La torre de Hanoi como propuesta educativa en contextos vulnerables

María Elena Martínez Gómez

(MESOB) Especialidad de Matemáticas

MÁSTERES DE LA UAM

2021-2022

Facultad de Formación de Profesorado

Universidad Autónoma de Madrid

Universidad Autónoma
de Madrid

MÁSTER EN FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO

La Torre de Hanoi como Propuesta Educativa en Contextos Vulnerables

Autor: María Elena Martínez Gómez

Tutores: Seong Suk Park y Carlo Madonna

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Curso académico: 2021/2022

Índice general

Resumen y Palabras Clave

El presente trabajo está dividido en dos partes. En la primera, se estudia matemáticamente el problema clásico de la torre de Hanoi y algunas de sus variaciones. En la segunda, se realiza una propuesta educativa para utilizar el clásico rompecabezas en el aula en contextos educativos vulnerables. Esta propuesta educativa se llevó al aula y obtuvo resultados positivos. La conclusiones refuerzan las ideas existentes en la literatura de que la gamificación es una propuesta educativa muy versátil con un gran potencial y que los docentes en contextos vulnerables deben conocer las características de estos contextos e implementar estrategias didácticas orientadas a los estudiantes.

Palabras Clave

Contexto vulnerable, Gamificación, Educación Secundaria y Torre de Hanoi.

Capítulo 1

Introduccíon

Se propone utilizar el rompecabezas de la Torre de Hanoi en aulas en contextos vulnerables. Para ello se divide el trabajo en dos partes. En la primera parte (Capítulo 2), se estudia en detalle el problema clásico de la Torre de Hanoi y algunas de sus variaciones. Se demuestra el número mínimo de movimientos que se han de utilizar ($2^n - 1$) y se trabaja el Algoritmo de Olive, el cual nos indica como resolver el problema. Las variaciones que se estudian son dos: el problema clásico con 4 palos, en lugar de con 3 y de "posición regular a perfecta". Esta última variación hace referencia a cuando se inicia con los discos colocados no todos en el mismo palo, pero respetando que no se puede poner un disco grande sobre uno pequeño. Este problema se puede estudiar mediante unas representaciones gráficas llamadas Gráficas de Hanoi. En la propuesta educativa se utiliza principalmente el problema clásico, sin embargo estas variaciones es interesante estudiarlas por si los alumnos muestran una alta motivación por el problema planteado y queremos proponerlas.

En la segunda parte (Capítulo 3), se detalla la propuesta educativa. Lo que caracteriza esta propuesta es el contexto vulnerable en el que se quiere implementar. Por lo que se realiza un recorrido por la literatura existente sobre contextos vulnerables. Para comenzar este recorrido se analiza el concepto de vulnerabilidad entendido como:

"Condición dinámica que resulta de la interacción de una multiplicidad de fac-

tores de riesgo y protectores, que ocurren en el ciclo vital de un sujeto y que se manifiestan en conductas o hechos de mayor o menor riesgo social, económico, psicológico, cultural, ambiental y/o biológico, produciendo una desventaja comparativa entre sujetos, familias y/o comunidades" (Cornejo, Céspedes, Escobar, Núñez, Reyes & Rojas, 2005, p. 14).

Y el concepto de exclusión social entendido como:

"Un proceso social de pérdida de integración que incluye no solo la falta de ingresos y el alejamiento del mercado de trabajo, sino también un descenso de la participación social y por tanto una pérdida de derechos sociales" (Laparra, Obradors, Pérez, Pérez, Renes, Sarasa, Subirats & Trujillo, 2007, p. 27).

Después, se presentan una serie de tensiones y desafíos observados por docentes en formación que realizan sus prácticas académicas en centros con contextos vulnerables (Sección 3.3.2, (Yancovic-Allen & Escobar-González, 2022)). Estas aportaciones suponen un buen punto de partida ya que la puesta en práctica de esta propuesta didáctica tiene lugar en unas prácticas académicas en un centro con aulas en contextos vulnerables. Por otro lado, en la sección 3.3.3, se ven una serie de ajustes que proponen docentes que imparten docencia en contextos vulnerables y tienen un alto logro de rendimiento académico (Villalta Páucar, Martinic Valencia & Guzmán Droguett, 2011). En la sección 3.3.4, se presentan estudios que relacionan las variables socioemocionales con el rendimiento académico en contextos vulnerables. Esto es un aspecto fundamental ya que estos contextos se caracterizan por tener alumnos completamente desmotivados o con un pésimo autoconcepto matemático (Vera Sagredo, Cerda Etchepare, Aragón Mendizábal & Pére Wilson, 2021; Cerda Etchepare & Vera Sagredo, 2019). Además, estos estudios pueden ser de utilidad para los centros educativos altamente vulnerables, ya que abre espacios para incidir favorablemente en las posibilidades de mejorar los niveles de logros académicos al cautelar algunos elementos desde perspectivas más transversales, o que involucren a toda la comunidad educativa (Vera Sagredo et al., 2021). Por último, en la sección 3.3.5, se describen algunas practicas observada que obstaculizan los procesos de transposición didáctica en contextos vulnerables (Beltrán Véliz, Navarro Aburto & Peña Troncoso, 2018), donde se afirma que el personal docente debe ser capaz de emplear diseños instruccionales, flexibles y dialógicos donde se considere al estudiantado un actor principal en la construcción de su propio aprendizaje (Beltrán Véliz et al., 2018). Por lo que se presenta la propuesta de la gamificación como posible solución a algunos de estos problemas, ya que: *"la puesta en práctica de nuevas formas de aprender jugando ayudan a pensar de manera crítica y estratégica, fomentan la escucha, la atención, la creatividad y la imaginación, y se detecta una mayor flexibilidad a la hora de enfrentarse a situaciones desconocidas"* (Pastor Seller & Martín Hierro, 2020).

Tras este recorrido por la literatura existente y teniéndola en consideración se propone una propuesta didáctica utilizando el problema clásico de la Torre de Hanoi. Para ello, se describen las sesiones y se presentan una serie de fichas (Capítulo 4) que facilitan la implementación de la propuesta en el aula. Esta propuesta se llevó a cabo en un centro de Colmenar Viejo (Madrid) y obtuvo resultados positivos. Las conclusiones del trabajo refuerzan afirmaciones existentes en la literatura como:

"Docentes que se desempeñan en contextos vulnerables deben poseer un conocimiento disciplinar, didáctico y del contexto, a fin de movilizar procesos de transposición didáctica eficaces. Entonces, surge el desafío de la superación de una enseñanza centrada en el profesorado, de tal forma que esta se oriente a estudiantes" (Beltrán Véliz et al., 2018).

O como: *"El juego, como propuesta educativa innovadora, se configura como un recurso didáctico muy versátil que presenta un gran potencial para desarrollar cualquier temática relacionada con el contenido curricular, posibilita analizar las elecciones y decisiones que los estudiantes han ido tomando a lo largo del juego, conocer y comprender la evolución a nivel socioeducativo y cognitivo de cada uno de ellos; y conectar emocionalmente desde una relación educador–educando más de tú a tú, más cercana y horizontal" (Pastor Seller & Martín Hierro, 2020).*

Capítulo 2

La Torre de Hanoi

2.1. Del Mito al Juego. Historia de la Torre de Hanoi

2.1.1. La Torre de Brahma

Según una antigua leyenda india, en el gran templo de Benarés, bajo la cúpula que marca el centro del mundo. Descansa una placa de latón en la que están fijadas tres agujas de diamante, cada una de un codo de alto y tan gruesas como el cuerpo de una abeja. En una de estas agujas, en la creación, Dios colocó sesenta y cuatro discos de oro puro. El disco más grande descansando sobre la placa de bronce y los demás cada vez más y más pequeños hasta el de arriba. Esta es la Torre de Brahma.

Día y noche incesantemente los sacerdotes transfieren los discos de una aguja de diamante a otra de acuerdo con las leyes fijas e inmutables de Brahma. Requieren que el sacerdote no mueva más de un disco a la vez y que debe colocar este disco en una aguja para que no quede ningún disco más pequeño debajo.

Cuando los sesenta y cuatro discos hayan sido así transferidos de la aguja en la que Dios los colocó en la creación a una de las otras agujas, torre, templo, y los brahmanes por igual se desmoronarán en polvo, y con un trueno el mundo desaparecerá (Hinz, Klavžar, Milutinović & Petr, 2013).

2.1.2. La Torre de Hanoi

La Torre de Hanoi es un rompecabezas o juego matemático inventado por el matemático francés Édouard Lucas en 1883. Es, según el autor, un juego de combinaciones para aplicar el sistema numérico binario, cuyas ventajas describe en (Édouard, 1882). El juego original se conserva en el museo de Artes y Oficios de París.

Este juego de mesa individual consiste en un número de discos perforados de radio creciente que se apilan insertándose en uno de los tres postes fijados a un tablero. El objetivo del juego es trasladar la pila a otro de los postes siguiendo ciertas reglas, como que no se puede colocar un disco más grande encima de un disco más pequeño (a la que llamaremos regla divina, RD).

2.1.3. Historia de la Torre de Hanoi

Ya tenemos una fecha de nacimiento de la Torre de Hanoi, pero, ¿por qué el nombre de La Torre de Hanoi? No pensaríamos en la capital de Vietnam de hoy en relación con los brahmanes que mueven 64 discos de oro en el gran templo de Benarés. Sin embargo, cuando Lucas comenzó a comercializar el rompecabezas en su modesta versión con sólo ocho discos de madera, los periódicos franceses estaban llenos de informes desde Tonkín. De hecho, Hanoi había sido tomada por los franceses en 1882, pero durante el verano de 1883 estuvo bajo constante asedio por las tropas de los chinos provincia de Yunnan por autoridad del tribunal local de Hué, donde el 25 de agosto 1883 el tratado de Harmand estableció el dominio de Francia sobre Annam y Tonkin. Así que Lucas seleccionó el nombre de Hanoi porque estaba en los titulares en ese momento. Lucas nunca viajó a Hanoi. Sin embargo, era miembro de la comisión que editó las obras completas de Pierre de Fermat y fue enviado a una misión en Roma para buscar en la famosa biblioteca Boncompagni inéditos papeles de su ilustre compatriota. Se cree que fue en este viaje en el que Lucas inventó la TH. En 1883, Lucas offreció una gran cantidad de dinero para la persona que resolviese, a mano, la TH con 64 discos y reveló el número de movimientos necesarios:

$$18446744073709551616 \tag{2.1}$$

junto con la afirmación de que son necesarios más de cinco mil millones de siglos para realizar la tarea realizando un movimiento por segundo. El número en (2.1) se explica, junto con las reglas del juego y la famosa solución recursiva, establecida para un número arbitrario de discos, pero demostrado con un ejemplo: si uno puede resolver el rompecabezas de ocho discos, uno puede resolverlo por nueve transfiriendo primero los ocho superiores a la clavija de repuesto, luego moviendo el noveno disco a la clavija final y finalmente los más pequeños también a ea clavija. Así que al aumentar el número de discos en uno, el número de movimientos para la transferencia de la torre se duplica más una jugada del disco más grande.

Este número (2.1) evoca otro mito indio que viene en aún más versiones que la Torre de Brahma. La más bonita, pero no la primera, de estas leyendas es la de J. F. Montucla, quien nos dice, al citar el magnífico número, que el indio Sessa, hijo de Daher (Sissa ben Dahir), inventó (un prototipo de) el juego de ajedrez que presentó al rey indio (Shirham). El cual le ofreció a Sessa lo que desease. Sessa pronunció un deseo "modesto": un grano de trigo (arroz en otras versiones) en el primer cuadrado del tablero de ajedrez, dos en el segundo, cuatro en el tercero y así sucesivamente hasta el último, el 64. El ministro del rey, sin embargo, descubrió que era imposible acumular tal cantidad de trigo y Montucla nos dice que el rey admiraba a Sessa aún más por esa sutil petición que por la invención del juego. (En versiones menos románticas, Sessa fue decapitado por su impertinencia.)

La TH se extendió inmediatamente fuera de Francia. Se repite la solución recursiva y la observación reveló que durante esta solución cada disco mueve una potencia de 2 veces, según su tamaño. Además, se describió el patrón cíclico de los movimientos. Schoute (1882–1884) ideo la variante de la TH con los discos coloreados en negro y rojo alternados. En esta variante no puedes colocar un disco negro sobre otro negro (análogo para discos rojos) y no puedes deshacer un movimiento recientemente hecho.

Prácticamente todos los primeros artículos sobre el tema de la TH reproducen la solución recursiva clásica junto con el número de movimientos involucrados. Sin embargo, lo que hacen es solo proporcionar un límite superior para el número mínimo demostrando que la tarea puede lograrse utilizando tantos pasos. Es uno de los misterios de las matemáticas de la teoría de la TH que aparentemente nadie sintió la necesidad de dar un límite inferior, es decir, probar que no hay mejor solución. Hasta 1981, cuando D. Wood presentó la primera prueba de minimalidad. El punto crucial es la suposición de que el disco más grande se moverá, en una solución óptima, directamente desde su origen hasta su destino o, en otras palabras, se mueve precisamente una vez. Incluso si esto parece ser evidente, una demostración matemática de minimalidad no puede basarse en una suposición injustificada.

Después de eso, no hubo progreso en el problema clásico de TH durante aproximadamente sesenta años. Hasta que R. S. Scorer, P. M. Grundy y C. A. B. Smith agregaron algo de estructura matemática al juego mirándolo de forma gráfica, lo que ahora llamamos gráficos de Hanoi.

La primera extensión explícita del rompecabezas clásico a cuatro clavijas fue escrita por Dudeney (1908) al que llamó Puzzle de Reve. Sin embargo no logra probar la minimalidad de su procedimiento. Esta situación no cambió cuando B. M. Stewart asumió el problema como un desafío para los lectores de The American Mathematical, porque su propia solución (Stewart, 1941) y la de J. S. Frame (Frame, 1941) se basaron ambos en cierta suposición no comprobada que el editor del diario, O. Dunkel, enmarcado en un lema al que llamamos la conjetura de Frame-Stewart. Esta conjetura se puede probar fácilmente para los primeros casos a mano. Para casos hasta $n = 30$ se proporcionaron pruebas con ordenador (Korf & Felner, 2007). Hasta que finalmente, tras 73 años abierta, la Conjetura de Frame-Stewart fue probada por Thierry Bousch (Bousch, 2014).

2.2. Análisis del problema clásico

La Torre de Hanoi (TH) consiste en tres palos verticales anclados en una base horizontal y un cierto número de discos de diferentes diámetros. Los discos están perforados en el centro, por lo que pueden colocarse en cada uno de los palos. Cualquier distribución en los tres palos con ningún disco de mayor diámetro sobre uno de menor diámetro se llama **posición regular** del puzle. Diremos que tenemos una **posición perfecta** del puzle si tenemos una posición regular con todos los discos en un mismo palo. Ver Figura 2.1 para ejemplos de una posición perfecta y regular.

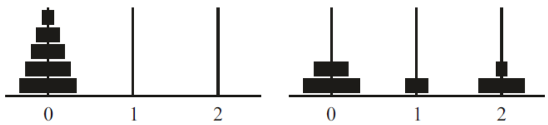

Figura 2.1: Posición perfecta y posición regular no perfecta

Definamos la terna $T = \{0, 1, 2\}$ y denotemos cada palo por 0, 1 y 2. Sea n el número de discos y denotemos los discos de 1 a n en orden creciente de diámetros (i.e., el disco más pequeño se denota por 1 y el más grande por n). Entonces, toda posición regular se puede representar de manera única por un elemento $s = s_n \dots s_1 \in T^n$ donde s_d es el palo en el que está el disco d. Por ejemplo, la posición perfecta y regular de Figura 2.1 se representan como 00000 (o 0^5) y 02012 respectivamente.

