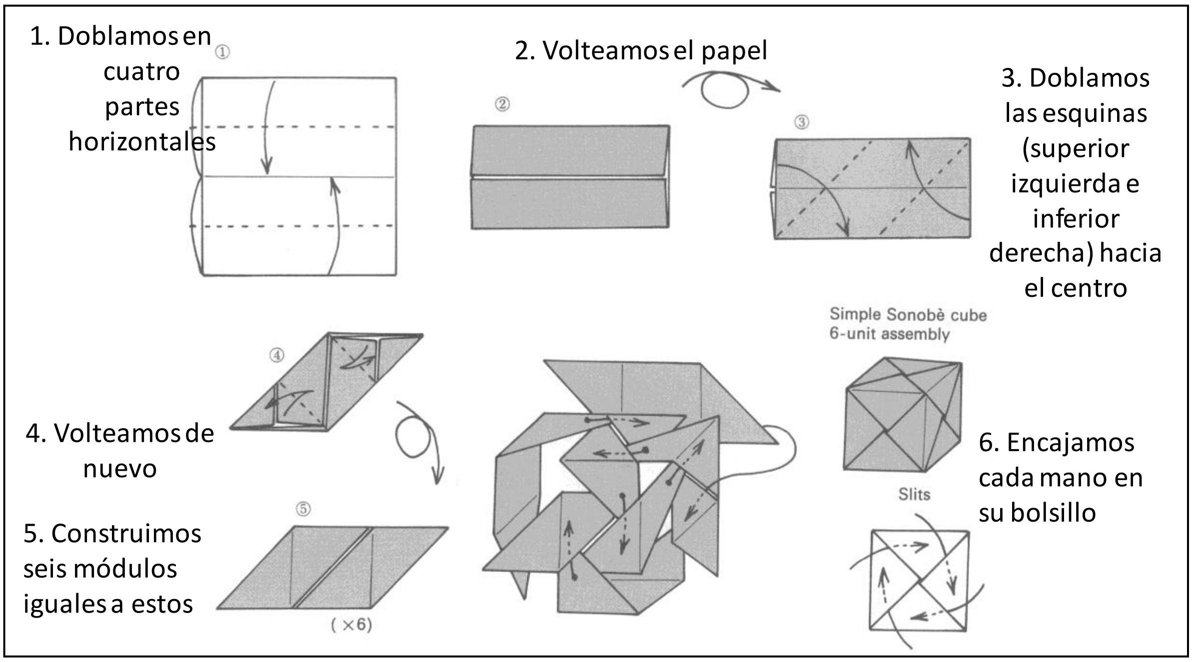


Figura 29: Instrucciones para la construcción de un cubo con papel (Simon et al, 2012)

Con la ayuda y colaboración de sus compañeros y, si fuera necesario, del profesor, cada alumno habrá construido un octaedro y un cubo con papiroflexia modular similares a los que se mostraban arriba.

Una vez construidos los cuerpos, los alumnos en grupo comenzarán la investigación: Recogerán en una tabla, en su cuaderno, el número de caras, vértices y aristas de los cuerpos que han construido. Añadirán a la tabla los datos de más poliedro, bien los de plástico que el profesor aportará a la clase o los que los alumnos recuerden o hayan estudiado, como pueden ser las pirámides o los ortoedros que encuentren por casa o a su alrededor.

La tabla, algo parecida a la que se muestra, facilitará la comparación y la obtención de conclusiones.

Poliedro	Vértices	Caras	Aristas	¿Relación?
Octaedro				
Cubo				
…				

Se les dejará un poco de tiempo para que encuentren la relación entre los vértices, las caras y las aristas. Finalmente, tendrá que escribir las conclusiones de la experiencia en el cuaderno.

Duración: 2 sesiones

Recursos materiales: cuadrados de papel de 10,5 x 10,5 cm, poliedros de plástico, cuadernos, pizarra digital o proyector, bolígrafos y lápices.

