Equivalencia entre soluciones débiles y viscosas para el operador *p*-Laplaciano

Pablo Carrillo Martínez

Máster en Matemáticas y Aplicaciones

MÁSTERES DE LA UAM

2021-2022

Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de Madrid

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

Equivalencia entre soluciones débiles y viscosas para el operador p-Laplaciano

Trabajo de fin de máster

Máster en Matemáticas y Aplicaciones

Autor: Pablo Carrillo Martínez

Tutora: María Medina de la Torre

Curso 2021-2022

Resumen

El p-Laplaciano es un operador no lineal elíptico degenerado que nace como generalización del Laplaciano. Como tal, algunas de las propiedades del Laplaciano como los principios del mínimo y máximo y la convexidad se extienden al nuevo operador. Sin embargo, la falta de linealidad hace que ya no sea posible encontrar soluciones clásicas cuando se formula el problema del p-Laplaciano. Resulta por tanto conveniente analizar el problema mediante otras nociones de solución, siendo dos posibilidades las soluciones débiles y las soluciones viscosas. Cada una de ellas nos proporciona información distinta del comportamiento de las soluciones, por lo que el estudio de ambas es interesante. En este trabajo tendremos como objetivo demostrar la equivalencia de los dos tipos de solución mencionados. Una de las implicaciones se realizará relacionando el concepto de solución débil con un principio de comparación. Para el recíproco daremos dos demostraciones distintas. La primera de ellas se basará en que, para el problema del p-Laplaciano homogéneo, la noción de solución débil y el principio de comparación débil son directamente equivalentes. La segunda se realizará a través de las convoluciones ínfimas, unas funciones que aproximarán las soluciones de manera adecuada, y también tendrán peso unas estimaciones de tipo Caccioppoli. Esta segunda prueba será válida tanto para el problema homogéneo como para el no homogéneo, donde el lado derecho es una función continua, al ser las herramientas mencionadas válidas en ambos casos.

Abstract

The p-Laplacian is a non-linear elliptic degenerate operator that arises as a generalisation of the well-known Laplacian. As such, some of the properties the Laplacian possesses like the minimum and maximum principles or the convexity extend to the new operator. Nevertheless, the absence of linearity is responsible of the non existence of classical solutions, which makes the use of other notions of solution convenient in order to analyse the p-Laplacian problem, two of them being weak solutions and viscosity solutions. Each one of them provides different information concerning the behaviour of the solutions, leading to an interest in the study of both of them. In this piece of work, our main goal will be to prove the equivalence between the two mentioned notions of solution. One of the implications will use the relationship between the concept of weak solution and a comparison principle. For the reciprocal implication, we will give two different proofs. The first one will be based on the fact that, for the homogeneous p-Laplacian problem, the weak solutions and the mentioned comparison principle are directly equivalent notions. The second one will require knowledge of infimal convolutions, which are adequate approximants to the original function, and a series of Caccioppoli estimates. This second proof will be valid both for the homogeneous problem and the non-homogeneous problem, with the right hand side being a continuous function, since the required results are true in both cases.

Índice general

CAPÍTULO 1
Introducción

Las ecuaciones elípticas conforman uno de los campos de estudio más importantes en el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales. Como principal ejemplo de operador de este tipo, el estudio del Laplaciano ha sido y es central en el área. Este debe su importancia, por ejemplo, al gran número de contextos en los que aparece, como lo son la difusión, las leyes de conducción térmica o el movimiento Browniano. Al ser un operador lineal y admitir soluciones fundamentales, el aspecto y comportamiento de las soluciones clásicas en problemas con el Laplaciano como operador principal han sido ampliamente estudiados a lo largo de los años.

Numerosas generalizaciones surgen de manera natural de este operador. Una de ellas, útil para el estudio de los fluidos no Newtonianos, la radiación de la bomba de hidrógeno o el estudio de los glaciares, es la conocida como p-Laplaciano. Este toma la siguiente forma al actuar sobre una función u:

$$\Delta_p u = \text{div }(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \qquad 1 < p < \infty. \tag{1.1}$$

El comportamiento del p-Laplaciano varía mucho dependiendo del valor de p. Fijando $p = 2$ se recupera el Laplaciano lineal original. Sin embargo, cuando $p \neq 2$, el operador deja de ser lineal y, en los puntos donde $\nabla u = 0$, es degenerado si $p > 2$ y singular si $p < 2$. Bajo estas premisas, buscar soluciones clásicas de (1.1) es un objetivo poco factible.

En este trabajo vamos a estudiar las soluciones del problema no homogéneo general del tipo

$$-\Delta_p u = f(x), \tag{1.2}$$

donde f es una función continua. Para ello, necesitaremos considerar nociones de solución más generales. Nos centraremos en dos tipos: las soluciones débiles y las soluciones viscosas. Las primeras son de gran utilidad para probar existencia y unicidad de soluciones, ya que estas propiedades se obtienen de manera natural a través de métodos variacionales y métodos de energía, ambos muy relacionados con el concepto de solución débil. Las segundas, al basarse en un enfoque más puntual, se adecuan más al estudio de propiedades cualitativas de las soluciones.

Resulta, por tanto, muy interesante identificar cuándo ambas nociones de solución son equivalentes. En dicho caso, para enfrentar un problema uno podría elegir las técnicas asociadas a un tipo u otro de solución, según convenga. El estudio de esta equivalencia será el objetivo principal del proyecto y lograremos dar dos demostraciones distintas del resultado para el caso homogéneo, siendo la segunda de ellas también extensible al caso no homogéneo.

En el Capítulo 2, comenzaremos formalizando el p-Laplaciano y veremos cómo este se obtiene de manera natural a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Después introduciremos la noción de solución y semisoluciones débiles del problema homogéneo, analizando existencia, unicidad, regularidad y otras propiedades como unas desigualdades puntuales, unas estimaciones de tipo Caccioppoli y los principios del mínimo/máximo. Hablaremos también de las soluciones débiles del problema no homogéneo, viendo que resultados se extienden a este caso. Por último, introduciremos las soluciones viscosas y funciones propias mediante su construcción.

En el Capítulo 3 daremos la primera de las demostraciones. La clave residirá en comprobar que existe una definición equivalente al concepto de solución débil a través de un principio de comparación. Aquí nos será de utilidad los principios del mínimo/máximo y la convexidad. Pasaremos entonces a demostrar una de las implicaciones y más adelante, en la prueba del recíproco, será de gran importancia conocer la regularidad suficiente ($C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$) de las soluciones. Las referencias principales del Capítulo serán [3], [12] y [14].

En el Capítulo 4 abordaremos la segunda demostración que se basará en el uso de las convoluciones ínfimas, funciones que aproximan la solución del problema original. Estas requierán de partida el uso de funciones acotadas, para lo cual nos valdremos de que las soluciones débiles del problema del p-Laplaciano con dominio con frontera C^1 son continuas hasta la frontera. En cuanto a la propia prueba del resultado, un paso relevante consistirá en el uso de las estimaciones de Caccioppoli. Las referencias principales del Capítulo serán [10] y [17].

Una de las propiedades más relevantes que nos permitirá realizar la prueba será la propia estructura del operador $-\Delta_p$. Esta se obtiene a través de la divergencia del campo vectorial de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

$$m \mapsto |m|^{p-1}m.$$

Las desigualdades puntuales permitirán demostrar que dicho campo es monótono, es decir,

$$\langle |m|^{p-2}m - |n|^{p-2}n, m-n\rangle \geq 0.$$

Dicha propiedad nos dará la elipticidad degenerada del operador, la cual resultará ser crucial en el contexto de las soluciones viscosas y las funciones propias.

CAPÍTULO 2

Soluciones débiles y viscosas

El operador Laplaciano en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, denotado por Δ, se define como

$$-\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}.$$

Dicho operador admite una generalización conocida como p-Laplaciano con $1 < p < \infty$, denotada por Δ_p, que se define como

$$\begin{aligned} \Delta_p u :&= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \\ &= |\nabla u|^{p-4} \left[|\nabla u|^2 \Delta u + (p-2) \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

En este primer capítulo vamos a introducir el operador p-Laplaciano, deduciendo razonadamente por qué debería de ser la generalización del Laplaciano y analizando algunas de las propiedades que nos serán útiles para los capítulos siguientes. De momento, lo único que se puede sacar en claro es que el Laplaciano habitual se recuperaía eligiendo $p = 2$.

2.1. Ecuaciones de Euler Lagrange

Comenzaremos el capítulo explicando cómo, mediante las ecuaciones de Euler Lagrage, se obtiene el p-Laplaciano a partir de una generalización del Laplaciano. Esta teoría se puede encontrar en [6].

Sean Ω un dominio de $\mathbb{R}^N$ con frontera C^1 y g una función continua sobre $\partial\Omega$. El problema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \Omega \\ u = g, & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

con $g \in C(\partial\Omega)$ se conoce como problema de Dirichlet homogéneo de operador Laplaciano.

La búsqueda de soluciones clásicas del problema (2.1) ha sido afrontada mediante diversos enfoques a lo largo de la historia. A nosotros nos va a interesar una formulación equivalente basada en la minimización de un funcional, que en el caso de (2.1) es

$$\begin{aligned} J \colon C^2(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

A partir del funcional J, se considera el estudio de

$$\text{mín}\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \colon u \in C^2(\Omega), u = g \text{ en } \partial\Omega\right\}. \tag{2.2}$$

Merece la pena destacar que, gracias a que el dominio de J incluye al menos primeras derivadas, es Gâteaux diferenciable de $C^2(\Omega)$ en $\mathbb{R}$. Cuando consideremos funcionales más generales, esta misma regularidad será también necesaria.