Observación 2.2.1. *Para* $0 < m < n$ *y* $s \in T^m$ *definimos* $sT^{n-m} = \{st | t \in T^{n-m}\}$. *Obviamente* $|sT^{n-m}| = |T^{n-m}|$. *Además,*

$$T^n = \bigcup_{s \in T^m} sT^{n-m}.$$

El caso más importante es $m = 1$. *El cual muestra la descomposición natural de* T^n *en los tres conjuntos disjuntos:* $0T^{n-1}$, $1T^{n-1}$ *y* $2T^{n-1}$, *caracterizados por la posición del disco de mayor tamaño.*

Un disco se puede mover desde la parte superior de un palo hasta la parte superior de otro palo (posiblemente vacío) siempre y cuando se respete la Regla Divina (RD).

El problema clásico es pasar de un estado perfecto a otro estado perfecto mediante una secuencia de movimientos legales. El objetivo final, sería encontrar la solución más corta, es decir, el mínimo número de movimientos. Veamos una prueba sencilla de este problema.

Teorema 2.2.2. *Una solución optima para la TH de $n \in \mathbb{N}$ discos, se puede conseguir en $M_n = 2^n - 1$ movimientos (y no pueden ser menos).*

Demostración. Veamos el resultado por inducción.

El caso base es trivial.

También es claro que si se puede hacer para n discos con M_n movimientos, se podrá hacer para $n+1$ discos en $M_n + 1 + M_n = 2M_n + 1 = M_{n+1}$ movimientos transfiriendo la $n-$torre de los discos pequeños al palo intermedio, después el disco $n+1$ al palo objetivo y finalmente los otros n discos al palo objetivo.

Para mover por primera vez el disco $n+1$ en cualquier solución, la torre de n discos se ha tenido que transferir del palo inicial a otro, lo cual toma al menos M_n movimientos por HI. Después del último movimiento del disco $n+1$ nuevamente la $n-$torre tiene que cambiar de posición al palo objetivo, consumiendo de nuevo M_n movimientos. Como el disco $n+1$ se tiene que mover al menos una vez, la solución necesita al menos M_{n+1} movimientos. □

En la Figura 2.2 se puede ver una representación de la solución para el problema con 4 discos. En la columna del medio de la Figura 2.2 se indica el número del disco que se está moviendo.

Observación 2.2.3. *Es claro que en una solución optima el disco* 1 *tiene que moverse en el primer paso y después de eso en cada movimiento impar. Los movimientos pares son impuestos por la RD, ya que el disco superior más pequeño que no es el disco 1 debe moverse. Es más los discos* 2 *a* n *forman una solución óptima con respecto a la misma tarea pero con solo* $n-1$ *discos. Esto se debe a que el disco* 1 *siempre se puede sacar de manera que puedas mover otro disco.*

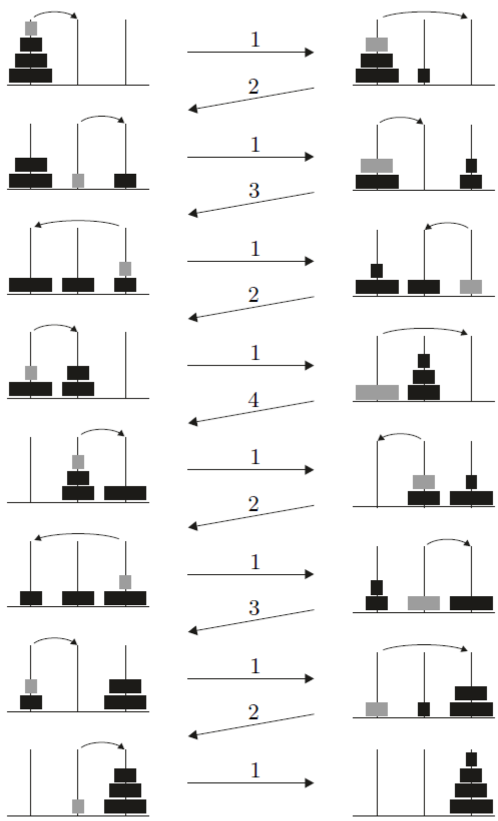

Figura 2.2: Solución de la TH perfecta de 4 discos.

Veamos una prueba de la solución a nuestro problema basada en la observación anterior. La cual nos permite determinar qué disco estamos moviendo en cada paso.

Teorema 2.2.4. *El problema clásico de la TH para $n \in \mathbb{N}$ discos, tiene solución optima y única de longitud $2^n - 1$. El $k-$ésimo movimiento en la solución es del disco g_k con $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$, donde:*

$$g_k = \begin{cases} 1 & \textit{si } k \textit{ es impar,} \\ g_{\frac{k}{2}} + 1 & \textit{si } k \textit{ es par} \end{cases}$$

Demostración. Vamos a demostrarlo por inducción en n. En el paso de inducción de n a $n+1$ sabemos que los movimientos impares son del disco 1 y los movimientos pares k, los cuales forman una solución óptima para la $n-$torre de discos 2 a $n+1$, son del disco $g_{\frac{k}{2}} + 1 = g_k$.

Además, por hipótesis de inducción la dirección de los movimientos pares está unívocamente determinada. De hecho, la dirección de los movimientos pares está unívocamente determinada también por que el disco 1 tiene que moverse adecuadamente y va al palo objetivo directamente en el último paso. Por lo tanto, la solución óptima es única.

Para el número de movimientos, nuevamente por hipótesis de inducción los n discos grandes se mueven $2^n - 1$ veces y el pequeño se mueve el mismo numero de veces más el último movimiento. Por lo que tenemos $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$. □

La Observación 2.2.3 dice que el disco 1 se mueve en cada movimiento impar y que los movimientos pares son impuestos por la RD. Por ello, es interesante observar la dirección de los movimientos del disco 1. Si consideramos números pequeños de discos podemos ver que el disco 1 se mueve de manera cíclica entre los palos. Si n es impar, se mueve del palo inicial, al final y al intermedio. Si n es par el ciclo es del inicial, al intermedio y al final. Esta observación nos lleva al Algoritmo de Olive.

Algoritmo 1. Algoritmo de Olive.

Parámetro n: numero de discos $\{n \in \mathbb{N}\}$.

Parámetro i: palo inicial $\{i \in T\}$

Parámetro j: palo objetivo $\{j \in T\}$

Si $n = 0$ o $i = j$ **entonces** FIN

Si n es impar **entonces**

  mueve el disco 1 del palo i al palo j.

En otro caso

  mueve el disco 1 del palo i al palo $3 - i - j$

Mientras no todos los discos están en el palo j

  haz movimientos legales de los discos distintos de 1.

  haz un movimiento del ciclo del disco 1 en su dirección apropiada.

Cuando todos los discos están en el palo j FIN

Por tanto, si el palo inicial es 0 y el final es 2. Tenemos que el ciclo que sigue el disco 1 si n es impar sería $0 \to 2 \to 1 \to 0$ y si n es par sería $0 \to 1 \to 2 \to 0$.

2.3. Variaciones del problema clásico

Veremos tan solo dos variaciones del problema clásico: pasar de una posición regular a una perfecta y aumentar el número de palos a 4.

2.3.1. De posición Regular a Perfecta

Comencemos viendo como pasar de una posición regular a una posición perfecta, en el caso particular de que la solución optima se haya detenido en algún paso.

Para resolver este problema podemos observar que los discos impares se mueven cíclicamente en la misma dirección que el disco 1. Por otro lado, los discos pares se mueven cíclicamente en el otro sentido. Por tanto, diremos que la **dirección correcta (DC)** de un disco es la que sigue este patrón.

Por tanto para decidir cual será el primer movimiento y poder aplicar el Algoritmo de Olive para resolver el problema debemos observar qué movimientos se van a poder hacer. Además del disco 1 (que siempre se puede mover), tendremos un disco $d \neq 1$ que también se puede mover. La clave para determinar si debemos mover el disco 1 o el disco d es ver si el movimiento que podemos hacer con d sigue la dirección correcta o no. Veamos una ilustración de este problema en la Figura 2.3. En ambos casos tenemos 6 discos, por lo que la dirección del disco 1 en ambas es la misma: $0 \to 1 \to 2 \to 0$. Por tanto, esa es también la DC de los discos impares y la DC de los discos pares será: $0 \to 2 \to 1 \to 0$.

En la situación 012002, el movimiento legal del disco 2 está en la dirección incorrecta. Por tanto, el siguiente movimiento óptimo es el movimiento del disco 1 en su DC. Por otro lado, en la situación 012000, el movimiento legal del disco 4 está en la DC, por lo que este será el movimiento óptimo.

Veamos en forma de algoritmo, el procedimiento para decidir el primer movimiento en una solución óptima del problema clásico detenida. Para ello necesitaremos la siguiente notación: Si tenemos una dirección $D = p_0 \to p_1 \to p_2 \to p_0$ denotaremos por $-D$ la dirección contraria, es decir, $-D = p_0 \to p_2 \to p_1 \to p_0$.

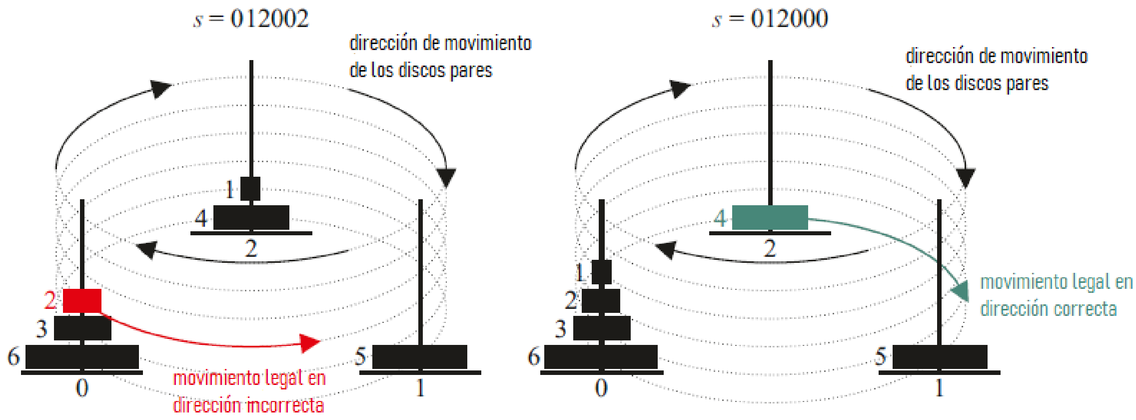

Figura 2.3: Determinación de direcciones correctas en dos situaciones regulares.

Algoritmo 2. Algoritmo para detectar el primer movimiento en una solución óptima detenida.

Parámetro n: numero de discos $\{n \in \mathbb{N}\}$.

Parámetro i: palo inicial $\{i \in T\}$

Parámetro j: palo objetivo $\{j \in T\}$

Si n es impar **entonces** $DC_1 = i \to j \to 3 - i - j \to i$

Si n es par **entonces** $DC_1 = i \to 3 - i - j \to j \to i$

Sea $d = \text{mín}\{k | s_k \neq s_1\}$.

Si d es impar $DC_d = DC_1$

Si d es par $DC_d = -DC_1$

Cuando el movimiento de d esté en la dirección DC_d

mueve el disco d

En otro caso

mueve el disco 1 en la dirección DC_1.

Observamos que d es el disco más pequeño situado en la parte superior de un palo distinto del disco 1.

Para poder aplicar el Algoritmo 2 a una situación regular s, tenemos que saber si representa una posición detenida de la solución del problema clásico o no. Para ello, utilizaremos un algoritmo que va comprobando si los discos están en una posición incorrecta, a la que llamaremos k, desde el disco más grande al más pequeño. Este algoritmo se basa en que si estamos trasladando la torre de n discos de i a j el disco n no puede estar nunca en la posición $k = 3 - i - j$.

Algoritmo 3. Algoritmo para detectar si la posición pertenece a la solución óptima del problema clásico.

Parámetro n: numero de discos $\{n \in \mathbb{N}\}$.
Parámetro i: palo inicial $\{i \in T\}$
Parámetro j: palo objetivo $\{j \in T\}$
Parámetro s: situación regular

$k = 3 - i - j$
$d = n$
Mientras $d \geq 2$
Si $s_d = k$ **entonces**
  FIN, s no está en la solución optima
En otro caso
  $k = 3 - k - s_d$
  $d = d - 1$

Si $s_1 = k$ **entonces**
  s no está en la solución óptima
En otro caso
  s está en la solución óptima

Teorema 2.3.1. *El Algoritmo 3 detecta si la situación s está en la solución óptima del problema clásico del palo i al palo j.*

Demostración. Sea $k = 3 - i - j$. Procederemos por inducción en n. Obviamente, el algoritmo funciona para el caso $n = 1$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $s \in T^{1+n}$. Si $s_{n+1} = k$, entonces s no está en la solución óptima del problema clásico. Ya que el disco más grande solo se mueve de i a j. Si $s_{n+1} = i$, entonces $k = j$. Ahora la $n-$torre se tiene que mover de i a k y entonces los roles de i, j, k han cambiado a i, k, j. Por hipótesis de inducción el algoritmo funciona para n y por tanto funciona para $n+1$. Análogo si $s_{n+1} = j$. □

Para aplicar el algoritmo 3 podemos ayudarnos de la Figura 2.4. En la cual tenemos representados los posibles valores de la k en los círculos y en función del valor de s_d nos movemos al siguiente k en una dirección u en otra. Veamos un ejemplo en la Figura 2.5.

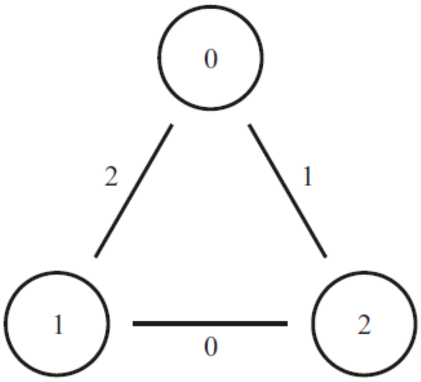

Figura 2.4: Representación auxiliar para aplicar el Algoritmo 3.

Tenemos el caso $s = 212210$ que debe pasar del palo 0 al palo 2, por tanto, empezamos en $k = 1$ y $d = 6$ (ya que comprobamos los discos del más grande al más pequeño). Como vimos anteriormente el disco 6 solo realizará (en el problema clásico) un único movimiento, del palo inicial al palo final. Por lo que el disco 6 no puede estar en el palo 1 (k). Al no estar en el palo $k = 1$, de momento la posición parece adecuada. Como el disco 6 está en el palo final, se debería estar moviendo la 5−torre del palo 1 al palo 2. Por lo que el disco 5 no debe estar en el palo 0 que, como indica nuestra Figura 2.4, es $k = 0$ nuestra siguiente posición. Observamos que $s_5 = 1$ por lo que al no estar en el palo 0 la posición continua pareciendo correcta. Además, como aún no está en el palo de llegada, tendríamos que aún estamos moviendo la 4−torre al palo auxiliar actual (0), del palo inicial actual (1). Por lo que debemos mover la 4−torre del palo 1 al palo 0 y el disco 4 nunca podrá estar en el palo 2 (que será ahora nuestro $k = 2$). Pero observamos que el disco 4 se encuentra en el palo 2. Por tanto, s no es una posición detenida de la solución del problema clásico.

