Síntesis de contenidos de geometría analítica mediante el empleo de geogebra en educación secundaria

Miguel Bravo

(MESOB) Especialidad de Matemáticas

MÁSTERES DE LA UAM

2020-2021

Facultad de Formación de Profesorado

Universidad Autónoma de Madrid

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

SÍNTESIS DE CONTENIDOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA MEDIANTE EL EMPLEO DE GEOGEBRA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Universidad Autónoma de Madrid

Autor: Miguel Bravo Martín

Tutores: Angélica Benito Sualdea y Álvaro Nolla de Celis

Universidad Autónoma de Madrid

14 de junio de 2021

Resumen

En el presente Trabajo de Fin de Máster se realiza una propuesta didáctica que consiste en dos sesiones de síntesis y refuerzo de contenidos de geometría analítica de la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para el cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria. La propuesta es una *Clase* de GeoGebra que cuenta con cinco actividades digitales que cubren los contenidos del currículo: operaciones con vectores; propiedades de puntos, vectores y segmentos; combinación lineal de vectores; ecuaciones de la recta, y paralelismo y perpendicularidad.

Asimismo, para justificarla se realiza una revisión bibliográfica en tres direcciones: el significado, implicaciones y dificultades de la competencia de aprender a aprender; la problemática del estudio de la geometría analítica en Educación Secundaria, y las ventajas y soluciones que aporta la introducción y empleo del software de GeoGebra.

Palabras clave: GeoGebra, Geometría analítica, competencia de aprender a aprender, niveles de van Hiele.

Abstract

The present work aims to make a didactic proposal consisting in two sessions of synthesis and reinforcement of the contents of analytic geometry, from the subject of Mathematics directed towards the academic teachings in the fourth year of Secondary Mandatory Education. The approach consists in a GeoGebra *Lesson* containing five exercises that cover the curriculum's subject matter: operations with vectors; features of points, vectors, and segments; linear combination of vectors; equations of the line, and parallelism and perpendicularity.

For the proposal's justification, a bibliographic review is carried out in three directions: the meaning, implications, and difficulties of the learning to learn competence; issues concerning the study of analytic geometry in Secondary Education, and the advantages and solutions that the implementation and use of GeoGebra software involves.

Key words: GeoGebra, Analytic geometry, learning to learn competence, van Hiele levels.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS …………………………………………………………………….. 4

ÍNDICE DE FIGURAS ……………………………………………………………… 4

1. INTRODUCCIÓN ……………………………..…………………………….. 6

   1.1. Motivación ………………………………………………………………….. 7

   1.2. Objetivos ………………………………………………………………..... 8

2. MARCO TEÓRICO ……………………………………………………….…. 8

   2.1. Las competencias clave …………………………………………………... 9

   2.2. La competencia de aprender a aprender y las matemáticas ………………... 13

   2.3. La geometría analítica …………………………………………………... 17

      2.3.1. Dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría analítica ……………………………..…………………………….. 19

      2.3.2. Los niveles de van Hiele …………………………..……………… 20

   2.4. Las TIC como herramienta educativa ……………………………………... 21

   2.5. GeoGebra ……………………………………………………………..… 24

3. EXPERIENCIA PREVIA MEDIANTE INTERVENCIÓN EN EL AULA …….. 26

   3.1. Propuesta didáctica inicial …………………………………………….... 26

   3.2. Contexto …………………………………………………….……….. 32

   3.3. Puesta en práctica ……………………………………………………..… 33

   3.4. Análisis de la sesión y conclusiones ………………………………………. 34

4. PROPUESTA DIDÁCTICA …………………………………………………... 35

   4.1. Contenidos …………………………………………………………….... 35

   4.2. Objetivos finales de la propuesta ……………………………………….… 37

      4.2.1. Programar dos sesiones de síntesis para reforzar los contenidos estudiados en la unidad didáctica ……………………………………. 37

      4.2.2. Contribuir al desarrollo de la competencia de aprender a aprender …. 38

      4.2.3. Alcanzar el tercer nivel de razonamiento de van Hiele ……………… 40

   4.3. Competencias involucradas ……………………………………………….. 42

   4.4. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables ….……….. 43

   4.5. Propuesta didáctica final …………………………………………….…….. 44

      4.5.1. Operaciones con vectores ……………………………………………. 45

      4.5.2. Propiedades de puntos, vectores y segmentos ……………………….. 48

4.5.3. Combinación lineal ………………………………………………………... 51
4.5.4. Ecuaciones de la recta ……………………………………………….. 52
4.5.5. Paralelismo y perpendicularidad …………………………………….. 55
4.5.6. Menú del profesor ……………………………………………………. 57
5. CONCLUSIONES ………………………………………………….………. 58
5.1. Líneas de investigación futuras …………………………………………… 59
6. BIBLIOGRAFÍA ………………………………………………………………… 61
ANEXO ………………………………………………………………………..… 65

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del bloque de geometría para Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de cuarto de la ESO. Fuente: Real Decreto 1105/2014. ………………………………………………………… 18

Tabla 2. Contenidos cubiertos en cada actividad. Fuente: Elaboración propia. ………………. 36

Tabla 3. Tareas esperadas para cada nivel de razonamiento de van Hiele. Fuente: Elaboración propia. ……………………………………………………………………………………. 40

Tabla 4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del bloque de procesos, métodos y actitudes matemáticas para Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de cuarto de la ESO. Fuente: Real Decreto 1105/2014. …………………..……… 43

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Captura de pantalla del software de GeoGebra y su Vista Algebraica, CAS, Gráfica y Gráfica 3D (de izquierda a derecha). Fuente: Elaboración propia. …………………………..… 24

Figura 2. Vista inicial del Applet llevado al aula. Fuente: Elaboración propia. ……….…….. 27

Figura 3. a) Arriba a la izquierda, suma de vectores. b) Arriba a la derecha, resta de vectores. c) Abajo a la izquierda, punto medio de un segmento. d) Abajo a la derecha, módulos de los vectores. Fuente: Elaboración propia. ……………………………………………………...………….. 28

Figura 4. Combinación lineal de vectores. Fuente: Elaboración propia. ……………………… 29

Figura 5. Ecuaciones de la recta. Fuente: Elaboración propia. ………………………………... 30

Figura 6. Hoja de ejercicios para la actividad de GeoGebra. Fuente: Elaboración Propia. …… 31

Figura 7. Menú principal de las actividades de síntesis de la Clase de GeoGebra. Fuente: Elaboración propia. ……………………………………………………………………………. 45

Figura 8. Producto de un escalar por un vector. Fuente: Elaboración propia. ………………… 46

Figura 9. Preguntas de la actividad de Operaciones con vectores. Fuente: Elaboración propia. 47

Figura 10. Punto medio de un segmento. Fuente: Elaboración propia. ……………………….. 48

Figura 11. Módulos de los vectores. Fuente: Elaboración propia. ……………………………. 49

Figura 12. Simétrico del punto A respecto de B. Fuente: Elaboración propia. ……………….. 49

Figura 13. Puntos alineados. Fuente: Elaboración propia. ……………………………………. 49

Figura 14. Preguntas de la actividad de Propiedades de puntos, vectores y segmentos. Fuente: Elaboración propia. ……………………………………………………………………………. 50

Figura 15. Combinación lineal de vectores. Fuente: Elaboración propia. …………………….. 51

Figura 16. Preguntas de la actividad de Combinación lineal. Fuente: Elaboración propia. ….. 52

Figura 17. Actividad de Rectas con la ecuación vectorial desplegada. Fuente: Elaboración propia. ………………………………………………………………………………………….…… 53

Figura 18. a) Izquierda, actividad de Rectas con las ecuaciones paramétricas desplegadas. b) Derecha, ecuación continua y explícita de la recta desplegadas. Fuente: Elaboración propia. ... 53

Figura 19. Preguntas de la actividad de Ecuaciones de la recta. Fuente: Elaboración propia. .. 54

Figura 20. Mapa de la ciudad con las rectas y las casillas de los vectores desplegadas. Fuente: Elaboración propia. ………………………………………………………………………. 55

Figura 21. Deslizadores de cada analizador de rectas desplegado. Fuente: Elaboración propia. 55

Figura 22. Preguntas de la actividad de Paralelismo y perpendicularidad. Fuente: Elaboración propia. ………………………………………………………………………………………. 56

Figura 23. Respuestas registradas de los alumnos en el perfil de GeoGebra del profesor. Fuente: Elaboración propia. ……………………………………………………………………….…… 56

Figura 24. Teoría relativa a la actividad de operaciones con vectores. Fuente: Elaboración propia. ………………………………………………………………………………………….…… 66

Figura 25. Teoría relativa a la actividad de propiedades de puntos, vectores y segmentos. Fuente: Elaboración propia. ……………………………………………………………..…….….. 66

Figura 26. Teoría relativa a la actividad de combinación lineal. Fuente: Elaboración propia. .. 67

Figura 27. Teoría relativa a la actividad de ecuaciones de la recta. Fuente: Elaboración propia. ……………………………………………………………………….………………………… 67

Figura 28. Teoría relativa a la actividad de paralelismo y perpendicularidad. Fuente: Elaboración propia. …………………………………………………………………………...……….. 68

1. INTRODUCCIÓN

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) han ido permeando prácticamente todos los ámbitos de las vidas de las personas en las últimas décadas. Es complicado imaginar nuestra realidad sin ellas, tanto es así, que la omnipresencia de las TIC se ha convertido en una de las características de la sociedad actual. En educación, el desarrollo digital ha podido contemplarse significativamente tanto en las infraestructuras destinadas a ella como en el impacto que tienen sobre las personas que la desempeñan y las que la protagonizan, es decir, los estudiantes.

La edad en la que los niños comienzan a hacer uso de ellas es cada vez más baja, y son los adolescentes y los jóvenes los que más las emplean. Así, según datos del INE (2020) el 69,5% de los niños de 10 a 15 años ya disponen de teléfono móvil, el 91,5% de ellos hace uso frecuente del ordenador, y el 94,5% navega usualmente por Internet.

La influencia de las TIC es tan significativa que los estudiantes de este siglo, que han nacido y crecido en la era digital, han sido denominados Nativos Digitales (Prensky, 2010). El autor, en consecuencia, describe a las personas que no han nacido en esta era y que han tenido que aprender el lenguaje digital como Inmigrantes Digitales. Algunas de las características que se podrían destacar de los primeros que les diferencian de los segundos son su deseo de recibir información dinámica e inmediata, su tendencia a realizar varias tareas simultáneas, su preferencia por los gráficos ante los textos, la mejora de su rendimiento cuando trabajan en la Red o su preferencia por aprender de forma lúdica.

En consecuencia, la brecha generacional entre profesores y alumnos ha adquirido una dimensión tecnológica extra que es necesaria tener en consideración.

El TFM está enmarcado en la utilización de las TIC en el aula, por lo que se cree necesario motivar la propuesta didáctica y esbozar los objetivos que se pretenden en el trabajo, tanto a nivel docente como a nivel de aprendizaje propio.

1.1. Motivación

Pese a que con la introducción de las TIC en el currículo en España y su avance en aplicaciones y recursos se esperaría que el rendimiento académico del alumnado mejorara, los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) (OCDE, 2018) nos sitúan tanto en matemáticas como en ciencias varios puntos por debajo de la media de los países de la OCDE. En este aspecto, la tendencia de nuestro país no es de retroceso, pero tampoco se ha logrado avanzar.

En lo que a las TIC respecta, por tanto, es necesario plantear su introducción y uso como recurso educativo efectivo y no como una réplica digital de los recursos tradicionales. Se debe comprender el contexto educativo y los requisitos para que las TIC se puedan llevar al aula como una herramienta de mejora. En esta línea, de Pablos et al. (2010) investigan sobre los factores facilitadores de la innovación con TIC en los centros escolares y los comparan en diferentes comunidades autónomas españolas. Entre ellos destaca la actitud positiva hacia las TIC por parte de los docentes y equipos directivos, la disponibilidad de espacios y recursos informáticos y la preparación y habilidad en estas tecnologías de los responsables de innovación de los centros.

Por lo tanto, se tienen que producir tres avances simultáneamente para un desarrollo de las TIC significativo y transformador en educación: dotación de recursos tecnológicos a los centros educativos, formación docente para que las personas encargadas de llevar las TIC a las aulas tengan conocimiento de su uso adecuado, y elaboración de materiales educativos. El primero de ellos es competencia de las políticas educativas del Estado y de las Autonomías, pero en los dos últimos, el papel del docente cobra vital importancia.

A nivel más personal, a lo largo de este año he desarrollado un gusto por las propuestas de innovación docente mediante el empleo de GeoGebra, con origen en una de las asignaturas que he cursado en el Máster. Además, durante el período de prácticas he podido llevar a cabo dos intervenciones con TIC en el aula y comprobar que los estudiantes se divertían y adquirían mayor protagonismo en su aprendizaje. En consecuencia, he sentido de gran utilidad iniciarme en ellas y he tratado de formarme de cara a la elaboración de nuevos recursos matemáticos digitales.

1.2. Objetivos

Los objetivos del trabajo se enfocan, además, en un estudio teórico de algunos conceptos asociados al aprendizaje de la materia de interés, la geometría analítica, y del aprendizaje en general de los estudiantes adolescentes. Los objetivos finales son los siguientes:

- Realizar una breve introducción de las competencias clave mediante las que se trabaja en el currículo español.

- Realizar un estudio de las implicaciones de la competencia de aprender a aprender, ya que esta representa el conjunto de habilidades, actitudes y aptitudes más relacionadas con la autonomía del alumno, ya no sólo a nivel educativo y de desarrollo de sus propios mecanismos de aprendizaje, sino a nivel personal, para que en el futuro pueda ser autosuficiente en su entorno social y sea capaz de desenvolverse en diferentes contextos.

- Realizar un estudio de las dificultades en el aprendizaje de la geometría analítica y comprender las formas de razonamiento que se dan en los estudiantes.

- Sacar conclusiones de un recurso didáctico llevado al aula y que sirva de experiencia para mejorar su diseño.

- Perfeccionar los conocimientos propios sobre GeoGebra para poder plantear actividades dinámicas que aporten otra dimensión a las sesiones de aprendizaje, ahondando en el funcionamiento de las diferentes herramientas que facilita el software.

2. MARCO TEÓRICO

Los tres primeros objetivos establecidos para el presente trabajo se tratarán de desarrollar en este apartado.

2.1. Las competencias clave

Las políticas educativas nacionales e internacionales han tratado de incentivar el proceso de enseñanza-aprendizaje basado en competencias en los centros escolares desde principios de siglo (Rocosa, Sangrá y Cabrera, 2017).

El proyecto DeSeCo de la OCDE (2005), vinculado a PISA, reunió a expertos de diferentes disciplinas y países para esbozar un marco teórico y conceptual de referencia con el fin facilitar el establecimiento de las competencias clave necesarias para el desarrollo de los individuos y las sociedades democráticas. El marco agrupaba tres categorías amplias que intersecan entre sí: *el empleo de herramientas de manera interactiva*, que abarca el empleo del lenguaje, símbolos, información y tecnologías; *la interacción en grupos heterogéneos*, que incluye la capacidad de relación, de cooperación y de resolución de conflictos con otras personas; y *el desarrollo autónomo*, que comprende la capacidad de actuar en un contexto, de conducir proyectos personales y de afirmar derechos, límites, necesidades e intereses.

Uno de los puntos importantes que motivaban el proyecto era el hecho de que las competencias clave, pese a que abarcan más que sólo conocimiento instruido, pueden ser aprendidas en un entorno educativo favorable.

La Comisión Europea (2006) recomendó a los Estados miembros desarrollar la oferta de las competencias clave para todos en sus estrategias de aprendizaje permanente. Dichas competencias se establecieron en base al marco de referencia previamente mencionado y se definieron como "aquellos conocimientos, capacidades y actitudes […] que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personales, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo" (p. 14). Las competencias se especifican en el anexo de ese documento y son las siguientes:

1. Comunicación en la lengua materna

2. Comunicación en lenguas extranjeras

3. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología

4. Competencia digital

5. Aprender a aprender

6. Competencias sociales y cívicas

7. Sentido de la iniciativa y espíritu de empresa

8. Conciencia y expresión culturales

El Sistema Educativo Español introdujo las competencias básicas en su currículo por primera vez en la Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE) con los objetivos de integrar los aprendizajes formales, informales y no formales, permitir a los estudiantes ponerlos en relación con sus contextos y situaciones de la vida cotidiana, y concretar los contenidos y criterios de evaluación imprescindibles para orientar la enseñanza académica (Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria).

En la LOE se definen 8 competencias básicas similares a las propuestas por la Unión Europea (2006), que mediante la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) quedan sintetizadas en 7 competencias casi idénticas a las mencionadas previamente. La LOMCE las sitúa en un eje principal del proceso de enseñanza-aprendizaje y del currículo y menciona que dicho proceso competencial debe abordarse desde todas las áreas del conocimiento debido a su carácter transversal, dinámico e integral (Real Decreto 1105/2014, de 6 de diciembre, por el que se establece el currículo básico correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria).

En la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato, se describen dichas competencias en detalle y se incluyen herramientas con las que no se contaba en la LOE, como el planteamiento de estrategias metodológicas para trabajar por competencias en el aula y el desarrollo de su evaluación.