Existe una relación directa entre los problemas (2.1) y (2.2): si $\bar{u}$ es la función que minimiza el funcional J, es decir que cumple

$$J(\bar{u}) = \text{mín}\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 \colon u \in C^2(\Omega), u = g \text{ en } \partial\Omega\right\},$$

entonces $\bar{u}$ es solución del problema (2.1).

Para verlo, supongamos que J alcanza su valor mínimo en la función $\bar{u}$. En particular, $\bar{u} \in C^2(\Omega)$ y $\bar{u} = g$ en $\partial\Omega$. Definimos, para $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (función que recibe el nombre de función test), la función auxiliar

$$\begin{aligned} \Psi \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto J(\bar{u} + t\varphi). \end{aligned}$$

Como el funcional J es Gateaux diferenciable, Ψ es diferenciable en el sentido habitual. Por tanto, que J alcance su mínimo en $\bar{u}$ es equivalente a que Ψ alcance su valor mínimo en $t = 0$ lo que a su vez equivale, por regularidad, a que $\Psi'(0) = 0$. Si calculamos la derivada de manera explícita obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \Psi'(0) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J(\bar{u} + t\varphi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_\Omega |\nabla(\bar{u} + t\varphi)|^2 dx \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_\Omega |\nabla\bar{u}|^2 dx + 2t\int_\Omega \nabla\bar{u}\nabla\varphi dx + t^2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx \\ &= 2\int_\Omega \nabla\bar{u}\nabla\varphi dx = -2\int_\Omega \varphi\Delta\bar{u}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado integración por partes y el hecho de que la integral de frontera es nula gracias a que el soporte de φ es un subconjunto compacto de Ω. En definitiva, tenemos que $\int_\Omega \varphi\Delta\bar{u} = 0$ para toda función test φ, lo que implica $\Delta\bar{u} = 0$.

Observación. En el cálculo de la derivada de Ψ, nos ha aparecido una constante delante del término $\int_\Omega \nabla\bar{u}\nabla\varphi dx$. En este caso resulta ser indiferente, pero cuando se analiza el problema (2.1) con lado derecho f no idénticamente 0, el funcional asociado tendrá un término extra que dependerá de la f, y la constante puede ser importante. Por eso, el funcional asociado al Laplaciano suele tomarse como

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

La adición de la constante $\frac{1}{2}$ al funcional cobrará especial relevancia cuando tratemos de generalizar al p-Laplaciano.

Acabamos de ver cómo la minimización de un funcional en el espacio adecuado resuelve un problema de ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de Dirichlet. A continuación, vamos a ver que este hecho se extiende a funcionales en general.

Teorema 2.1. *Sean Ω un dominio acotado con frontera C^1 en $\mathbb{R}^N$,*

$$\begin{aligned} L\colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ (x, z, w) &\mapsto L(x, z, w) \end{aligned}$$

una función diferenciable (que recibe el nombre de Lagrangiano) y $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. A partir de L definimos el funcional

$$J(u) := \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))dx. \tag{2.3}$$

Si $\bar{u}$ es una función $C^2(\Omega)$ definida en $\overline{\Omega}$ tal que

$$J(\bar{u}) = \text{mín}\{J(u)\colon u \in C^2(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = g\}$$

entonces $\bar{u}$ es solución del problema de ecuaciones en derivadas parciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial z}(x, u, \nabla u) + \displaystyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L}{\partial w_i}(x, u, \nabla u)\right) = 0, & \text{en } \Omega \\ u = g. & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

Demostración. Sean $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ una función test y

$$\begin{aligned} \Psi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto J(\bar{u} + t\varphi) \end{aligned}$$

una función auxiliar diferenciable debido a la regularidad de J. En particular, como el mínimo de J se alcanza en $\bar{u}$, se tiene $0 = \Psi'(0)$. Escribiendo las coordenadas $L(x, z, w) = L(x_1, \ldots, x_N, z, w_1, \ldots, w_N)$ y suponiendo que podemos intercambiar los signos de derivada e integral

$$\begin{aligned} \Psi'(0) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} J(\bar{u} + t\varphi) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_\Omega L(x, \bar{u} + t\varphi, \nabla(\bar{u} + t\varphi)) \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} L(x, \bar{u} + t\varphi, \nabla(\bar{u} + t\varphi)) \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} L\left(x_1, \ldots, x_N, \bar{u} + t\varphi, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} + t\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_N} + t\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\right) \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}\bigg|_{t=0} + \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}\bigg|_{t=0} + \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial w_i} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial t}\bigg|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot 0 + \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial z} \cdot \varphi\bigg|_{t=0} + \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial w_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\bigg|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial z} \cdot \varphi + \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial w_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Para justificar el cambio de derivada con integral simplemente observamos que, como solo nos interesa la derivada respecto de $t = 0$, podemos suponer $|t| < 1$. En tal caso, existe una cota independiente de t para

$$\frac{d}{dt}L(x,\bar{u}+t\varphi,\nabla(\bar{u}+t\varphi))$$
$$=\frac{\partial L}{\partial z}(x,\bar{u}+t\varphi,\nabla(\bar{u}+t\varphi))\cdot\varphi(x)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial w_i}(x,\bar{u}+t\varphi,\nabla(\bar{u}+t\varphi))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)$$

gracias a la continuidad de las derivadas de L en todo $\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, que es una de las hipótesis necesarias del teorema de intercambio de signo de derivada e integral. El resto de hipótesis se tienen gracias a la regularidad de las funciones.

Prosiguiendo con el cálculo de $\Psi'(0)$, el siguiente paso es integrar por partes para obtener

$$\begin{aligned}0=\Psi'(0)&=\int_\Omega\left(\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\varphi+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=\int_\Omega\left(\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\varphi+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial w_i}\cdot\varphi\right)\\&=\int_\Omega\left(\frac{\partial L}{\partial z}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial w_i}\right)\cdot\varphi.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Como (2.5) es válida para toda función test $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$, concluimos que $\bar{u}$ resuelve (2.4). □

Las ecuaciones dadas por (2.4) se conocen como las *ecuaciones de Euler-Lagrange* y serán claves para obtener la generalización del Laplaciano. Conviene destacar que cuando hablemos de ecuaciones de Euler-Lagrange, siempre estaremos tomando Lagrangianos de la forma $L=L(x,u,\nabla u)$.

Retomando el operador Laplaciano, ya hemos visto cómo el minimizante del funcional asociado al Lagrangiano $L(x,u,\nabla u)=\frac{1}{2}|\nabla u|^2$ resuelve la ecuación $-\Delta u=0$. Una generalización natural es considerar la familia de Lagrangianos

$$L_p(x,u,\nabla u):=\frac{1}{p}|\nabla u|^p,\qquad 1<p<\infty$$

que dan lugar a la familia de funcionales

$$J_p(u):=\frac{1}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p.\tag{2.6}$$

Veamos cuál es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a L_p. En primer lugar, no existe dependencia de la variable z, luego $\frac{\partial L_p}{\partial z}=0$. En segundo lugar,

$$\frac{\partial L_p}{\partial w_i}=\frac{1}{p}\frac{\partial|\nabla u|^p}{\partial w_i}=\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{2}\left(|\nabla u|^{p-2}\right)\cdot 2\frac{\partial u}{\partial x_i}=\left(|\nabla u|^{p-2}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

con lo que

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial L_p}{\partial w_i}\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(|\nabla u|^{p-2}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

En definitiva, la minimización del funcional $\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p$ entre las funciones con $u = g$ en $\partial\Omega$ resuelve el problema

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0, & \text{en } \Omega \\ u = g, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Inspirados por (2.7), el operador p-Laplaciano se define como

$$-\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \qquad 1 < p < \infty.$$

Para cerrar la sección queremos destacar que los Lagrangianos también dan lugar a problemas no homogéneos. En el caso del p-Laplaciano consideramos, para f una función continua, el funcional

$$J_{p,f}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx - \int_\Omega f(x)u(x)dx, \tag{2.8}$$

cuya ecuación de Euler-Lagrange asociada es $-\Delta_p u(x) = f(x)$.

A partir de ahora, cuando hablemos del funcional $J_{p,f}$, omitiremos la dependencia del valor de p y de la función f y lo denotaremos como J.

2.2. Formulación débil

Una vez entendido por qué el p-Laplaciano es un operador que se obtiene de manera natural y qué problema resuelve es hora de analizar alguna de sus propiedades. La que motiva esta sección es el hecho de que, al contrario que para el Laplaciano habitual, encontrar una solución clásica resulta ser una tarea imposible. Por ello, es necesario recurrir a la noción de solución débil y los espacios de Sobolev. Los conceptos aquí expuestos se pueden encontrar principalmente en [16].

El procedimiento es el siguiente: supongamos que la solución del problema (2.7) es clásica. Si multiplicamos la ecuación por una función test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integramos en Ω nos queda

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\varphi.$$

El siguiente paso, utilizando que u es suficientemente regular y que $\varphi = 0$ en $\partial\Omega$, es integrar por partes para obtener

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\varphi = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle\nabla u, \nabla\varphi\rangle.$$

Así, se plantea un problema alternativo donde no necesariamente pediremos regularidad $C^2(\Omega)$, sino que lo planteamos en el contexto de los espacios de Sobolev

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle\nabla u, \nabla\varphi\rangle = 0, & \text{en } \Omega \\ Tr(u) = g, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

donde Tr denota la Traza de la función. La integral

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle\nabla u, \nabla\varphi\rangle \tag{2.10}$$

suele recibir el nombre de primera variación.