4.3.5 *Investigación en la historia de la fórmula de Euler*

Objetivo: Esta actividad tiene como objetivo que el alumno aprenda a buscar información, seleccionarla, sintetizarla y ordenarla. Potenciar la creatividad de los estudiantes y el uso de las TIC. Aumentar el interés del estudiante por ampliar sus conocimientos y la información que se le proporciona en clase.

Descripción de la actividad:
Esta actividad está enfocada como tarea en grupo para realizar en casa.

Los estudiantes trabajarán en grupos de tres o cuatro alumnos, a su elección, y deberán investigar la historia de la fórmula de Euler y la de los matemáticos que encuentren relacionados con ella.

Crearán una presentación de diapositivas, en la que recogerán de forma ordenada la información que han encontrado y la organizarán para posteriormente explicarla a sus compañeros. Podrán hacerlo con cualquier programa, pero una buena opción es usar open office, pues es software libre y podrán acceder a él sin mayor problema.

Las presentaciones deberán ser de 4 a 10 diapositivas cada una y deberán incluir como mínimo el enunciado de la característica de Euler y un ejemplo de cómo utilizarla. Al realizar la exposición ante sus compañeros, todos deberán explicar una parte más o menos equitativa del trabajo de forma clara y adecuada.

Duración: 1 sesión y media.

Recursos materiales: pizarra digital o proyector, ordenadores.

4.3.6 *Ejercicios para la aplicación de la Fórmula de Euler*

Objetivo: Que los alumnos comprendan que no se trata de una simple curiosidad, si no que es una herramienta útil para calcular las características de los poliedros, pues calcular contando directamente las aristas de algunos poliedros puede ser un trabajo complicado. Además, es común dejarse alguna sin contar.

Así, mediante unos ejercicios para realizar en el cuaderno los alumnos verán la utilidad de esta fórmula.

Descripción de la actividad:
Esta actividad constará de algunos ejercicios, similares a los planteados a continuación, en los que los alumnos tendrán que aplicar la fórmula de Euler para averiguar algunos elementos de los poliedros que se les planteen.

Ejercicio 1: Haz una tabla en tu cuaderno con el número de caras, aristas y vértices de los poliedros regulares y de algún poliedro más a tu elección.

a) Comprueba que cumplen la fórmula de Euler

b) Comprueba que el dodecaedro y el icosaedro, y el octaedro y el cubo cumplen las condiciones necesarias para ser duales.
c) Comprueba que el tetraedro es dual de sí mismo.

Ejercicio 2: Averigua las aristas de un tetraedro truncado, sabiendo que tiene ocho caras y doce vértices.

Ejercicio 3: Averigua los vértices de un octaedro truncado, sabiendo que tiene catorce caras y 36 aristas.

Ejercicio 4: Comprueba si en las pirámides se cumple también la fórmula de Euler. Por ejemplo, para una pirámide de base pentagonal y para otra de base hexagonal.

Duración: 1 sesión

Recursos materiales: cuadernos, pizarra digital o proyector, bolígrafos y lápices.

4.3.7 *Construcción de un icosaedro y su dual con pajitas de colores y estudio de los cuerpos.*

Objetivo: Se pretende que través de la construcción con pajitas de plástico de un icosaedro regular y su dodecaedro dual, los alumnos conozcan mejor la configuración de estos dos sólidos.

Descripción de la actividad:
Esta actividad está pensada para trabajar en equipo.

En esta ocasión, se les entregará a los estudiantes las pajitas de colores y la única instrucción de construir un icosaedro con ellas sin necesidad de cortarlas.

Si fuera necesario se les puedrá dar la idea de cómo construir los triángulos: debido a que las pajitas son todas de la misma medida y aprovechando la marca para doblar, construirán los triángulos insertando el apéndice por donde se sorbe, doblado por la mitad, dentro de otra pajita.