Las competencias por las que se trabaja actualmente en el Sistema Educativo Español son las siguientes:

a) Competencia lingüística

La competencia en comunicación lingüística es el resultado de la acción comunicativa dentro de prácticas sociales determinadas, en las cuales el individuo actúa con otros interlocutores y a través de textos en múltiples modalidades, formatos y soportes. Para su adecuado desarrollo se debe atender a los cinco componentes que la constituyen y a las dimensiones en las que se concretan: el componente lingüístico, el componente pragmático-discursivo, el componente sociocultural, el componente estratégico y el componente personal.

b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología

La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto. Requiere de conocimientos sobre los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos. Para su adecuado desarrollo resulta necesario abordar cuatro áreas relativas a los números, el álgebra, la geometría y la estadística, interrelacionadas de formas diversas.

Las competencias básicas en ciencia y tecnología son aquellas que proporcionan un acercamiento al mundo físico y a la interacción responsable con él desde acciones, tanto individuales como colectivas.

c) Competencia digital

La competencia digital es aquella que implica el uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías de la información y la comunicación para alcanzar los objetivos relacionados con el trabajo, la empleabilidad, el aprendizaje, el uso del tiempo libre, la inclusión y participación en la sociedad. Para su adecuado desarrollo resulta necesario abordar el análisis e interpretación de la información, el conocimiento de los diferentes medios de comunicación, la creación de contenidos digitales, las estrategias de seguridad y conocimiento de riesgos tecnológicos y la resolución de problemas teóricos y técnicos.

d) Aprender a aprender

La competencia de aprender a aprender es fundamental para el aprendizaje permanente que se produce a lo largo de la vida y que tiene lugar en distintos contextos formales, no formales e informales. Esta competencia se caracteriza por la habilidad para iniciar, organizar y persistir en el aprendizaje e incorpora el conocimiento que posee el estudiante sobre su propio proceso de aprendizaje.

e) Competencias sociales y cívicas

Las competencias sociales y cívicas implican la habilidad y capacidad para utilizar los conocimientos y actitudes sobre la sociedad, entendida desde las diferentes perspectivas, en su concepción dinámica, cambiante y compleja, para interpretar fenómenos y problemas sociales en contextos cada vez más diversificados; para elaborar respuestas, tomar decisiones y resolver conflictos, así como para interactuar con otras personas y grupos conforme a normas basadas en el respeto mutuo y en convicciones democráticas.

f) Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor

La competencia sentido de iniciativa y espíritu emprendedor implica la capacidad de transformar las ideas en actos. Ello significa adquirir conciencia de la situación a intervenir o resolver, y saber elegir, planificar y gestionar los conocimientos, destrezas o habilidades y actitudes necesarios con criterio propio. Para su adecuado desarrollo resulta necesario abordar la capacidad creadora y de innovación, la capacidad proactiva para gestionar proyectos, la capacidad de asunción y gestión de riesgos, las cualidades de liderazgo y trabajo individual y en equipo y el sentido crítico y de la responsabilidad.

g) Conciencia y expresiones culturales

La competencia en conciencia y expresión cultural implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos.

De esta manera, las competencias deben ser trabajadas en las asignaturas y áreas del currículo desde los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables (Real Decreto 1105/2014).

El vínculo requerido de estos aspectos con el trabajo por competencias ha generado una serie de dificultades tanto en los aspectos elementales, metodológicos y evaluativos de las programaciones didácticas (Toribio, 2010; Vázquez-Cano, 2016), como en el profesorado a la hora de planificar, coordinar y evaluar competencias claves

(Vázquez-Cano, 2016). Este autor estudia y concreta estas dificultades en una investigación cuyos principales resultados indican que la mayoría de los centros no disponen de un “Plan de Centro” ni un “Plan de Acción Tutorial” donde se concrete el desarrollo de las competencias clave, no notifican formalmente de la adquisición de competencias de los alumnos a sus familias, ni a nivel interno, ni realizan reuniones de coordinación docente para ello. En cuanto a los profesores, la mayor parte no saben cómo relacionar los criterios de evaluación con las competencias, no se coordinan con sus compañeros de departamento ni de otros departamentos para unificar criterios de programación competencial, no realizan proyectos que involucren a la comunidad docente ni han realizado cursos de formación específico para el trabajo por competencias y consideran difícil encontrar estrategias, contenidos y métodos de evaluación para las competencias mencionadas en el currículo.

2.2. La competencia de aprender a aprender y las matemáticas

Para el propósito de este trabajo y a modo de motivación de la propuesta, se ha considerado de utilidad recorrer brevemente las características e implicaciones de la competencia de aprender a aprender, así como las dificultades que presenta de cara a la labor docente y su vínculo con las matemáticas.

Esta competencia se articula bajo el funcionamiento de dos ejes (Orden ECD/65/2015): el primero, la capacidad para la motivación por el aprendizaje, que requiere que se genere interés y curiosidad por lo que se aprende, y el segundo, la organización y gestión del aprendizaje, que incluye el autoconocimiento sobre los procesos mentales involucrados en el aprendizaje y su ajuste a los tiempos y las demandas de tareas y actividades requeridas para llevarlo a cabo.

Este conocimiento se vuelca en destrezas de autorregulación y control que se concretan en estrategias de planificación, estrategias de supervisión y estrategias de evaluación. Schunk y Zimmerman (1997) explicaban esta autorregulación como un proceso de cuatro niveles: por una parte, la observación y la emulación, con fuertes influencias sociales; por otra, el autocontrol y el autodesarrollo, con mayor dependencia del aprendiz o estudiante.

Engranando estas características estudiadas se podría definir esta competencia como un proceso mediante el que los estudiantes obtienen nuevos conocimientos sobre su gestión del aprendizaje y su motivación por él a través de experiencias vividas que producen algún cambio en su manera de elaborar estrategias de planificación, supervisión y autoevaluación.

Teixidó (2011) desarrolla e ilustra un esquema de los aspectos primordiales de la competencia de aprender a aprender y los divide en siete:

a) **Conocimiento y formulación de los objetivos de aprendizaje**. Si el alumno tiene claro lo que espera aprender le será más fácil tomar conciencia de los resultados de su aprendizaje.

b) **Desarrollo de habilidades cognitivas básicas que lo hagan posible**. Entre ellas destaca el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, el creativo y la memorización.

c) **Conocimiento de las propias capacidades y limitaciones**, es decir, la conciencia sobre qué cosas sabe el alumno, qué cosas no sabe, qué cosas no comprende, cuáles de ellas están a su alcance, etc.

d) **Conocimiento de técnicas y estrategias**. Algunas de ellas son los mapas conceptuales, los diagramas de flujo, el aprendizaje cooperativo, el dossier, etc. Es preciso que el alumno se plantee qué procedimientos conoce para aprender lo que se propone.

e) **Reconocimiento y regulación de aspectos emocionales**. Tiene un vínculo muy estrecho con la motivación. El aprendizaje genera emociones como la satisfacción ante éxitos, temor al fracaso, búsqueda de reconocimiento, celos, aversión, admiración, etc., y son diferentes para cada estudiante, pues son inherentes a la condición humana.

f) **Aprendizaje con los otros**. Pese a que el aprendizaje es en esencia un proceso individual, se produce en un contexto social donde profesores, grupo de clase, miembros del equipo de trabajo, familia y amistades tienen un papel importante. Es preciso que el alumno

g) **Creación de ambientes de aprendizaje**. El aprendizaje tiene lugar tanto en el aula como en casa, con el grupo de iguales, de amigos e incluso en la calle. En estos espacios se generan ambientes que pueden favorecer el aprendizaje o coartarlo, de modo que es una práctica relevante y enriquecedora del alumno el hecho de ser capaz de construirlos adecuadamente.

Asimismo, cabe destacar el trabajo de Martín (2008), que, por un lado, incide en que es prioritario que el desarrollo de esta competencia se produzca desde la Educación Infantil, por otro afirma su carácter contextual asegurando que en los propios recreos, pasillos y salidas del centro educativo esta competencia se desarrolla también, y, por último, expone una serie de principios metodológicos similares a los descritos previamente, con propuestas interesantes en temas como el lenguaje empleado para cada etapa, la atribución adecuada de éxitos y fracasos al alumnado y la metacognición.

Como se puede entender de estas descripciones, la acción docente y la figura del profesor pueden influir en todos estos aspectos en mayor o menor medida, lo que motiva a realizar propuestas didácticas que los potencien. En último término, el objetivo de estas propuestas no debería ser exclusivamente la adquisición de conocimientos de la materia, sino que debería subyacer en él una intención facilitadora del aprendizaje y que permita al alumnado tomarse un tiempo y una reflexión acerca de sus procesos mentales para la adquisición de conocimientos nuevos.

En esta línea, se establecen en el currículo las orientaciones de las propuestas metodológicas para enseñar por competencias (Orden ECD/65/2015):

> "Para potenciar la motivación por el aprendizaje de competencias se requieren, además, metodologías activas y contextualizadas. Aquellas que faciliten la participación e implicación del alumnado y la adquisición y uso de conocimientos en situaciones reales, serán las que generen aprendizajes más transferibles y duraderos.
>
> […] La selección y uso de materiales y recursos didácticos constituye un aspecto esencial de la metodología. El profesorado debe implicarse en la elaboración y diseño de diferentes tipos de materiales, adaptados a los distintos niveles y a los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje de los alumnos y alumnas, con el objeto de atender a la diversidad en el aula y personalizar los procesos de

construcción de los aprendizajes. Se debe potenciar el uso de una variedad de materiales y recursos, considerando especialmente la integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje que permiten el acceso a recursos virtuales." (p. 7003).

Es preciso señalar que, pese a que el docente puede prestar ayuda al alumno y favorecer su autonomía a través de sus propuestas y metodologías, su capacidad de influencia tiene limitaciones tal y como las tiene la capacidad de aprendizaje del alumno (Teixidó, 2011).

Paralelamente, introduciéndonos en el ámbito de las matemáticas, Gutiérrez, Martínez y Nebreda (2008) estudiaron los vínculos entre los objetivos del currículo de matemáticas en la enseñanza secundaria obligatoria y las competencias básicas introducidas en la LOE (Real Decreto 1631/2006). De los once objetivos, los que tienen relación estrecha con la competencia de aprender a aprender son los siguientes:

- Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

- Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

- Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

- Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado, que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las Matemáticas.

Las dificultades que se plantean en relación con el desarrollo la competencia de aprender a aprender se generalizan de las mencionadas en el punto anterior sobre las competencias clave.

2.3. La geometría analítica

Una vez se han introducido los objetivos de matemáticas de interés es preciso ahondar en el objeto de estudio concreto de este trabajo, es decir, en la geometría analítica.

Entendemos por geometría a la ciencia del espacio y rama de las matemáticas que estudia las figuras, ya sean planas o tridimensionales, sus elementos, posiciones y transformaciones (Arce, Conejo y Muñoz, 2019). Nos referimos a la geometría analítica cuando el estudio de estas figuras planas o tridimensionales y sus propiedades se realiza mediante técnicas algebraicas y de análisis matemático bajo un sistema de coordenadas y sus variables.

Como expone González (2008), los fundamentos de la geometría analítica fueron desarrollados simultáneamente por Descartes (*La Géométrie*) y Fermat (investigaciones enviadas al Padre Merssene) en 1637, que introdujeron aspectos analíticos como las coordenadas y la operatoria algebraica en el estudio de curvas, lo cual permitía resolver numerosos problemas históricos con facilidad. Euler, un siglo más tarde, recogió los métodos analíticos más importantes desarrollados por los matemáticos de su época para completar las ideas de Descartes y Fermat en su obra *Opera Omnia*.

Aparte del análisis y el álgebra, la geometría tiene numerosos vínculos con otros objetos matemáticos como la estadística, la probabilidad, los números y las medidas, además de con otras disciplinas como el arte, la arquitectura y la naturaleza, lo que hace de ella un área interesante y necesaria de desarrollar.

La introducción en el currículo de la geometría analítica tiene lugar en Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4º de la ESO, en el Bloque 3 de Geometría (Real Decreto 1105/2014). Para este propósito, se recoge la necesidad de estudiar elementos ya introducidos en los cursos previos de matemáticas como las coordenadas cartesianas y los puntos, e introducir otros nuevos como los vectores, que serán el elemento vehicular para el desarrollo de las ecuaciones de la recta y, por tanto, para las propiedades de paralelismo y perpendicularidad de estas.

La Tabla 1 recoge los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del currículo asociados a los conocimientos de interés para este trabajo:

Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Bloque 3. Geometría		
Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.	3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.	3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector. 3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla. 3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos. 3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad. 3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Tabla 1. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del bloque de geometría para Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de cuarto de la ESO. Fuente: Real Decreto 1105/2014.

2.3.1. Dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría analítica

El paso de la geometría sintética estudiada hasta el nivel de 3º de la ESO, más elemental e intuitiva, a la abstracción requerida por la geometría analítica del curso posterior supone un desafío para la docencia (Arce, Conejo y Muñoz, 2019). Estos autores sostienen que, por lo general, el alumnado no comprende las necesidades matemáticas que justifican la introducción de expresiones algebraicas de dos o tres variables para resolver problemas más complejos, y que lo entienden como un nuevo mecanismo que se estudia con el objetivo de resolver otro tipo de problemas. De esta manera, ambas geometrías se entienden como diferentes y sin conexión.

Gascón (2002) aboga por una transición continua desde la primera hasta la segunda mediante problemas adecuados que evidencien las limitaciones de la geometría sintética y descubran la necesidad didáctica de la introducción de técnicas algebraicas.

Bajo esta premisa y bajo la investigación sobre la falta de problematización de la geometría analítica, Gaita (2014) diseña en su Tesis doctoral una serie de situaciones que funcionan como hilo conductor entre estas dos geometrías. Asimismo, realiza un trabajo de documentación en el que investiga aspectos como la ausencia de geometría sintética en los diseños curriculares, el empleo de entornos tecnológicos para la enseñanza de la geometría y otros problemas en el aprendizaje de geometría. Entre ellos destaca el trabajo de Radillo et al. (2005), que muestra el obstáculo que supone la traducción de problemas matemáticos desde el lenguaje cotidiano al lenguaje matemático, entendiendo a este último como el conjunto de símbolos que estructura el conocimiento sobre las relaciones entre los objetos reales y sus propiedades.

Por tanto, añadido al primer problema mencionado, nos encontramos con el hecho de que, por lo general, los alumnos no llegan a adquirir un nivel comprensivo del lenguaje matemático, con el problema que ello supone: “Si un estudiante no comprende el significado de todas las palabras empleadas para plantear un problema matemático, posiblemente tampoco entenderá qué es lo que debe hacer y será difícil que logre la meta de aprendizaje prevista con tal actividad.” (Radillo et al, 2005, p.5).

Con el objetivo de ilustrar en mayor profundidad otros posibles obstáculos en los procedimientos mentales para la adquisición de conocimientos sobre geometría, se va a hacer referencia a los niveles de van Hiele.

2.3.2. Los niveles de van Hiele

Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof sugirieron que el progreso en el razonamiento sobre la geometría de las personas tiene lugar a través de cinco niveles secuenciados y jerarquizados (Mayberry, 1983), de manera que se espera que los estudiantes que se encuentran en un nivel de razonamiento determinado sean competentes en las tareas de ese nivel y todos los anteriores, pero no sean capaces de desarrollar todas las tareas de niveles superiores a ese.

De los escritos de van Hiele (1957, 1958-59, 1959, 1976, tomado de Mayberry, 1983, p.58) y van Hiele-Geldof (1957, tomado de Mayberry 1983, p.59) y el trabajo de Arce, Conejo y Muñoz (2019), se pueden describir los niveles de van Hiele de la siguiente manera:

- **Nivel 1 (de visualización).** En este nivel se reconocen las figuras por su apariencia visual, pero sus propiedades no se perciben adecuadamente. Un estudiante en este nivel debería poder reconocer y nombrar figuras y distinguirlas de otras similares.

- **Nivel 2 (de análisis).** En este nivel se identifican propiedades de manera descriptiva, pero aisladas y sin conexión entre ellas, por lo que no se producen relaciones entre figuras. Un estudiante en este nivel debería reconocer y nombrar propiedades de figuras geométricas.

- **Nivel 3 (de clasificación).** Las definiciones sobre las figuras son correctas y se establecen relaciones entre ellas y entre sus propiedades. Los estudiantes en este nivel no son capaces de realizar demostraciones, aunque pueden seguirlas si se explican paso por paso.

- **Nivel 4 (de deducción formal).** El grado de deducción es completo: en este nivel se entienden y realizan razonamientos lógicos formales como el significado de condiciones necesarias y suficientes. Una persona en este nivel comprende la estructura axiomática de las matemáticas, pero no es capaz de analizarla ni comparar diferentes sistemas axiomáticos.

- **Nivel 5 (de rigor).** En este nivel se puede prescindir de un soporte concreto para realizar los razonamientos deductivos. Una persona en este nivel puede analizar y comparar diferentes sistemas axiomáticos. No se espera ni se pretende que un estudiante de secundaria alcance este nivel, ya que está reservado para matemáticos profesionales.

El tránsito de un nivel a otro se realiza de forma continua, aprendiendo a realizar tareas vinculadas al nivel siguiente y consolidando las del nivel actual. Por tanto, es labor del docente conocer alrededor de qué niveles se encuentran sus alumnos y realizar propuestas didácticas acordes ajustando su metodología y sus técnicas de enseñanza para este propósito, superando además la dificultad que supone la docencia desde un nivel de razonamiento superior.

Trabajos recientes como los de Yudianto et al. (2018) y Khalil et al. (2017), clasifican las características de la geometría analítica en diferentes etapas educativas según los niveles de van Hiele. Este será uno de los objetivos de cara a la propuesta didáctica, que permitirá a su vez ejemplificar la carga teórica de este apartado.