Definición 2.2. (Solución débil) Diremos que $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es solución de la formulación débil (o simplemente solución débil) de (2.7) si se cumple (2.9) para toda función test $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. También podremos referirnos a dichas funciones como funciones p-armónicas o soluciones débiles de $-\Delta_p u = 0$.

A continuación, justificaremos la elección del espacio $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sea $W^{k,a}(\Omega)$ un espacio de Sobolev genérico. En primer lugar, en (2.9) solo aparece ∇u luego solo necesitamos considerar el espacio de derivadas de orden uno, es decir $k = 1$. En segundo lugar, necesitamos que la integral $\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle$ esté bien definida. Si $K = \mathrm{supp}(\varphi)$, entonces aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes $\{p, \frac{p}{p-1}\}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle\right| &= \left|\int_K |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle\right| \leq \| |\nabla u|^{p-1}\nabla\varphi\|_{L^1(K)} \\
&\leq \| |\nabla u|^{p-1}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(K)} \|\nabla\varphi\|_{L^p(K)} = \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(K)}\|\nabla\varphi\|_{L^p(K)}
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

con lo que el problema se reduce a pedir $\|\nabla u\|_{L^p(K)} < \infty$ para todo K compacto de Ω. Es decir, necesitamos $a = p$ y añadir la propiedad de integrabilidad local. En conclusión, $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es el espacio más pequeño donde el problema (2.9) tiene sentido.

Observación. Hemos definido las soluciones u como funciones en $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pero en el Teorema 2.3 consideraremos funciones en el espacio más pequeño, $W^{1,p}(\Omega)$, y las funciones test en $W^{1,p}_0(\Omega)$. En estos nuevos espacios, un cálculo similar a (2.11) permite ver que (2.10) sigue estando bien definida.

Al igual que para la formulación clásica, podemos relacionar la formulación débil con un problema de minimización.

Teorema 2.3. *Sean $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ y g una función continua sobre $\partial\Omega$ tal que $Tr(\bar{u}) = g$. Son equivalentes*

(*a*) *$\bar{u}$ minimiza el conjunto*

$$
\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p \colon u \in W^{1,p}(\Omega),\ Tr(u) = g\right\}, \tag{2.12}
$$

(*b*) *la primera variación es nula para toda $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$, es decir*

$$
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla\bar{u}, \nabla\varphi\rangle = 0,\ \forall\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega).
$$

Demostración. Si suponemos que $\bar{u}$ es la función que minimiza el funcional $\int_\Omega |\nabla u|^p$, tomando el Lagrangiano $L(x, u, \nabla u) = \frac{1}{p}|\nabla u|^p$ y definiendo Ψ como en la demostración del Teorema 2.1 obtenemos

$$
0 = \Psi'(0) = \int_\Omega \frac{\partial L}{\partial z}\cdot\varphi + \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial w_i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0 + \int_\Omega |\nabla\bar{u}|^{p-2}\langle\nabla\bar{u}, \nabla\varphi\rangle
$$

que es válido, como ya hemos visto, para toda $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

En la otra dirección, en primer lugar observamos que la condición (a) es equivalente a que $\forall v \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $Tr(\bar{u} - v) = 0$

$$
\int_\Omega |\nabla v|^p \geq \int_\Omega |\nabla\bar{u}|^p.
$$

En segundo lugar, si $p > 1$ la función

$$h\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto |a|^p \tag{2.13}$$

es convexa, lo que equivale a que para todos $a, b \in \mathbb{R}^N$, $h(b) \geq h(a) + \langle \nabla h(a), b - a\rangle$ que en nuestro caso se escribe

$$|b|^p \geq |a|^p + p|a|^{p-2}\langle a, b - a\rangle. \tag{2.14}$$

Como $Tr(\bar{u} - v) = 0$, se tiene que $v - \bar{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es función test válida, luego por (2.14) se sigue

$$\int_\Omega |\nabla v|^p \geq \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^p + p\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^{p-2}\langle \nabla \bar{u}, \nabla(v - \bar{u})\rangle = \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^p.$$

□

Si $\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla \bar{u} \cdot \nabla \varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces por densidad también se tendrá la igualdad para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En particular:

Corolario 2.4. Sea $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $\bar{u}$ es solución débil de (2.9) si y solo si $\bar{u}$ es la función que minimiza el funcional $\int_\Omega |\nabla u|^p$ con traza dada.

Aún habiendo pasado de considerar soluciones clásicas a soluciones débiles, en muchos casos la noción débil seguirá siendo demasiado fuerte. La idea es considerar desigualdades en vez de la igualdad en la ecuación integral de (2.7).

Definición 2.5. Sean g una función continua sobre $\partial\Omega$ y $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ con $Tr(u) = g$. Diremos que u es

- supersolución de la formulación débil (o, simplemente, supersolución débil) de (2.2) si para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ se tiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle \geq 0;$$

- subsolución de la formulación débil (o, simplemente, subsolución débil) de (2.2) si para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ se tiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle \leq 0.$$

Se ve fácilmente que u es solución débil si y solo si u es tanto subsolución como supersolución débil.

2.3. Un problema bien propuesto

Una vez vista la definición de formulación débil del problema del p-Laplaciano, el siguiente paso es estudiar si dicho problema tiene existencia y unicidad de las soluciones y si están en espacios más regulares que $W^{1,p}(\Omega)$. La referencia para la existencia y unicidad es [8], y para la unicidad es [16].

2.3.1. Existencia y unicidad

Comenzamos abordando los dos problemas más comunes que son la existencia y la unicidad de las soluciones para el problema del p-Laplaciano homogéneo.

La unicidad es consecuencia directa de la convexidad estricta de la función h dada por

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x|^p, \end{aligned}$$

con $1 < p < \infty$. En particular, se tiene $h(ta + (1-t)b) < th(a) + (1-t)h(b)$ para todo $t \in (0,1)$ y todos $a, b \in \mathbb{R}^N$ con $a \neq b$. Tomando $t = \frac{1}{2}$ obtenemos

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p < \frac{1}{2}\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Supongamos que la solución débil de (2.9) en el espacio $W^{1,p}(\Omega)$ no es única, es decir, existen dos funciones u_1, u_2 con $Tr(u_1) = Tr(u_2)$ que minimizan (2.12). Entonces

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^p \leq \int_\Omega \left|\frac{\nabla u_1 + \nabla u_2}{2}\right|^p < \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p = \int_\Omega |\nabla u_2|^p \tag{2.15}$$

lo cual es una contradicción.

Para ver la existencia de una solución, tendríamos que ver que existe

$$\min\{J(u)\colon u \in V\}$$

donde

$$J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p \quad \text{y} \quad V := \{u \in W^{1,p}(\Omega)\colon\ Tr(u) = g\}.$$

Sean

$$A := \inf\{J(u)\colon u \in V\}$$

y $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en V tal que $\lim_{m\to\infty} J(u_m) = A$. Queremos ver que existe $\bar{u}$ tal que $J(\bar{u}) = A$. La idea es extraer una subsucesión convergente en algún sentido de u_m a partir de las propiedades del funcional J.

La primera propiedad que nos interesa es una desigualdad del tipo

$$J(u) \leq \liminf_{m\to\infty} J(u_m). \tag{2.16}$$

Definición 2.6. Sean $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico W y J un funcional definido en W.

Diremos que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de semicontinuidad inferior fuerte (SLSC), respectivamente semicontinuidad inferior débil (WLSC), si para todo $t \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{w \in W\colon J(w) > t\}$$

es abierto en la topología fuerte, resp. débil, de W.

Diremos que $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de semicontinuidad secuencial inferior fuerte (SSLSC), respectivamente semicontinuidad secuencial inferior débil (SWLSC), si $u_m \to u$ en W, respectivamente $u_m \rightharpoonup u$ en W, implica (2.16).

Una formulación equivalente para las propiedades SLSC y WLSC es que el epígrafo

$$\Sigma(J) := \{(w,t) \in W \times \mathbb{R} \colon t \geq J(w)\}$$

sea cerrado en la topología correspondiente, débil o fuerte. Además, la propiedad SLSC, respectivamente WLSC, implica SSLSC, respectivamente SWLSC, y el recíproco es cierto si W es un espacio metrizable (véase [[8], p.120]).

Introducimos ahora la herramienta principal para trabajar en este contexto, que son las funciones de Carathéodory.

Definición 2.7. La función

$$\begin{aligned} h \colon \Omega \times \mathbb{R}^s &\to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ (x,y) &\mapsto h(x,y) \end{aligned}$$

se dice que es de Carathéodory si

- $h(x,\cdot)$ es continua para casi todo $x \in \Omega$;
- $h(\cdot,y)$ es medible para todo $y \in \mathbb{R}^s$.

Tomando $s = N+1$ e $y = (u, \nabla u) = (u(x), \nabla u(x))$ obtenemos $h(x,u(x),\nabla u(x))$ que puede verse como un Lagrangiano. Resulta necesario poder introducir la dependencia de x en la variable y de las funciones de Carathéodory, para lo cual el siguiente lema nos será de utilidad:

Lema 2.8. Sean h una función de Carathéodory e $y(x)$ una función medible. Entonces $h(x,y(x))$ es una función medible en Ω.