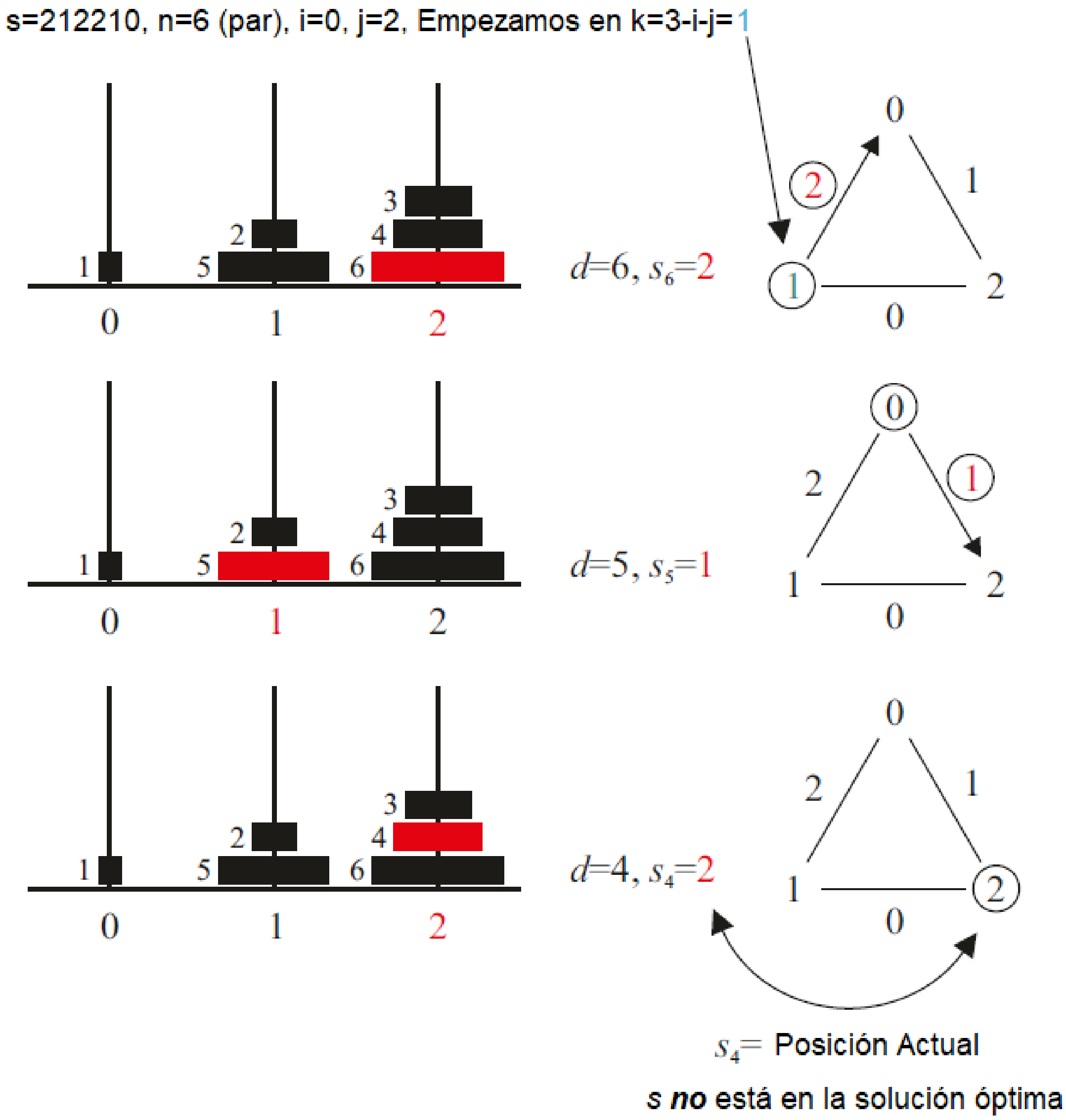

Figura 2.5: Ejemplo del Algoritmo 3 detectando una situación que no está en la solución optima del problema clásico.

Ahora veremos un algoritmo que nos permite determinar el primer movimiento de cualquier posición regular. Además, nos dice la cantidad de movimientos óptimos para concluir el problema. Sin embargo, no nos proporciona, inmediatamente, una forma de saber todos los movimientos que hay que realizar para llegar a la solución. Para ello, es posible que se tenga que aplicar el algoritmo en varias ocasiones.

Algoritmo 4. Algoritmo para detectar el primer movimiento en cualquier posición regular y el número de movimientos.

Parámetro n: numero de discos $\{n \in \mathbb{N}\}$.

Parámetro j: palo objetivo $\{j \in T\}$

Parámetro s: situación regular $\{x \in T^n\}$

$k = j$

$\delta = 0$

$\mu = 0$

$d = n$

Mientras $d \geq 1$

  Si $s_d \neq k$ **entonces**

    $\mu = \mu + 2^{d-1}$

    $\delta = d$

    $k = 3 - k - s_d$

    $d = d - 1$

  En otro caso

    $d = d - 1$

Teorema 2.3.2. *El algoritmo 4 nos da μ que es la cantidad mínima de movimientos necesarios para mover la posición regular s al palo final j. Para $s \neq j^n$, el disco δ es el que debe moverse en el primer movimiento. Además, el palo que no está involucrado en el movimiento de δ viene dado por k, es decir, el movimiento es de δ desde s_δ a $3 - k - s_\delta$.*

Demostración. Procederemos por inducción, es claro que para $n = 0$ el algoritmo funciona. Sea $s = s_{n+1}\hat{s}$, $\hat{s} \in T^n$. Si $s_{n+1} = j$, entonces el disco $n + 1$ no necesita moverse, ya que está en el palo objetivo, y la hipótesis de inducción puede aplicarse a $\hat{s}$. En cualquier otro caso, $\hat{s}$ tiene que colocarse en el palo $3 - s_{n+1} - j$ para permitir que $n+1$ se mueva de s_{n+1} a j. En ese caso, tras mover $\hat{s}$ a $3 - s_{n+1} - j$, se tendrán que hacer otros $1 + 2^n - 1 = 2^{(1+n)-1}$ movimientos para completar la solución. Además el disco $n+1$ solo se puede mover si $\hat{s}$ esta en una posición perfecta en $3 - s_{n+1} - j$. $\square$

En la Figura 2.6 podemos ver un ejemplo de los conocidos como gráficos de Hanoi (Scorer, Grundy & Smith, 1944; Hinz et al., 2013). Que son representaciones gráficas de todos los posibles $s \in T^n$ colocadas de forma que: en los vértices del triángulo, tenemos las posiciones perfectas 0^n, 1^n y 2^n y en las aristas que los unen, la solución del problema clásico para pasar de una posición perfecta a otra. La representación se completa con todos los posibles movimientos legales. Que dan lugar a todas las situaciones regulares que, no son posiciones donde se ha detenido la solución del problema clásico.

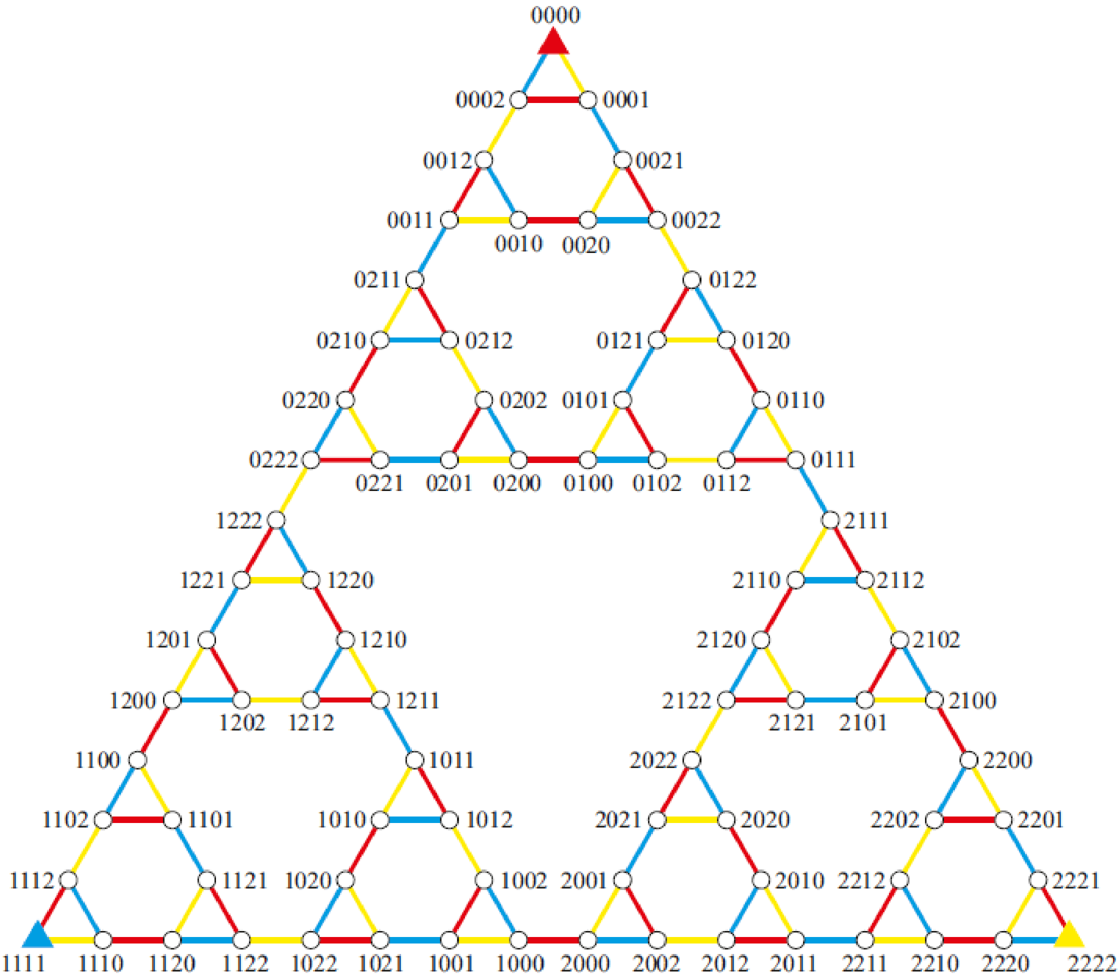

Figura 2.6: Gráfica de Hanoi para $n = 4$.

2.3.2. La Torre de Hanoi de 4 palos

En esta sección veremos la extensión clásica de la TH a 4 palos que es conocida como *el Puzzle de Reve* y la conjetura de Frame–Stewart.

Para una situación regular $s = s_n \dots s_1$ ahora la posición s_d del disco $d \in \{1, \dots, n\}$ es un elemento de $Q = \{0, 1, 2, 3\}$. Nos centraremos en el problema de pasar de una situación perfecta a otra perfecta, del palo 0 al 2. Entonces, el palo 3 será el extra, al que llamaremos *el palo del diablo*.

Es claro que no vamos a necesitar más movimientos que para el problema con 3 palos, ya que simplemente ignorando el palo del diablo podríamos resolverlo. Sin embargo, también es claro que para $n > 2$ necesitamos estrictamente menos movimientos que para el caso de los tres palos, simplemente moviendo el disco 1 al palo del demonio y resolviendo el problema como si se tratase del caso de $n-1$ discos. Esto llevaría $1 + (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{n-1} + 1 < 2^n - 1$ movimientos. Pero, ¿por qué no transferir una subtorre digamos de m discos pequeños al palo del demonio, después transferir la subtorre de $m+1$ a n al palo final, ignorando el palo 3 y posteriormente transferir de nuevo la subtorre de m discos al palo final? Esto llevaría $2f(m) + 2^{n-m} - 1$ movimientos, si conseguimos saber como transferir m discos usando los cuatro palos en $f(m)$ movimientos. En ese caso, podríamos optimizar con respecto al parámetro m y definiríamos así los conocidos como los números de Frame–Stewart:

Definición 2.3.3. $\forall n \in \mathbb{N}_0 : FS_3^n = 2^n - 1$.
$FS_4^0 = 0$*;* $\forall n \in \mathbb{N} : FS_4^n = \min\{2FS_4^m + FS_3^{n-m} | m \in \{0, 1, \dots, n-1\}\}$

Obviamente, $FS_4^n \leq FS_3^n$, con $FS_4^n = FS_3^n$ si y solo si $n \leq 2$, y $FS_4^3 = 5 < 7 = FS_3^3$ con $m = 1$.

El nombre de estos números deriva de la solución propuesta por Frame (Frame, 1941) y Stewart (Stewart, 1941) al problema de buscar una solución óptima para el caso de p-palos. Sin embargo, las soluciones de Frame y Stewart son diferentes. Mientras la de Steward lleva a la definición anterior, Frame introdujo un método recursivo basado en la idea de analizar la mitad de la solución, es decir, la distribución de los n discos justo antes del único movimiento del disco más grande.

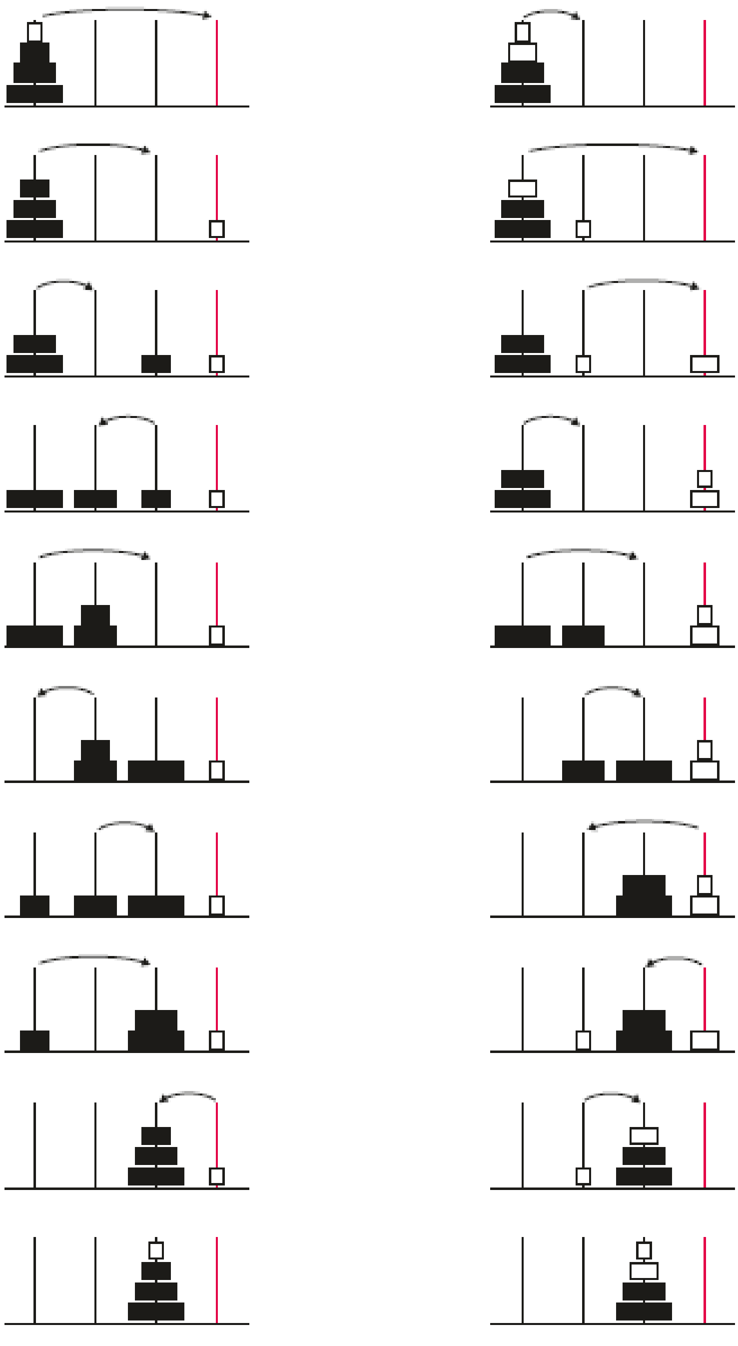

Figura 2.7: Dos soluciones óptimas para 4 discos

Si denotamos por $d(s,t)$ el minimo número de movimientos para llegar de la posición s a la posición t de Q^n, la siguiente afirmación ha estado abierta desde 1941:

Conjetura de Frame–Stewart 2.3.4. *$\forall n \in \mathbb{N}_0$: $d(0^n, 2^n) = FS_4^n$*

La conjetura se puede probar fácilmente para los primeros casos a mano. Para casos hasta $n = 30$ se proporcionaron pruebas con ordenador (Korf & Felner, 2007). Hasta que finalmente, tras 73 años abierta, la Conjetura de Frame-Stewart 2.3.4 fue probada por Thierry Bousch (Bousch, 2014).