2.4. Las TIC como herramienta educativa

Las TIC han ido permeando prácticamente todos los ámbitos de la sociedad en las últimas décadas, llegando a consolidarse como un recurso imprescindible en el sistema educativo. Los estudiantes buscan información en la web, realizan trabajos escritos mediante software como Word, crean presentaciones con PowerPoint, comprueban sus operaciones con la calculadora, se preguntan las tareas mediante aplicaciones de mensajería instantánea y socializan con su grupo de iguales mediante otras redes sociales. A todo esto, se ha de añadir el impacto esencial que han adquirido a lo largo de este último año y medio a causa de los escenarios que se han tenido que plantear a raíz de la pandemia por Covid-19, donde plataformas de videollamadas y aulas virtuales se han convertido en las herramientas más viables para la docencia.

Tal y como menciona García (2011) en su Tesis doctoral, a lo largo de este tiempo, el número de docentes e investigadores que han estudiado y debatido el empleo, utilidad y potencialidad de las TIC en el campo de la educación matemática se ha incrementado notablemente.

Leung (2006) explora en su trabajo el beneficio didáctico de la representación de las matemáticas de múltiples formas, concretamente de la representación visual vinculada a otro tipo de representaciones mediante la introducción de las TIC. Asimismo, asigna a las TIC las capacidades de promover la interacción entre el estudiante y las matemáticas y de servir eficientemente a su manipulación y comunicación.

La primera de estas conclusiones permite relacionar el empleo de herramientas tecnológicas con otras características teóricas mencionadas previamente: Por un lado, con las estudiadas en los niveles de van Hiele acerca del razonamiento geométrico, ya que una metodología adecuada en la que se trabajen paralelamente diferentes representaciones matemáticas de un elemento (incluyendo la visual) podría favorecer a la relación entre sus propiedades, con el objetivo de facilitar a los estudiantes herramientas que les permitan desarrollar tareas asociadas al nivel 3 (de clasificación). Por otro lado, con las estudiadas sobre la competencia de aprender a aprender, pues fomenta el desarrollo de habilidades cognitivas básicas y el conocimiento de técnicas y estrategias diferentes (como requería Teixidó, 2011) y favorecen la labor de reconocer tareas susceptibles de ser planteadas en términos matemáticos, la exploración sistemática de alternativas y la elaboración de estrategias personales utilizando distintos recursos (como apuntaban Gutiérrez, Martínez y Nebreda, 2008).

Se pueden organizar algunas de las funciones y beneficios que se esperan de las incorporación de metodologías didácticas que incluyan adecuadamente las TIC como recurso matemático a partir de las investigaciones ya mencionadas y de otras como las de García y Romero (2007), Arias y Maza (2005), Preiner (2008, citado en García, 2011), Cuesta et al. (2015), y Bakar et al. (2010):

- Funcionan como recurso innovador, ya que introducen elementos multimedia y permiten crear contenidos digitales tanto a docentes como a alumnos, dando mayor protagonismo a los últimos en el proceso de aprendizaje.

- Funcionan como elemento motivador y de mejora del comportamiento en relación con las metodologías tradicionales de enseñanza de las matemáticas.

- Mejoran la actitud hacia las matemáticas y las actitudes matemáticas, generando mayor interés en la ciencia y su método, así como en el espíritu crítico.

- Mejoran el rendimiento académico matemático en los estudiantes.

- Permiten el diseño de actividades personalizadas e individualizadas en las que los estudiantes pueden recibir retroalimentación inmediata sobre sus procedimientos y resultados y pueden equivocarse en privado.

- Favorecen la atención a la diversidad, aumentando el razonamiento lógico matemático y verbal en alumnos con dificultades desde los niveles educativos más bajos.

Paralelamente, desde el NCTM (2003, citado en García, 2011) se señala la que "el uso eficaz de la tecnología en clase de matemáticas depende del profesor" y que "como cualquier herramienta, puede ser usada bien o deficientemente" (p. 27).

Desde el punto de vista docente, es preciso conocer los usos mayoritarios y las percepciones que tienen los estudiantes adolescentes sobre las TIC, significativamente alejados de la práctica matemática y mayormente vinculados al ocio y las relaciones sociales. Tal y como explica Plaza de la Hoz (2017), las principales influencias negativas que perciben estos sobre su uso de las TIC tienen que ver con el tiempo que les quita su uso de realizar tareas prioritarias y la capacidad de generar distracciones; la adicción y obsesión por lo que dicen y hacen los demás, así como la imposibilidad de estar sin el móvil; y la inseguridad tecnológica debida a la exposición pública.

2.5. GeoGebra

De la multitud de software disponible como recurso tecnológico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas hay dos sistemas predominantes: los sistemas de álgebra computacional (CAS, por sus siglas en inglés), como Derive, Maple, Mathematica o Matlab, que operan mediante cálculo simbólico; y los software de geometría dinámica

(DGS, por sus siglas en inglés), como Cabri, Sketchpad o Cinderella, que se enfocan en las relaciones entre elementos geométricos (Hohenwarter y Jones, 2007). Muchos de ellos han evolucionado con el tiempo y han incluido aspectos de los otros sistemas para completarse.

De entre ellos, destaca GeoGebra, que es un software matemático de código abierto y libre que reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo, es decir, incorpora las funciones del CAS y del DGS.

GeoGebra ofrece representaciones diversas de los objetos desde todas sus perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas, y hojas de datos vinculadas dinámicamente:

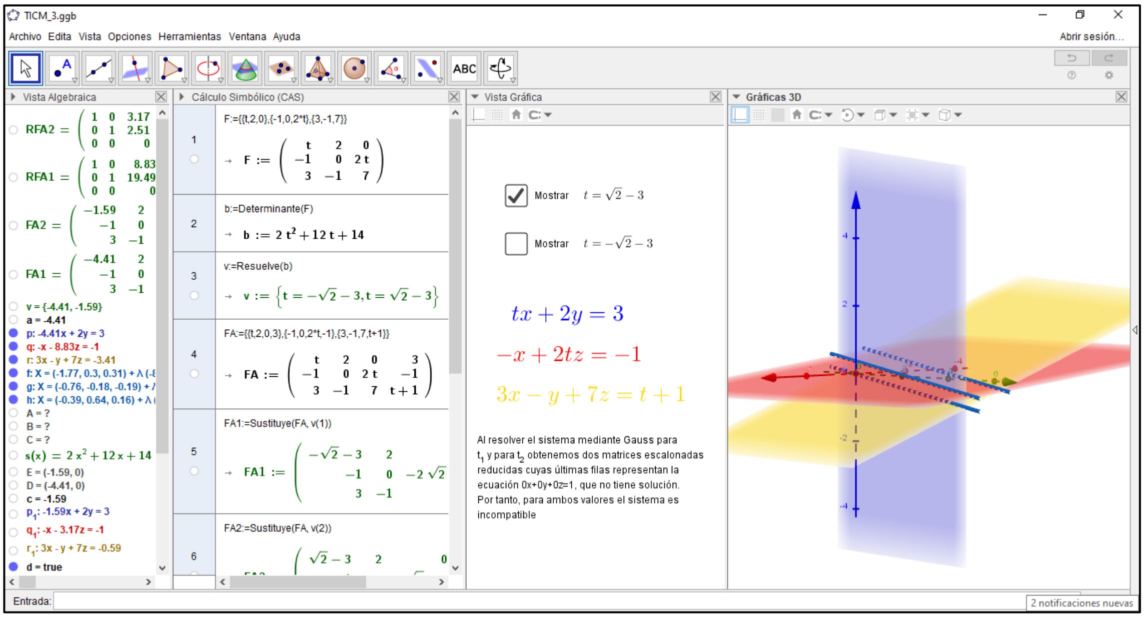


Figura 1. Captura de pantalla del software de GeoGebra y su Vista Algebraica, CAS, Gráfica y Gráfica 3D (de izquierda a derecha). Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 1 se muestra, a modo de ejemplo, un problema de discusión de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en función de un parámetro. En la pantalla se muestran cuatro de las vistas que ofrece el software y que complementadas dan una idea de la solución del problema de forma gráfica y analítica: de izquierda a derecha, la *Vista Algebraica*, la *Vista de Cálculo Simbólico* (CAS), la *Vista Gráfica* y la *Vista Gráfica 3D*.

En cada una de ellas se puede operar independientemente: en la *Vista Algebraica* se introducen las expresiones y operaciones en el espacio de entrada de la parte inferior mediante el teclado del ordenador o mediante un teclado que puede aparecer en la pantalla; en la *Vista CAS*, además de la manera anterior, se habilita una serie comandos específicos como la factorización o el cálculo de derivadas para facilitar el análisis matemático; los objetos declarados en estas dos ventanas se vinculan a las vistas gráficas (*Vista Gráfica*, *Vista Gráfica 2* y *Vista Gráfica 3D*) y se pueden visualizar geométricamente; estas tres ventanas cuentan con un abanico de creadores de elementos y de transformaciones para poder crearlos a partir de otros que también son vinculados a la *Vista Algebraica*; por último, cuenta con una ventana de *Hoja de Cálculo*, otra de *Calculadora de Probabilidad* y otra de *Protocolo de Construcción*, que posibilitan el trabajo en estos ámbitos, pero que para lo que interesa en este trabajo no son de utilidad.

GeoGebra ofrece también la posibilidad de crear un perfil para poder guardar en línea los trabajos realizados y compartirlos con la comunidad en formato *Applet*. Asimismo, permite agrupar varias *Applets* en *Libros* y crear *Clases* a partir de ellos. Los *Libros* plantean actividades y dan opción de introducir elementos como textos, imágenes o preguntas complementarias. Las *Clases* de GeoGebra permiten propuestas didácticas muy interesantes, ya que en ellas se da acceso a las actividades preparadas a las personas mediante un enlace, y desde el perfil del creador de dicha *Clase* se pueden monitorizar los avances de cada estudiante en cada actividad.

En resumen, este software nos da la posibilidad de conectar las diferentes representaciones de objetos geométricos como puntos, vectores, segmentos y rectas, que, a lo largo de la exposición del marco teórico ha surgido en diferentes ocasiones y se ha abordado desde distintas perspectivas, pero con objetivos didácticos de enorme relevancia.

3. EXPERIENCIA PREVIA MEDIANTE INTERVENCIÓN EN EL AULA

La idea primaria de la propuesta de este trabajo surgió a raíz de la intervención didáctica en las prácticas asociadas al módulo específico con un grupo de 4º de la ESO en Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. En base a la parte de la materia que estaba impartiendo la tutora, que había terminado de explicar la unidad de geometría analítica, y el interés hacia GeoGebra, se planteó la posibilidad de realizar una sesión de síntesis de contenidos en el aula de informática que les sirviera a los estudiantes como recurso para comprobar algunos conceptos mediante resolución gráfica. Le convenció el hecho de poder manipular elementos como puntos y vectores de forma visual para observar los cambios que tenían lugar en otros elementos y propiedades.

El planteamiento de la propuesta original consistía en una única sesión para desarrollar en el aula de informática con la idea de recoger en un *Applet* de GeoGebra los contenidos de la unidad didáctica de geometría analítica sintetizados, es decir, reservar la última sesión programada de la unidad didáctica para reforzar los contenidos que ya se habían visto en las sesiones previas.

La actividad propuesta se pudo llevar al aula, y, tras un análisis cualitativo posterior del transcurso de la sesión, fue perfilada, reestructurada y dividida en cinco actividades. A ellas se añadieron contenidos que completaron la unidad didáctica, se acompañaron con la teoría involucrada en cada contenido, y se incluyeron una serie de preguntas que permiten registrar las respuestas de los alumnos de la clase.

3.1. Propuesta didáctica inicial

La actividad inicial fue programada en GeoGebra y preparada como un *Applet* que puede encontrarse en el siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/xntcwdcz

El *Applet* está estructurado de la siguiente manera (Figura 2):

- La vista principal es la correspondiente a la *Vista Gráfica*, cuenta con unos ejes de coordenadas con fondo blanco y sin cuadrícula. Estos ejes pueden ser arrastrados con el cursor y se pueden alejar y acercar con el ratón del ordenador. En el origen de coordenadas hay dos puntos A y B.

- En la zona izquierda hay situados cuatro deslizadores y dos casillas de control (botones). Los deslizadores son barras con un círculo que se puede arrastrar sobre ella, y tienen asociados valores que varían con el deslizamiento. En este caso, los deslizadores representan las coordenadas x e y de los puntos A y B. Las casillas de control programadas permiten mostrar y ocultar el vector de posición asociado a los puntos definidos mediante los deslizadores de las coordenadas. El rango de valores que recorren es desde -10 hasta 10 de unidad en unidad.

- En la parte derecha de la vista se observa un menú con siete opciones asociadas a varios de los contenidos de la unidad didáctica de geometría analítica: suma de vectores, resta de vectores (dos restas diferentes), punto medio de un segmento, módulos de un vector, combinaciones lineales y rectas.

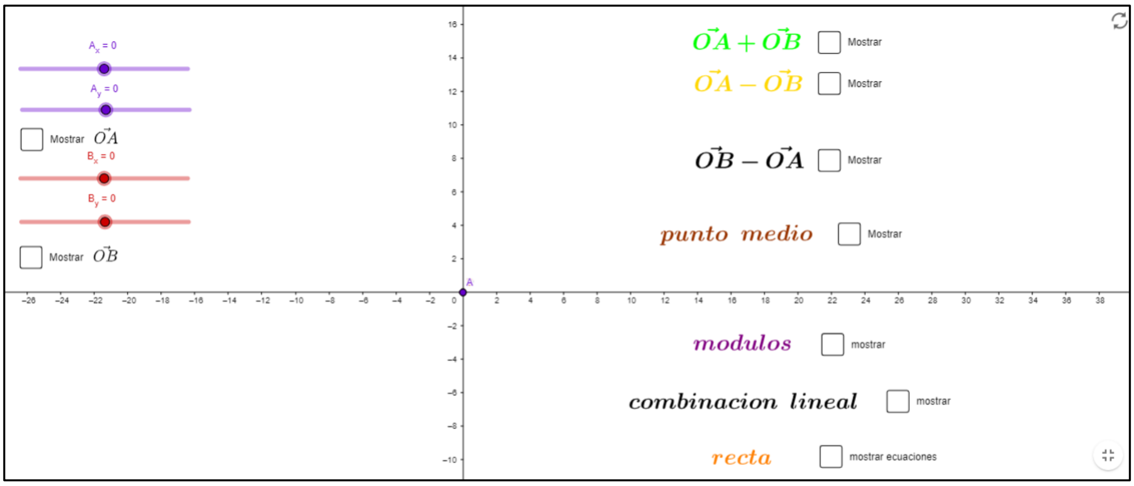


Figura 2. Vista inicial del Applet llevado al aula. Fuente: Elaboración propia.

Los contenidos de la actividad se desarrollan pulsando las casillas de control asociadas a cada uno de ellos:

- Al pulsar la suma de vectores se muestra gráficamente la regla del paralelogramo, que implica desplazar uno de los vectores a continuación del otro para obtener el vector suma resultante. Este vector (que aparece de color verde) tiene su origen en el origen de coordenadas, de modo que para comprobar el resultado de la suma basta con acercar el plano hasta visualizar el punto final del vector suma (Figura 3.a).

- Las casillas amarilla y negra habilitan la resta de vectores. Al pulsarlas se muestra la misma regla del paralelogramo que sirve en este caso para obtener el vector diferencia. Asimismo, aparece un deslizador que permite trasladar este vector hasta el origen de coordenadas para comprobar gráficamente sus coordenadas (Figura 3.b) Esta herramienta se puede emplear para reforzar el concepto de vector libre y vector equipolente.

- La casilla de punto medio muestra en marrón el punto medio del segmento $\overline{AB}$ (Figura 3.c)

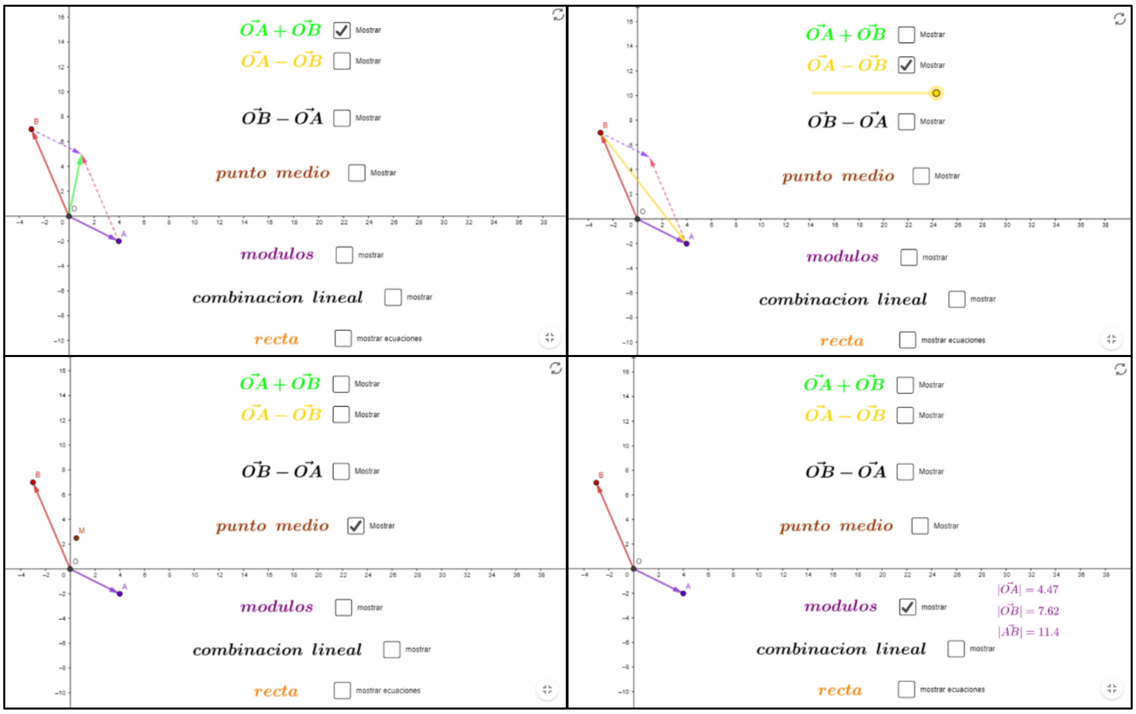


Figura 3. a) Arriba a la izquierda, suma de vectores. b) Arriba a la derecha, resta de vectores. c) Abajo a la izquierda, punto medio de un segmento. d) Abajo a la derecha, módulos de los vectores. Fuente: Elaboración propia.