Así con tres de ellas formarán un triángulo equilátero.

Figura 30: Alumna pegando con celo los triángulos construidos

Los alumnos deberán pensar en la configuración del icosaedro que consta de veinte triángulos equiláteros como caras y al final de la sesión haber logrado construir uno.

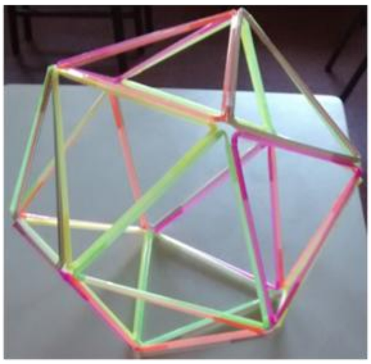


Figura 31: Icosaedro construido con pajitas de colores por los alumnos de 3º ESO

Posteriormente, una vez han construido el icosaedro, se les dará la instrucción de construir un tetraedro por cada cara, veinte en total. Utilizando el icosaedro que formaron pegarán las nuevas pirámides con los mismos ángulos.

¿Qué es lo que han obtenido?
Su última misión será unir con cuerdas los vértices que sobresalen de cada pirámide y descubrirán que lo que han hallado es un dodecaedro.

A partir de ellos, se introducirá el concepto de dualidad o de poliedro dual.

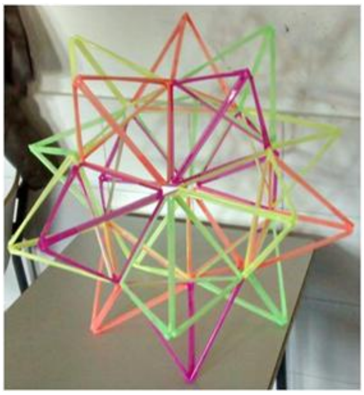


Figura 32: Dodecaedro construido con pajitas de colores por los alumnos de 3º ESO

Para que todo esto no quede en una simple experiencia, deberán resumir y escribir las conclusiones que hayan conseguido. Incluyendo la definición de poliedro dual.

Después buscarán los duales de los demás poliedros regulares y se aprovechará la oportunidad para buscar la relación entre los vértices y las caras entre los poliedros que son duales.

Duración: 2 sesiones

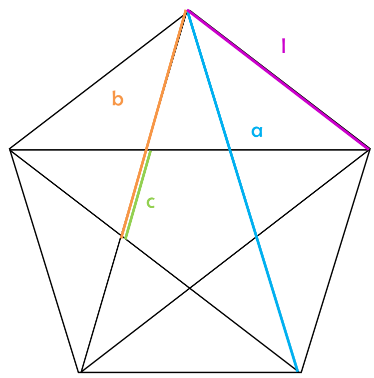
Recursos materiales: pajitas de colores con doblez marcado, cuadernos, pizarra digital o proyector, bolígrafos y lápices.

4.3.1 *Cálculos con medidas reales tomadas por los alumnos de las relaciones entre la arista y la diagonal de la cara del dodecaedro*

Objetivo: Introducir la proporción áurea y encontrarla en las longitudes de un pentágono.

Descripción de la actividad:
A partir de la fascinación que sentía la escuela Pitagórica por el pentágono y en consecuencia por el dodecaedro, podemos motivar esta actividad, buscando como lo hicieron en su tiempo, la proporción áurea en el dodecaedro o el pentágono.

Tomando un dodecaedro de plástico que será entregado a cada equipo, los alumnos deberán medir con una regla o un metro su arista, dibujar con un rotulador permanente las diagonales.



Posteriormente, en su cuaderno, escribirán las medidas que han tomado de la pieza de plástico y deberán comprobar que se verifica: $\frac{a}{l} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c} = \phi$

Al final, contrastarán lo obtenido.