Demostración. Lo probaremos primero para funciones simples no negativas, es decir, supongamos que existen conjuntos disjuntos $\{A_i\}_{i=1}^m$ tales que

$$y(x) = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$$

con $a_i > 0$. Para ver que $g(x) = h(x,y(x))$ es medible hay que comprobar que la preimágen por g de un conjunto abierto es abierto. Observando que

$$A := \{x \in \Omega \colon g(x) > t\} = \bigcup_{i=1}^m \{x \in A_i \colon h(x,a_i) > t\}$$

junto con que las $h(\cdot,a_i)$ son medibles, el conjunto A es unión de abiertos luego es abierto. Para el caso en el que y es una función general, tomamos una sucesión de funciones simples $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $y_k \to y$ en casi todo punto. Como $h(x,\cdot)$ es continua en casi todo punto, tomando límites se obtiene

$$h(x,y(x)) = \lim_{k\to\infty} h(x,y_k(x)).$$

En definitiva, $h(x,y(x))$ es límite de funciones medibles, luego es medible. $\square$

Ya podemos dar un primer resultado enfocado a probar (2.16).

Teorema 2.9. *Sea $h(x, y)$ una función de Carathéodory y sea $\{y_m(x)\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tal que*

$$y_m \to y \text{ en } L^1(\Omega).$$

Entonces

$$\int_\Omega h(x, y(x))dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega h(x, y_m(x))dx.$$

Demostración. Utilizando la propia definición de lím inf, de la sucesión y_m podemos extraer una subsucesión $\{y_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de manera que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega h(x, y_{m_k}(x))dx = \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega h(x, y_m(x))dx.$$

Por otra parte, como $\{y_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en $L^1(\Omega)$ existe una subsubsucesión, que seguiremos llamando $\{y_{m_k}\}$, tal que $y_{m_k} \to y$ en casi todo punto. En particular, debido a la continuidad en casi todo punto de h en la segunda variable, $h(x, y_{m_k}(x)) \to h(x, y(x))$ también en casi todo punto. Aplicando el lema de Fatou,

$$\begin{aligned}\int_\Omega h(x, y(x))dx &= \int_\Omega \lim_{k\to\infty} h(x, y_{m_k}(x))dx \leq \lim_{k\to\infty} \int_\Omega h(x, y_{m_k}(x))dx \\ &= \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega h(x, y_m(x))dx.\end{aligned}$$

□

Para aplicar el teorema a nuestro contexto hay que tomar $y(x) = (u(x), \nabla u(x))$. En este caso, la hipótesis $y_m \to y$ equivale a $u_m \to u$, $\nabla u_m \to \nabla u$ ambas en $L^1(\Omega)$, es decir $u_m \to u$ en $W^{1,1}(\Omega)$.

Corolario 2.10. Sea $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tales que $u_m \to u$ en $W^{1,1}(\Omega)$. Entonces

$$J(u) \leq \liminf_{m\to\infty} J(u_m).$$

Demostración. Basta tomar $h(x, y(x)) = h(x, u(x), \nabla u(x)) := |\nabla u|^p$. □

Pedir la convergencia fuerte en el espacio $W^{1,1}(\Omega)$ es una propiedad demasiado restrictiva, por lo que conviene relajar las hipótesis. El objetivo es buscar que se tenga (2.16) pidiendo solamente convergencia débil. Para ello, nos serán de gran utilidad propiedades de convexidad.

Teorema 2.11. *Sea $h(x, y)$ una función de Carathéodory tal que $h(x, \cdot)$ es convexa para casi todo x. Sea $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ tal que*

$$y_m \rightharpoonup y \text{ en } L^1(\Omega).$$

Entonces

$$\int_\Omega h(x, y(x))dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega h(x, y_m(x))dx$$

Demostración. Sea $I(y) := \int_\Omega h(x, y(x))dx$. El Teorema 2.9 nos dice que I es SSLSC en $L^1(\Omega)$. Por ser L^1 un espacio métrico, tenemos que I es SLSC, que equivale a que el epígrafo $\Sigma(I)$ sea cerrado fuerte. Ahora el Teorema 2.22 utiliza la convexidad de I para deducir que el epigrafo $\Sigma(I)$ es cerrado débil, es decir I es WLSC y, por tanto, SWLSC en $L^1(\Omega)$. □

Corolario 2.12. Sea $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones tal que $u_m \rightharpoonup u$ en $W^{1,1}(\Omega)$. Entonces

$$J(u) \leq \liminf_{m\to\infty} J(u_m).$$

En otras palabras, J es SWLSC en el espacio $W^{1,1}(\Omega)$.

La segunda propiedad que nos interesa es la coercividad del funcional J, que se expresa como

$$J(u) \geq \alpha \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - \beta.$$

con $\alpha, \beta > 0$. Si una sucesión $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $W^{1,p}(\Omega)$ minimiza J entonces

$$0 \leq \alpha \|u_m\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq J(u_m) + \beta \leq C$$

donde C no depende de m, luego la sucesión $\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ está acotada en $W^{1,p}(\Omega)$. Como todos los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ son reflexivos, el Teorema de Kakutani (véase el Teorema 2.23) nos dice que existe una subsucesión de $\{u_m\}$ convergente en la topología débil de $W^{1,p}(\Omega)$. Dicha sucesión, por converger en $W^{1,p}(\Omega)$ también lo hará en $W^{1,1}(\Omega)$ si Ω es acotado.

Proposición 2.13. El funcional $J(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p$ es coercivo en

$$\{u \in W^{1,p}(\Omega) \colon Tr(u) = g\}$$

donde g es una función continua.

Demostración. La convexidad de la función $a \in \mathbb{R}^N \mapsto |a|^p$ nos da

$$|a+b|^p = \left|\frac{2a}{2} + \frac{2b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}|2a|^p + \frac{1}{2}|2b|^p = 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p). \tag{2.17}$$

Observamos que, como $Tr(u-g) = 0$, la desigualdad de Poincaré nos garantiza que

$$\int_\Omega |u-g|^p \leq C \int_\Omega |\nabla(u-g)|^p \tag{2.18}$$

para alguna constante C independiente de u. En particular, utilizando (2.17) y (2.18)

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} &\leq \int_\Omega |\nabla u|^p + \int_\Omega |u|^p \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^p + 2^{p-1}\left(\int_\Omega |u-g|^p + \int_\Omega |g|^p\right) \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^p + 2^{p-1}\left(C\int_\Omega |\nabla(u-g)|^p + \int_\Omega |g|^p\right) \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^p + 2^{p-1}\left(C2^{p-1}\int_\Omega (|\nabla u|^p + |\nabla g|^p) + \int_\Omega |g|^p\right) \\
&\leq \overline{C} J(u) + K
\end{aligned}$$

donde $\overline{C} = 1 + C2^{2(p-1)}$ y K son constantes positivas indepedientes de u. □

Corolario 2.14. Las sucesiones $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en $\{u \in W^{1,p}(\Omega) \colon Tr(u) = g\}$ que minimizan J tienen una subsucesión convergente en $W^{1,1}(\Omega)$.

La última propiedad de relevancia es el hecho de que V es un subespacio débilmente cerrado del espacio $W^{1,p}(\Omega)$ y a su vez de $W^{1,1}(\Omega)$.

Ya estamos en posición de abordar el problema de la existencia. Sea $\{u_m\} \in V$ tal que $\lim_{m\to\infty} J(u_m) = A$. Por coercividad existe una subsucesión, que seguiremos llamando u_m tal que $u_m \rightharpoonup \bar{u}$ en $W^{1,1}(\Omega)$. Además, $\bar{u} \in V$ por ser espacio cerrado débil. Utilizando que J es SWLSC en $W^{1,1}(\Omega)$ deducimos

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{m\to\infty} J(u_m) = A,$$

con lo que $J(\bar{u}) = A$ por definición de ínfimo. En conclusión, el ínfimo se alcanza, luego en realidad es un mínimo.

Para futuras referencias a este resultado, lo enunciamos como teorema.

Teorema 2.15. *Sean $1 < p < \infty$ y V un subespacio cerrado débil de la topología de $W^{1,p}(\Omega)$. Si $J\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es un funcional SWLSC y coercivo en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces existe una función $u \in V$ tal que*

$$J(\bar{u}) = \min\{J(u)\colon u \in V\}.$$

2.3.2. Continuidad

Hemos definido las soluciones débiles de (2.7) como funciones $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pero es interesante preguntarse si en realidad existe alguna noción de continuidad o incluso derivabilidad de las soluciones. La dimensión del espacio ambiente $\mathbb{R}^N$ es crucial en este sentido y que divide el análisis en tres casos.

Observación. A partir de ahora omitiremos la condición de la traza de (2.9) para la Definición 2.2. A pesar de perder la unicidad, ganamos la propiedad de que la suma de una constante a una solución sigue siendo solución débil.

En el caso $p > N$, la inclusión de Morrey garantiza que una función en $W^{1,p}(\Omega)$ es directamente Hölder continua. La prueba del caso $p = N$ puede encontrarse en la sección 3.2 de [16].

Para la prueba del caso $p < N$ se requiere de la siguiente desigualdad de Harnack.

Proposición 2.16. (Desigualdad de Harnack). Sean $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una función p-armónica no negativa y $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ con $x_0 \in \Omega$, $r > 0$. Entonces existe una constante $C = C(N,p)$ tal que

$$\mathrm{esssup}_{B_r(x_0)} u \leq C \mathrm{essinf}_{B_r(x_0)} u.$$

Observación. La demostración de la desigualdad se puede encontrar en [[16], Sección 3.3]. El primer paso de la misma consiste en demostrar que las soluciones débiles de $-\Delta_p u = 0$ están localmente acotadas. Este hecho será de relevancia para la proposición siguiente.

Corolario 2.17. Las soluciones débiles u de $-\Delta_p u = 0$ son Hölder continuas.