- Al pulsar los módulos, se ha programado que aparezca el valor de los módulos de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$ (Figura 3.d).

- Al clicar sobre la casilla de combinación lineal desaparece el resto de los contenidos para dejar la pantalla vacía y poder destinarla al trabajo de este contenido concreto debido a su complejidad. Se habilitan dos deslizadores nuevos asociados a la creación de un nuevo punto P, con su correspondiente casilla de control que permite mostrar el vector de posición asociado (en color naranja). El objetivo de esta actividad es expresar este nuevo vector $\overrightarrow{OP}$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, de modo que hace falta encontrar los valores a y

b que satisfacen $\overrightarrow{OP} = a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}$. Para ello, se disponen otros dos deslizadores que representan las cantidades de a y b en turquesa y fucsia respectivamente (Figura 4). El cálculo analítico pretende ser comprobado gráficamente con esta herramienta, ya que se representan también en el plano dos vectores correspondientes a $a \cdot \overrightarrow{OA}$ y a $b \cdot \overrightarrow{OB}$ de estos mismos colores, y un vector suma de estos dos de color negro, que deberá coincidir con el vector $\overrightarrow{OP}$ para que los valores de a y b sean los correctos.

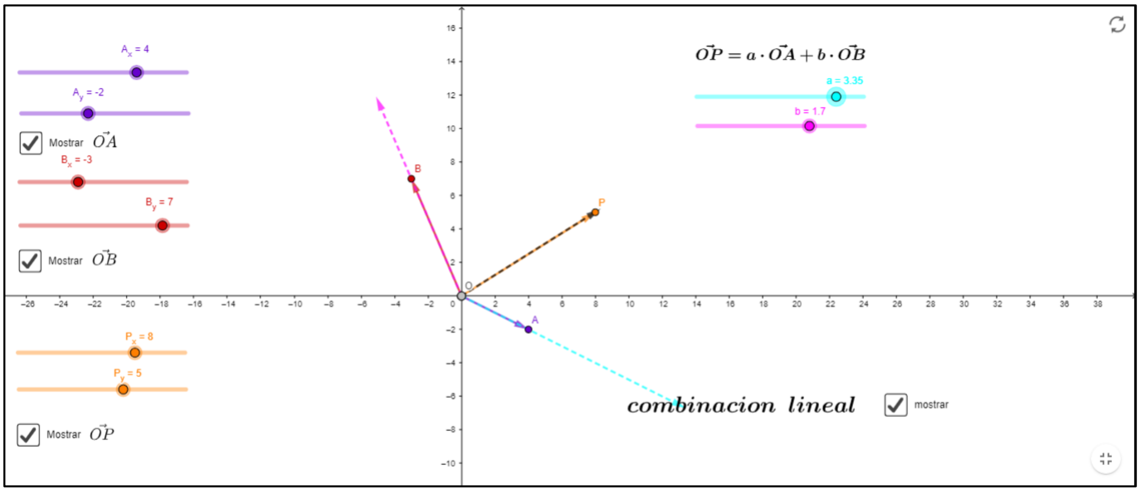


Figura 4. Combinación lineal de vectores. Fuente: Elaboración propia.

- La última casilla es la de las ecuaciones de la recta (Figura 5). Al pulsarla, vuelven a desaparecer los demás contenidos para limpiar la pantalla debido a la extensión de este apartado. Asimismo, se oculta el vector $\overrightarrow{OB}$ y se muestra el vector $\overrightarrow{AB}$, ya que con un vector de posición y uno de dirección es suficiente para determinar una recta. En la parte derecha, aparecen todas las ecuaciones de la recta: la vectorial, las paramétricas, la continua, la general y la explícita. También se habilita una casilla de control que permite mostrar la recta, que aparece de color naranja, un deslizador asociado al parámetro t, presente en las ecuaciones vectorial y paramétricas, y una casilla de entrada que pide el valor de la pendiente de la recta y da un *feedback* si es correcto el cálculo. Al modificar el parámetro t, se observa que el vector $t \cdot \overrightarrow{AB}$ también varía y, por tanto, así lo hace el vector

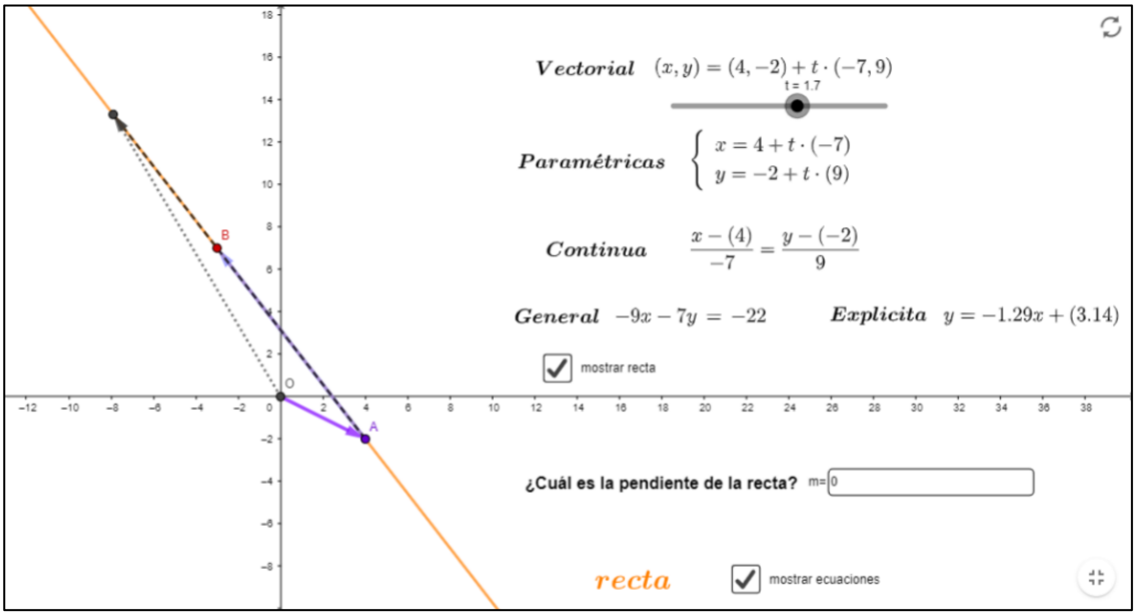


Figura 5. Ecuaciones de la recta. Fuente: Elaboración propia.

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{AB}$ (ecuación vectorial), que tiene como punto de origen en el origen de coordenadas y como punto final un punto (x,y) sobre la recta.

La ventaja didáctica que aporta esta actividad reside en poder observar geométricamente todas las operaciones mencionadas mientras se van variando los puntos mediante sus coordenadas de manera instantánea. Modificar valores y parámetros dinámicamente permite a los estudiantes interactuar directamente con las matemáticas, situándose como protagonistas de su propio aprendizaje. Además, de esta forma conseguimos vincular las representaciones gráficas y las analíticas de la geometría en esta unidad didáctica, proveyendo al alumno de diferentes herramientas para dar solución a un mismo problema o una misma cuestión.

Para asegurar esto, se preparó una hoja de ejercicios para la resolución analítica de las operaciones estudiadas en este *Applet* por parte de los alumnos con el objetivo de recogerla para su posterior evaluación (Figura 6). De esta manera, se podría garantizar que el alumno es capaz de realizar los cálculos analíticamente y que los ha comprobado mediante las herramientas TIC que se le han facilitado.

Actividad Geometría Analítica

Escoge 2 puntos A y B variando sus coordenadas:

$A = (\ , \ )$
$B = (\ , \ )$

Calcula el punto medio del segmento AB:

$M =$

Calcula los siguientes vectores:

$\vec{OA} + \vec{OB} =$

$\vec{AB} =$

$\vec{BA} =$

Calcula los módulos siguientes:

$|\vec{OA}| =$

$|\vec{OB}| =$

$|\vec{AB}| =$

Expresa el vector $\vec{OP} = (-4, -9)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{OA} = (-3, 2)$ y $\vec{OB} = (-1, 3)$

$\vec{OP} = a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB}$

Obtén razonadamente las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A y B (vectorial, paramétricas, continua y explícita):

Figura 6. Hoja de ejercicios para la actividad de GeoGebra. Fuente: Elaboración Propia.

3.2. Contexto

Contando con que la sesión dura 50 minutos, la distribución programada consistía en lo siguiente:

- Llegada al aula de informática y encendido de ordenadores (5 minutos).
- Explicación de los conceptos teóricos asociados a la actividad (5 minutos).

- Guía paso a paso de los siete apartados desde el ordenador del profesor, proyectándolo para toda la clase (10 minutos).

- Realización de la actividad por parte de los alumnos individualmente en su ordenador (30 minutos).

- Entrega de la hoja de ejercicios al final de la clase.

El grupo con el que se llevó a cabo la sesión contaba con 25 alumnos, muchos de ellos de diferentes procedencias. En el grupo había 5 repetidores, y el nivel general en matemáticas era bastante bajo. En la primera evaluación aprobaron la asignatura 6 personas (24%) y en la segunda evaluación lo hicieron 7 (28%). Debido a la situación sanitaria por la pandemia generada por la Covid-19, el escenario 2 que marcaba el protocolo determinaba que la docencia debía tener lugar de forma semipresencial para este grupo de alumnos, de tal manera que la mitad de la clase acudía al centro desde primera hora hasta cuarta (tras la cual había recreo y se marchaban a casa), y la otra mitad acudía desde quinta hasta séptima. La semana siguiente las mitades se alternaban y acudían complementariamente. Los alumnos que no atendían presencialmente lo hacían a través de la plataforma de *Classroom*, desde la que se grababa la clase en el aula en directo.

La distribución de horas semanales de matemáticas en este grupo era extraña, ya que las cuatro sesiones asignadas a este curso, se decidió establecer dos los lunes y dos los martes, todas antes del recreo, de modo que todas las semanas las horas de matemáticas eran impartidas íntegramente a una mitad de la clase.

Debido a esta configuración, se decidió llevar primero a cabo la sesión con una de las mitades, y la semana siguiente con la otra. Finalmente, por cuestiones de falta de tiempo para realizar exámenes conjuntos en aulas grandes y por cuestiones de falta de aulas de informática libres para la segunda mitad del alumnado, sólo fue posible realizar la propuesta didáctica con una de las mitades.

3.3. Puesta en práctica

Al inicio de la sesión, los alumnos se mostraron muy contentos de acudir al aula de informática, ya que en varias asignaturas esto era recurrente, pero en matemáticas era la primera vez que lo hacían.

Las explicaciones teóricas que realicé ya habían sido detalladas por mi tutora durante las dos semanas anteriores; no obstante, requerí de un tiempo mucho mayor al esperado para hacerlas, ya que la base de la que partían era casi nula, y la mayoría no se acordaba apenas de cómo hallar las coordenadas de un vector a partir de dos puntos. Las explicaciones fueron simultáneas a la exposición de la actividad con GeoGebra, demostrando que el proyector sirve como una herramienta muy buena para realizar apuntes.

A lo largo del tiempo que estuvieron manipulando el *Applet* autónomamente, les surgieron bastantes dudas, casi todas asociadas a conceptos teóricos que se habían puntualizado previamente, a las que se fue respondiendo mesa por mesa.

La mayoría de los alumnos no terminaron la hoja de ejercicios que se había planteado en el tiempo que duró la sesión, de modo que se les dejó terminarla en casa como tarea para ser recogida en la sesión siguiente. Finalmente, como no se realizó la sesión con la segunda mitad, y el objetivo principal era dar una herramienta de comprobación de cálculos de manera gráfica, no se pidió la hoja para su corrección, por lo que la intervención didáctica no se ha podido evaluar de una forma rigurosa, y las conclusiones parten del análisis cualitativo que se realizó tras el transcurso de la sesión, así como del *feedback* que dio la tutora.

3.4. Análisis de la sesión y conclusiones

Tras haber programado y haber llevado al aula la propuesta con el grupo mencionado previamente, vislumbré una serie de errores en la actividad y de estrategias didácticas que podían ser mejoradas:

- La Vista Gráfica del Applet es bastante caótica: tanto los textos asociados a los contenidos que se pretenden trabajar como los deslizadores de la parte izquierda, que están presentes en todos los apartados, están flotando sobre los ejes. Cuando se activa la casilla de recta, la recta se puede llegar a solapar con los textos causando confusión y malestar visual.

- La resta de vectores no se estudia normalmente mediante la regla del paralelogramo, es más útil explicar que consiste en sumar el vector opuesto al vector sustraendo, de modo que ese apartado podría mejorarse.

- En el punto medio del segmento sería conveniente graficar el segmento $\overline{AB}$ y ocultar los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, ya que no aportan nada en este apartado.

- La casilla de los módulos sirve exclusivamente como una calculadora, podría ser útil realizar alguna animación que comparara los tamaños de los vectores con un patrón de medida horizontal o vertical.

- En el apartado de combinación lineal, al llevar la actividad programada a la web como *Applet*, desaparecen los vectores equipolentes a $a \cdot \overrightarrow{OA}$ y a $b \cdot \overrightarrow{OB}$ que hacen de guía para la regla del paralelogramo, de modo que no se termina de visualizar correctamente la idea que tenía para esto.

- En el apartado de recta, quizás sería de utilidad comenzar mostrando la ecuación vectorial y a partir de ahí habilitar una casilla de control mediante la que se acceda a las ecuaciones paramétricas, etc.

- Hay bastantes contenidos de la unidad didáctica que no se refuerzan o no se hace explícitamente, como el producto de un número por un vector, el simétrico de un punto respecto de otro, el paralelismo y la perpendicularidad, las rectas paralelas al eje x y al eje y, y la ecuación de la circunferencia. Por consiguiente, sería interesante agrupar contenidos en varias actividades en lugar de juntarlos todos en una sola.

- Los estudiantes precisan mayor orientación para poder comprender en todo momento qué están haciendo y cuál es el objetivo de cada apartado. Además, reexplicar los contenidos durante la sesión quita demasiado tiempo, con el peligro de convertir la sesión TIC en una sesión tradicional expositiva. Por tanto, sería conveniente incluir la teoría como texto en cada una de las actividades mediante la posibilidad que ofrece el software. De este modo, se lograría incluso vincular mejor los elementos de la geometría analítica con sus representaciones geométricas.

- Dado que GeoGebra permite a su creador añadir preguntas en las actividades, sería conveniente plantear la evaluación de esta manera y eliminar la hoja de ejercicios que se había planteado originalmente para que se pueda realizar todo el trabajo en el ordenador.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA

La investigación realizada en las tres direcciones expuestas en el marco teórico del trabajo y las conclusiones extraídas de la experiencia piloto explicada en el apartado anterior han tenido como fin dotar a la propuesta de una justificación teórica y práctica que validara y orientara la programación de las actividades, así como los recursos empleados y las ideas perseguidas.

Tras los cambios realizados a posteriori en la actividad, la propuesta final es similar, ya que pretende sintetizar los contenidos mediante el empleo de las TIC, pero, en lugar de desarrollarse en una sesión, se programará para ser desarrollada en dos debido a la extensión de los contenidos.

4.1. Contenidos

Para la programación de la propuesta se han utilizado los contenidos explicados en el libro de texto de Anaya (Colera et al., 2016). La siguiente tabla (Tabla 2) muestra qué contenidos se sintetizan y se pretenden reforzar en cada una de las cinco actividades de la clase de GeoGebra:

Actividad		Contenidos
1	Operaciones con vectores	Coordenadas de un punto Concepto de vector Coordenadas de un vector Dirección y sentido de un vector Suma y resta de vectores Vectores que representan puntos (vectores de posición) Producto de un número por un vector
2	Propiedades de puntos, vectores y segmentos	Coordenadas de un vector Punto medio de un segmento Módulo de un vector Simétrico de un punto respecto de otro Puntos alineados
3	Combinación lineal	Coordenadas de un vector Producto de un número por un vector Suma de vectores Combinación lineal de vectores
4	Ecuaciones de la recta	Coordenadas de un vector Producto de un número por un vector Suma de vectores Ecuación vectorial de la recta Ecuaciones paramétricas de la recta Ecuación continua de la recta Ecuación explícita de la recta
5	Paralelismo y perpendicularidad	Coordenadas de un vector Ecuaciones de la recta Paralelismo y perpendicularidad Rectas paralelas al eje de abscisas Rectas paralelas al eje de ordenadas

Tabla 2. Contenidos cubiertos en cada actividad. Fuente: Elaboración propia.

Como es de esperar, algunos de ellos se repiten en varias actividades debido a que su complejidad y la de los contenidos va en progresión, y elementos que se introducen en los primeros apartados se requieren para el desarrollo de los siguientes.