Un algoritmo recursivo que realice la solución dada por Frame y Stewart se puede basar en números de partición de la $n-$torre, m_n, en los cuales se alcance el mínimo de la Definición 2.3.3. Podemos observar que dado $n \in \mathbb{N}$ los números de partición no tienen por que ser únicos. Por ejemplo, para $n = 4$ tenemos $m_4 = 1$ y $m_4 = 2$. Los cuales nos llevan a soluciones óptimas (ambas con longitud $FS_4^4 = 9$) esencialmente distintas, ver Figura 2.7. Por supuesto, no se consideran soluciones diferentes las que difieran simplemente en cambiar los roles de los dos palos auxiliares.

Es fácil obtener una manera de asignar los números de partición y el valor de FS_4^n para un n dado, directamente de la Definición 2.3.3 (ver Tabla 2.8). Para ello utilizaremos los *números triangulares*.

Observación 2.3.5. *Los números triangulares Δ_ν vienen dados por:*

$$\Delta_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

y cada $n \in \mathbb{N}_0$ se puede escribir de manera única como $n = \Delta_\nu + x$, con indice $\nu = \lfloor \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \rfloor \in \mathbb{N}_0$ y exceso $x \in \{0, 1, \ldots, \nu\}$.

Teorema 2.3.6 (Demostración en (Hinz et al., 2013))**.** *Para todo $\nu \in \mathbb{N}_0$ y $x \in \{0, 1, \ldots, \nu\}$:*

$$FS_4^{\Delta_\nu + x} = (\nu - 1 + x)2^\nu + 1$$

Además, para $\nu \in \mathbb{N}$, $\Delta_{\nu-1} + x$ es un número de partición para $\Delta_\nu + x$. De hecho, es el único número de partición si $x = 0$ y en otro caso hay un solo número de partición más dado por $\Delta_{\nu-1} + x - 1$.

ν	Δ_ν	x	n	FS_3^n	m	FS_4^n
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	2	3	1,0	3
2	3	0	3	7	1	5
2	3	1	4	15	2,1	9
2	3	2	5	31	3,2	13
3	6	0	6	63	3	17
3	6	1	7	127	4,3	25
3	6	2	8	255	5,4	33
3	6	3	9	511	6,5	41
4	10	0	10	1023	6	49
4	10	1	11	2047	7,6	65

Figura 2.8: Números de Frame–Stewart (Δ_ν números triangulares, x exceso y m particiones)

Veamos como se aplicaría para resolver un caso concreto. Sea $n = 10$, observamos en la Tabla 2.8 que el número de partición para $n = 10$ es 6, por lo que debemos trasladar la 6−torre utilizando los 4 palos a un palo auxiliar, después trasladar la 4−torre restante al palo final utilizando 3 palos y finalmente trasladar, de nuevo, la 6−torre utilizando los 4 palos al palo final (Ver Figura 2.9). Sabemos que mover la 4−torre usando 3 palos lleva $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ movimientos y mirando la tabla sabemos que mover la 6−torre usando 4 palos lleva $FS_4^6 = 17$ movimientos.

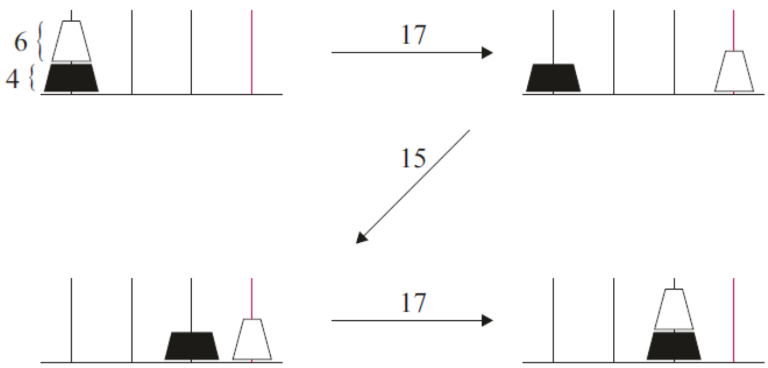

Figura 2.9: Solución para el caso 10 discos, solo se muestran los movimientos de las subtorres.

Sin embargo, esto no nos dice como mover la 6−torre usando 4 palos. Para ello tenemos que mirar en la tabla su número de partición que es 3. Por lo tanto debemos dividir la 6−torre en una 3−torre y otra 3−torre. La primera 3−torre deberá moverse usando 4 palos, la segunda usando 3. Por lo que nuevamente debemos mirar el número de partición de una 3−torre en la Tabla, que es $m = 1$. Finalmente, para mover la 10−torre, debemos dividirla en 1−torre, 2−torre, 3−torre y 4−torre (ver Figura 2.10).

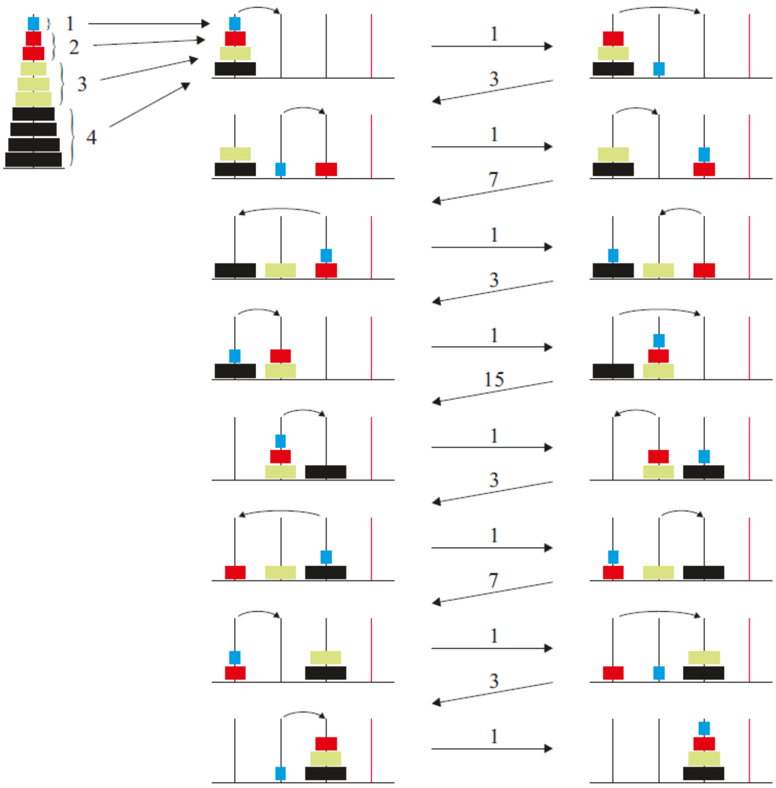

Figura 2.10: Solución para el caso de 10 discos, en el que se muestran los movimientos de todas las subtorres.

Podemos observar que con esta representación si que somos capaces de reproducir la solución del problema. Ya que los movimientos de los discos que no se están mostrando son movimientos de la solución del problema clásico, es decir, utilizando tan solo 3 palos. Dicho de otra forma, todos los movimientos de derecha a izquierda de la Figura 2.10 son movimientos de 2, 3 o 4 discos utilizando 3 palos y los movimientos de izquierda a derecha son los movimientos del disco 1.

Por último veremos una representación gráfica (análoga a la de la Figura 2.6 pero mucho más compleja) tomada de (Hinz & Movarraei, 2019).

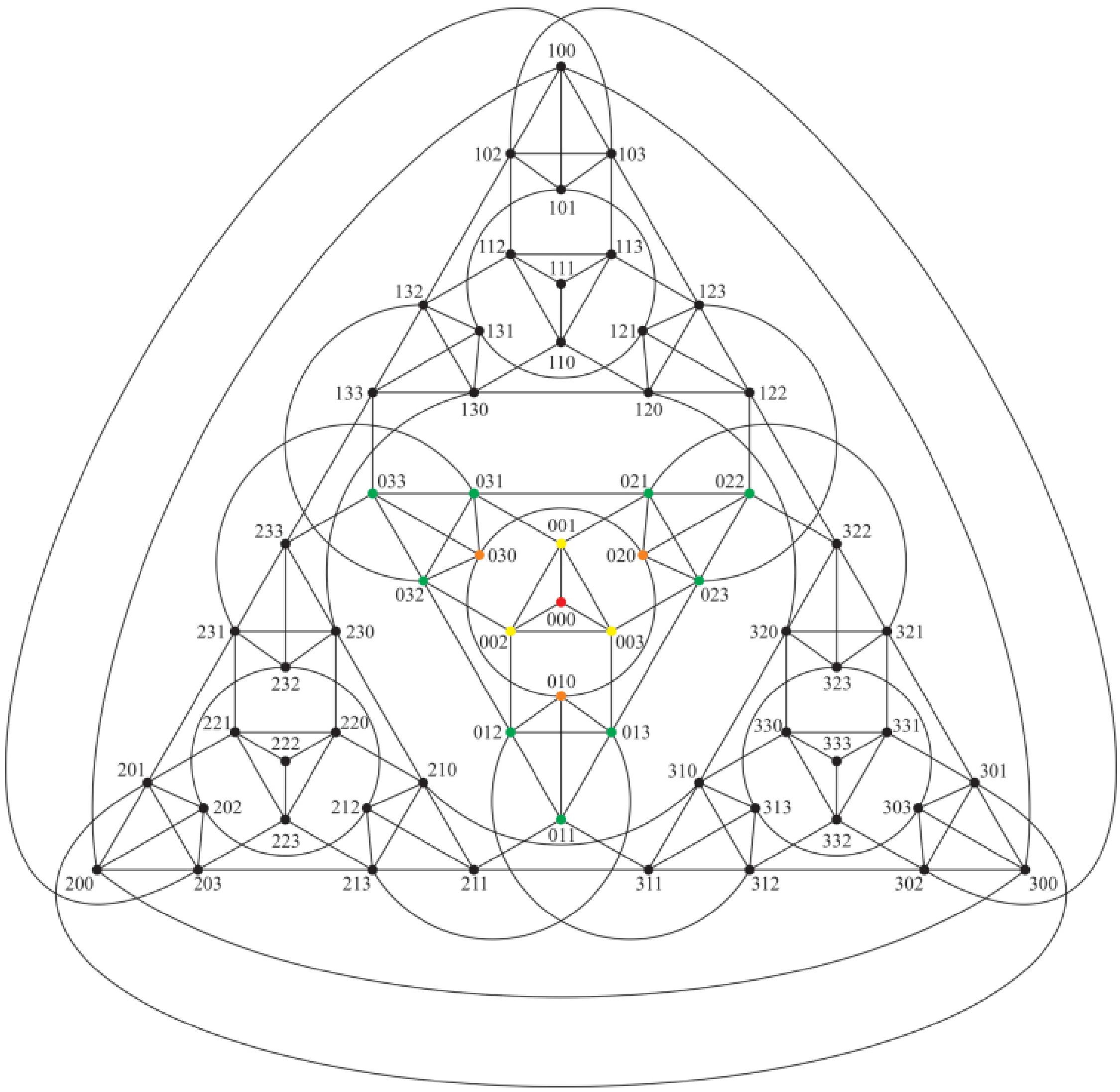

Figura 2.11: Gráfico de Hanoi para $n = 3$ y 4 palos.

Capítulo 3

La Torre de Hanoi, propuesta educativa

3.1. Análisis del contexto

Esta propuesta educativa se diseñó para desarrollarse en un centro educativo, ubicado en una zona industrial de Colmenar Viejo. Este centro dispone de mucho terreno exterior con zonas ajardinadas y varios edificios de aulas. Además, se imparten enseñanzas de ESO, bachillerato, FP básica, FP de grado medio y FP de grado superior. Por lo que es un centro con alumnado heterogéneo y de edades muy dispares.

Respecto a la enseñanza de la especialidad en el centro, se pueden destacar las siguientes fortalezas:

- Gran esfuerzo por entrelazar y mostrar las conexiones entre todas las unidades didácticas que se estudian.
- Atención a la diversidad de niveles en el aula mediante la propuesta de bloques de dificultad creciente.
- Propuesta de actividades diferentes relacionada con las unidades didácticas (una por unidad o bloque), con la intención de motivar y sacar de la rutina de clase magistral y problemas.

Sin embargo, se pueden destacar las siguientes debilidades:

- Predominio del empirismo. Los alumnos aprenden lo que el docente explica. Ausencia del aprendizaje por descubrimiento.

- Dificultades para relacionar los contenidos con la vida cotidiana y el uso que estos puedan tener para el día a día.

- Solo en ciertos grupos: dificultades para lidiar con la falta de motivación, el pésimo auto-concepto matemático que da lugar a un fuerte rechazo hacia las matemáticas y el mal comportamiento en el aula.

3.2. Análisis del reto

El reto principal consiste en: *demostrar que la FP Básica no solo es una clase para hacer practicas, si no que también es una clase para hacer un proyecto de fin de máster*. El primer día que acudí a las prácticas y fui al grupo de FPB (para el cual va dirigido el proyecto) un alumno dijo: *"Este no es un grupo para hacer prácticas"*. Ese momento demuestra las grandes dificultades de autoconcepto y autoestima con las que nos encontramos. Pero el reto no solo trata de aportar en mejorar el autoconcepto de un grupo de alumnos de 1º de FP Básica de electricidad. Si no que también trata de solventar las debilidades observadas en la sección anterior.

Por todo ello, se trató de buscar una actividad mediante la cual se pudiesen trabajar conceptos o contenidos matemáticos sin que se percibiesen a priori por los alumnos, de manera que no mostrasen un rechazo a la actividad sin siquiera intentarlo. También, se tratará de utilizar un enfoque constructivista en el que los alumnos descubran por su cuenta los resultados matemáticos. Además, se intentará relacionar el problema planteado con la vida cotidiana para que los alumnos puedan verle algún tipo de utilidad.

Por último, mencionar que el grupo al que va dirigida la propuesta, es un grupo de 21 chicos de distintas nacionalidades y diversas y muy complejas situaciones personales. Muestran un gran problema de absentismo y de comportamiento en el aula, llegando a presentarse situaciones de violencia. Por lo que, el manejo del aula será un reto a mayores, para el correcto desarrollo de la actividad.

3.3. Fundamentación teórica

La propuesta didáctica que se presentará en este trabajo va dirigida a un contexto muy específico y a priori complejo como son los contextos vulnerables. Por lo que es conveniente hacer un recorrido por la literatura de este contexto.