Demostración. Sean $x \in \Omega$, $r > 0$ tal que $B_{2r} = B(x, 2r) \subset\subset \Omega$, $m(r) := \mathrm{essinf}_{B_r(x_0)} u$ y $M(r) := \mathrm{esssup}_{B_r(x_0)} u$. Utilizando que el conjunto de soluciones débiles es cerrado bajo suma de constantes, las funciones $u(x) - m(2r)$ y $M(2r) - u(x)$ son soluciones débiles. Además, por construcción, son no negativas en $B_r(x_0)$.

Por la Proposición 2.16, existe $C = C(n,p)$ tal que

$$M(r) - m(2r) \leq C(m(r) - m(2r)),$$

$$M(2r) - m(r) \leq C(M(2r) - M(r)).$$

Reordenando los términos de ambas desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned} M(r) - Cm(r) &\leq m(2r) - Cm(2r) \\ CM(r) - m(r) &\leq CM(2r) - M(2r), \end{aligned}$$

de donde, sumando, llegamos a

$$(C+1)(M(r) - m(r)) \leq (C-1)(M(2r) - m(2r)).$$

Definiendo $\lambda := \frac{C-1}{C+1}$, tenemos que

$$\omega(r) \leq \lambda \omega(2r) \tag{2.19}$$

donde $\omega(r) = M(r) - m(r)$ recibe el nombre de oscilación (esencial) de u en la bola $B_r(x_0)$. Observando que $\lambda < 1$, definimos $\alpha \in (0,1)$ el valor que cumple

$$2^{-\alpha} = \lambda.$$

Iterando (2.19) se sigue

$$\omega\left(\frac{r}{2^k}\right) \leq \lambda^k \omega(r) = 2^{-k\alpha}\omega(r).$$

Sean $y \in B_r$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{r}{2^{k+1}} \leq |x - y| \leq \frac{r}{2^k}.$$

Entonces

$$|u(x) - u(y)| \leq \omega\left(\frac{r}{2^k}\right) \leq \left(\frac{2}{2^{k+1}}\right)^{\alpha} \omega(r) \leq 2^{\alpha}\frac{|x-y|^{\alpha}}{r^{\alpha}}\omega(r) = \overline{C}|x-y|^{\alpha}$$

donde $\overline{C} = \overline{C}(n,p,r,\omega(r))$, que es valor finito ya que las soluciones están localmente acotadas y, por tanto, tienen oscilación local finita. □

De la demostración anterior se ve como el exponente de Hölder continuidad α depende únicamente de la constante C dada por la Proposición 2.16.

A partir de ahora, debido al Corolario 2.17, cuando hablemos de soluciones débiles, a pesar de haberlas definido inicialmente en $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, en realidad estaremos pensando en funciones continuas.

Observación. Sabiendo que las soluciones del problema $-\Delta_p u = 0$ son continuas, uno se podría preguntar si esta continuidad se da hasta la frontera. Cuando se plantea el problema al completo (2.9) tomando como condición de frontera una función $g \in C(\partial\Omega)$, entonces la única solución cumple $u \in C(\overline{\Omega})$ siempre que estemos considerando dominios $\Omega \in C^1$. Este resultado se puede encontrar en [[16], Teorema 2.16].

2.4. Otras herramientas

Dedicaremos esta sección del capítulo para desarrollar una serie de resultados que nos serán de utilidad más adelante. Se tratan del principio del máximo, de unas acotaciones que tienen que ver con la estructura del p-Laplaciano y de resultados generales de la teoría de ecuaciones. Las dos primeras se pueden encontrar en [16].

2.4.1. Principio del máximo

Unas propiedades de gran utilidad que se tienen para el operador Laplaciano y que extienden para el p-Laplaciano son los principios del máximo y mínimo fuertes. La Proposición 2.16 nos proporciona una desigualdad que permite deducir dicha propiedad con facilidad:

Proposición 2.18. (Principios del máximo/mínimo)

Supongamos que una solución débil (continua) u de (2.7) alcanza su máximo en algún punto de Ω. Entonces u es constante.

Análogamente supongamos que una solución débil (continua) de (2.7) u alcanza su mínimo en algún punto de Ω. Entonces u es constante.

Demostración. Demostraremos solamente el principio del máximo. El principio del mínimo se obtiene de manera análoga tomando $-u$ en vez de u en el argumento.

Definimos x_0 como el punto tal que $u(x_0) = \max_\Omega u(x)$. En particular, si u alcanza su máximo en x_0, entonces $-u$ alcanza su mínimo en x_0, es decir $\min_{B_r(x_0)}(-u) = -u(x_0)$. Como la condición de solución débil es cerrada por suma de constantes, podemos aplicar la Proposición 2.16 a la función $u(x_0) - u(x) \geq 0$ para obtener

$$0 \leq \operatorname{esssup}_{B_r(x_0)}(u(x_0) - u(x)) \leq C \operatorname{essinf}_{B_r(x_0)}(u(x_0) - u(x)) \leq 0$$

con $r < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(x_0, \Omega)$, con lo que

$$u(x_0) = u(x)$$

en B_r. Sea ahora y cualquier punto de Ω. Como estamos en un dominio, podemos encontrar una sucesión finita de bolas $\{B_{r_m}(x_m)\}_{m=0,\ldots,M}$ hasta y, es decir, $B_{r_0}(x_0) = B_r(x_0)$, $y \in B_{r_M}(x_M)$, $B_{2r_m}(x_m) \subset \Omega$ y

$$B_{r_{m-1}}(x_{m-1}) \cap B_{r_m}(x_m) \neq \emptyset$$

para todo $m = 1 \ldots M$. Repitiendo el proceso anterior, se deduce de manera iterativa que $u(x) = u(x_0)$ en cada $B_{r_m}(x_m)$ y, por tanto, $u(y) = u(x_0)$. $\square$

2.4.2. Lema de Caccioppoli

Una de las desigualdades más conocidas en el ámbito de las ecuaciones es la desigualdad de Poincaré. Esta nos dice que para un dominio acotado Ω, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, N)$, entonces

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

donde la constante C no depende de la función u. Sin embargo, en este trabajo nos va a interesar tener estimaciones que involucren la desigualdad contraria, es decir, estimar la norma del gradiente en función de la norma de la función.

Lema 2.19. (Estimación de tipo Caccioppoli). Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una solución débil de (2.7) en un dominio Ω acotado. Entonces para toda $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ se tiene

$$\int_\Omega \xi^p |\nabla u|^p \leq p^p \int_\Omega |u|^p |\nabla \xi|^p.$$

Demostración. Definimos $I_1 := \int_\Omega \xi^p |\nabla u|^p$ e $I_2 := \int_\Omega |u|^p |\nabla \xi|^p$ y consideramos la función $\eta := \xi^p u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En particular, como u es solución débil, podemos utilizarla como función test en (2.9) para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \eta \rangle \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \xi^p \nabla u + p\xi^{p-1} u \nabla \xi \rangle \\ &= \int_\Omega \xi^p |\nabla u|^p + p\xi^{p-1} u |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \xi \rangle. \end{aligned}$$

Reordenando los términos y aplicando las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Hölder con exponentes $\{p, \frac{p}{p-1}\}$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \xi^p |\nabla u|^p = -p \int_\Omega \xi^{p-1} u |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \xi \rangle &\leq p \left| \int_\Omega \xi^{p-1} u |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \xi \rangle \right| \\ &\leq p \int_\Omega |\xi \nabla u|^{p-1} |u \nabla \xi| \\ &\leq p \left(\int_\Omega \xi^p |\nabla u|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |u \nabla \xi|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

En términos de I_1 e I_2, el cálculo anterior nos dice que $I_1 \leq p I_1^{\frac{p-1}{p}} I_2^{\frac{1}{p}}$, o equivalentemente

$$I_1^{\frac{1}{p}} \leq p I_2^{\frac{1}{p}},$$

de donde se deduce

$$I_1 \leq p^p I_2.$$

□

2.4.3. Desigualdades puntuales

Una de las expresiones que más recurrentes va a ser a lo largo del trabajo es

$$\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla u - \nabla v \rangle$$

con $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Será de especial interés poder ver que dicha expresión es no negativa. Con este fin, las dos desigualdades puntuales de esta sección nos serán de utilidad a lo largo del trabajo.

Lema 2.20. Sea $2 \leq p < \infty$. Entonces para todos a, b vectores de $\mathbb{R}^N$ se tiene

$$0 \leq 2^{p-2} |a-b|^p \leq \langle |a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b, a - b \rangle. \tag{2.20}$$

Lema 2.21. Sea $1 < p < 2$. Entonces existe una constante $C = C(n,p)$ tal que para todos a, b vectores de $\mathbb{R}^N$, se tiene

$$0 \le \frac{|a-b|^2}{(|a|+|b|)^{2-p}} \le C\langle |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a-b\rangle. \tag{2.21}$$

Se puede encontrar la demostración de ambos lemas en [[4], Capítulo 1.4.iii].

2.4.4. Teoremas clásicos

Por último, enunciaremos algunos teoremas a los cuales haremos referencia a lo largo del trabajo.

El primero de ellos relaciona las topologías débil y fuerte a través de los conjuntos convexos. Se puede encontrar en [[2], Teorema 3.7].

Teorema 2.22. *(Mazur) Sean X un espacio normado, y $C \subset X$ un subconjunto convexo. Entonces C es subconjunto cerrado de la topología fuerte de X si y solo si C es subconjunto cerrado de la topología débil de X.*

El segundo de ellos da una caracterización de espacios de Banach reflexivos a través de subsucesiones. Se puede encontrar en [[2], Teorema 3.17].