4.2. Objetivos finales de la propuesta

La propuesta de intervención didáctica tiene tres objetivos que están relacionados y confluyen en el objetivo común de conseguir que los alumnos a los que está dirigida sean competentes en matemáticas al nivel de esta etapa, es decir, que tengan éxito en la adquisición de los contenidos propuestos en el currículo.

4.2.1. Programar dos sesiones de síntesis para reforzar los contenidos estudiados en la unidad didáctica

Una conclusión de la sesión en el aula llevada a cabo fue la observación de la necesidad de los alumnos de orientación recurrente del profesor. Por tanto, un requisito fundamental para la programación de la nueva propuesta es dotarla de una estructura más sólida mediante las herramientas que dispone GeoGebra, de modo que se facilite la navegación por las cinco actividades en las que se tiene pensado distribuirla, y se adjunte en cada una de ellas un texto orientativo con la teoría necesaria. Como se ha mencionado, el software permite elaborar texto e incluirlo junto al *Applet*, de modo que se han aprovechado los conceptos teóricos más importantes del libro de texto para trasladarlos a nuestra herramienta digital.

Es crucial para el éxito de la propuesta programar actividades en GeoGebra que puedan ser utilizadas autónomamente, es decir, sin necesidad de estar acompañada del libro de texto al que acudir cada vez que surge una duda, y que cubra los contenidos de una forma dinámica y concisa. Esto se consigue, también, programando la evaluación de las sesiones dentro de las propias actividades con la herramienta de inclusión de preguntas que habilita el software.

Por tanto, la estructura de cada una de las cinco actividades consistirá en una apartado teórico, un apartado práctico y manipulativo, y otro evaluativo.

Otro de los aspectos que se persiguen en las sesiones de síntesis de contenidos es el de cubrir la mayor parte del espectro de contenidos de la unidad didáctica, de modo que esto será un propósito importante de la programación. Asimismo, es necesario pensar qué preguntas son las más adecuadas dentro del contexto sintético de la propuesta para evaluar los conocimientos adquiridos.

La distribución de las actividades se realizará de la siguiente manera:

- Primera sesión: se explicará el funcionamiento y los objetivos de las dos sesiones, así como la forma de entrar a la Clase de GeoGebra y la navegación por las actividades. Si no tuvieran creada una cuenta de GeoGebra sería necesario crearla para que los resultados se guarden de un día a otro. Se realizarán las tres primeras actividades sobre *operaciones con vectores (1)*, *propiedades de puntos, vectores y segmentos (2)* y *combinación lineal (3)*. Con todo el tiempo de la sesión debería ser suficiente para responder a todas las preguntas propuestas, sin embargo, si para algún alumno no lo hubiera sido, estas podrían completarse en casa como tarea.

- Segunda sesión: a modo de continuación, se realizarán las dos actividades restantes: *ecuaciones de la recta (4)* y *paralelismo y perpendicularidad (5)*.

4.2.2. Contribuir al desarrollo de la competencia de aprender a aprender

De acuerdo con lo visto en el marco teórico, uno de los propósitos de la intervención didáctica es fomentar la autonomía del alumnado y evidenciar su autoconocimiento en relación con su método de aprendizaje. El horizonte de esta propuesta debería expandirse más allá de un ejemplo concreto ubicado en una unidad didáctica y establecerse como proyecto a lo largo de toda la programación del curso para contribuir realmente al desarrollo de la competencia de aprender a aprender.

Con todo ello, las dos sesiones preparadas y las cinco actividades digitales que las conforman deben realizar diferentes aportes a esta competencia de manera que se pueda apreciar su potencialidad como metodología docente sólida y comprometida con el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por tanto, un propósito fundamental es establecer un foco sobre las sesiones de síntesis en una unidad didáctica y de darles la relevancia que merecen, trasladando el protagonismo y la agencia en el aprendizaje al alumno en lugar de limitarse a exponer resumidamente los contenidos estudiados en las sesiones de aprendizaje y desarrollo. Esto, unido a la programación digital de la actividad, favorecerá seis aspectos clave de los siete que mencionaba Teixidó (2011) para el desarrollo de la competencia de aprender a aprender:

- El conocimiento y formulación de los objetivos de aprendizaje (2.2.a), ya que la estructuración de la actividad será clara y acorde a la secuenciación de contenidos durante las sesiones de aprendizaje y desarrollo.

- El desarrollo de habilidades cognitivas básicas que lo hagan posible (2.2.b), pues se reforzarán los conceptos geométricos elementales de forma visual (puntos, vectores, segmentos y rectas), y se recordará su expresión algebraica correcta.

- El conocimiento de las propias capacidades y limitaciones (2.2.c), para lo que será fundamental formular preguntas adecuadas que permitan plantearse al alumno si con las herramientas matemáticas y verbales que tiene es capaz de darles respuesta.

- El conocimiento de técnicas y estrategias (2.2.d), puesto que se propondrá acompañar los métodos analíticos estudiados con resoluciones y comprobaciones gráficas.

- El reconocimiento y regulación de aspectos emocionales (2.2.e), en tanto que el trabajo mediante metodologías diferentes a la tradicional previene la monotonía en la enseñanza. El trabajo tendrá como propósito potenciar la motivación por el aprendizaje mediante una metodología activa y contextualizada, hecho que se sugiere en la Orden ECD y que se ha podido corroborar durante la puesta en práctica previa en el aula con los estudiantes. Asimismo, al realizarse de forma individual, permite a los alumnos desarrollar la actividad a su ritmo y cometiendo errores en privado eliminando las posibles barreras originadas entre la resolución de problemas y el miedo al error.

- La creación de ambientes de aprendizaje (2.2.g), ya que, al programar Clases de GeoGebra online, el recurso podrá ser utilizado fuera de las aulas, permitiendo a los alumnos emplearlo en otros espacios como sus casas o en bibliotecas.

4.2.3. Alcanzar el tercer nivel de razonamiento de van Hiele

Para este objetivo es preciso elaborar una clasificación según los niveles de razonamiento de van Hiele de las diferentes tareas y problemas que se plantean en relación con el contenido expuesto para esta propuesta. Para ello, se ha recurrido al apartado 2.4.2 del marco teórico y se ha explorado la propuesta de Khalil et al. (2017), tratando de asociar las tareas pensadas con sus ideas (Tabla 3):

Nivel de razonamiento de van Hiele		Tareas esperadas
1	Visualización	Identificar la representación geométrica de puntos, segmentos, vectores y rectas como tales elementos (o mediante definiciones más vagas, como flechas para vectores o líneas para rectas), sin mayor descripción de sus propiedades. Identificar la representación analítica de puntos $P(P_x, P_y)$, vectores $\vec{u}(u_x, u_y)$ y rectas $y = mx + n$ como tales elementos, sin mayor descripción de sus propiedades.
2	Análisis	Comprender el significado de las coordenadas de un punto y un vector en su forma geométrica y analítica. Comprender el significado de módulo, dirección y sentido de un vector. Identificar los elementos geométricos de las ecuaciones de una recta: En su forma continua $y = mx + n$, m es la pendiente, n la ordenada en el origen y el par (x, y) es un punto de esa recta. En su forma vectorial $(x, y) = (p_1, p_2) + t(d_1, d_2)$, el primer paréntesis representa un vector de posición que lleva a un punto cualquier sobre la recta, el segundo, un vector de posición hacia un punto concreto, y el tercero, un vector de dirección. En la misma línea sucedería con las ecuaciones paramétricas y la continua.

3	Clasificación	Comprender las diferencias entre vector de posición, vector fijo y vector libre. Asociar el concepto de vector de posición a vector que representa un punto. Comprobar si tres puntos están alineados. Comprobar si un vector es combinación lineal de otros dos. Deducir todas las ecuaciones de la recta a partir de dos elementos concretos que la definan, como dos puntos, un punto y un vector de dirección, o un vector de posición y uno de dirección. Comprender con ayuda gráfica que dos rectas con la misma pendiente son paralelas o coincidentes. Comprender con ayuda gráfica que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es $m_1 m_2 = -1$.
4	Deducción formal	Comprender y demostrar que es equivalente deducir las ecuaciones de la recta a partir de dos puntos, a obtenerlas de un punto y un vector director, y a hacerlo de un vector director y un vector de posición. Obtener la pendiente de una recta y su ordenada en el origen en función de dos puntos $A(A_x, A_y)$ y $B(B_x, B_y)$ cualesquiera. Emplear los conceptos trigonométricos estudiados en este curso para demostrar que dos rectas son perpendiculares a partir de sus vectores directores, o de dos puntos de cada una.
5	Rigor	No se plantean tareas para este nivel, pues está fuera del alcance de los alumnos de secundaria.

Tabla 3. Tareas esperadas para cada nivel de razonamiento de van Hiele. Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, el último de los objetivos radica en conseguir que los alumnos sean capaces de realizar todas las tareas asociadas al tercer nivel de razonamiento de van Hiele.

4.3. Competencias involucradas

Aunque la propuesta didáctica es breve y está orientada a abarcar únicamente dos sesiones, promueve el trabajo significativo de cuatro competencias clave de las siete contempladas en el currículo: la competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología (CMCT), la competencia lingüística (CL), la competencia de aprender a aprender (CAA) y la competencia digital (CD).

La contribución a la CMCT es más que evidente observando los contenidos que se van a cubrir. Aun así, tal y como se explica en el currículo (RD 1105/2014):

> "La competencia matemática […] se desarrolla especialmente gracias a la contribución de la asignatura de Matemáticas. Esta competencia […] engloba los siguientes aspectos y facetas: pensar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas, utilizar los símbolos matemáticos, comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas, y utilizar ayudas y herramientas tecnológicas." (p. 389).

Todas estas son facetas que se desarrollarán durante las sesiones de síntesis.

Acerca de la CL, en la misma referencia se afirma que "en este proceso de resolución e investigación están involucradas muchas otras competencias, además de la matemática, entre otras la comunicación lingüística, al leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos." (p. 389).

Por tanto, se incluirán preguntas que requieran algún tipo de razonamiento verbal por parte de los estudiantes.

Sobre la CAA ya se ha escrito en el apartado anterior: la contribución a ella se ha desarrollado y tratado como uno de los objetivos fundamentales de la propuesta.

La contribución a la CD es también evidente, ya que el recurso vehicular de la intervención será GeoGebra, al que se accede mediante el ordenador.

4.4. Criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables

Los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables que contempla el currículo vigente asociados a la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas para 4º de la ESO para el espectro de conocimientos que se pretende abarcar con la propuesta se dividen en dos bloques. En la Tabla 1 del apartado 2.3. de este trabajo están aquellos incluidos en el bloque 3 de geometría. En la Tabla 4, a continuación, se recogen aquellos incluidos en el bloque 1 de procesos, métodos y actitudes en matemáticas que tienen relación con la propuesta:

Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado: (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc. Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de	1. Expresar verbalmente, de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. 6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada. 2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 4.1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución. 4.2. Se plantea nuevos problemas, a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, resolviendo otros problemas parecidos, planteando casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad. 6.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 6.2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.

resolución, etc. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 11. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 12. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 8.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada. 8.3. Distingue entre problemas y ejercicios y adopta la actitud adecuada para cada caso. 8.4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas. 10.1. Reflexiona sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares. 11.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 11.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 11.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 12.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

Tabla 4. Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables del bloque de procesos, métodos y actitudes matemáticas para Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de cuarto de la ESO. Fuente: Real Decreto 1105/2014.

4.5. Propuesta didáctica final

Las dos sesiones definitivas se estructuran en una única *Clase* de GeoGebra con cinco actividades y se puede encontrar en el siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/classroom/ty9eqkza

Para que los progresos de las sesiones se guarden será necesario acceder a la *Clase* con una cuenta de GeoGebra. De lo contrario habrá que entrar como invitado cada vez que se quiera utilizar la actividad.

El primer menú ofrece una vista dinámica por los cinco apartados de la *Clase* por los que se puede navegar (Figura 7).

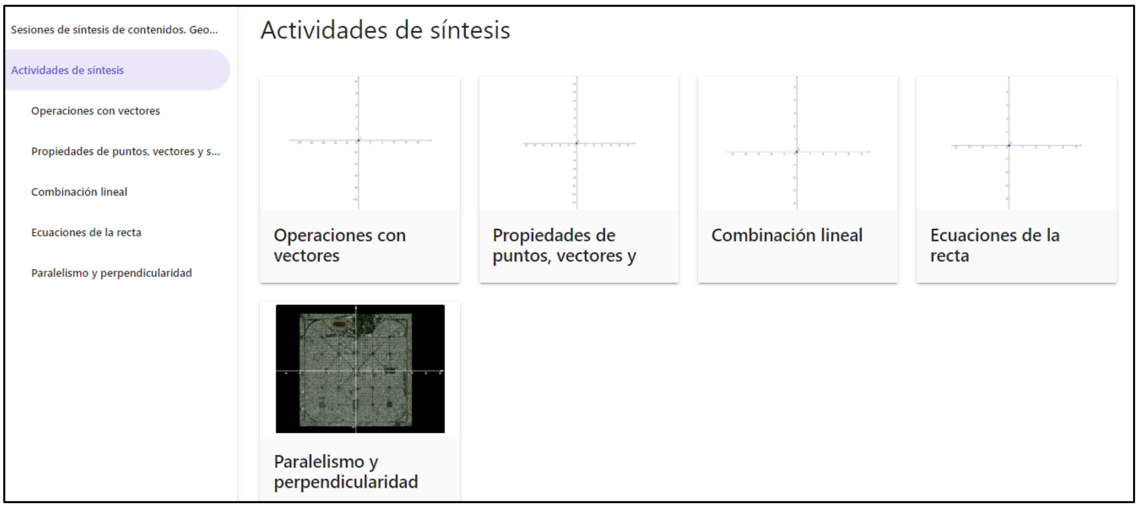


Figura 7. Menú principal de las actividades de síntesis de la Clase de GeoGebra. Fuente: Elaboración propia.

En esta ocasión se ha optado por programar todos los *Applets* de la *Clase* con dos vistas gráficas (*Vista Gráfica*, a la izquierda, y *Vista Gráfica 2*, a la derecha) para evitar que los elementos geométricos se solapen con las casillas de control, textos y deslizadores que se van desplegando.

La teoría que se ha incluido en cada una de las actividades se adjunta en el anexo de este trabajo.

4.5.1. Operaciones con vectores

En esta sección se incluyen los mismos deslizadores asociados a las coordenadas de los puntos *A* y *B* que se habían utilizado en la propuesta inicial, con sus correspondientes casillas de control para mostrarlos. Los apartados para la representación geométrica de operaciones son:

- Suma del vector $\overrightarrow{OA}$ y el $\overrightarrow{OB}$, en la que se muestra la regla del paralelogramo, tal y como se mostraba en la idea inicial.

- Resta del vector $\overrightarrow{OA}$ menos el $\overrightarrow{OB}$, en la que ya no se muestra la regla del paralelogramo, sino que se dispone el vector $-\overrightarrow{OB}$ a continuación del $\overrightarrow{OA}$ para mayor sencillez y ajuste al modo explicado normalmente.

- Resta del vector $\overrightarrow{OB}$ menos el $\overrightarrow{OA}$, en la que ya no se muestra la regla del paralelogramo, sino que se dispone el vector $-\overrightarrow{OA}$ a continuación del $\overrightarrow{OB}$.

- Producto de un escalar k por el vector $\overrightarrow{OA}$, que al seleccionarse habilita un deslizador en representación del valor de k. El vector $k \cdot \overrightarrow{OA}$ se muestra en azul claro en la *Vista Gráfica* y varía con el desplazamiento del deslizador (Figura 8).