3.3.1. Sobre el concepto de vulnerabilidad y exclusión social

Al analizar el concepto de vulnerabilidad podemos observar cómo ha ido variando según los contextos sociales y épocas en los que se ha trabajado. Podemos encontrar que a partir de la década de los setenta se intenta que se entienda desde una perspectiva más social. Sin embargo, se restringe a lo socioeconómico (Fernández, 2017). Esto se asienta y profundiza durante la década de los ochenta, donde la vulnerabilidad se entiende como un concepto que se relaciona con las condiciones de vida de los grupos poblacionales, lo que reduce el concepto a una visión meramente economicista y directamente asociado a las desventajas económicas (Helleiner & Frances, 1987). A finales de la década de los noventa, el concepto de vulnerabilidad se abordó desde una perspectiva más crítica, en donde se da relevancia al eje del empleo y su precarización, los derechos humanos o las propias desigualdades producidas por el neoliberalismo y su forma de concebir el desarrollo (Castel, 1992). De esta forma, se propone considerar vulnerables a los sectores pobres que tienen o buscan alternativas de inclusión y a los sectores medios empobrecidos que han ido perdiendo canales de inclusión (Minujin, 1999). Sin embargo, ya durante la primera década del nuevo milenio, se aprecia como el concepto ha evolucionado hacia una mayor complejidad, con un mayor número de factores asociados. Como lo definen Cornejo et al.:

"Condición dinámica que resulta de la interacción de una multiplicidad de factores de riesgo y protectores, que ocurren en el ciclo vital de un sujeto y que se

manifiestan en conductas o hechos de mayor o menor riesgo social, económico, psicológico, cultural, ambiental y/o biológico, produciendo una desventaja comparativa entre sujetos, familias y/o comunidades" (Cornejo et al., 2005, p. 14)

Esta definición trata el concepto de vulnerabilidad desde una perspectiva relacional, donde la supremacía de la perspectiva económica trata de ser superada con el objetivo de complejizar y poner en dinamismo al concepto, tal como lo propone Chambers (Chambers, 1989) al explicitar que la vulnerabilidad no es equivalente a la pobreza, ni significa que existan carencias o necesidades, sino que la componen características de riesgo, inseguridad e indefensión.

En la actualidad, se propone que la vulnerabilidad permite entender la heterogeneidad dinámica de las desigualdades sociales, lo que pone en juego la relación Activos, Vulnerabilidad, Estructura de Oportunidades (Ramos, 2019). Lo anterior apunta a un análisis sobre el rol que ocupan las políticas sociales, pero también da espacio para cuestionar la gestión emancipadora de las individualidades, hogares y comunidades en el proceso de la movilidad social.

Relacionado con el concepto de vulnerabilidad tenemos el concepto de *exclusión social*, caracterizado como afirma Laparra et al. (2007) por su origen estructural, su carácter multidimensional y su naturaleza procesual frente al clásico y estático análisis de la pobreza que contemplaban el fenómeno únicamente como un problema de bajos ingresos.

El término exclusión pasa a ser entendido por las diferentes tradiciones sociológicas como *"un proceso social de pérdida de integración que incluye no solo la falta de ingresos y el alejamiento del mercado de trabajo, sino también un descenso de la participación social y por tanto una pérdida de derechos sociales"* (Laparra et al., 2007, p. 27).

Según el 9º Informe Anual de seguimiento del indicador AROPE (European Anti Poverty Network, 2019), un total de 12.188.288 personas (26,1 %) en España estaba en riesgo de pobreza o exclusión social. La cifra supone el mantenimiento prácticamente exacto de los datos del año inmediatamente anterior, tanto en términos porcentuales como absolutos. Los datos evidencian un claro empeoramiento de las condiciones de vida de las personas más pobres, principalmente por el aumento de la brecha de pobreza y de la tase de pobreza severa.

Existe un amplio consenso respecto del carácter multidimensional de los procesos de vulnerabilidad que afectan a un alto porcentaje de los hogares españoles (Fundación ADECCO, 2019; Fundación Fomento de Estudios Sociales y de Sociología Aplicada (FOESSA), 2019). El ámbito sociosanitario, el contexto familiar y relacional, tanto a nivel de vecindad como comunitario y la situación laboral de los padres influyen de manera directa en la pérdida de bienestar de la unidad de convivencia. Pero si centramos el interés en la infancia, no podemos pasar por alto que la educación es una dimensión fundamental, puesto que:

"La educación está considerada hoy en día como uno de los factores más influyentes a la hora de construir las trayectorias vitales de los individuos. La adquisición de «saberes» y la cualificación que logran las personas tras su paso por los diversos sistemas de formación determinan, en buena medida, cuál va a ser la posición que alcanzarán en el mercado laboral y, en consecuencia, los niveles de calidad de vida a los que accederán" (López de la Nieta, 2008, p. 125).

Esta idea de que la educación es fundamental tiene reflejo en nuestra Constitución Española, ya que aparece recogido en el artículo 27 como un derecho fundamental. Sin embargo, a pesar de este reconocimiento constitucional, la experiencia nos muestra las desigualdades a la hora de recibir una educación de calidad en determinados contextos, porque si bien "la escuela nació como una institución unitaria y uniformizadora y sigue siéndolo, su indiferencia ante las diferencias traduce la desigualdad social en desigualdad escolar y convierte la diversidad en desigualdad" (Fernández Enguita, Mena & Riviere, 2010, p. 28).

Por tanto, podemos concluir que la exclusión social y la pobreza no son realidades ajenas a los centros educativos, todo lo contrario. Según la UNESCO:

"Los patrones de desigualdad y exclusión en la sociedad suelen determinar los patrones de desigualdad y exclusión en la educación, y esta última, puede reforzar la

exclusión social. Sin embargo, la educación también puede ser un medio para reducir las desigualdades y la exclusión en la sociedad." (UNESCO, 2012, p. 1)

Por lo que es conveniente hacer un recorrido por la literatura existente sobre educación en contextos vulnerables.

3.3.2. Tensiones y desafíos observados por docentes en formación

Comenzaremos analizando las tensiones y desafíos percibidos por docentes en formación durante la realización de sus prácticas pedagógicas, las cuales se realizaron en establecimientos que presentan un alto índice de vulnerabilidad (Yancovic-Allen & Escobar-González, 2022). Estas tensiones y desafíos marcan un buen punto de partida para las indagaciones posteriores en la literatura existente sobre contextos vulnerables.

Dentro de las tensiones se encuentran las siguientes (Yancovic-Allen & Escobar-González, 2022):

- **Trabajar en contextos de violencia:** En los establecimientos educativos con alto índice de vulnerabilidad, era común y recurrente ver conductas violentas en el estudiantado, las cuales se materializaban en peleas, amenazas, gritos o menoscabos.

- **Relación docente–estudiante:** Otra tensión señalada hace referencia a la relación que se establece entre el profesorado de escuelas vulnerables y sus estudiantes. Para intentar tener un dominio o manejo sobre el curso, se percibe que los profesores establecen estrategias basadas en el control y el poder, las que mayormente tienen baja efectividad con el estudiantado. Esta dinámica establecida por docentes de aula hace que su relación con el grupo de estudiantes sea compleja y tensa, lo que construye una imagen de la persona docente como alguien a quien el alumnado no puede acceder ni emocional ni académicamente.

- **Currículum oficial versus currículum implementado:** El trabajo relacionado con el proceso de enseñanza-aprendizaje se percibe como una tensión permanente. Los docentes en formación advierten una dualidad en el profesorado de aula, la que se materializa en cumplir con los planes establecidos para el currículum oficial que choca con el ritmo real que deben llevar para promover y alcanzar el aprendizaje en la totalidad de sus estudiantes. De lo anterior, se señala que visualizan en los docentes de aula una preocupación relacionada al nivel de logro que sus estudiantes tengan en pruebas estandarizadas.

- **Desesperanza aprendida:** La última tensión percibida se relaciona con la desesperanza aprendida que experimentan fuertemente sus estudiantes. Advierten una ausencia de proyección en el alumnado, en donde no hay mayores aspiraciones que seguir en el barrio o tener un trabajo similar al de sus progenitores o cuidadores.

  Para el grupo de docentes en formación, la familia es uno de los agentes que juega un rol clave en la desesperanza aprendida que presentan los estudiantes. Advierte que el alumnado valida los comentarios emitidos por sus familiares, por lo que cuestiona sus capacidades. Lo anterior se materializa en una limitación de los esfuerzos a nivel académico, en una disminución de la perseverancia y en un desvanecimiento de los sueños sobre el futuro.

  Finalmente, los docentes en formación presentan una sensación de impotencia frente a esta realidad; manifiestan sentirse impotentes a la hora de enfrentar esta desesperanza en sus estudiantes:

  "Es una sensación entre rabia, pena y angustia y yo no sé qué decirles, si lo que diga estará bien o no? no estoy preparada para esto? pero es duro escuchar a un niño chico decir: si pongo atención me va mal y si no pongo, me va igual de mal. Entonces, ¿para qué me esfuerzo si da lo mismo? Además, en la casa ya ni me pegan si me va mal" (Yancovic-Allen & Escobar-González, 2022).

Respecto a los desafíos identificados encontramos los siguientes (Yancovic-Allen

& Escobar-González, 2022):

- **Interacción con sus estudiantes:** El grupo menciona haber experimentado dificultades para relacionarse con el alumnado debido a que no se les considera profesores, les ven como profesores en prácticas.

- **Promoción de valores y actitudes en el aula:** Los futuros docentes reportan que los actos violentos, de hurto y poco respeto son conductas que están presentes de manera frecuente en estos contextos. Consideran que es importante su desarrollo y promoción en el aula por parte del profesorado. Señalan que esto no debe ser realizado solo cuando ocurre un hecho puntual, sino que debe ser de manera transversal, en las distintas instancias de la jornada escolar.

- **Manejo de las emociones:** Los docentes en formación advierte dificultades para poder comprender las historias de vida de sus estudiantes. Declaran sentirse afectadas y afectados, no solo dentro de la escuela al momento de su práctica, sino también una vez que están fuera de ella. Advierten la necesidad de contar con herramientas que les ayude a poder manejar apropiadamente sus emociones, para poder ser un apoyo para sus estudiantes. Sin embargo, el profesor de aula les brindaba apoyo para enfrentar estas situaciones:

  "No sé cómo, esto no me lo han enseñado? la profesora jefa me decía... tú no puedes llorar, no puedes salir llorando todos los días de práctica... tienes que entender que no les puedes solucionar la vida, pero sí les puedes entregar herramientas para mejorar? y eso me daba ánimos" (Yancovic-Allen & Escobar-González, 2022)

- **Frustración en la lección:** Con respecto al proceso de enseñanza, los docentes en formación declaran experimentar dificultades al momento de realizar sus clases. Señalan que uno de los aspectos más complejos tiene relación con la motivación de los estudiantes, ya que era difícil que participaran y trabajaran

> en clases, independiente de las estrategias que se utilizarán para lograr este fin.
>
> Otro aspecto complejo advertido por los docentes en formación se relacionaba con las metodologías de enseñanza que utilizaban en sus prácticas educativas. Mencionan que llegaban con ideas innovadoras y clases diseñadas con uso de materiales que promovieran una mejor comprensión de lo trabajado, pero que, sin embargo, el profesorado de aula no les permitía realizarlas debido a la cantidad de tiempo que utilizaban.

De lo anterior se puede concluir que el docente es un agente clave y determinante en el proceso de aprendizaje de sus estudiantes en estos contextos, por lo que requiere de herramientas que le permitan desenvolverse de manera óptima en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Yancovic-Allen & Escobar-González, 2022).

En las sucesivas secciones nos centraremos en consejos de manejo de aula (sección 3.3.3), estudios sobre variables socioemocionales (sección 3.3.4) y, finalmente, veremos practicas que dificultan los procesos de transposición didáctica y la gamificación como propuesta educativa (sección 3.3.5).

3.3.3. Ajustes a la propuesta educativa en contextos vulnerables

Podemos encontrar una serie de innovaciones que realizan los profesores, que introducen algunas novedades a la propuesta educativa que reciben los alumnos en contextos vulnerables, como parte del proyecto Fondecyt 1095049: *"Interacciones didácticas innovadoras en contextos de vulnerabilidad social"*. Este proyecto tiene como uno de sus objetivos comprender en profundidad los elementos distintivos de la participación del docente en la interacción didáctica en el aula en centros municipalizados de contextos sociales vulnerables que tienen un alto logro de rendimiento académico (Villalta Páucar et al., 2011). Los docentes entrevistados valoran y les preocupa la disciplina y el orden en el aula: *"Tal como lo confirman los profesores* *en las entrevistas, tener "el control de la clase" es el primer consejo que darían a los docentes nuevos en estos contextos"* (Villalta Páucar et al., 2011).

Además, el tipo de innovación que se puede constatar en estos contextos son ajustes, es decir cambios de baja extensión y profundidad (Villalta Páucar et al., 2011):

- **Estructurar: orden y seguimiento en clase.** Esto confirma el estudio de la Unicef (Unicef, 2004) ¿Quién dijo que no se puede? Los profesores reiteran que necesitan, textualmente, "guiar" a los alumnos paso a paso en las actividades de la clase. Saben que el espacio escolar es, posiblemente, el único que los alumnos tienen para estudiar. Entonces potencian el trabajo en la clase, la ejercitación de actividades y la revisión de tareas.

- **Enseñar: afecto y conocimiento.** Algo que los docentes sostienen insistentemente en las entrevistas y grupos focales refiere al vínculo afectivo que establecen con sus alumnos. De hecho, sobre ese transfondo es que se sostienen las estrategias de aula. Los profesores consideran que el punto de inicio del proceso educativo es la contención afectiva. Y eso significa contacto, estar presente, manifestar interés, incluso controlar y exigir. Las estructuras de intercambio siguen una secuencia donde se intercalan exigencias cognitivas[1] con cuidado y control de las relaciones interpersonales.

- **Ser pertinente: conocer y respetar a los alumnos.** Esto tiene que ver con el manejo de los conflictos y la dinámica de exigencia cognitiva en el aula. Es alto el porcentaje de tiempo e intercambios simples de baja exigencia cognitiva. Pero la mirada de conjunto de la clase indica que las estructuras

[1]Diversos autores organizan y describen la enseñanza en términos de los objetivos educativos de Bloom; (Anderson, Krathwohl, Airasian, Cruikshank, Mayer & Pintrich, 2001) la taxonomía se organiza en dos dimensiones: tipo de conocimiento escolar (factual, conceptual, procedimental y metacognitivo) y proceso cognitivo (que va desde recordar hasta crear, en un proceso de complejidad creciente).

de intercambio de mayor exigencia son en realidad resultado de un proceso iterativo de intercambios de baja exigencia cognitiva.

- **Darse a conocer: vincular enseñanza y experiencia del docente.** En las entrevistas y en la respuesta a los cuestionarios se pone en evidencia el aprecio que los estudiantes tienen por sus profesores. En las clases observadas se encuentra que cuando el docente relaciona los contenidos de enseñanza con situaciones cotidianas y personales aumenta la participación de los alumnos en la clase y mejora el clima afectivo.

- **Definir límites: dejar claro lo que se debe y no se debe hacer.** Los profesores observados tienen buena relación con los alumnos dentro y fuera del aula. Las estructuras de enmarcamiento[2] de la clase funcionan precisamente porque los estudiantes respetan la autoridad del profesor en el aula. El trasfondo afectivo es construido en la vida cotidiana de la escuela. Respecto de ello se puede afirmar que lo que sucede en la sala de clase es tan importante como lo que ocurre fuera de ella.

- **Trabajo reflexivo: el saber pedagógico se renueva en la práctica.** La planificación de la clase es un ejercicio de previsión, que orienta pero no define la práctica pedagógica. La atención reflexiva al interlocutor estudiante es importante. La reflexión de las disonancias entre el saber teórico de la enseñanza y los acontecimientos reales del aula convierte la frustración inicial en saber pedagógico[3].

[2] Tipos de intercambio cuya función es crear las condiciones de orden para que sea posible la clase. No tienen un propósito explícito de enseñanza de contenidos escolares.

[3] El "saber pedagógico" es síntesis de dominio disciplinar y competencias comunicativas para construir el orden necesario y funcional para la enseñanza y el aprendizaje.

3.3.4. Variables socioemocionales en contextos vulnerables

En estos contextos es interesante estudiar como afectan las distintas variables socioemocionales respecto del rendimiento académico. El autoconcepto académico surge como aquel factor con mayor significación estadística, seguido de la estrategia de autorregulación. Además, destaca la influencia negativa de la indisciplina y de las atribuciones de fracaso escolar por causas externas respecto al rendimiento académico en contextos vulnerables (Vera Sagredo et al., 2021).