Teorema 2.23. *(Kakutani) Sea X un espacio de Banach reflexivo. Entonces la bola unidad es precompacta en la topología débil de X.*

El último relaciona las nociones de convexidad y derivabilidad de funciones. Se puede encontrar en [[7], p.242].

Teorema 2.24. *(Alexandrov) Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces la matriz Hessiana $D^2f(x)$ existe en casi todo punto.*

2.5. Problema no homogéneo

Hasta ahora solamente hemos considerado el caso en el que la ecuación integral de la formulación débil (2.9) tenía lado derecho idénticamente 0. No obstante, en el Capítulo 4 consideraremos la posibilidad de que el lado derecho sea una función $f = f(x)$. Esto se conoce como problema no homogéneo. En esta sección vamos a formalizar el problema, definir las soluciones y ver qué resultados enunciados para el problema homogéneo se extienden al no homogéneo.

2.5.1. Formulación

Consideramos el Lagrangiano

$$L = L(x,u,\nabla u) := \frac{1}{p}|\nabla u|^p - fu$$

con $f = f(x)$ una función en un espacio por determinar. Como vimos en (2.8), su ecuación de Euler-Lagrange asociada es

$$-\Delta_p u(x) = f(x). \tag{2.22}$$

Integrando por partes se obtiene la formulación en el contexto de los espacio de Sobolev

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi, & \text{en } \Omega \\ Tr(u) = g, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

con $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, cuyo funcional correspondiente es

$$J(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega fu. \tag{2.24}$$

Para que el lado izquierdo de la ecuación integral de (2.23) esté bien definido, ya hemos visto en (2.11) que se necesita $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. Por otra parte, para poder tener los resultados de existencia y unicidad de la Sección 2.3 necesitamos que el funcional (2.24) sea coercivo, que se consigue pidiendo $fu \in L^1(\Omega)$. Como en particular $u \in L^p(\Omega)$, la desigualdad de Hölder nos dice que basta con pedir que $f \in L^q(\Omega)$ donde $q = \frac{p}{p-1}$ es el exponente conjugado de p.

Definición 2.25. Sean Ω un dominio acotado con frontera C^1, $f \in L^q(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$. Diremos que $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ es solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.25}$$

(o simplemente solución débil de $-\Delta_p u = f$) si se cumple (2.23) para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Observación. A pesar de que basta con pedir $f \in L^q(\Omega)$, lo cierto es que para la noción de solución viscosa que introduciremos en la Sección 2.6 será necesario pedir como mínimo que $f \in C(\Omega)$. Por tanto, a partir de ahora, el lado derecho del problema no homogéneo será siempre una función continua.

Pasamos ahora a analizar el problema de minimización asociado.

Teorema 2.26. *Sean $\bar u \in W^{1,p}(\Omega)$ y g una función continua sobre $\partial\Omega$ tal que $Tr(\bar u) = g$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *$\bar u$ minimiza el conjunto*

$$\left\{ \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega fu \colon u \in W^{1,p}(\Omega),\ Tr(u) = g \right\} \tag{2.26}$$

(*b*) *Para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene*

$$\int_\Omega |\nabla \bar u|^{p-2}\langle \nabla\bar u, \nabla\varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi. \tag{2.27}$$

Demostración. Para ver que (*a*) implica (*b*) podemos utilizar un argumento análogo a la demostración del Teorema 2.3 tomando el Lagrangiano $L(x, u, \nabla u) = \frac{1}{p}|\nabla u|^p - fu$.

Para probar que (*b*) implica (*a*), tomamos $v \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $Tr(\bar u - v) = 0$. Recordamos que la convexidad de la función h dada por

$$\begin{aligned} h \colon \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto |a|^p, \end{aligned} \tag{2.28}$$

implica que para todos $a, b \in \mathbb{R}^N$ se tiene que

$$|b|^p \geq |a|^p + p|a|^{p-2}\langle a, b-a\rangle.$$

de aquí se sigue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla v|^p - \int_\Omega fv &\geq \int_\Omega \frac{1}{p}\left(|\nabla u|^p + p\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla v - \nabla u\rangle\right) - \int_\Omega fv \\ &= \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla(v-u)\rangle - \int_\Omega fv \\ &= \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \int_\Omega f(v-u) - \int_\Omega fv \\ &= \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p - \int_\Omega fu.\end{aligned}$$

□

Corolario 2.27. Sea $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $\bar{u}$ es solución débil de $-\Delta_p u = f$ con f continua si y solo si $\bar{u}$ es la función que minimiza el funcional $\int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p - \int_\Omega fu$ con traza dada.

En el caso no homogéneo también nos interesarán las semisoluciones, que se definen de manera análoga a las semisoluciones del caso homogéneo. Una función u será supersolución débil de $-\Delta_p u = f$ si para toda $0 \leq \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^{p-2}\langle \nabla \bar{u}, \nabla\varphi\rangle \geq \int_\Omega f\varphi.$$

En el caso de las subsoluciones, hay que tomar la desigualdad contraria.

2.5.2. Resultados de derivabilidad

En la sección 2.3.2 hemos visto que las soluciones débiles de $-\Delta_p u = 0$ son continuas. Más aún, este resultado se puede extender al problema $-\Delta_p u = -\epsilon$, pudiendo incluso llegar a dar una noción de derivabilidad local. Siendo así, al tener que trabajar de manera local, será preciso fijar subdominios $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Los tres resultados que nos interesan conforman el contenido de [5]. El primero acota de manera uniforme el supremo de las soluciones de los problemas $\{-\Delta_p u = -\epsilon\}_{\epsilon\in\mathbb{R}}$:

Lema 2.28. Sea $K \subset \Omega'$. Existe una constante $M = M(K)$ tal que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, si $u_\epsilon \in W^{1,p}(K)$ es la solución débil de $-\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon$ en K entonces

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(K)} \leq M. \tag{2.29}$$

El segundo de ellos busca poder realizar acotaciones sobre el supremo de los gradientes de las soluciones

Proposición 2.29. Sean $\epsilon \in \mathbb{R}$ y $u_\epsilon \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ solución débil del problema $-\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon$. Entonces:

(*a*) $|\nabla u_\epsilon| \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

(b) Para todo compacto $K \subset \Omega'$, existe C_0 que depende únicamente de p, N, M y $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega')$ tal que

$$\|\nabla u_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0, \tag{2.30}$$

donde M es la constante que se obtiene en (2.29).

Finalmente, el tercero afirma que las soluciones débiles tienen una noción de derivabilidad y a su vez estas son Hölder continuas.

Proposición 2.30. Sean $\epsilon \in \mathbb{R}$ y $u_\epsilon \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ solución débil del problema $-\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon$. Entonces para todo compacto $K \subset \Omega'$, existen constantes C_1 y $\alpha \in (0,1)$, que dependen únicamente de p, N, M y $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega')$, tales que

$$|\nabla u_\epsilon(x) - \nabla u_\epsilon(y)| \leq C_1 |x-y|^\alpha \tag{2.31}$$

donde $x, y \in K$ y M es la constante que se obtiene en (2.29).

Corolario 2.31. Sean $\epsilon \in \mathbb{R}$ y $u_\epsilon \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ una solución débil de $-\Delta_p u = -\epsilon$. Entonces existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $u_\epsilon \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Reiteramos que a pesar de que se conoce más regularidad de las soluciones, en general nos bastará considerar simplemente la continuidad.

Observación. Ninguna de las tres constantes M, C_0, C_1 de (2.29), (2.30) y de (2.31) respectivamente dependen de la elección de ϵ. Con ello se consigue una acotación uniforme de los supremos de las soluciones (y sus gradientes) de $-\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon$.

2.6. Soluciones viscosas

Tras haber comprendido el concepto de solución débil, podemos pasar a analizar la otra noción de solución que será central en el trabajo: las soluciones viscosas. Al contrario que las soluciones débiles que nos daban una interpretación integral de las soluciones, estas ayudarán a entender el comportamiento puntual. Toda la teoría de soluciones viscosas se puede encontrar en [3].

2.6.1. Construcción

Comenzaremos dando la motivación de la definición de las soluciones viscosas, que puede formularse para problemas de hasta segundo orden. Partimos de una función F continua, que se puede ver como la extensión de un Lagrangiano

$$\begin{aligned} F\colon (\Omega, \mathbb{R}, \mathbb{R}^N, \mathcal{S}(N)) &\to \mathbb{R} \\ (x, u, \nabla u, D^2 u) &\mapsto F(x, u, \nabla u, D^2 u), \end{aligned} \tag{2.32}$$

donde $\mathcal{S}(N)$ es el espacio de matrices simétricas cuadradas de tamaño $N \times N$. En este espacio, consideraremos el orden habitual de las matrices, es decir $X \leq Y$ si y solo si $X - Y$ es semidefinida negativa.

Definición 2.32. Sean F como en (2.32), $r, s \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in \mathcal{S}(N)$. Consideramos las propiedades

(a) Si $X \le Y$ entonces $F(x, r, w, X) \ge F(x, r, w, Y)$.

(b) Si $r \le s$ entonces $F(x, r, w, X) \le F(x, s, w, X)$;

Diremos que F es elíptica degenerada si cumple la propiedad (a).

Diremos que F es propia si cumple ambas condiciones (a) y (b).

Siempre que consideremos una F, vamos a pedir la condición de ser propia, lo que restringe la cantidad de problemas que podemos considerar en este contexto.

Lema 2.33. La función F asociada al operador p-Laplaciano es propia.