Nota: Si se llevase a cabo la actividad de la construcción del dodecaedro y el icosaedro con pajitas de refresco, podrían utilizarse los cuerpos construidos por los alumnos para la obtención de las medidas con las que trabajar.

Duración: parte de una sesión.

Recursos materiales: dodecaedros de plástico de diferentes tamaños, reglas

4.4 Competencias básicas

La propuesta contribuye al desarrollo de todas las competencias básicas, aunque de forma más específica educa el uso de la *competencia matemática* a través del razonamiento, las estrategias de resolución de problemas, los mecanismos de cálculo, la medida o las formas.

4.4.1 *Matemática*

Esta competencia se desarrolla en todas las actividades propuestas, por motivos evidentes.

En concreto, se educa el uso de la competencia matemática a través del razonamiento, las estrategias en la resolución de los problemas o en los cálculos:

Cuando se conocen los tipos y características de los cuerpos geométricos, y en especial de los poliedros regulares y semi-regulares.

Cuando utilizan los datos obtenidos para resolver problemas, como el de la búsqueda de la proporción áurea en el pentágono o identifican los ejes de giro o la configuración de los poliedros regulares.

Cuando trabajan con ángulos en la demostración de la existencia de sólo cinco poliedros regulares o con la fórmula de Euler, calculando el número de vértices, aristas y caras de diferentes poliedros.

4.4.2 *Conocimiento e interacción con el mundo físico*

El estudio de las formas de los poliedros y de las representaciones en el plano y el espacio mejoran el desarrollo de la competencia del conocimiento y la interacción con el mundo físico.

La continua relación con su entorno favorece el desarrollo de esta competencia. Por ejemplo, en la actividad de la búsqueda del balón de fútbol más adecuado: a pesar de ver que la solución más acertada en el sentido geométrico era el dodecaedro chato, en la vida real, por motivos económicos, el que se consideraba mejor era el icosaedro truncado, para tomar el papel de balón de fútbol. Es decir, considerar las circunstancias del contexto.

4.4.3 *Tratamiento de la información y competencia digital*

Esta competencia se educa al desarrollar el interés por utilizar herramientas informáticas para la búsqueda de información y emplear estos mismos para organizar dicha información en una presentación de diapositivas.

También se desarrolla esta competencia al ayudarse de aplicaciones como Geogebra, para dibujar los desarrollos planos de los poliedros o para ayudarse en la visualización de sus representaciones.

4.4.4 *Competencia en comunicación lingüística*

La competencia lingüística se trabaja cuando los estudiantes deben comunicarse y han de exponer sus ideas de forma clara para colaborar con sus compañeros en la búsqueda de la solución a los problemas planteados en las actividades.

Se desarrolla también al escribir de forma clara y concisa los resultados que obtengan e su cuaderno, al igual que al elaborar la presentación que deberán exponer a la clase sobre el trabajo de la historia de la fórmula de Euler.

No debemos olvidar, que extraer información de los enunciados o de los textos ayuda a desarrollar esta competencia.

4.4.5 *Social y ciudadana*

Si los estudiantes aprecian la aportación de las culturas pasadas en el desarrollo de las matemáticas o cuando colaboran y se respetan trabajando juntos. Así, como cuando toman conciencia de la utilidad de los conocimientos de geometría en la vida cotidiana.

4.4.6 *Cultural y artística*

Al valorar las aportaciones de culturas pasadas en el desarrollo de la geometría y el estudio de los poliedros regulares, se favorece el desarrollo de esta competencia. Cuando se crean y se describen elementos artísticos con ayuda de los conocimientos adquiridos.

También, al buscar el desarrollo de la creatividad y de la creación de poliedros de papel y construidos con las pajitas de plástico.

4.4.7 *Aprender a aprender*

Cuando aprenden a ampliar los contenidos básicos mediante la búsqueda de información o al hacerse conscientes del desarrollo de su aprendizaje.