El autoconcepto académico sería la percepción y evaluación que tiene un sujeto de su propia competencia académica (Cazalla-Luna & Molero, 2015). Gran parte de las dificultades que presentan los adolescentes respecto del rendimiento académico está relacionado con la autopercepción que estos tengan sobre sí mismos, lo cual se ve potenciado por las particularidades propias de la adolescencia (Gonzálvez, Inglés, Vicent, Lagos-San Martín, Sanmartín & García-Fernández, 2016). Un estudiante autopercibido como competente, valorará el desafío de la tarea y favorecerá sentimientos de autoeficacia y de control sobre su propia conducta, sintiéndose por tanto directamente responsable de sus logros y aprendizajes (Morales, 2017). Hay que considerar que el autoconcepto académico está vinculado, no solo al compromiso con la tarea, sino también al modo de afrontar los problemas, y las relaciones con los iguales y el profesorado (González, Leal, Segovia & Arancibia, 2012). Este último aspecto se relaciona con la indisciplina y las conductas disruptivas en el aula, ya que parece ser que una relación profesor-alumno basada en el uso constante de etiquetas negativas por parte de los profesores repercutiría en el autoconcepto, especialmente, de sujetos procedentes de contextos vulnerables (Ngwokabuenui, 2015).

Las estrategias de autorregulación han sido definidas por distintos autores como habilidades complejas que integran pensamientos y comportamientos que facilitan la adquisición, almacenamiento y utilización de información desde la propia experiencia a través de componentes cognitivos, metacognitivos y afectivo-emocionales (García-Ripa, Sánchez-García & Risquez, 2016). El uso de estas estrategias es importante a la hora de experimentar nuevos conocimientos, ya que permiten actuar estratégicamente al utilizar procedimientos, habilidades y técnicas eficaces para aprender (Suárez, Fernández, Rubio & Zamora, 2015). En este sentido, el estudiante será capaz de desarrollar una conciencia metacognitiva que le permita regular las acciones a realizar, conociendo de qué forma aprende, reconociendo sus propias dificultades, y sistematizando las acciones a través de procesos de planificación, supervisión y revisión de sus prácticas para el cumplimiento de sus metas (Arias & Aparicio, 2020). Además, estas estrategias permiten la supervisión del avance en el proceso de aprendizaje del estudiante y la evaluación constante de las acciones que utilizan para enfrentar sus retos académicos; esto implica un proceso de ensayo y error, que busca dar soluciones a las tareas (Castrillón, Morillo & Restrepo, 2020).

Las atribuciones hacen referencia a las causas a través de las cuales las personas explicarían sus fracasos y éxitos escolares. las dimensiones atribucionales serían esquematizadas en función de tres parámetros: en primer término, según el nivel de causalidad “interna-externa”; en segundo término, relacionada con la estabilidad en el tiempo “estable-inestable”; y en tercer término, según la función de controlabilidad “controlable-incontrolable” (Weiner, 1979). Desde esta perspectiva, se podrían atribuir los éxitos o fracasos a cuatro causas principales: el esfuerzo de la persona, la dificultad de la tarea, la suerte y la capacidad del individuo. En este contexto, los estudiantes con locus de control interno creen que son responsables de su conducta y de sus resultados, atribuyendo sus logros a factores como la capacidad o esfuerzo. En cambio, los estudiantes con locus de control externo creen que su desempeño se debe a la suerte, a la dificultad de la tarea u a otras circunstancias que se encuentran fuera de su control (Padua, 2019) . Las consecuencias derivadas respecto a las atribuciones realizadas por los estudiantes, podrían conformar un estilo atribucional que puede favorecer o desfavorecer su aprendizaje (Barca-Lozano, Montes-Oca-Báez & Moreta, 2019). En esta línea, en (Cerda Etchepare & Vera Sagredo, 2019) se destaca el impacto negativo de la predisposición desfavorable hacia las matemáticas, la atribución de fracaso basada en el profesor y la atribución de éxito basada a causas externas en contextos vulnerables. Este resultado es especialmente preocupante pues se relaciona con el hecho de que aquel estudiante que tiene una actitud negativa hacia las matemáticas, que manifiesta un importante nivel de animadversión hacia las tareas y actividades de esta disciplina escolar, tiende a tener un muy mal desempeño en la asignatura. Lo más probable es que esta disposición afectiva inhiba y bloquee su interés por realizar algún tipo de tarea en dicho ámbito, incluso antes de intentarlo (Cerda Etchepare & Vera Sagredo, 2019). Del mismo modo, si el estudiante atribuye su rendimiento académico a factores externos e incontrolables, determinados, por ejemplo, a la suerte o porque culpa de su fracaso al docente, pues considera que éste no está preparado para enseñar, puede significar que en el futuro este estudiante no esperará resultados positivos, pues su autopercepción atributiva implica que él no tiene control ni responsabilidad clara en su mal rendimiento (Cerda Etchepare & Vera Sagredo, 2019).

Estos estudios pueden ser de utilidad para los centros educativos altamente vulnerables, ya que abre espacios para incidir favorablemente en las posibilidades de mejorar los niveles de logros académicos al cautelar algunos elementos desde perspectivas más transversales, o que involucren a toda la comunidad educativa (Vera Sagredo et al., 2021). Así por ejemplo, estos centros podrían fortalecer sus apoyos hacia los estudiantes a través de programas orientados al desarrollo de habilidades cognitivas y motivacionales, desde donde se pueda potenciar y fortalecer el autoconcepto académico y la correcta utilización de estrategias de autorregulación, ya que existe actualmente una serie de herramientas y técnicas para su fortalecimiento (Sanabria, Valencia & Ibañez, 2017).

3.3.5. Practicas que obstaculizan los procesos de transposición didáctica

Para finalizar, puede ser interesante analizar las prácticas que obstaculizan los procesos de trasposición didáctica que desarrolla el profesorado en el aula en escuelas situadas en contextos vulnerables (Beltrán Véliz et al., 2018) y alguna estrategia que haya dado buenos resultados en estos contextos (Pastor Seller & Martín Hierro, 2020).

Chevallard define la transposición didáctica como:

"Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica." (Chevallard, 1991, p. 45)

Beltrán et al. (2018) identifican algunos procesos que dificultan los procesos de trasposición didactica:

- **Diseño de la planificación de enseñanza:** los modelos observados son rígidos y con una lógica predeterminada, puesto que los docentes no utilizan instancias para realizar adecuaciones durante su aplicación orientadas a la práctica reflexiva, de modo que el alumnado ocupa un rol más bien pasivo. De igual modo, se observa un desconocimiento del contexto y de las habilidades, capacidades, estilos y ritmos de aprendizajes de los estudiantes a la hora de planificar.

  Otro obstáculo que se observa es la ausencia de trabajo colaborativo y reflexión pedagógica entre docentes, caracterizado por la falta de condiciones de organización óptimas por parte del personal directivo. Por todo ello, se puede concluir que no se observan diseños de planificación orientados en torno al estudiantado que está en situación de vulnerabilidad educativa, dado que no se visualiza un trabajo articulado, colaborativo ni reflexivo entre el profesorado, debido a la falta de condiciones de organización óptimas, lo que dificulta el proceso de enseñanza y aprendizaje. En tal sentido, el diseño de la planificación no debe dejar espacios para la improvisación y las creencias (Beltrán Véliz et al., 2018).

- **Estrategias didácticas**: se observa que las estrategias didácticas que emplea el profesorado, obstaculizan la generación de aprendizajes en estudiantes, dado que se focalizan mayoritariamente en el enfoque tradicionalista, centradas en clases expositivas, las cuales carecen de una estructura didáctica enmarcada en paradigmas actuales de enseñanza y aprendizaje. El profesorado tiene figura de autoridad, posee el conocimiento y la verdad absoluta y, el estudiantado se considera un actor pasivo. En tal condición, no existen espacios para la reflexión, diálogo y de retroalimentación de los aprendizajes durante el desarrollo de la clase; estas se alejan del modelo de transposición didáctica contextualizada y se acerca más a un modelo de transferencia de información de forma mecánica, puesto que no considera el amplio bagaje de estrategias didácticas centradas en el aprendizaje. En este plano, el personal docente debe generar prácticas pedagógicas innovadoras focalizadas en estrategias de aprendizaje, y recursos didácticos centrados en potenciar el desarrollo del pensamiento reflexivo, crítico y divergente y la capacidad de autonomía. Además, debe atender las características y necesidades de sus estudiantes en condiciones de vulnerabilidad, con la finalidad de que estos grupos se apropien de los aprendizajes (Beltrán Véliz et al., 2018).

- **Dominio del contenido disciplinario:** se evidencia debilidad del profesorado en el dominio del conocimiento del contenido en las disciplinas que enseña, donde se vale del uso excesivo del texto y proyecciones (Power Point). Además, se constata su falta de perfeccionamiento en las disciplinas que enseña. El personal docente, al no tener un dominio del conocimiento erudito de una materia, dificulta los procesos de enseñanza y aprendizaje y, por tanto entorpece el rendimiento y el desempeño educativo, la formación y educación de estudiantes que presentan diversas carencias en el aspecto social y cultural.

- **Concepción de evaluación:** en el discurso docente no aparece el concepto de evaluación como un todo, sino fragmentado en los términos de "recogida de información" para luego "medir y calificar los aprendizajes". Entonces, el razonamiento de la acción evaluativa se reduce a actos técnicos y al control. Esto es ocasionado por un desconocimiento disciplinar y débil manejo de los tipos de evaluación, sumado a lo cual se visualiza la falta de vinculación de la evaluación respecto de la consideración de las necesidades educativas y características de estudiantes en condiciones de vulnerabilidad. En tal sentido, se concluye que la concepción de la evaluación que posee el profesorado es fragmentada y descontextualizada, por tanto, desfavorece, de forma directa, los aprendizajes estudiantiles (Beltrán Véliz et al., 2018).

- **La práctica evaluativa:** se puede concluir que se focaliza en los resultados y en el control, y no en la continuidad y permanencia del proceso de enseñanza y aprendizaje; además, se presenta como un proceso deshumanizador. En tal sentido, la evaluación se realiza como una necesidad docente, y no como un proceso continuo, retroalimentador, programado, dinámico, dialógico, centrado en las capacidades, estilos de aprendizajes, valores, y en la afectividad del alumnado. En consecuencia, la práctica evaluativa dificulta la formación de estudiantes que presentan dificultades en el rendimiento y el desempeño educativo desde un aspecto, teórico, practico, reflexivo, crítico, valórico, social, cultural y afectivo (Beltrán Véliz et al., 2018).
- **El liderazgo pedagógico:** la mayoría de docentes declara no poseer algún tipo de liderazgo que le permita solucionar problemas y llevar a cabo eficazmente acciones pedagógicas encaminadas al logro de aprendizajes de calidad en el aula. Además, la ausencia de la práctica de un liderazgo pedagógico en contextos vulnerables no favorece al desarrollo de la confianza, reflexión crítica y la capacidad de trabajo en equipo entre profesorado, docente-estudiante y entre estudiantes. Por lo tanto, dificulta una formación adecuada de estudiantes desde un plano integral.

Por lo tanto, docentes que se desempeñan en contextos vulnerables deben poseer un conocimiento disciplinar, didáctico y del contexto, a fin de movilizar procesos de transposición didáctica eficaces. Entonces, surge el desafío de la superación de una enseñanza centrada en el profesorado, de tal forma que esta se oriente a estudiantes. Para ello, el personal docente debe ser capaz de emplear diseños instruccionales, flexibles y dialógicos donde se considere al estudiantado un actor principal en la construcción de su propio aprendizaje (Beltrán Véliz et al., 2018). En esta línea, es interesante considerar la propuesta de Pastor Seller y Martín Hierro (2020). En la que presentan el juego, como propuesta educativa innovadora, como un recurso didáctico muy versátil que presenta un gran potencial para desarrollar cualquier temática relacionada con el contenido curricular. Posibilita analizar las elecciones y decisiones que los estudiantes han ido tomando a lo largo del juego, conocer y comprender la evolución a nivel socioeducativo y cognitivo de cada uno de ellos y conectar emocionalmente desde una relación educador–educando más de tú a tú, más cercana y horizontal (Pastor Seller & Martín Hierro, 2020). Obtuvieron interesantes resultados y observaciones positivas:

- El juego motiva y despierta el interés y la curiosidad hacia el aprendizaje, y mejora el rendimiento académico, especialmente en las áreas de matemáticas y lenguaje.

- La puesta en práctica de nuevas formas de aprender jugando ayudan a pensar de manera crítica y estratégica, fomentan la escucha, la atención, la creatividad y la imaginación, y se detecta una mayor flexibilidad a la hora de enfrentarse a situaciones desconocidas.

- La toma de decisiones durante el desarrollo de las actividades se realizaba de forma más consciente, reflexionando acerca de las diferentes opciones y afrontando las posibles situaciones o resultados no esperados con una mayor tolerancia a la frustración.

- A través del juego se fomentó nuevas formas de relación más cooperativas y menos competitivas, nuevos espacios de aprendizaje más cohesionados, respetuosos y empáticos, y una nueva forma de gestionar los conflictos de manera más pacífica y menos violenta.

Pero también es cierto, que la implementación de la metodología basada en el juego encontró numerosas barreras, especialmente procedente del alumnado de mayor edad. Destacaremos las dos siguientes (Pastor Seller & Martín Hierro, 2020):

- Se pudo observar que aquellos estudiantes en los que el juego cooperativo no formaba parte de su cotidianidad, tanto familiar como escolar, mostraban muchas reticencias a la hora de jugar, y si lo hacían, era de manera competitiva y con muy poca tolerancia a la frustración. Se trataba de alumnado que provenía principalmente de una enseñanza basada en clases magistrales y de una producción de conocimiento individual o grupal, pero no cooperativo.
- En cuanto al profesorado, se observan inquietudes en algunos de los docentes para introducir innovaciones en sus clases e implementar el Aprendizaje basado en el juego u otras metodologías novedosas; pero manifestaban no tener suficiente formación y presentar muchas dificultades de éxito si no se trata de un proyecto que cuente con el respaldo de todo el centro educativo.

3.4. Propuesta educativa

Se propone utilizar el rompecabezas: la Torre de Hanoi en el aula en contextos vulnerables.

3.4.1. Contexto y justificación

Esta propuesta educativa se hace para el primer curso de Formación Profesional Básica (FPB) de Electricidad y Electrónica. El objetivo principal de la tarea sería deducir la fórmula del número de movimientos mínimo en función del número de discos, n. Esto puede relacionarse con lo dispuesto en el Real Decreto 127/2014

(BOE, 2014), en el que se regulan aspectos específicos de la FPB de las enseñanzas de formación profesional del sistema educativo, con los siguientes contenidos y criterios de evaluación:

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Resuelve situaciones cotidianas, utilizando expresiones algebraicas sencillas y aplicando los métodos de resolución más adecuados.	Progresiones aritméticas y geométricas. Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.	Se han concretado propiedades o relaciones de situaciones sencillas mediante expresiones algebraicas.

Se les proporcionará una maqueta del rompecabezas por grupo y tendrán una ficha en la que irán apuntando sus anotaciones. Se pretende utilizar la gamificación (Pastor Seller & Martín Hierro, 2020) y una estrategia didáctica en la que se creen espacios para la reflexión y el diálogo (Beltrán Véliz et al., 2018). Por todo ello, se trabajaran las siguientes competencias:

- **Competencia clave: Competencia matemática.** Aunque en la actividad se tratarán de "ocultar" las matemáticas que entraña este rompecabezas, se estarán trabajando la búsqueda de patrones y estrategias de conteo, resolución de problemas y deducción.

- **Competencia clave: Aprender a aprender.** En la actividad se pondrá el foco en los estudiantes, ellos serán los responsables de su aprendizaje. Los docentes presentes serán encargados de mantener el orden en el aula y actuar de mediadores de los diálogos entre los estudiantes.