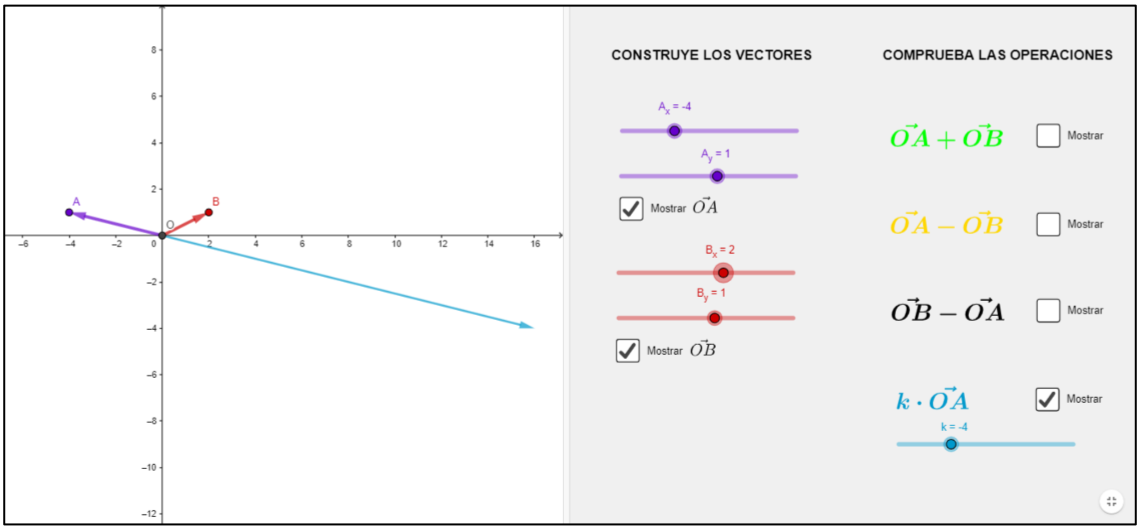
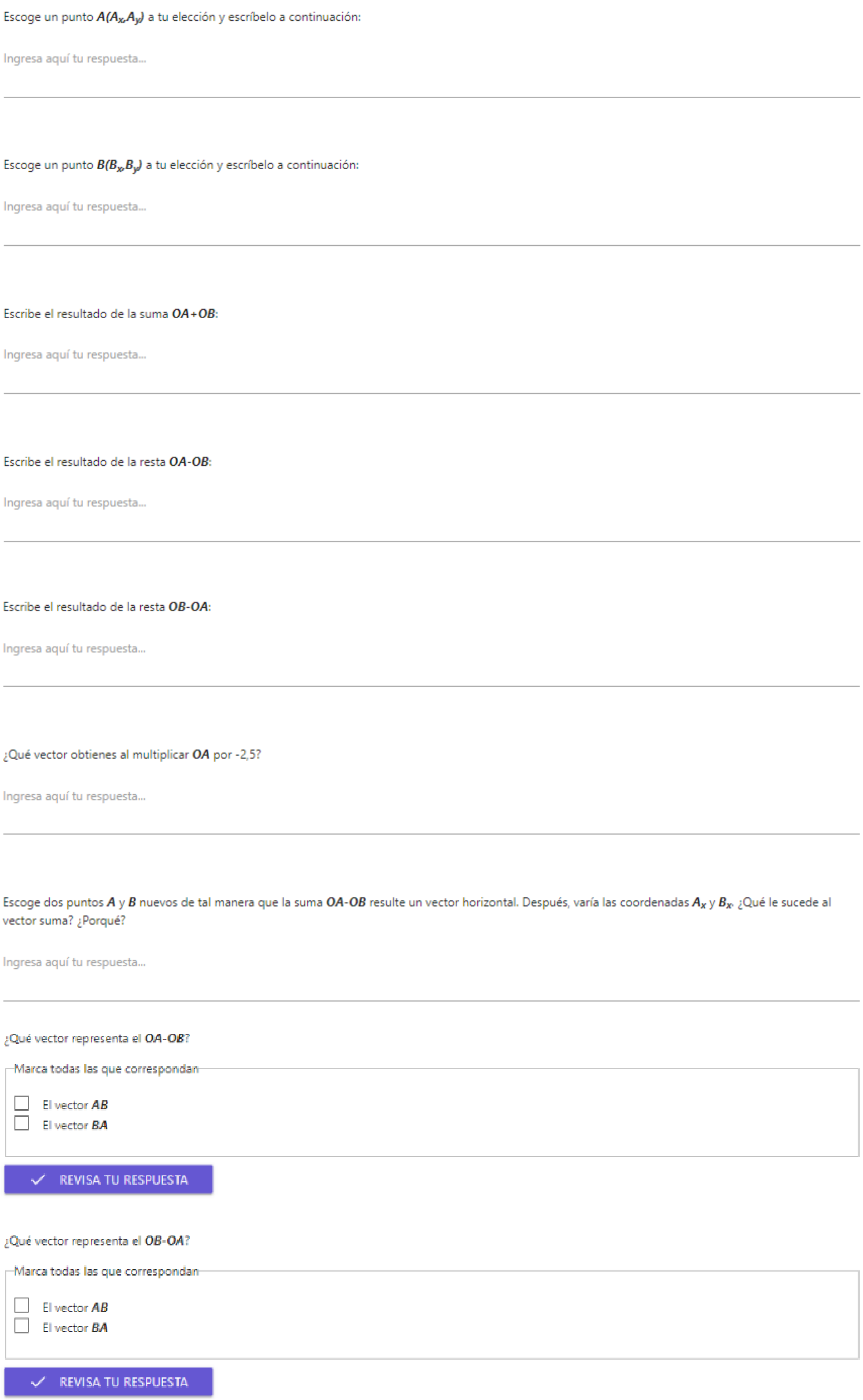


Figura 8. Producto de un escalar por un vector. Fuente: Elaboración propia.

El enunciado de la actividad pide a los estudiantes observar y manipular todo lo posible, así como responder a las siguientes cuestiones, que han sido diseñadas para que comprendan la utilidad de las herramientas manipulativas que se ofrecen (Figura 9).


Escoge un punto ***A*(A_x,A_y)** a tu elección y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

Escoge un punto ***B*(B_x,B_y)** a tu elección y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe el resultado de la suma ***OA+OB***:

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe el resultado de la resta ***OA-OB***:

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe el resultado de la resta ***OB-OA***:

Ingresa aquí tu respuesta...

¿Qué vector obtienes al multiplicar ***OA*** por -2,5?

Ingresa aquí tu respuesta...

Escoge dos puntos ***A*** y ***B*** nuevos de tal manera que la suma ***OA-OB*** resulte un vector horizontal. Después, varía las coordenadas A_x y B_x. ¿Qué le sucede al vector suma? ¿Porqué?

Ingresa aquí tu respuesta...

¿Qué vector representa el ***OA-OB***?

Marca todas las que correspondan

- [ ] El vector ***AB***
- [ ] El vector ***BA***

REVISA TU RESPUESTA

¿Qué vector representa el ***OB-OA***?

Marca todas las que correspondan

- [ ] El vector ***AB***
- [ ] El vector ***BA***

REVISA TU RESPUESTA

Figura 9. Preguntas de la actividad de Operaciones con vectores. Fuente: Elaboración propia.

4.5.2. Propiedades de puntos, vectores y segmentos

Junto a las coordenadas para la definición de los puntos A y B se contienen los siguientes apartados:

- Punto medio del segmento $\overrightarrow{AB}$, que, al seleccionarlo, oculta los vectores de posición $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, y muestra en marrón el segmento $\overrightarrow{AB}$, sobre el que sitúa su punto medio (Figura 10).

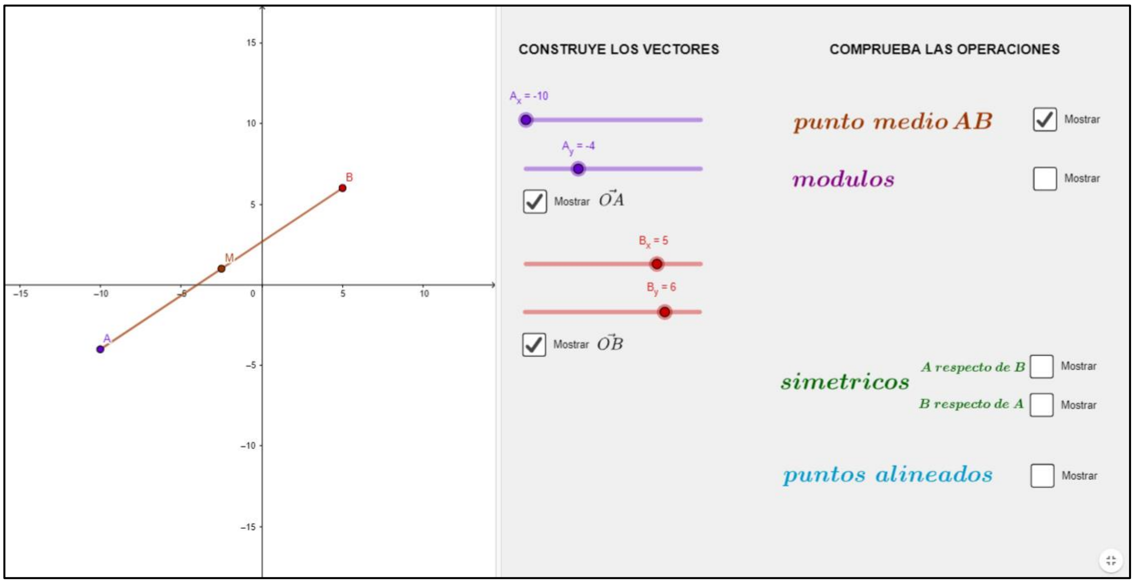


Figura 10. Punto medio de un segmento. Fuente: Elaboración propia.

- Módulos de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$. En esta ocasión se despliegan tres deslizadores que generan una animación que muestra los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{AB}$, respectivamente, rotando y desplazándose hasta caer sobre el eje positivo de las x con origen en el $(0,0)$ (Figura 11). Esto permite medir visualmente su valor y comparar sus longitudes (módulos de los vectores). Asimismo, cuando se desplaza el deslizador totalmente, aparecen los valores exactos de los módulos con dos cifras decimales en la *Vista Gráfica*.

- Punto simétrico de A respecto de B y de B respecto de A, que oculta los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ por claridad y muestra los puntos $SimA_B$ y $SimB_A$ en verde oscuro sobre la *Vista Gráfica* (Figura 12).

- Puntos alineados. En este apartado se habilita otro punto C mediante sus coordenadas y se muestra una recta con trazo discontinuo para comprobar si C está alineado con A y B (Figura 13).

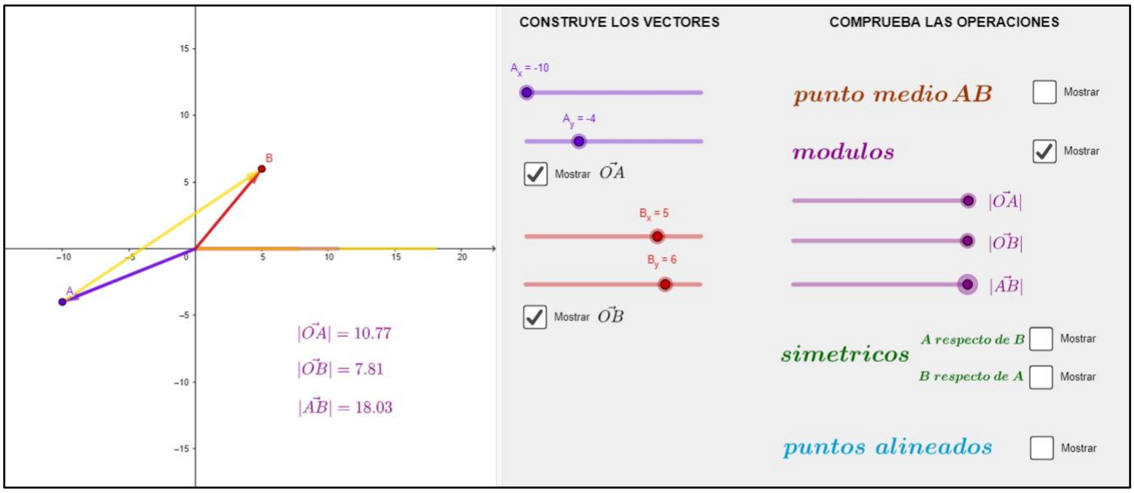


Figura 11. Módulos de los vectores. Fuente: Elaboración propia.

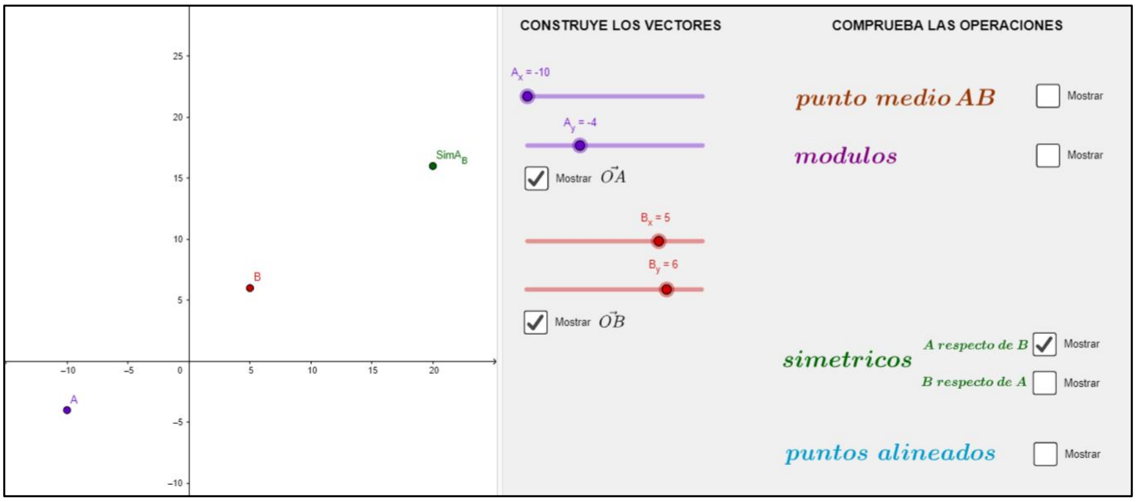


Figura 12. Simétrico del punto A respecto de B. Fuente: Elaboración propia.

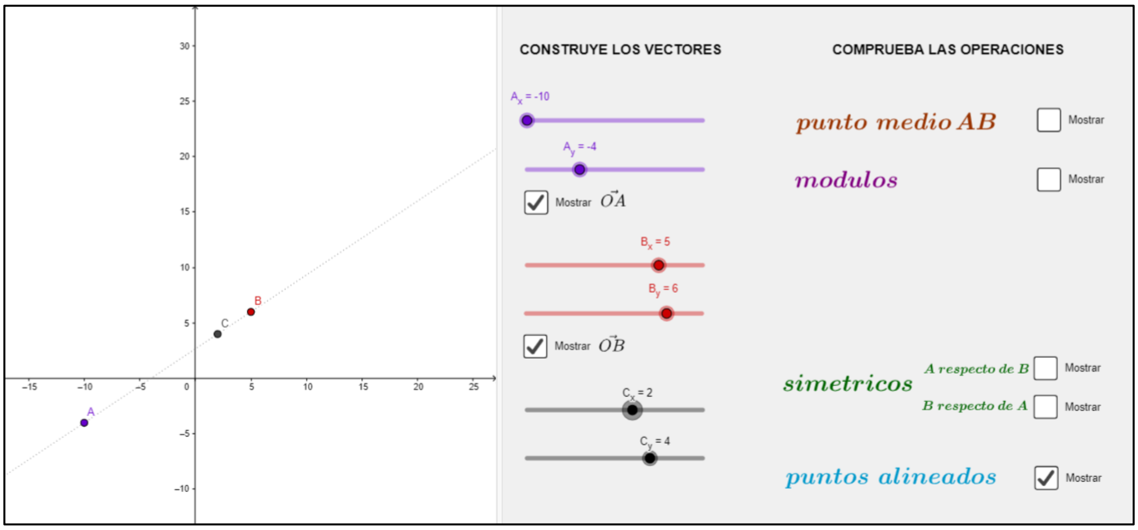


Figura 13. Puntos alineados. Fuente: Elaboración propia.

Las cuestiones asignadas a esta actividad para que sean completadas por los alumnos son las siguientes:

Escoge un punto $\boldsymbol{A(A_x,A_y)}$ a tu elección y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

Escoge un punto $\boldsymbol{B(B_x,B_y)}$ a tu elección y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

¿Cuál es el punto medio ***M*** del segmento ***AB***?

Ingresa aquí tu respuesta...

Obtén el valor del vector ***OA*** con tres decimales y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

Obtén el valor del vector ***OB*** con tres decimales y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

Obtén el valor del vector ***AB*** con tres decimales y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

¿Cuál es el punto simétrico de ***A*** respecto de ***B***?

Ingresa aquí tu respuesta...

¿Cuál es el punto simétrico de ***B*** respecto de ***A***?

Ingresa aquí tu respuesta...

Figura 14. Preguntas de la actividad de Propiedades de puntos, vectores y segmentos. Fuente: Elaboración propia.

4.5.3. Combinación lineal

La principal diferencia con el contenido de la propuesta inicial es que se ha incluido la regla del paralelogramo para una comprensión más sencilla del significado de combinación lineal. Los colores asignados a los deslizadores de los valores a y b son los mismos que los que se han utilizado para representar los vectores $a \cdot \overrightarrow{OA}$ y $b \cdot \overrightarrow{OB}$ con el objetivo de una visualización cromática del concepto (Figura 15).

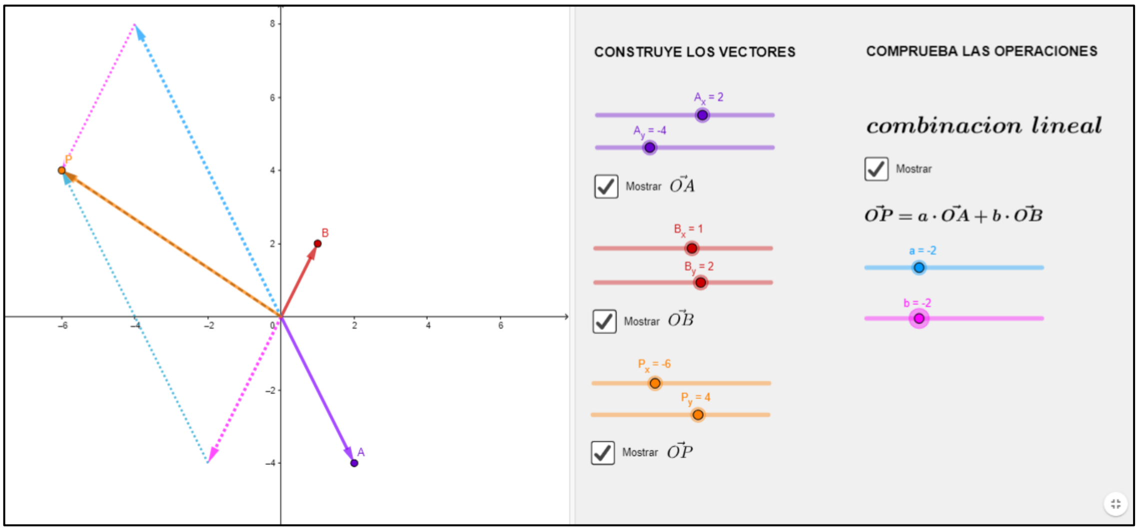


Figura 15. Combinación lineal de vectores. Fuente: Elaboración propia.