Cuando se dejan guiar en su enseñanza y colaboran para aprender juntos, haciendo de modelo para los demás estudiantes y aprendiendo de sus compañeros que también serán modelos de aprendizaje.

4.4.8 *Autonomía e iniciativa personal*

Las actividades que se han planteado para el trabajo en equipo por lo que favorecen el desarrollo de esta competencia al adquirir espontaneidad y autoestima de la discusión e intercambio de ideas con sus compañeros.

Al idear, planificar y llevar a cabo las tareas propuestas, tanto individualmente como en equipo, adquieren iniciativa y aprenden a defender sus opiniones.

5. RESULTADOS

Durante el periodo de prácticas, tuve la oportunidad de llevar a cabo con diferentes grupos de alumnos tres de las actividades propuestas en este TFM. A continuación, se relata cómo fue la experiencia y cómo respondieron los alumnos a cada una de las actividades.

5.1 Demostración de la existencia de sólo cinco poliedros regulares

Esta actividad se realizó en un grupo de primero de la ESO que estaba formado por quince alumnos. En el centro, se organizaban desdobles en matemáticas y este grupo era el correspondiente al nivel más bajo.

A pesar de mis dudas, ya que al principio pensé esta actividad para segundo o tercero de la ESO, pero no me fue posible llevarla a la práctica en esos niveles, la actividad tuvo resultados satisfactorios.

En este caso, la combiné con el taller para deducir la fórmula de Euler y, a pesar de que estos estudiantes solían ser reacios a la participación y estaban poco motivados con el estudio de las matemáticas, se notaron participativos y positivos al respecto.

Fue muy llamativo comprobar que uno de los alumnos que en las clases habituales no participaba, no copiaba y se notaba totalmente desinteresado, fue el que más preguntas realizó acerca de la historia y fue el primero en comprender por qué no se podía formar un poliedro con seis triángulos equiláteros concurriendo en un mismo vértice.

Quizás fue por la sorpresa, pues no estaban acostumbrados a manejar material didáctico de este tipo, pero se notó un incremento en la participación e interés en general.

Sin embargo, también hubo algún caso entre ellos que no se vio interesado debido a que esto no iba a ser evaluado con ningún examen ni formaba parte para la nota final. Pero fue solamente algún caso aislado, por lo que puede decirse que el balance de la actividad fue positivo.

5.2 Deducción de la Fórmula de Euler a partir de modelos de papel construidos por los alumnos

Esta actividad se llevó a cabo en primer curso de la ESO, con el mismo grupo que la demostración de la existencia de sólo cinco poliedros regulares.

Para llevarla a cabo se dividió a los estudiantes en tres grupos de cuatro personas y uno de tres, en este caso, dejándoles a ellos decidir con quién trabajar.

La actividad comenzó con una introducción sobre la historia de los sólidos platónicos, desde Pitágoras y Platón y su visión de los cuatro elementos formados por estos cuerpos hasta Kepler y su modelo cosmológico.

Nuevamente, el alumno que destacábamos anteriormente, se notó muy interesado y realizó muchas preguntas sobre lo que les conté.

Los problemas llegaron a la hora de la construcción. A pesar de ir guiándoles con las instrucciones y de tener la ayuda de los alumnos que iban construyendo más rápido, hubo varios alumnos que se atascaron con la construcción.