- **Competencia clave: Competencias sociales y cívicas.** El trabajo se realizará por grupos, por lo que deberán desarrollar sus competencias en este aspecto.

- **Competencia PISA: Elaborar estrategias para resolver problemas.**

A partir de las reglas del rompecabezas, ellos deberán desarrollar sus propias estrategias para resolver los distintos casos del problema.

- **Competencia PISA: Razonar y argumentar.** En el proceso de resolución del problema deberán razonar y argumentar el porqué de los movimientos que hacen y si son óptimos o no.

3.4.2. Descripción de la actividad

En el presente trabajo se estudió en profundidad tanto el problema clásico de la torre de Hanoi como algunas de sus variaciones. Sin embargo, a la hora de llevarlo a la practica nos centramos principalmente en el problema clásico. Las variaciones es interesante conocerlas por si los alumnos se muestran motivados con la actividad y quieren preguntarse ¿que pasaría si...? Además, la propuesta de actividad se fue desarrollando y mejorando mediante la observación del desarrollo de las sesiones. Por lo que se explicará a continuación la idea inicial de la sesión, la ficha inicial que se les facilitó a los estudiantes y la propuesta final que se haría para futuras puestas en practica de la actividad.

Primera sesión

En la primera sesión se introdujo el rompecabezas intentando contextualizarlo como un posible problema de la vida cotidiana (sección 3.3.3 ajuste darse a conocer: vincular enseñanza y experiencia del docente (Villalta Páucar et al., 2011)). Para ello se propuso el siguiente diálogo (adaptación del diálogo real):

-P: Imaginar que todos nosotros estamos trabajando en una empresa, ¿Que tipos distintos de trabajadores hay en una empresa?

-A: Pues... los peones, los coordinadores, los jefes, los de la limpieza, los becarios...

-P: ¿Y qué características tiene que tener un trabajador para ser jefe?

-A: Mandar!

-P: ¿Y cuando haya un problema que debería hacer el jefe?

-A: Riesgos laborales, el plan de riesgos.

-P: Me refiero a si hay un problema algún imprevisto ¿qué tiene que hacer?

-A: No entiendo, di que quieres que te contestemos para contestarte.

-P: No quiero que me contestes algo en concreto. Quiero saber si vosotros creéis que es importante que cuando haya un problema en la empresa el jefe tenga que resolverlo o mandar a otro resolverlo...

-A: Tiene que resolverlo él claro

-P: Pues en nuestra empresa tenemos un problema, se nos ha semi-inundado el almacén y tenemos ahí unas cajas muy valiosas (dibujo de cajas en forma piramidal), estas cajas pesan muchísimo y solo podemos moverlas de una en una y no podemos poner una caja grande sobre una más pequeña. Tenemos que moverlas de esta estantería en la que están, a esta otra y podemos utilizar una más que también está vacía (dibujo de las estanterías con tizas de colores en la pizarra). Así que lo que vamos a comprobar es quien tiene cualidades de jefe y es capaz de resolver este problema. Quienes lo consigan recibirán un diplomita que si lo entregan en el siguiente examen subirá un punto.

Esta actividad rompía el contrato didáctico[4] pues los alumnos están acostumbrados a clases expositivas, donde se les trasmite un conocimiento que luego deben repetir. Por lo que se decidió dar una motivación extra para enfrentar la tarea (punto extra en el examen). Sin embargo, esta herramienta de motivación también se utilizó con la intención de fortalecer el autoconcepto de los estudiantes (dándoles diplomas que alababan su gran trabajo en la actividad) y trasmitiendoles valores

[4]Se refiere a los hábitos específicos esperados por el docente y por el estudiante en una situación de enseñanza y en situaciones de aprendizaje.? Son las normas y reglas explícitas e implícitas que tienen lugar tanto dentro del aula como de la institución en general (Chevallard, 1992).

de responsabilidad (tienen que hacerse responsables del diploma hasta el siguiente examen sin perderlo ni estropeándolo). Todo ello tratando de atender al desafió de promoción de valores y actitudes en el aula (sección 3.3.2) y al trabajo de las variables socioemocionales (sección 3.3.4).

Tras introducir el problema clásico de la Torre de Hanoi, se les dividió en dos grupos de 4 estudiantes (el absentismo y las explulsiones hace que de un grupo de 21 solo haya 8–13 alumnos en clase) y se les entregó a cada grupo una maqueta de la torre de Hanoi y una ficha (Anexo I).

Esta ficha se caracteriza por ser muy abierta. Simplemente organiza las observaciones según la cantidad de discos (de 1 a 11 y pregunta por n), pero no guía las observaciones. Se hacen solamente dos preguntas: ¿cuántos movimientos? y ¿cómo se hace? Esta ficha se puso en practica y representó una serie de dificultades:

- Los alumnos se centraban demasiado en obtener el numero de movimientos. Cuando tenían el número pasaban al siguiente sin siquiera pensar en como se hace.
- Ningún grupo consiguió pasar al de 6 movimientos. En 5 daban muchas vueltas y al no haber entendido bien como se hacían los casos anteriores eran incapaces de desarrollar estrategias adecuadas para resolver el problema.

La observación de estas dificultades junto con las indicaciones de la sección 3.3.3 Estructurar: orden y seguimiento en clase (Villalta Páucar et al., 2011) dieron lugar a una ficha más pautada que se entregará en la segunda sesión (Anexo III). Sin embargo, se consideró que esta primera ficha si que supuso un buen punto de partida, los alumnos se familiarizaron con el problema y se consideró necesario hacer hincapié en trabajar para encontrar estrategias hacia la solución optima del problema. Por lo que para futuras implementaciones se propone la Ficha del Anexo II para esta primera sesión. Esta ficha es simplemente un apoyo para que anoten sus intentos y reflexionen si pueden hacerlo en menos movimientos o no. Es necesario que al final de la sesión se haga una puesta en común para ver si consiguieron dar con el número mínimo de movimientos y la forma en que se resuelve el problema clásico.

Segunda sesión

En la segunda sesión continuarán divididos en los mismos grupos que la sesión anterior y se les proporcionará la Ficha del Anexo III. El objetivo de esta ficha es encontrar gran parte de los patrones que tiene el rompecabezas: donde mueve el disco pequeño en el primer movimiento en función del número de discos, el patrón de los movimientos del disco pequeño y un patrón sencillo para deducir el número de movimientos. Este patrón no les daría la formula general pero les proporciona la idea que sigue y pueden ir calculando término a término la sucesión. Para deducir la fórmula final tendríamos la Ficha del Anexo IV que en principio sería para la tercera sesión.

Tercera sesión

En esta sesión se les daría la Ficha del Anexo IV de forma introductoria para un posible trabajo de progresiones geométricas. En esta ficha han de recoger los datos que tenían de los movimientos y la cantidad de discos, sumar uno y observar. De esta forma podrán deducir la fórmula general del problema clásico. Como esta fórmula contiene una progresión geométrica (2^n) se puede terminar la sesión trabajando dichas progresiones.

Sobre las variaciones del problema clásico

Cabe destacar, que pese a que no se realizó un trabajo exhaustivo y con todo el grupo en el aula respecto a las variaciones del problema de la Torre de Hanoi, si que se propuso como reto la variante de los cuatro palos. Como ya vimos en el capítulo 2, la variante de los cuatro palos es bastante intuitiva pero demostrar su veracidad es bastante complicado y llevó mucho tiempo a los matemáticos de la época. Por lo que se considera apropiado proponer esta variante en el aula como reto para los casos que es factible resolver con las maquetas. No sería conveniente plantear hallar la fórmula general. Sin embargo, esto se puede plantear de dos formas, pedir que consigan mover los discos dándoles el número exacto de movimientos o plantear que lo hagan en menos movimientos que necesitaron en el caso de tres palos. Esta variante se propuso dando el número exacto de movimientos y les resultó realmente fácil. Por lo que sería interesante plantearlo de la otra forma y preguntando en todo momento si se puede hacer en menos movimientos aún. De forma que tengan que plantearse algún razonamiento por el cual llega un momento en el que no se puede reducir más estos movimientos.

La otra variante, la de regular a perfecto, es bastante complicada. Por lo que solo debería plantearse si los alumnos están motivados con el problema y les ha gustado encontrar los patrones referentes al problema clásico. Esta variante requiere un análisis exhaustivo del problema clásico, conocer y dominar todos estos patrones para poder extrapolarlos a identificar cuando se ha detenido la solución del problema clásico y cuando no. El trabajo de esta variante debería ser muy pautado con una ficha similar a la del Anexo III y empezar tratando de resolver problemas en los que se haya detenido la solución del problema clásico. En este caso podría ser interesante trabajar las Gráficas de Hanoi. Las cuales son representaciones de todas las posibles posiciones legales que nos podemos encontrar y los distintos caminos hacia la solución del problema. Esta podría ser una alternativa al trabajo de observación de patrones, pero requiere de un trabajo sobre la representación de las distintas posiciones y su correspondiente notación.

3.5. Resultados

Obtuvimos resultados muy positivos de la implementación de la actividad en el Aula en un contexto vulnerable. Se trabajó en un centro de Colmenar Viejo, Madrid con un grupo de FPB de Electricidad y Electrónica. Tan solo se llevaron a cabo las dos primeras sesiones debido a que el grupo aumentó en número de alumnos considerablemente en la segunda sesión (volvieron al aula varios alumnos que estaban expulsados) y dado que era un grupo que no estaba funcionando del todo bien y estaban muy desmotivados se mostraban muy reacios a hacer "lo mismo" tantos días. Sin embargo, durante la actividad se observó como alumnos que nunca participaban, alumnos con nula motivación hacia las matemáticas participaban de la actividad. Algunos al principio se mostraban distantes pero observaban a sus compañeros mover los discos y cuando iban a hacer un movimiento erróneo les advertían. Además, todos los grupos consiguieron encontrar el patrón que sigue el número de movimientos y pudieron calcular término a término la sucesión.

Más concretamente, un alumno terminó en solitario la ficha del Anexo III mientras su grupo se dedicaba a conductas disruptivas. Este alumno entregó la ficha grupal poniendo solamente su nombre y recibió su correspondiente diploma. Nos sorprendió mucho que aunque al principio no quería guardarlo él por si lo perdía, en el siguiente examen pidió guardarlo para otro, pues ese examen era "demasiado fácil" y prefería utilizarlo en el siguiente. El otro grupo no consiguió terminar la ficha del Anexo III, esto puede ser porque algunos alumnos no habían estado en la primera sesión y iban un poco más lentos. Sin embargo, se coordinaron excelentemente para trabajar en equipo resolviendo las primeras preguntas de la Ficha.

Finalmente, se preguntó a los alumnos su opinión de la actividad. Se les hicieron las siguientes preguntas:

- ¿Te ha gustado la actividad? ¿Por qué?
- ¿Te gustaría seguir haciendo actividades parecidas?
- ¿Qué tipo de actividades prefieres hacer? ¿Por qué?

Respecto a la primera pregunta, todos los alumnos encuestados menos uno, respondieron que si les había gustado la actividad. Es sorprendente que el único que no contestó que si, fue el alumno que terminó en solitario la ficha y obtuvo los mejores resultados en la actividad y contesto: *"Bno más o menos"*[5]. En cuanto al porqué les gustó la actividad respondieron: *"porque te hace pensar", "muy entretenida y pensativa", "me he divertido mucho"*... Nos sorprendieron en parte estas respuestas, pues a priori pensábamos que se mostrarían reacios a actividades en las que tuviesen que pensar y desarrollar ellos sus propias estrategias. Pensábamos que no sería esta la razón por la que les gustase la actividad, ya que rompe el contrato didáctico al estar acostumbrados a actividades en las que se les trasmite un conocimiento y luego tienen que repetirlo. Respecto a la tercera pregunta, la respuesta dominante fue:*"no sé"* junto con *"me da igual"*. Sin embargo, llama la atención una respuesta de un alumno que dijo: *"jugar al uno porque soy bueno"* y otro que dijo: *"Ni idea, lo que sea de pensar"*. El segundo alumno hace hincapié en que quiere actividades en las que tenga que pensar, lo cual refuerza aún más la idea de que es conveniente no hacer clases expositivas en contextos vulnerables. El primer alumno, por otro lado, da una respuesta en un sentido completamente distinto. Quiere hacer actividades que se le den bien. Este alumno tenía muchísimas dificultades en matemáticas, era un alumno muy aplicado y trabajador, pero mostraba un gran desfase curricular. Esto nos muestra que es muy importante considerar las variables socioemocionales en contextos vulnerables.

3.6. Conclusiones

La principal conclusión de este trabajo es que: *los contextos vulnerables tienen unas necesidades educativas específicas que es fundamental conocer. Como pueden ser el manejo del aula, las variables socioemocionales y las estrategias didácticas.* Además de destacar la importancia de informarse sobre los hallazgos existentes en la literatura sobre contextos vulnerables, también es fundamental destacar que *los alumnos valoran muy positivamente estrategias didácticas en los que ellos son los*

[5]Respuesta copiada literalmente de la encuesta. Surge la duda de si el alumno quería poner: "Bueno, más o menos" o "no, más o menos".

protagonistas. Esto refuerza afirmaciones existentes en la literatura (Beltrán Véliz et al., 2018): *"docentes que se desempeñan en contextos vulnerables deben poseer un conocimiento disciplinar, didáctico y del contexto, a fin de movilizar procesos de transposición didáctica eficaces. Entonces, surge el desafío de la superación de una enseñanza centrada en el profesorado, de tal forma que esta se oriente a estudiantes"*.

Por último, destacar los resultados positivos de la utilización del juego como herramienta didáctica. Los propios estudiantes reconocieron que habían tenido que pensar a la par que se lo habían pasado bien. Además, esta estrategia educativa pone el foco en los estudiantes, motiva y despierta el interés hacia el aprendizaje. Esto concuerda con las ideas existentes en la literatura (Pastor Seller & Martín Hierro, 2020): *"El juego, como propuesta educativa innovadora, se configura como un recurso didáctico muy versátil que presenta un gran potencial para desarrollar cualquier temática relacionada con el contenido curricular, posibilita analizar las elecciones y decisiones que los estudiantes han ido tomando a lo largo del juego, conocer y comprender la evolución a nivel socioeducativo y cognitivo de cada uno de ellos; y conectar emocionalmente desde una relación educador–educando más de tú a tú, más cercana y horizontal"*.

La docencia en contextos vulnerables es completamente distinta a la docencia en otros contextos. Se percibió como un contexto cargado de desafíos y dificultades, que demanda una cantidad de tiempo y dedicación muy elevadas. Sin embargo, al final, proporciona una cierta satisfacción docente ya que los alumnos en estos contextos valoran mucho que te hayas preocupado por ellos.

Capítulo 4

Anexos

Se presentan a continuación las Fichas que se usaron o que se propone usar para el desarrollo de la actividad propuesta en el aula. Sin embargo, se redujo el espacio que se dejó para que los estudiantes respondan a las preguntas. Por lo que sería necesario adaptarlas.

4.1. Anexo I

Ficha de Síntesis – Tarea 1

Nombre:

¿Cuántos movimientos? ¿Cómo se hace?

Escribamos nuestras observaciones de hoy:

Observación 1.

Si tenemos 1 disco/caja	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 2.

Si tenemos 2 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 3.

Si tenemos 3 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 4.

Si tenemos 4 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 5.

Si tenemos 5 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 6.

Si tenemos 6 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 7.

Si tenemos 7 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 8.

Si tenemos 8 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 9.

Si tenemos 9 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 10.

Si tenemos 10 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 11.

Si tenemos 11 discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

Observación 12.

Si tenemos n discos/cajas	*Número de movimientos:*
Cómo se hace:	

4.2. Anexo II

Ficha de Síntesis – Tarea 1

Nombre:

Primeros intentos. ¿Se puede hacer con menos movimientos?

Ve anotando tus intentos

Intento 1.