Demostración. La clave reside en que el operador tiene forma de divergencia:

$$-\Delta_p u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}).$$

Si denotamos $w := \nabla u$ y definimos la función

$$\begin{aligned} a \colon \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R}^N \\ w &\mapsto |w|^{p-2}w, \end{aligned}$$

al desarrollar la derivada se obtiene

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|w|^{p-2}w_i) = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_i}{w_j}(w)\frac{\partial w_j}{\partial x_i} = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_i}{w_j}(w)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= -tr(J_a(w)D^2 u) \end{aligned}$$

donde J_a denota la matriz Jacobiana de a. Por tanto, la función propia F asociada al p-Laplaciano es

$$F(x, r, w, X) = F(w, X) = -tr(J_a(w)X). \tag{2.33}$$

Como F no depende de la variable r, basta comprobar la condición de elipticidad degenerada para ver que es propia.

La matriz J_a es semidefinida positiva:

$$J_a(w) = |w|^{p-2}I_N + (p-2)|w|^{p-4}A$$

donde

$$A := (w_i w_j)_{i,j=1}^N = \begin{pmatrix} w_1^2 & w_1 w_2 & \cdots & w_1 w_N \\ w_2 w_1 & w_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ w_N w_1 & \cdots & \cdots & w_N^2 \end{pmatrix}.$$

Si diagonalizamos la matriz A se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |w|^2 \end{pmatrix},$$

luego $J_a \geq 0$. En definitiva, si $X, Y \in \mathcal{S}(N)$ son tales que $X \leq Y$ entonces

$$F(w, X) = -tr(J_a(w)X) \geq -tr(J_a(w)Y) = F(w, Y).$$

□

Observación. De manera explícita, la función propia F que representa al p-Laplaciano es

$$F(w, X) = -|w|^{p-2} \left[tr(X) + (p-2) \left\langle X \frac{w}{|w|}, \frac{w}{|w|} \right\rangle \right],$$

expresión que será más adecuada para su posterior manipulación.

Al igual que para la construcción de las soluciones débiles, para construir las soluciones viscosas vamos a suponer inicialmente que el problema $F = 0$ tiene solución clásica y así deducir una serie de propiedades de la F. Sin embargo, en este caso comenzaremos directamente considerando supersoluciones, es decir planteamos el problema $F \geq 0$.

Supongamos que $u \in C^2(\Omega)$ es una supersolución clásica de $F = 0$. Sean $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ una función tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en el punto x_0. En particular, se tiene que $\nabla u(x_0) = \nabla \varphi(x_0)$ y $D^2\varphi(x_0) \leq D^2 u(x_0)$. Utilizando que F es propia y la condición de supersolución concluimos que

$$F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq F(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0), D^2 u(x_0)) \geq 0. \tag{2.34}$$

Inspirados por (2.34), se plantea la definición para soluciones viscosas.

Definición 2.34. Sea F propia.

(a) Diremos que $u \in LSC(\Omega)$ es supersolución viscosa de $F = 0$ si para todos $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0 se tiene

$$F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \geq 0.$$

(b) Diremos que $u \in USC(\Omega)$ es subsolución viscosa de $F = 0$ si para todos $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u - \varphi$ tiene un máximo local en x_0 se tiene

$$F(x_0, u(x_0), \nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \leq 0.$$

En ambos casos la función φ recibe el nombre de función test.

Observación. Si $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0, entonces $u - \overline{\varphi}$ con $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) - |x - x_0|^2$ tiene mínimo estricto en x_0. Si $u(x) - \varphi(x)$ tiene mínimo local en x_0, entonces $u(x) - \varphi(x) - u(x_0) + \varphi(x_0)$ tiene un mínimo con valor 0. Tomando $\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) + u(x_0) - \varphi(x_0)$ conseguimos que $u - \overline{\varphi}$ tenga mínimo en x_0 y además $u(x_0) = \overline{\varphi}(x_0)$. En definitiva, al comprobar la condición de solución viscosa en cada punto x_0, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el máximo/mínimo local es estricto, y que $u(x_0) = \varphi(x_0)$.

El siguiente lema nos garantiza que la definición es consistente con el concepto clásico de solución.

Lema 2.35. (Consistencia)

- Toda solución clásica es solución viscosa.
- Una solución viscosa que sea $C^2(\Omega)$ es clásica.

Demostración. El primer punto se tiene por la construcción realizada para llegar a (2.34). Para el segundo punto, supongamos que $u \in C^2(\Omega)$ es supersolución viscosa. En particular, podemos tomar la función test $\varphi = u$, ya que $u - \varphi = u - u = 0$ tiene mínimo local en todos los puntos por ser constante, con lo que

$$F(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) \geq 0$$

para todo $x \in \Omega$. Es decir, u es supersolución clásica. Análogamente, si u es subsolución obtenemos

$$F(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) \leq 0$$

para todo $x \in \Omega$. En definitiva, u es solución clásica. □

Observación. Un caso de interés con respecto a la consistencia ocurre cuando una solución viscosa es dos veces diferenciable en casi todo punto. En este caso solo podemos aplicar el lema anterior en los puntos donde existe la derivada, concluyendo que

$$F(x, u(x), \nabla u(x), D^2u(x)) \geq 0$$

en casi todo punto para el caso de supersoluciones.

Existen más definiciones equivalentes de solución viscosa. A nosotros nos va a interesar una que tenga en cuenta los conceptos de Jacobiano generalizado o Jets. Sea $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0. En particular, existe un entorno $B = B_r(x_0)$ tal que para todo $x \in B$

$$(u - \varphi)(x) \geq (u - \varphi)(x_0),$$

es decir,

$$u(x) - u(x_0) \geq \varphi(x) - \varphi(x_0). \tag{2.35}$$

Haciendo el desarrollo de Taylor de orden dos de la φ en el punto x_0, (2.35) se reescribe

$$u(x) \geq u(x_0) + \langle \nabla\varphi(x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(x_0)(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2). \tag{2.36}$$

A partir de (2.36) se definen los conjuntos

$$\begin{aligned} J_\Omega^{2,-}u(x_0) = \{(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}(N) \colon u(x) &\geq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2)\Big\} \\ J_\Omega^{2,+}u(x_0) = \{(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}(N) \colon u(x) &\leq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle + o(|x - x_0|^2)\Big\} \end{aligned}$$

que reciben el nombre de subjet y superjet de u en x_0. Observamos que si φ es tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo, respectivamente máximo, local en x_0 entonces el par $(\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \in J_\Omega^{2,+}u(x_0)$, resp. $(\nabla\varphi(x_0), D^2\varphi(x_0)) \in J_\Omega^{2,-}u(x_0)$. El siguiente lema nos garantiza que el recíproco también es cierto.

Lema 2.36. (Caracterización de los Jets)

(a) Sea $u \in LSC(\Omega)$. Entonces $(p, X) \in J_\Omega^{2,-}u(x_0)$ si y solo si existe $\varphi \in C^2$ tal que $u - \varphi$ tiene mínimo local en x_0, $\nabla\varphi(x_0) = p$ y $D^2\varphi(x_0) = X$.

(b) Sea $u \in USC(\Omega)$. Entonces $(p, X) \in J_\Omega^{2,+}u(x_0)$ si y solo si existe $\varphi \in C^2$ tal que $u - \varphi$ tiene máximo local en x_0, $\nabla\varphi(x_0) = p$ y $D^2\varphi(x_0) = X$.

Demostración. Para el apartado (a), supongamos que $(p, X) \in J_\Omega^{2,-}u(x_0)$. Buscamos una función $\varphi \in C^2$ con $\nabla\varphi(x_0) = p$ y $D^2\varphi(x_0) = X$. Por definición de ínfimo tenemos

$$u(x) - u(x_0) - \langle p, x - x_0\rangle - \frac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle \geq \sigma(|x - x_0|)|x - x_0|^2 \tag{2.37}$$

donde

$$\sigma(r) := \text{mín}\left\{0, \inf_{0<|x-x_0|<r} \frac{u(x) - u(x_0) - \langle p, x - x_0\rangle - \frac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle}{|x - x_0|^2}\right\}$$

es una función continua y cumple $\sigma(0) = 0$. Además, σ decrece a medida que r crece (estamos tomando el ínfimo sobre conjuntos cada vez más grandes), luego en particular $\sigma(r) \leq 0$ si $r \geq 0$.

Definimos las funciones

$$\psi(s) := \int_0^s \sigma(t)dt, \qquad \rho(r) := \int_0^r \psi(s)ds$$

Como σ es una función continua, ρ es dos veces diferenciable y $\rho''(r) = \sigma(r)$. Por otra parte, utilizando que σ es negativa y decreciente:

$$\psi(2s) = \int_0^{2s} \sigma(t)dt \leq \int_s^{2s} \sigma(t)dt \leq \int_s^{2s} \sigma(s)dt = \sigma(s) \cdot s.$$

Asimismo, $\rho(4r) \leq 2r\psi(2r)$. En definitiva, las propiedades de ρ

$$0 = \rho(0) = \rho'(0) = \rho''(0), \qquad \rho(4r) \leq 2\sigma(r) \cdot r^2, \tag{2.38}$$

nos permiten deducir que la función

$$\varphi(x) := u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\rho(4|x - x_0|) \tag{2.39}$$

es $C^2(\Omega)$ y cumple $\varphi(x_0) = u(x_0)$, $\nabla\varphi(x_0) = p$ y $D^2\varphi(x_0) = X$. Además, por (2.37)

$$\begin{aligned} u(x) - \varphi(x) &\geq u(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle + \sigma(|x - x_0|)|x - x_0|^2 - \varphi(x) \\ &= \sigma(|x - x_0|)|x - x_0|^2 - \frac{1}{2}\rho(4|x - x_0|) \geq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, la función φ dada por (2.39) cumple todas las propiedades requeridas.