Las preguntas planteadas al final de la actividad son las siguientes:

Escoge un vector ***OB(B$_x$,B$_y$)*** cuyas coordenadas sean distintas a 0 y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

Escoge un vector ***OP(P$_x$,P$_y$)*** cuyas coordenadas sean distintas a 0 y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe el vector ***OP*** como combinación lineal de los vectores ***OA*** y ***OB*** elegidos y compruébalo en gráficamente.

Ingresa aquí tu respuesta...

Queremos expresar el vector ***OP(4,-10)*** como combinación lineal de los vectores ***OA(1,0)*** y ***OB(0,2)***, es decir ***OP=a · OA+b · OB***. ¿Cuánto vale ***a***?

Ingresa aquí tu respuesta...

¿Cuánto vale ***b***?

Ingresa aquí tu respuesta...

Escoge un vector ***OA(A_x,A_y)*** cuyas coordenadas sean distintas a 0 y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

Escoge un vector ***OB(B_x,B_y)*** cuyas coordenadas sean distintas a 0 y escríbelo a continuación:

Ingresa aquí tu respuesta...

Figura 16. Preguntas de la actividad de Combinación lineal. Fuente: Elaboración propia.

4.5.4. Ecuaciones de la recta

Esta actividad ha sido reestructurada para dotarla de carácter deductivo y secuenciado.

Presenta en la sección izquierda de la *Vista Gráfica 2* cuatro casillas de control para que sea el estudiante el que decida cuál de los dos vectores $\overrightarrow{OA}$ u $\overrightarrow{OB}$ desea utilizar como vector de posición, y cuál de los dos vectores $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{BA}$ desea utilizar como vector director (Figura 17). Esto se ha habilitado para que comprendan que no hay un único vector director ni un único vector de posición y no encasillarles didácticamente en un procedimiento exclusivo. En función de esta selección se muestran esos vectores sobre la *Vista Gráfica*.

A la derecha de los deslizadores de las coordenadas hay otras dos casillas de control, una para mostrar la recta que pasa por los puntos A y B, y otra para comenzar a visualizar analíticamente la ecuación vectorial de la recta. Al activar esta casilla se despliega la ecuación algebraica junto con un deslizador que representa el parámetro t, y una nueva casilla de control que permite mostrar las ecuaciones paramétricas. Variando este parámetro t se observa cómo el punto de la recta al que se llega mediante la ecuación vectorial se desplaza sobre la propia recta.

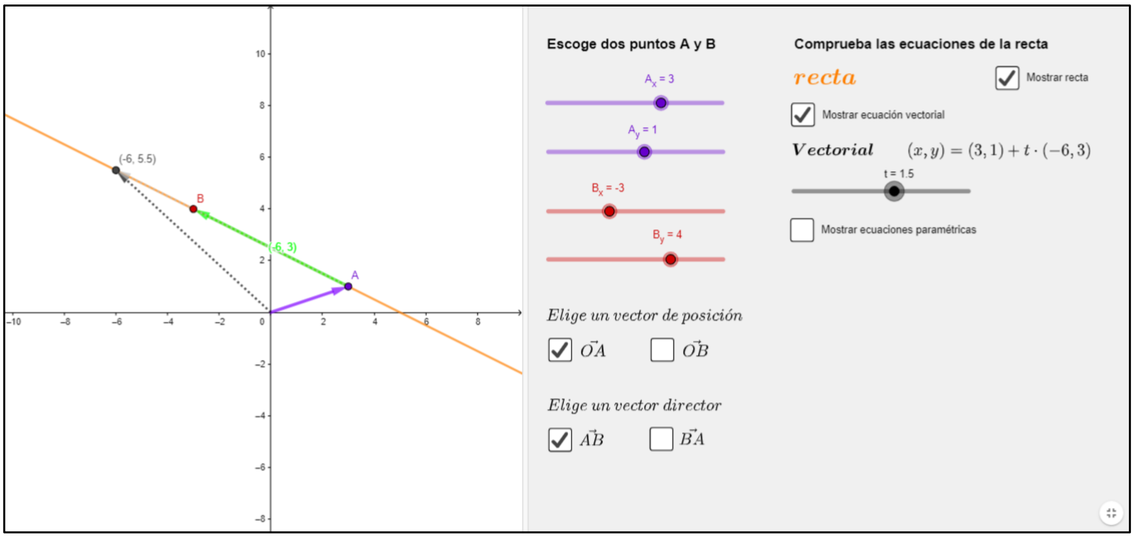


Figura 17. Actividad de Rectas con la ecuación vectorial desplegada. Fuente: Elaboración propia.

Se han incluido como rótulos de los vectores de interés y del punto generado por la ecuación vectorial sus coordenadas, de modo que se establece un vínculo directo entre la expresión gráfica y la algebraica.

Al seleccionar las ecuaciones paramétricas, estas se muestran en la pantalla y aparece una nueva casilla de control para mostrar la ecuación continua (Figura 18.a). Al seleccionar esta última, se muestra en la pantalla y se habilita la última casilla que muestra la ecuación explícita (Figura 18.b).

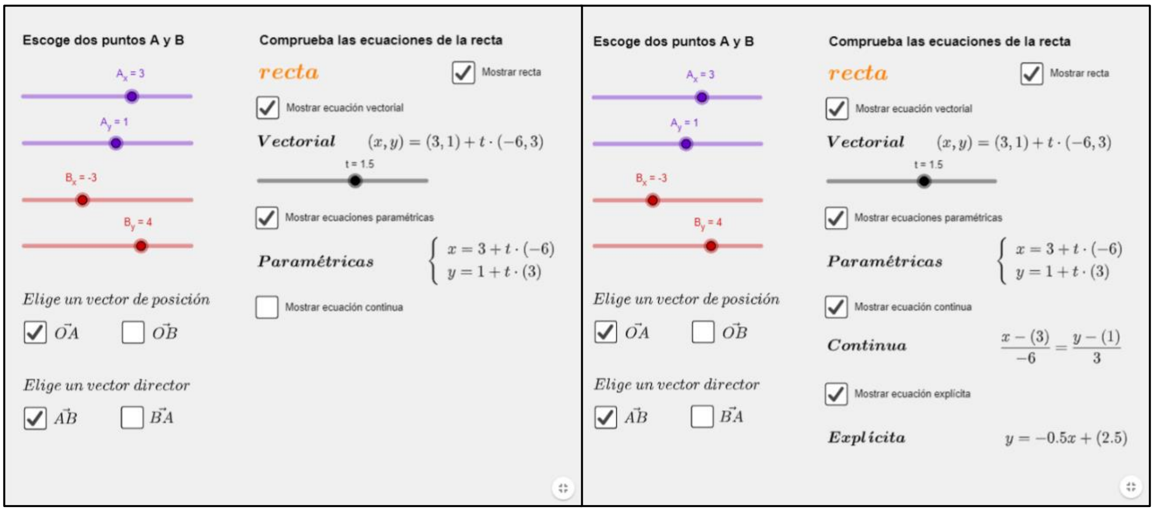


Figura 18. a) Izquierda, actividad de Rectas con las ecuaciones paramétricas desplegadas. b) Derecha, ecuación continua y explícita de la recta desplegadas. Fuente: Elaboración propia.

Uno de los objetivos es que visualicen todas estas ecuaciones de una misma recta seleccionando todas las combinaciones vector de posición-vector de dirección posibles y que observen que todas difieren en función de la combinación, pero que al llegar a la explícita esta expresión es independiente de los vectores utilizados.

Las cuestiones asociadas a esta actividad son las siguientes:

Escribe dos puntos ***A(Ax,Ay)*** y ***B(Bx,By)*** que determinen una recta con pendiente ***m = 0***.

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe dos puntos ***A(Ax,Ay)*** y ***B(Bx,By)*** que determinen una recta con pendiente ***m = -1***.

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe dos puntos ***A(Ax,Ay)*** y ***B(Bx,By)*** que determinen una recta con pendiente ***m = -0.5***.

Ingresa aquí tu respuesta...

Dados los puntos ***A(-13,12)*** y ***B(-5,8)***, escribe un vector director que determine una recta que pase por esos puntos:

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe la **ecuación vectorial** de la recta que pasa por ***A*** y ***B***.

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe las **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por ***A*** y ***B***.

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe la **ecuación continua** de la recta que pasa por ***A*** y ***B***.

Ingresa aquí tu respuesta...

Escribe la **ecuación explícita** de la recta que pasa por ***A*** y ***B***.

Ingresa aquí tu respuesta...

Figura 19. Preguntas de la actividad de Ecuaciones de la recta. Fuente: Elaboración propia

4.5.5. Paralelismo y perpendicularidad

Un apartado importante que había quedado sin ver en la propuesta original era el paralelismo y perpendicularidad de las rectas. La actividad que se ha programado para cubrirlo tiene un componente lúdico que la diferencia de las otras cuatro. En ella se plantea un problema de enunciado con el objetivo de motivar la enseñanza de estos contenidos y asociarlos a un problema real. Asimismo, se contemplan las ecuaciones de las rectas paralelas al eje x y las paralelas al eje y. El enunciado del problema es el siguiente:

El alcalde de la ciudad argentina de La Plata está hecho un lío. Desde su gabinete de urbanismo han trazado las rectas correspondientes a las avenidas principales sobre el mapa de la ciudad para hacer un estudio de la iluminación nocturna. Ahora necesita escribir las ecuaciones de dichas rectas en un informe y te lo ha pedido a ti, que encima te estás jugando el contrato. Por suerte, el becario anterior programó un Applet de GeoGebra que te puede resultar muy útil para tu trabajo. Encuentra las familias de rectas paralelas entre sí y sus vectores directores para desbloquear unos analizadores. Escribe a continuación las ecuaciones de cada recta y responde a las preguntas siguientes.

En la *Vista Gráfica* se observa la imagen del mapa de la ciudad de La Plata (Argentina) sobre unos ejes coordenados, de modo que el centro de la ciudad se corresponde con el origen de coordenadas.

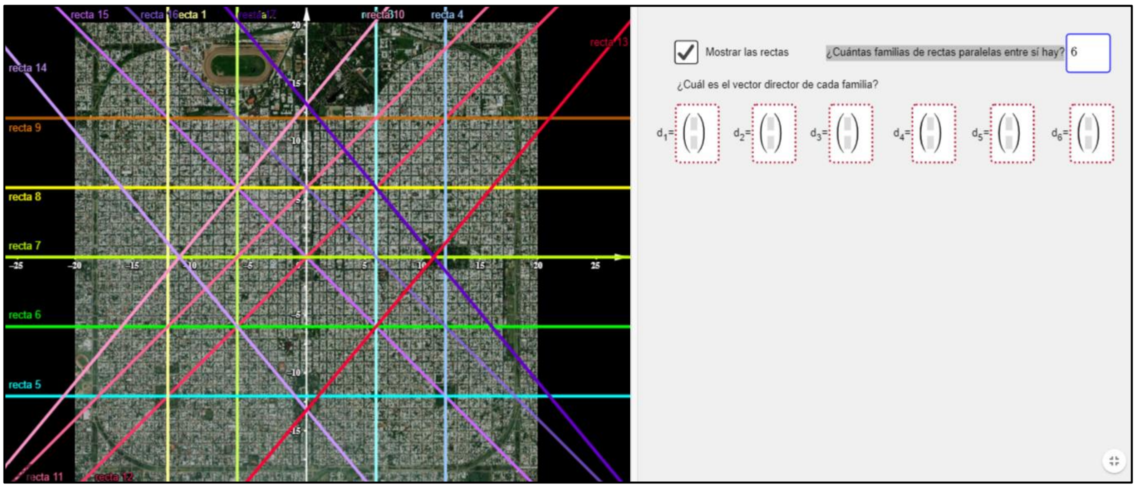


Figura 20. Mapa de la ciudad con las rectas y las casillas de los vectores desplegadas. Fuente: Elaboración propia.

En la *Vista Gráfica 2* se observa una casilla de control que nos permite mostrar todas las rectas asociadas a las avenidas principales, y una casilla de entrada en la que se pregunta por el número de familias de rectas paralelas de entre todas ellas y los alumnos deben escribirlo numéricamente (Figura 20).

En función del número que se escriba se despliegan tantas casillas de entrada. En ellas se piden los vectores directores de cada una de las familias. Este concepto es útil, ya que se está indicando y reforzando que todas las rectas paralelas están originadas por el mismo vector director. El resultado correcto es 6, aunque si un alumno se equivoca y escribe menos comprobará a posteriori que le falta alguna familia por contar.

Para calcular dichos vectores directores es necesario encontrar dos puntos de cada recta de una familia, y una vez calculado, se escribirán sus coordenadas en las casillas que aparecieron previamente. Debajo de estas aparecerá un texto con el valor de la pendiente m del vector que se acaba de escribir.

Cada vez que uno de estos vectores sea correcto, se mostrará en el mapa una recta blanca paralela a este vector director y se desplegará en la *Vista Gráfica 2* un deslizador que desplaza a dicha recta a lo largo de todo el mapa (Figura 21). Esta recta blanca es la que en el enunciado se ha denominado analizador, y es muy útil, ya que permite hacerla coincidir con todas sus rectas paralelas (seleccionando la casilla de control *"Mostrar sólo rectas paralelas"*, para no confundirse con las demás rectas) y comprobar su ecuación explícita asociada, que es la que se pide en las preguntas

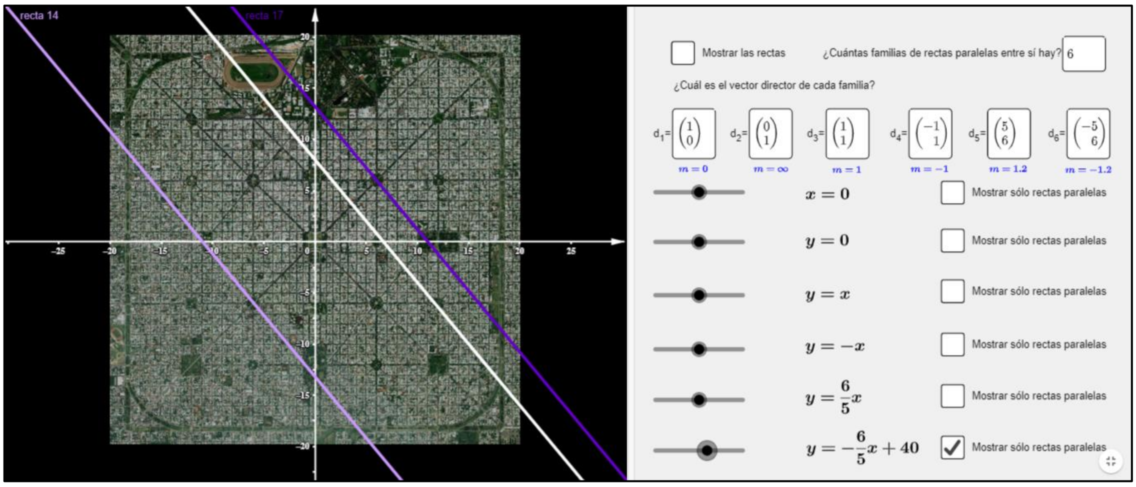


Figura 21. Deslizadores de cada analizador de rectas desplegado. Fuente: Elaboración propia.

Las cuestiones finales consisten en escribir las ecuaciones explícitas de las diecisiete rectas que hay sobre el mapa y otras tres preguntas sobre perpendicularidad:

Figura 22. Preguntas de la actividad de Paralelismo y perpendicularidad. Fuente: Elaboración propia.

4.5.6. Menú del profesor

Al finalizar todas las actividades respondiendo a todas sus preguntas, el profesor dispondrá en su perfil de GeoGebra de las respuestas registradas de todos los estudiantes que la han realizado. El menú que observa el profesor se muestra en la Figura 23.

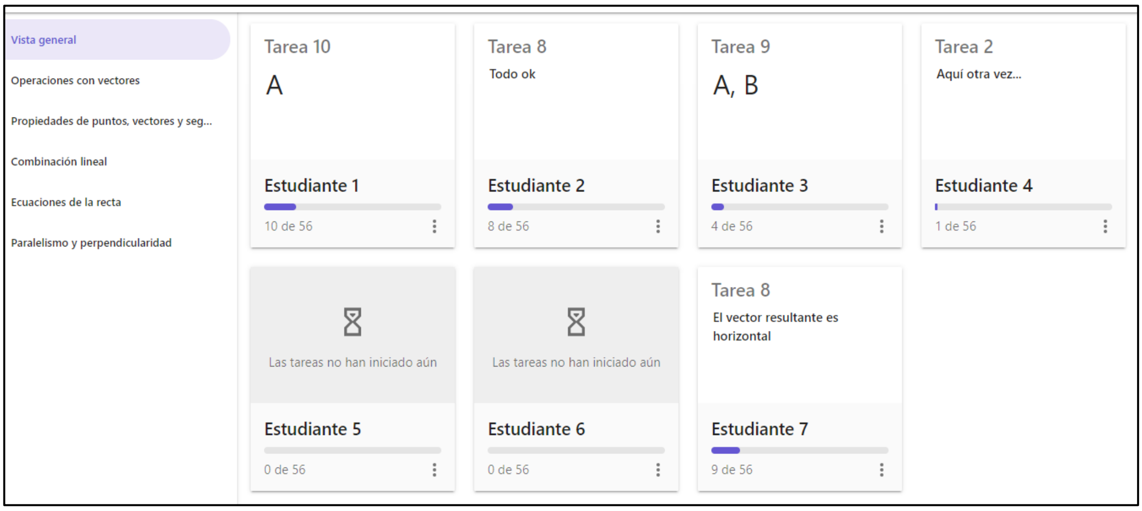


Figura 23. Respuestas registradas de los alumnos en el perfil de GeoGebra del profesor. Fuente: Elaboración propia.