Número de discos/cajas:	*Número de movimientos:*
¿Cuál ha sido tu primer movimiento?	
¿Cómo lo has resuelto?:	
¿Crees que se puede hacer en menos movimientos?	*Si / No*
¿Por qué?:	

Intento 2.

Número de discos/cajas:	*Número de movimientos:*
¿Cuál ha sido tu primer movimiento?	
¿Cómo lo has resuelto?:	
¿Crees que se puede hacer en menos movimientos?	*Si / No*
¿Por qué?:	

Intento 3.

Número de discos/cajas:	*Número de movimientos:*
¿Cuál ha sido tu primer movimiento?	
¿Cómo lo has resuelto?:	
¿Crees que se puede hacer en menos movimientos?	*Si / No*
¿Por qué?:	

Intento 4.

Número de discos/cajas:	*Número de movimientos:*
¿Cuál ha sido tu primer movimiento?	
¿Cómo lo has resuelto?:	
¿Crees que se puede hacer en menos movimientos?	*Si / No*
¿Por qué?:	

Intento 5.

Número de discos/cajas:	*Número de movimientos:*
¿Cuál ha sido tu primer movimiento?	
¿Cómo lo has resuelto?:	
¿Crees que se puede hacer en menos movimientos?	*Si / No*
¿Por qué?:	

Intento 6.

Número de discos/cajas:	*Número de movimientos:*
¿Cuál ha sido tu primer movimiento?	
¿Cómo lo has resuelto?:	
¿Crees que se puede hacer en menos movimientos?	*Si / No*
¿Por qué?:	

Intento 7.

Número de discos/cajas:	*Número de movimientos:*
¿Cuál ha sido tu primer movimiento?	
¿Cómo lo has resuelto?:	
¿Crees que se puede hacer en menos movimientos?	*Si / No*
¿Por qué?:	

Intento 8.

Número de discos/cajas:	*Número de movimientos:*
¿Cuál ha sido tu primer movimiento?	
¿Cómo lo has resuelto?:	
¿Crees que se puede hacer en menos movimientos?	*Si / No*
¿Por qué?:	

4.3. Anexo III

Ficha de Síntesis – Tarea 2

Nombre:

Observando patrones

Sobre la cantidad de movimientos		
Si tenemos 1 disco		
¿Cuántos movimientos hacemos en total?:		
Si tenemos 2 discos		
¿En qué palo están todos los demás discos cuando mueves el más grande?:		
Inicial	Intermedio	Final
¿Cuántos movimientos hacemos antes de mover el disco más grande?: ¿Cuántas veces mueves el disco más grande?: ¿Cuántos movimientos hacemos después de mover el disco más grande?: ¿Cuántos movimientos hacemos en total?:		
Si tenemos 3 discos		
¿En qué palo están todos los demás discos cuando mueves el más grande?:		
Inicial	Intermedio	Final
¿Cuántos movimientos hacemos antes de mover el disco más grande?: ¿Cuántas veces mueves el disco más grande?: ¿Cuántos movimientos hacemos después de mover el disco más grande?: ¿Cuántos movimientos hacemos en total?:		
Si tenemos 4 discos		
¿En qué palo están todos los demás discos cuando mueves el más grande?:		
Inicial	Intermedio	Final
¿Cuántos movimientos hacemos antes de mover el disco más grande?: ¿Cuántas veces mueves el disco más grande?: ¿Cuántos movimientos hacemos después de mover el disco más grande?: ¿Cuántos movimientos hacemos en total?:		

Si tenemos 5 discos		
¿En qué palo están todos los demás discos cuando mueves el más grande?:		
Inicial	Intermedio	Final
¿Cuántos movimientos hacemos antes de mover el disco más grande?: ¿Cuántas veces mueves el disco más grande?: ¿Cuántos movimientos hacemos después de mover el disco más grande?: ¿Cuántos movimientos hacemos en total?:		

¿Cuántos movimientos crees que harán falta para mover 6 discos? ¿Cuántos movimientos crees que harán falta para mover 7 discos?

Sobre el primer movimiento		
El primer movimiento, cuando teníamos 1 disco fue al palo:	intermedio	final
El primer movimiento, cuando teníamos 2 discos fue al palo:	intermedio	final
El primer movimiento, cuando teníamos 3 discos fue al palo:	intermedio	final
El primer movimiento, cuando teníamos 4 discos fue al palo:	intermedio	final
El primer movimiento, cuando teníamos 5 discos fue al palo:	intermedio	final
¿Cual crees que será el primer movimiento cuando tengamos 6 discos? Al palo:	intermedio /	final
Si tenemos una cantidad par de discos (2, 4, 6,...) El primer movimiento es al palo:	intermedio /	final
Si tenemos una cantidad impar de discos (1, 3, 5,...) El primer movimiento es al palo:	intermedio /	final

Sobre el disco más pequeño			
Si tenemos 1 disco			
Cuántas veces mueves el disco más pequeño:			
El primer movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
Si tenemos 2 discos			
Cuántas veces mueves el disco más pequeño:			
El primer movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El segundo movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
Si tenemos 3 discos			
Cuántas veces mueves el disco más pequeño:			
El primer movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El segundo movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El tercer movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El cuarto movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
Si tenemos 4 discos			
Cuántas veces mueves el disco más pequeño:			
El primer movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El segundo movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El tercer movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El cuarto movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El quinto movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El sexto movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El séptimo movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
El octavo movimiento del disco pequeño es al palo:	Inicial	Intermedio	Final
¿Mira el caso de 1 disco y de 3 discos, ves algún patrón?			
¿Mira el caso de 2 disco y de 4 discos, ves algún patrón?			

4.4. Anexo IV

Ficha de Síntesis – Tarea 3

Nombre:

Reflexionando sobre los datos obtenidos

Rellena la primera columna de la siguiente tabla con los datos que has obtenido hasta ahora.

Número de discos/cajas:	Número de movimientos:	A	B	C
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

1. Suma uno al número de movimientos y coloca el resultado que te de en la columna A. ¿Ves alguna relación entre el primer valor de la columna A y el segundo? ¿y entre el segundo y el tercero?

2. Descompón los valores de la columna A en factores primos y escribe su descomposición en la columna B. ¿Ves alguna relación con el número de discos?

3. Escribe, si no lo has hecho ya, la descomposición factorial de la columna B utilizando potencias en la columna C. ¿Serías capaz de dar una fórmula general para el número de movimientos en función del número de discos?

Bibliografía y Webgrafía

Referencias

Anderson, L., Krathwohl, D., Airasian, P., Cruikshank, K., Mayer, R., & Pintrich, P. (2001). A taxonomy for learning, teaching, and assessinng: A revision of bloom's taxonomy of educational objetives. *Nueva York: Longman.*

Arias, R. & Aparicio, A. (2020). Conciencia metacognitiva en ingresantes universitarios de ingeniería, arquitectura y ciencias aeronáuticas. *Propósitos y Representaciones*, (8(1)).

Barca-Lozano, A., Montes-Oca-Báez, G., & Moreta, Y. (2019). Motivación, enfoques de aprendizaje y rendimiento académico: impacto de metas académicas y atribuciones causales en estudiantes universitarios de educación de la república dominicana. *Revista Caribeña de Investigación Educativa*, (3(1)), 19–48.

Beltrán Véliz, J. C., Navarro Aburto, B., & Peña Troncoso, S. (2018). Prácticas que obstaculizan los procesos de transposición didáctica en escuelas asentadas en contextos vulnerables: Desafíos para una transposición didáctica contextualizada. *Educación (Universidad de Costa Rica)*, *42*(2), 335–355.

BOE (2014). Real Decreto 127/2014, del 28 de febrero. Recuperado de https://www.boe.es/boe/dias/2014/03/05/pdfs/BOE-A-2014-2360.pdf.

Bousch, T. (2014). La quatrième tour de Hanoï. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, *21*(5), 895–912.

Castel, R. (1992). La inserción y los nuevos retos de las intervenciones sociales. *Marginación e inserción. Los nuevos retos de las políticas sociales.*, 25–36.

Castrillón, E., Morillo, S., & Restrepo, L. (2020). Diseño y aplicación de estrategias metacognitivas para mejorar la comprensión lectora en estudiantes de secundaria. *Ciencias Sociales y Educación*, (9(17)), 203–231.

Cazalla-Luna, N. & Molero, D. (2015). Revisión teórica sobre el autoconcepto y su importancia en la adolescencia. *Revista Electrónica de Investigación y Docencia (REID)*, (10), 43–64.

Cerda Etchepare, G. & Vera Sagredo, A. (2019). Rendimiento en matemáticas: Rol de distintas variables cognitivas y emocionales, su efecto diferencial en función del sexo de los estudiantes en contextos vulnerables. *Revista complutense de educación*, *30*(2), 331–346.

Chambers, R. (1989). Editorial introduction: Vulnerability, coping and policy. *IDS Bulletin*, (20), 1–7.

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. del saber sabio al saber enseñado. *Buenos Aires: Aiqué.*

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspective apportèes par une aproche anthropogique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques.*

Cornejo, A., Céspedes, P., Escobar, D., Núñez, R., Reyes, G., & Rojas, K. (2005). Sinae sistema nacional de asignación con equidad para becas junaeb: Una nueva visión en la construcción de igualdad de oportunidades en la infancia. *Gobierno de Chile, Junta Nacional de Auxilio Escolar y Becas.*

Édouard, L. (1882). *Récréations Mathématiques.* Gauthier-Villars et fils, Paris.

European Anti Poverty Network (2019). 9º informe anual sobre el estado de la pobreza y la exclusión social en españa. Recuperado de https://www.eapn.es/estadodepobreza/descargas.php.

Fernández, J. (2017). Alumnado inmigrante en la ESO: Vulnerabilidad pedagógica del sistema educativo. *Educación XX1*, (20(1)), 121–140.

Fernández Enguita, M., Mena, L., & Riviere, J. (2010). Fracaso y abandono escolar en españa. *Fundación "La Caixa"*.

Frame, J. S. (1941). Problems and Solutions: Advanced Problems: Solutions: 3918. *The American Mathematical Monthly*, *48*, 216–217.

Fundación ADECCO (2019). Informe #Monomarentalidad y Empleo. Recuperado de https://fundacionadecco.org/wp-content/uploads/2019/10/informe-monomarentalidad- empleo-2019-1.pdf.

Fundación Fomento de Estudios Sociales y de Sociología Aplicada (FOESSA) (2019). VIII Informe sobre exclusión y desarrollo social en España. Recuperado de https://caritas-web.s3.amazonaws.com/main-files/uploads/sites/16/2019/05/Informe-FOESSA-2019-completo.pdf. Cáritas.

García-Ripa, M., Sánchez-García, M., & Risquez, A. (2016). Estrategias de aprendizaje y autorregulación motivacional. identificación de perfiles para la orientación de estudiantes universitarios de nuevo ingreso. *Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación*, (1(41)), 39–57.

González, M., Leal, D., Segovia, C., & Arancibia, V. (2012). Autoconcepto y talento: una relación que favorece el logro académico. *Psykhe*, (21(1)), 37–53.

Gonzálvez, C., Inglés, C., Vicent, M., Lagos-San Martín, N., Sanmartín, R., & García-Fernández, J. (2016). Diferencias en ansiedad escolar y autoconcepto en adolescentes chilenos. *Acta de investigación psicológica*, (6(3)), 2509–2515.

Helleiner, G. & Frances, S. (1987). El sistema internacional y la protección de los grupos vulnerables. *En G. Cornia, G., R. Jolly y F. Stewart (Eds.)*, *1*, 163–193. Siglo Veintiuno Editores.

Hinz, A. & Movarraei, N. (2019). The hanoi graph h_4^3. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, *40*.

Hinz, A. M., Klavžar, S., Milutinović, U., & Petr, C. (2013). *The tower of Hanoi—myths and maths*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel.

Korf, R. E. & Felner, A. (2007). Recent progress in heuristic search: A case study of the four-peg towers of hanoi problem. *IJCAI*, *07*, 2324–2329.

Laparra, M., Obradors, A., Pérez, B., Pérez, M., Renes, V., Sarasa, S., Subirats, J., & Trujillo, M. (2007). Una propuesta de consenso sobre el concepto de exclusión. implicaciones metodológicas. *Revisa Española del Tercer Sector*, (5), 15–57.

López de la Nieta, M. (2008). Sistema educativo y desigualdad. un estudio de la población adulta y los menores en edad de escolarización obligatoria. *VI Informe sobre exclusión y desarrollo social en España*, 121–134.

Minujin, A. (1999). Â¿la gran exclusión? vulnerabilidad y exclusión en américa latina. *Filmus, Daniel (Comp.): Los noventa. Política, sociedad y cultura en América Latina y Argentina de fin de siglo*, 53–77.

Morales, F. (2017). Relaciones entre afrontamiento del estrés cotidiano, autoconcepto, habilidades sociales e inteligencia emocional. *European Journal of Education and Psychology*, (10(2)), 41–48.

Ngwokabuenui, P. Y. (2015). Students' indiscipline: Types, causes and possible solutions: The case of secondary schools in cameroon. *Journal of Education and Practice*, (6(22)), 64–72.

Padua, L. (2019). Factores individuales y familiares asociados al bajo rendimiento académico en estudiantes universitarios. *Revista mexicana de investigación educativa, RMIE*, (24(80)), 173–195.

Pastor Seller, E. & Martín Hierro, L. (2020). El aprendizaje basado en el juego como herramienta socioeducativa en contextos comunitarios vulnerables. *Prisma social*, (30), 88–114.

Ramos, D. (2019). Entendiendo la vulnerabilidad social: una mirada desde sus principales teóricos. *Revista Estudios del Desarrollo Social: Cuba y América Latina*, (7(1)), 139–154.

Sanabria, L., Valencia, N., & Ibañez, J. (2017). Efecto del entrenamiento en autorregulación para el aprendizaje de la matemática. *Praxis & Saber*, (8(16)), 35–56.

Scorer, R. S., Grundy, P. M., & Smith, C. A. B. (1944). Some binary games. *Mathematical gazette*, *28*(280), 96–103.

Stewart, B. M. (1941). Problems and Solutions: Advanced Problems: Solutions: 3918. *The American Mathematical Monthly*, *48*, 217–219.

Suárez, J., Fernández, A., Rubio, V., & Zamora, A. (2015). Incidencia de las estrategias motivacionales de valor sobre las estrategias cognitivas y metacognitivas en estudiantes de secundaria. *Revista Complutense de Educación*, (27(2)), 421–435.

UNESCO (2012). Lucha contra la exclusión social en la educación: guía de evaluación de los sistemas educativos rumbo a sociedades más inclusivas y justas. Recuperado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000217073_spa.

Unicef (2004). ¿Quién dijo que no se puede? Escuelas efectivas en sectores de pobreza. *Santiago: Ministerio de Educación–Unicef.*

Vera Sagredo, A., Cerda Etchepare, G., Aragón Mendizábal, E., & Pére Wilson, C. (2021). 15 rendimiento académico y su relación con variables socioemocionales en estudiantes chilenos de contextos vulnerables. *Educación XX1*, *24*(2), 375–397.

Villalta Páucar, M. A., Martinic Valencia, S., & Guzmán Droguett, M. A. (2011). Elementos de la interacción didáctica en la sala de clase que contribuyen al aprendizaje en contexto social vulnerable. *Revista mexicana de investigación educativa*, *16*(51), 1137–1158.

Weiner, B. (1979). A theory of motivation for some classroom experiences. *Journal of Educational Psychology*, (71(1)), 3–25.

Yancovic-Allen, M. & Escobar-González, S. (2022). Percepciones de docentes en formación de pedagogía básica sobre educar en contextos vulnerables /perception of preservice elementary teachers regarding teaching vulnerable population groups. *Educación (Universidad de Costa Rica)*, *46*(1), 1.