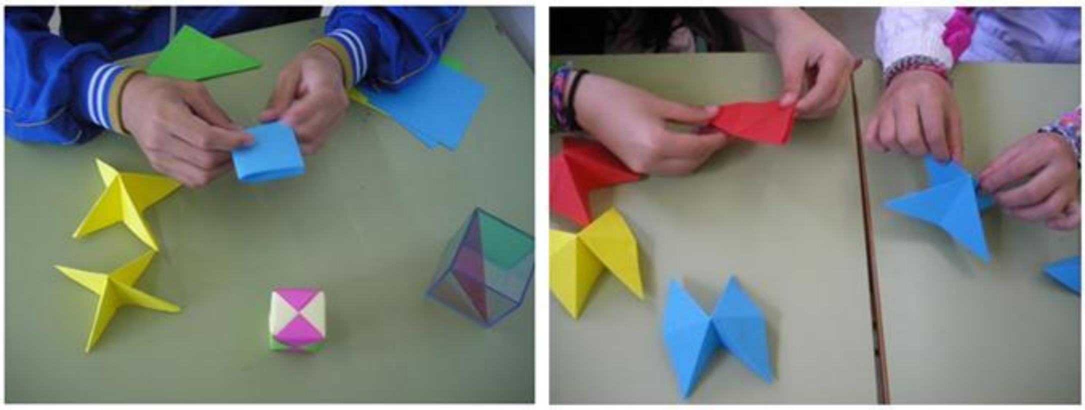


Figura 33: Alumnos de 1º ESO AB construyendo un cubo y un octaedro con papiroflexia modular

No lograban ver la dirección de los dobleces ni como encajar unas piezas en otras. Por lo que en la construcción de los poliedros se perdió bastante tiempo a pesar de que no se desviaron del tema ni perdieron la concentración en lo que estaban haciendo. Al ver que la mayoría de sus compañeros habían conseguido construirlo, ellos también se vieron capaces y querían conseguir terminar su poliedro regular. Fue una experiencia que les ayudó a perseverar y no desistir en el intento.

No hubo tiempo de terminar la actividad y no se pudo llegar a la deducción de la fórmula de Euler pues el tiempo de la hora de clase se terminó. Por lo que se les acabó contando a los alumnos en que consistía la realción y se comprobó con los cuerpos que habían construido.

A pesar de la falta de tiempo para llevar a cabo la actividad completa, considero que los resultados fueron satisfactorios, pues se consiguió que unos estudiantes que normalmente no logran mantener la atención en la clase, que enseguida se cansan de la actividad que están realizando y que no están demasiado interesados en la clase de matemáticas se mostraran participativos y motivados con esta actividad.

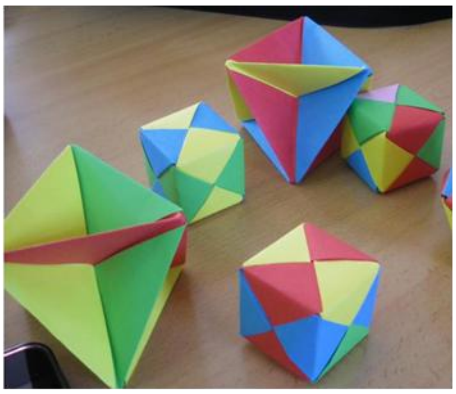


Figura 34: Poliedros construidos por los alumnos de 1º ESO AB

5.3 Construcción de un icosaedro y su dual con pajitas de colores y estudio de los cuerpos

Esta actividad se llevó a cabo en un grupo de tercero de la ESO que constaba de veintiún alumnos. Se dividió la clase en tres equipos, siete alumnos por cada uno, dejando a su elección quién formaría parte de cada uno.

Los alumnos comenzaron a colaborar, al principio, todos dando su opinión sobre cómo debería llevarse a cabo el trabajo. Sin embargo, acabaron surgiendo jefes de grupo que organizaban un poco a los demás.

No hubo ningún caso de desinterés, cada uno en su medida participó en la construcción de los sólidos.

En dos de los grupos decidieron convertirlo en un trabajo en cadena. Pensaron que debían construir veinte triángulos así que se repartieron el trabajo hasta que dieron con los veinte triángulos y entre dos o tres personas los pegaron.