Desde aquí puede evaluar las respuestas de cada alumno individualmente, o bien seleccionar cada actividad para ver las respuestas que se han dado a cada una de sus preguntas. Asimismo, puede monitorizar las preguntas durante el desarrollo de las sesiones para comprobar el progreso de sus alumnos.

5. CONCLUSIONES

La propuesta didáctica inicial y la intervención en el aula con el grupo de 4º de la ESO durante el período de prácticas, expuesta en el tercer apartado del TFM, han delimitado las líneas principales del trabajo. Con la convicción y la comprobación de que el proceso de enseñanza-aprendizaje es más complejo de lo que se imagina, se han realizado tres investigaciones confluyentes que estructuraran los principales obstáculos, dificultades, características y mecanismos del razonamiento matemático geométrico y del proceso de aprendizaje en general de los estudiantes. Las primera de ellas ha perseguido mostrar que la docencia de las asignaturas abarca más competencias que las dictadas por los contenidos de las unidades didácticas, en especial, se ha remarcado la relevancia de la competencia de aprender a aprender. La segunda de ellas ha tenido como fin explorar qué aspectos de la geometría analítica pueden resultar conflictivos a la hora de introducirse en la etapa de interés. La tercera de ellas ha tratado de dar un soporte tecnológico a modo de solución a las problemáticas estudiadas previamente.

Se ha destacado la importancia de ajustar los procesos educativos al mundo tecnológico actual, para lo que es crucial que se disponga en los centros de infraestructuras TIC adecuadas, así como que los docentes se formen para crear contenidos que se ajusten a las necesidades de su alumnado.

La propuesta didáctica pretende ser una referencia de esto mismo. Se han elaborado cinco actividades que cubren casi la totalidad de los conceptos del temario y se ha decidido programarlas para dos sesiones de síntesis. Aprovechando la posibilidad de compartir el *Libro* asociado a la *Clase* que se ha creado, se ha publicado en la red para que el resto de la comunidad de GeoGebra pueda utilizarlo siempre que quiera.

El proceso llevado a cabo ha servido para indagar en el funcionamiento de este software, que se ha escogido por sus ventajas y sus prestaciones a nivel geométrico y algebraico, además de ser gratuito y accesible a todo el mundo.

En relación con el razonamiento geométrico estudiado, se ha realizado una correspondencia entre las tareas esperadas para cada nivel de van Hiele que tuvieran cabida en el marco de criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables fijados por el currículo.

Asimismo, para completar el trabajo sería conveniente diseñar una evaluación de la actividad que asignara una correspondencia entre las respuestas de los alumnos a las actividades digitales y a las actividades en otras pruebas escritas de la unidad didáctica al grado de logro de las tareas vinculadas con cada nivel de van Hiele.

El objetivo último de la propuesta final es llevarla al aula para observar y analizar las dificultades que tienen lugar el transcurso de las dos sesiones. De esta manera se podría valorar si es necesaria la inclusión de elementos extra como una cuadrícula en los ejes coordenados, o casillas de control para mostrar los resultados de algunas operaciones para facilitar visualmente las tareas y el propósito de comprobación de resultados gráficamente.

Por último, sería de enorme utilidad plantear una evaluación para que los alumnos valoren en qué medida las propuestas de este estilo les motivan en su aprendizaje y para que evalúen cuánto uso hacen de ellas de cara a las pruebas escritas.

5.1. Líneas de investigación futuras

Con el objetivo de desarrollar una continuación próxima del trabajo y establecer un marco didáctico que pudiera englobar la propuesta, así como perfeccionarla, se han establecido una serie de líneas de investigación de cara al futuro:

- Plantear la propuesta en el marco de una unidad y una programación didácticas que desarrollen una metodología en la línea de esta propuesta, en la que se trabaje con TIC y se incida en la importancia de las diferentes representaciones de las matemáticas para facilitar a los estudiantes la adquisición de conocimientos y de la percepción de su aprendizaje.

- Diseñar y programar sesiones de síntesis mediante GeoGebra y otros software matemáticos en la línea de las que han sido propuestas aquí para el resto de las unidades didácticas de este curso.

- Diseñar y programar sesiones de síntesis mediante GeoGebra de geometría analítica para Matemáticas I y Matemáticas II, de 1º y 2º de Bachillerato respectivamente. En este último curso se utilizaría la *Vista Gráfica 3D*, explorando otra herramienta más de GeoGebra.

- Determinar si algunas características de esta propuesta como la de consistir en trabajo individual y fácil de evaluar por el propio alumnado, así como su estructuración clara y sencilla, promueve la atención a la diversidad.

- Estudiar las alternativas que se les puede ofrecer a alumnos que no dispongan de ordenador o conexión a Internet en sus casas.

- Siendo más ambicioso, se podría plantear una investigación similar a la que realizaron Khalil et al. (2018), para medir el grado en que una metodología en la que se diseñen y programen recursos digitales con GeoGebra y otros software orientados a la enseñanza mediante TIC mejora el rendimiento académico en esta materia en relación con el aprendizaje mediante una metodología tradicional.

6. BIBLIOGRAFÍA

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz, J.M. (2019). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. *Ed. Síntesis.*

Arias, J.M. y Maza, I. (2005). Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en Matemáticas para la ESO y los Bachilleratos. *La gaceta de la RSME*, *9*(1), 223-243.

Bakar, K.A., Ayub, A.F.M., Luan, W.S. y Tarmizi, R.A. (2010). Exploring secondary school students' motivation using technologies in teaching and learning mathematics. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 2*, 4650–4654.

Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, J.M. y Colera R. (2016). Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 4 ESO. Aprender es crecer en conexión. *Ed. Anaya*, 166-178.

Comisión Europea (2006). Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente (2006/962/CE). *Diario Oficial de la Unión Europea*, 10-18. https://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:ES:PDF

Cuesta, H., Aguiar, M.V., y Marchena, M.R. (2015). Desarrollo de los razonamientos matemático y verbal a través de las TIC: descripción de una experiencia educativa. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 46, 39-50.

de Pablos, J., Colás, P. y González, T. (2010). Factores facilitadores de la innovación con TIC en los centros escolares. Un análisis comparativo entre diferentes políticas educativas autonómicas. *Revista de Educación*, *352*, 23-51.

Gaita, R.C. (2014). El paso de la geometría sintética a la geometría analítica. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

García, M.M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. Tesis doctoral. Universidad de Almería.

García, M.M. y Romero, I.M. (2009). Influencia de las Nuevas Tecnologías en la Evolución del Aprendizaje y las Actitudes Matemáticas de Estudiantes de Secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 369-396.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, 13-25.

González, P.M. (2008). Euler y la geometría analítica. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, *9*, 83-85

Gutiérrez, L., Martínez, E. y Nebreda, T. (2008). Las competencias básicas en las áreas de Matemáticas. *Cuadernos de Educación de Cantabria.* 22-23.

Hohenwarter, M. y Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126-131.

INE (Ed.) (2020). *Encuesta sobre equipamiento y uso de tecnologías de información y comunicación en los hogares*. Instituto Nacional de Estadística. https://www.ine.es/jaxi/Datos.htm?tpx=39526#!tabs-tabla

Khalil, M., Farooq, R.A., Çakıroğlu, E., Khalil, U. y Khan, D.M. (2018). The Development of Mathematical Achievement in Analytic Geometry of Grade-12 Students through GeoGebra Activities. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(4), 1453-1463.

Leung, F. (2006). The Impact of Information and Communication Technology on our Understanding of the Nature of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *26*(1), 29-35.

Ley Orgánica 2/2006 de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 103, de 3 de mayo de 2006.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado*, 295, de 10 de diciembre de 2013.

Martín, E. (2008). Aprender a aprender: clave para el aprendizaje a lo largo de la vida. *CEE Participación Educativa*, 9, 72-78.

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(1), 58-69.

NCTM (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OCDE (Ed.) (2005). *The definition and selection of key competencies*. Executive summary. http://www.oecd.org/dataoecd/47/61/35070376.pdf

OCDE (Ed.) (2018). *Resultados de PISA 2018*. Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_esp_ESP.pdf

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado, 25, de 29 de enero de 2015, 6991-7001.

Plaza de la Hoz, J. (2018). Ventajas y desventajas del uso adolescente de las TIC: visión de los estudiantes. *Revista Complutense de Educación*, *29*(2), 491-508.

Preiner, J. (2008). Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: The case of geogebra. Tesis doctoral. Universidad de Salzburgo, Austria.

Prensky, M. (2001). Digital Natives, Digital Immigrants. *On the Horizon*, *9*(2).

Radillo, M., Nesterova E.D., Ulloa, R. y Pantoja, R., (2005). Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas relacionados con deficiencias en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático y viceversa. *V Congreso Internacional Virtual de Educació*n. 7-27 de febrero de 2005.

Real Decreto 1105/2014, de 6 de diciembre, por el que se establece el currículo básico correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3, de 3 de enero de 2015.

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 5, de 5 de enero de 2007.

Rocosa, B., Sangrà, A. y Cabrera, N. (2018). La organización escolar y el desarrollo de la competencia de Aprender a Aprender: Un enfoque globalizador singular. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, 2, 31-51.

Schunk, D.H. y Zimmerman, B.J. (1997). Social origins of self-regulatory competence. *Educational Psychologist, 32*(4), 195-208.

Teixidó, J. (2011). "Aprendre a aprendre" a l'escola i a l'institut. Desenvolupament de la competència d' "aprendre a aprendre" a l'educació obligatòria. *Revista Catalana de Pedagogia*, 7, 137-162.

Toribio, L. (2010). Las competencias básicas: El nuevo paradigma curricular en Europa. *Foro de Educación*, *8*(12), 25-44.

Van Hiele, P. M. (1957). *De problematiek van het inzicht.* [Tesis doctoral no publicada], Universidad de Utrecht.

Van Hiele, P. M. (1958). La signification des niveaux de pensee dans l'enseignement par la methode deductive. *Mathematica & Pedagogia*, 16.

Van Hiele, P. M. (1959). Development and learning process: A study of some aspects of Piaget's psychology in relation with the didactics of mathematics. Utrecht: University of Utrecht.

Van Hiele, P. M. (1969). Quelques aspects didactiques du developpement de la pensée des enfants dans les mathematiques et la physique. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3.

Van Hiele, P. M. (1979). Wie kann man im Mathematikunterricht den Denkstufen Rechnung tragen? *Educational Studies in Mathematics*, 7, 157-169.

Van Hiele, P. M. (April 1980) Personal interview, 1980, Athens, Ga.

Van Hiele, P. M. y van Hiele-Geldof D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. *In H. Freudenthal (Ed.)*, Report on methods of initiation into geometry. Groningen: J. B. Wolters.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *De didaktiek van de Meetkunde in de eerste kaas van het V.H.M.O.* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Utretch.

Vázquez-Cano, E. (2016). Dificultades del profesorado para planificar, coordinar y evaluar competencias claves. Un análisis desde la Inspección de Educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(3), 1061-1083.

Yudianto, E., Sunardi, Sugiarti, T., Susanto, Suharto, y Trapsilasiwi, D. (2018). The identification of van Hiele level students on the topic of space analytic geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 983(1), 1–5.

ANEXO

Aquí se muestran los apartados teóricos contenidos en el libro de texto (Colera et al. 2016) que se han incluido en las actividades de la *Clase* de GeoGebra:

Operaciones con vectores

Autor: Miguel

En un sistema de ejes cartesianos, cada punto se describe mediante sus coordenadas: $A(A_x,A_y)$, $B(B_x,B_y)$.

La flecha que une dos puntos se denomina vector. El vector que va desde ***A*** hasta ***B*** es el vector ***AB***.

Las coordenadas de un vector se obtienen restando las coordenadas del punto inicial a las del punto final: $AB=(B_x-A_x,B_y-A_y)$.

Si un vector tiene su origen en el punto ***O*** (origen de coordenadas), entonces sus coordenadas coinciden con las del extremo y se denomina vector de posición:

(coordenadas del vector ***OA***) = (coordenadas del punto ***A***)

SUMA DE VECTORES

Para sumar dos vectores, ***OA*** y ***OB***, se procede del siguiente modo: se sitúa ***OB*** a continuación de ***OA***, de manera que el origen de ***OB*** coincida con el extremo de ***OA***. La suma ***OA + OB*** es el vector cuyo origen es el de ***OA*** y extremo, el de ***OB***.

Las coordenadas del vector ***OA + OB*** se obtienen sumando las coordenadas de ***OA*** con las de ***OB***.

RESTA DE VECTORES

Para restar dos vectores, ***OA*** y ***OB*** , se le suma a ***OA*** el opuesto de ***OB***:
OA – OB = OA + (– OB)

Las coordenadas del vector ***OA – OB*** se obtienen restándole a las coordenadas de ***OA*** las de ***OB***.

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO

El producto de un número ***k*** por un vector ***OA*** es otro vector ***k · OA*** que tiene la misma dirección que ***OA***, el mismo sentido que ***OA*** si ***k*** es positivo o sentido opuesto si ***k*** es negativo, y su longitud es la longitud de ***OA*** multiplicada por el valor absoluto de ***k***.

Las coordenadas del vector ***k · OA*** se obtienen multiplicando por ***k*** las coordenadas de ***OA.***

Figura 24. Teoría relativa a la actividad de operaciones con vectores. Fuente: Elaboración propia.

Propiedades de puntos, vectores y segmentos

Autor: Miguel

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas del punto medio, ***M***, de un segmento ***AB*** son la semisuma de las coordenadas de sus extremos.

Es decir, si $A(A_x,A_y)$ y $B(B_x,B_y)$ → $M\left(\frac{A_X+B_X}{2}, \frac{A_Y+B_Y}{2}\right)$

MÓDULO DE UN VECTOR

El módulo de un vector ***OA*** es la distancia de ***O*** a ***A***. Se designa así: $|OA|$.

Si las coordenadas de ***OA*** son (A_x,A_y), entonces $|OA| = \sqrt{(A_X)^2+(A_Y)^2}$

Figura 25. Teoría relativa a la actividad de propiedades de puntos, vectores y segmentos. Fuente: Elaboración propia.

Combinación lineal

Autor: Miguel

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados dos vectores, ***OA***, ***OB***, y dos números, ***a***, ***b***, el vector $\boldsymbol{a \cdot OA + b \cdot OB}$ se dice que es una combinación lineal de ***OA*** y ***OB***.

Dados dos vectores, ***OA***, ***OB***, nos pueden preguntar si otro vector ***OP*** es combinación lineal de los otros dos. Para averiguarlo tenemos que igualar las coordenadas ***x*** e ***y*** en función de los parámetros ***a*** y ***b***:

$(P_x,P_y)=(a \cdot A_x + b \cdot B_x\, ,\ a \cdot A_y + b \cdot B_y)$

Obtenemos así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (***a*** y ***b***)

Figura 26. Teoría relativa a la actividad de combinación lineal.

Ecuaciones de la recta

Autor: Miguel

ECUACIONES DE LA RECTA

Pretendemos describir los puntos de una recta, ***r***, mediante vectores que tengan su origen en **O** y su extremo en la recta.

Para describir todos estos vectores, ***OX***, es suficiente partir de dos:

Un vector $\boldsymbol{OP = p}$ que "nos lleva" a la recta (vector posición).

Un vector ***d***, paralelo a ***r***, que nos desliza sobre la recta (vector director).

El vector $\boldsymbol{OX = p + t \cdot d}$ tiene su origen en O y su extremo sobre la recta, cualquiera que sea el número **t**.

La ecuación $(x,y) = (p_x,p_y) + t \cdot (d_x,d_y)$ se denomina **ECUACIÓN VECTORIAL** de la recta.

Si en la ecuación vectorial igualamos cada coordenada de ***OX*** obtenemos las **ECUACIONES PARAMÉTRICAS** de la recta:

$x = p_x + t \cdot d_x$
$y = p_y + t \cdot d_y$

Sustituyendo el parámetro **t** de ambas ecuaciones e igualándolo, derivamos la **ECUACIÓN CONTINUA** de la recta:

$$\frac{x - p_X}{d_X} = \frac{y - p_Y}{d_Y}$$

Si en la anterior ecuación se despeja la ***y***, obtenemos la **ECUACIÓN EXPLÍCITA** de la recta, que ya conocemos de cursos anteriores:

$y = mx + n$

Donde ***m*** representa la pendiente de la recta y ***n*** la ordenada en el origen (corte con el eje ***y***).

Figura 27. Teoría relativa a la actividad de ecuaciones de la recta. Fuente: Elaboración propia.

Paralelismo y perpendicularidad

Autor: Miguel

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD DE RECTAS

La dirección de una recta viene determinada por su vector director $\boldsymbol{d(d_x,d_y)}$, o bien, por su pendiente $\boldsymbol{m} = \dfrac{d_Y}{d_X}$.

Si dos rectas $\boldsymbol{r_1}$ y $\boldsymbol{r_2}$ tienen igual pendiente, es decir, $\boldsymbol{m_1 = m_2}$, entonces las rectas son paralelas.

Si las el producto de las pendientes de las rectas es igual a menos 1, es decir $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 = -1}$, entonces las rectas son perpendiculares.

Figura 28. Teoría relativa a la actividad de paralelismo y perpendicularidad.