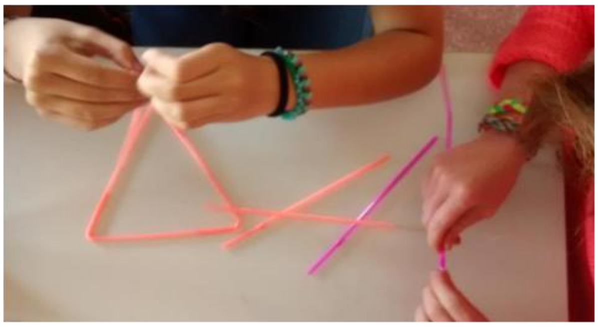


Figura 35: Alumnos de 3º ESO construyendo los triángulos con pajitas de refresco

En el tercer grupo, sin embargo, comenzaron a construir triángulos y más triángulos hasta que se dieron cuenta de que se habían pasado.

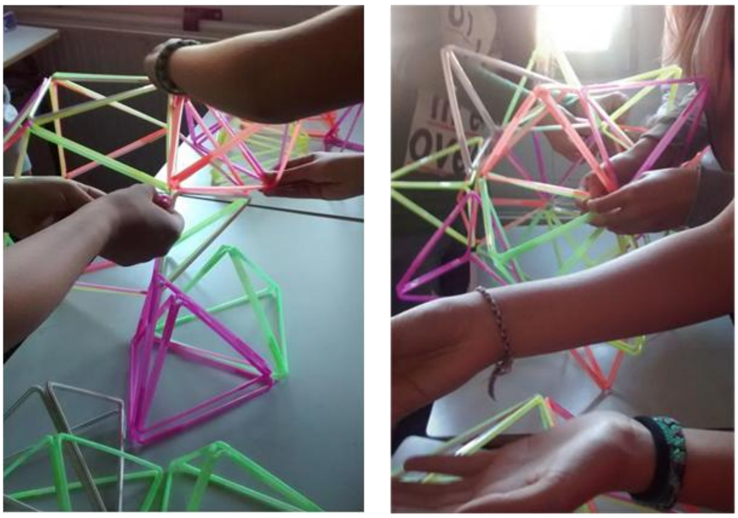


Figura 36: Alumnos de 3º ESO construyendo el dodecaedro con pajitas de colores

A pesar de los contratiempos, los tres grupos consiguieron terminar el trabajo satisfactoriamente.

6. CONCLUSIONES

En la historia de las matemáticas la geometría ha sido una gran protagonista, sin embargo, parece que las últimas tendencias son algo más algebristas.

Si hacemos que nuestros estudiantes aprendan la geometría de una forma abstracta y puramente analítica podríamos estar condenados a fracasar en nuestra labor. Debemos aprovechar que pueden manipular los materiales y ver los movimientos de los cuerpos. No podemos reducir el estudio de la geometría a memorizar una serie de fórmulas sobre áreas y volúmenes.

Por supuesto, hemos de ser conscientes de que para estudiar la geometría de esta forma son necesarios el tiempo y los recursos adecuados. Debido a circunstancias tales como el incremento del número de alumnos en las aulas, la idea de que priman los resultados y las calificaciones por encima de la nota o la presión que sufren los docentes por terminar el temario y la programación a tiempo, hacen más difícil llevar este tipo de propuestas a la práctica. Pues, como se experimentado en las actividades llevadas a cabo con los alumnos, el tiempo es un enemigo en contra de estas dinámicas.

No obstante, también se ha podido comprobar que los alumnos se ven motivados por la historia. Saber por qué o cómo surgió algo, les ayuda a comprender mejor, o al menos, a entender por qué es útil y tienen que estudiarlo.

El haber hecho participe al propio estudiante de su aprendizaje, dejándolo investigar e indagar hasta dar con la respuesta, le hace estar más interesado. La colaboración entre ellos, así, como el ser ellos mismos modelos para sus compañeros hacen crecer su autoestima, su autonomía y la confianza en sí mismos para resolver los problemas a los que se enfrenten. A pesar de que en ocasiones no lleguen a dar con la respuesta.

No debemos olvidar, que además de enseñar a los estudiantes los conceptos debemos lograr que desarrollen una serie de competencias y educarlos en unos valores.

Con las actividades propuestas han tenido que superar los obstáculos que han ido encontrando para desarrollarlas, superar la frustración cuando en los primeros intentos no conseguían lo buscado y han experimentado la satisfacción de lograr algo con su esfuerzo y de ayudar a los demás y colaborar con ellos para conseguirlo.

Aunque en este proyecto sólo se hayan desarrollado actividades con materiales manipulativos, existen otros muchos recursos didácticos que pueden ser de gran ayuda a la hora de enseñar a nuestros alumnos y, por supuesto, no sólo en el ámbito de la geometría.

7. BIBLIOGRAFÍA

Alonso Tapia, J. (1991). *Motivación y aprendizaje en el aula*. Cómo enseñar a pensar. Santillana. Madrid.

Argüelles Rodríguez, J. *Historia de las matemáticas*. (1989) .Madrid. AKAL.

Colerus, E. (1972). *Breve historia de las matemáticas*. Doncel.

Corbalán, F. (2010). *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. RBA.

Coxeter, H. S. M. (1961). *Introduction to geometry*. New York, London.

Devlin, K. (2002). *El lenguaje de las matemáticas*. Barcelona. Ediciones Robinbook.

Díaz Barriga, F., y Hernández Rojas, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* México. McGraw-Hill

Field, J. V. (1988) *Kepler's Geometrical Cosmology.* Chicago. University of Chicago Press.

Gardner, M. (1981). *Carnaval matemático.* Alianza Editorial.

González Urbaneja, P.M. (2001). *Pitágoras. EL filósofo del número. La matemática en sus personajes.* Madrid. Nivola.

James, I. (2002). *Remarkable mathematicians: from Euler to von Neumann*. Cambridge University Press.

Martín Casalderrey, F. (2000). *Cardano y Tartaglia: Las matemáticas en el Renacimiento italiano. La matemática en sus personajes.* Madrid. Nivola.

Mayer, R.E. (2010). *Aprendizaje e instrucción*. Madrid. Alianza Editorial.

Peralta, J. (1995). *Principios didácticos e históricos para la enseñanza matemática.* Huerga y Fierro Editores.

Quinientas biografías de personajes célebres. (1983). Planeta.

Richerson, D. S. (2008) Euler's Gem. The polyhedron formula and the birth of topology. New Jersey. Princeton University Press.

Romá, J. D. (2003). *Poliedros regulares: geometría descriptiva*. Club Universitario.

Simon, L., Armstein, B., & Gurkewitz, R. (2012). *Modular Origami Polyhedra.* Courier Dover Publication.

Skemp, R. R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. Ediciones Morata.

7.1 Legislación

Boletín Oficial del Estado (BOE) (2006). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE*, *5*, 677-773.

7.2 Revistas y publicaciones online:

Díaz Caballero, C. R. y Canino Ramos, C. A. (2012). *Heurística de los poliedros regulares para la investigación*. Revista Cubana de Ingeniería. 3(2). 59-69. Obtenido el 15 de febrero de 2014, desde http://rci.cujae.edu.cu/index.php/rci/article/viewFile/68/pdf

González Urbaneja, P. M. (2003). *Los sólidos platónicos: Historia de los poliedros regulares.* Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Real Sociedad Matemática Española. Obtenido el 10 de febrero desde http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&id=3386%3Alos-sos-platos-historia-de-los-poliedros-regulares&directory=67&showall=1

González Urbaneja, P. M. (2003). *Euclides. El Teorema de los Poliedros en la última Proposición de Los Elementos de Euclides*. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Real Sociedad Matemática Española. Obtenido el 8 de marzo desde http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3393%3Aeuclides-el-teorema-de-los-poliedros-en-la-ma-proposicie-los-elementos-de-euclides&catid=39%3Aaso-hicieron&directory=67&showall=1