Para el caso (b), si $(p, X) \in J_\Omega^{2,+}u(x_0)$ entonces $(-p, -X) \in -J_\Omega^{2,-}(-u)(x)$ observando que

$$J_\Omega^{2,+}u(x) = -J_\Omega^{2,-} - u(x). \tag{2.40}$$

Utilizando el apartado (a), existe una función $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $(-p, -X) = (\nabla\varphi(x), D^2\varphi(x))$ y tal que $u - \varphi$ tiene mínimo local en x. Definimos $\overline{\varphi} = -\varphi$. Dicha función cumple $\overline{\varphi} \in C^2(\Omega)$, $(p, X) = (\nabla\overline{\varphi}(x), D^2\overline{\varphi}(x))$ y $u - \overline{\varphi}$ tiene un máximo local en x. □

A raíz del Lema 2.36 tenemos la siguiente definición equivalente de solución viscosa.

Definición 2.37. Sea F propia.

(a) Diremos que $u \in LSC(\Omega)$ es supersolución viscosa de $F = 0$ si para todo par $(p, X) \in J_{\Omega}^{2,-}u(x_0)$ se tiene

$$F(x_0, u(x_0), p, X) \geq 0; \tag{2.41}$$

(a) Diremos que $u \in USC(\Omega)$ es subsolución viscosa de $F = 0$ si para todo par $(p, X) \in J_{\Omega}^{2,+}u(x_0)$ se tiene

$$F(x_0, u(x_0), p, X) \leq 0; \tag{2.42}$$

2.6.2. El p-Laplaciano viscoso

Finalizaremos la sección de introducción a las soluciones viscosas analizando la función propia

$$F(x, r, w, X) = F(w, X) := -|w|^{p-2}\left[tr(X) + (p-2)\left\langle X\frac{w}{|w|}, \frac{w}{|w|}\right\rangle\right], \tag{2.43}$$

que es la función que representa al p-Laplaciano ya que cumple

$$F(\nabla u(x), D^2u(x)) = -\Delta_p u(x).$$

Observamos que dicha F no depende ni de la variable x ni de la variable r. Por tanto, a la hora de verificar si una función u es supersolución viscosa de $-\Delta_p u = 0$ en el caso degenerado $p > 2$, la condición (2.41) se reescribe

$$-\Delta_p\varphi(x_0) \geq 0.$$

En cambio, para el caso singular $1 < p < 2$, no podemos evaluar directamente $-\Delta_p\varphi(x_0)$ cuando se dé $\nabla\varphi(x_0) = 0$. Por ello, conviene ajustar la definición de solución viscosa para poder contemplar este caso.

Definición 2.38. (Supersoluciones viscosas del p-Laplaciano homogéneo)

(a) Diremos que $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap LSC(\Omega)$ es supersolución viscosa de $-\Delta_p u = 0$ si para todos $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0 se tiene

$$\limsup_{x \to x_0} -\Delta_p\varphi(x) \geq 0$$

siempre que o bien $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ o bien x_0 sea un punto crítico aislado de φ.

(b) Diremos que $u \in USC(\Omega)$ es subsolución viscosa de $-\Delta_p u = 0$ si para todos $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u - \varphi$ tiene un máximo local en x_0 se tiene

$$\liminf_{x \to x_0} -\Delta_p\varphi(x) \leq 0$$

siempre que o bien $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ o bien x_0 sea un punto crítico aislado de φ.

Al añadir la hipótesis de que x_0 sea punto crítico aislado nos aseguramos de que siempre existe un entorno de x_0 en el que $-\Delta_p\varphi(x)$ está bien definido. En el caso $p \geq 2$, la desigualdad de la nueva Definición 2.38 sigue siendo $-\Delta_p u(x_0) \geq 0$ en el caso de supersoluciones.

Observación. Hemos añadido la hipótesis sobre la función test φ de que el punto x_0, de ser punto crítico, debe ser aislado. A raíz de ello, cuando consideremos la definición de solución viscosa a través de los Jets (veáse la Definición 2.37) solamente admitiremos pares (p, X) cuyas funciones test asociadas según el Lema 2.36 cumplan esta nueva hipótesis.

CAPÍTULO 3

Primera equivalencia

Hemos definido dos tipos de supersoluciones para el problema del p-Laplaciano homogéneo. Por una parte están las supersoluciones débiles, que son aquellas funciones $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ que cumplen que para toda función test $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \geq 0.$$

Por otra parte tenemos las supersoluciones viscosas, que son aquellas funciones $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap LSC(\Omega)$ tales que para todos $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ que cumplen que $u - \varphi$ tiene un mínimo local estricto en x_0 se tiene

$$\limsup_{x \to x_0} -\Delta_p \varphi(x) \geq 0,$$

siempre que o bien $\nabla \varphi(x_0) \neq 0$ o bien x_0 sea un punto crítico aislado de φ.

El objetivo final del trabajo es demostrar que las soluciones débiles y las soluciones viscosas son dos nociones equivalentes, para lo cual bastará con analizar solamente el caso de supersoluciones, ya que el caso de subsolución se obtiene de manera análoga. En este capítulo vamos a dar una primera forma de probar el resultado para el caso homogéneo a través de un principio de comparación.

Conviene destacar que la demostración de este capítulo no se extiende al problema no homogéneo $-\Delta_p u = f$, ya que el resultado principal relativo al principio de comparación no se tendrá para este caso. Veremos cómo sortear este problema en el Capítulo 4.

3.1. Definiciones equivalentes de solución débil

Una de las principales herramientas que utilizaremos recibe el nombre de principio de comparación. Dedicaremos la primera sección del capítulo a demostrar que la condición de solución débil es equivalente a que se cumpla dicho resultado.

Será habitual considerar subconjuntos D de Ω tales que $\overline{D} \subset \Omega$. En este caso se dice que D está compactamente contenido en Ω y se denota por $D \subset\subset \Omega$.

3.1.1. Principio de comparación

El resultado de esta sección aparece en [[16], Teorema 2.15]. Recordamos que las soluciones débiles de $-\Delta_p u = 0$ también reciben el nombre de funciones p-armónicas según la Definición 2.2.

Definición 3.1. (Principio de comparación)

Sean $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap LSC(\Omega)$ tal que $u \not\equiv +\infty$ y Ω un dominio de $\mathbb{R}^N$. Diremos que u cumple el superprincipio de comparación (homogéneo) si para cada subdominio $D \subset\subset \Omega$ con frontera C^1 y para cada función h subsolución débil de $-\Delta_p u = 0$ en $\overline{D}$ tales que $h \leq u$ en ∂D se tiene $h \leq u$ en D.

Sean $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap USC(\Omega)$ tal que $u \not\equiv -\infty$ y Ω un dominio de $\mathbb{R}^N$. Diremos que u cumple el subprincipio de comparación (homogéneo) si para cada subdominio $D \subset\subset \Omega$ con frontera C^1 y para cada función h supersolución débil de $-\Delta_p u = 0$ en $\overline{D}$ tales que $u \leq h$ en ∂D se tiene $u \leq h$ en D.

Sea u continua tal que $u \not\equiv \pm\infty$. Diremos que u cumple el principio de comparación si cumple tanto el subprincipio como el superprincipio de comparación.

El objetivo principal de esta primera sección es demostrar que esta definición es equivalente a la de solución débil. Al acabar el Capítulo sabremos que además esta a su vez es equivalente a la definición de solución viscosa. Como en particular la definición de solución viscosa (Definición 2.37) requiere la semicontinuidad de las funciones, es preciso incluir en la definición del principio de comparación (Definición 3.1) esta hipótesis también.

A raíz de la siguiente Proposición podremos dar la primera de las implicaciones en la búsqueda de una definición equivalente de solución débil.

Proposición 3.2. Sean Ω un dominio acotado con frontera C^1, $u \in USC$ una subsolución y $v \in LSC$ una supersolución del problema $-\Delta_p u = 0$ respectivamente. Si para todo $\omega \in \partial\Omega$ se tiene

$$\limsup_{x\to\omega} u(x) \leq \liminf_{x\to\omega} v(x),$$

entonces $u \leq v$ en todo Ω.

Demostración. Sea $D_\epsilon := \{x \in \Omega \colon u(x) > v(x) + \epsilon\}$. Si $\forall \epsilon > 0$, $D_\epsilon = \emptyset$ hemos terminado. Si no, entonces $\overline{D}_\epsilon \cap \partial\Omega = \emptyset$. En efecto, la condición $\omega \in \overline{D}_\epsilon = \{x \colon u(x) \geq v(x) + \epsilon\}$ está en contradicción con $\omega \in \partial\Omega$ por hipótesis. En particular,

$$D_\epsilon \subset\subset \Omega. \tag{3.1}$$

Por ser u subsolución y v supersolución, podemos restar las correspondientes formulaciones débiles para obtener

$$\int_\Omega \langle |\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla\varphi\rangle \geq 0 \tag{3.2}$$

para toda función test $0 \leq \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En particular, la función

$$\varphi(x) := \max\{u(x) - v(x) - \epsilon, 0\}$$

tiene soporte en $\overline{D}_\epsilon$, que es compacto por (3.1), luego $\varphi(x)$ es una función admisible como función test. Sustituyendo en (3.2)

$$\int_{D_\epsilon} \langle |\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla u - \nabla v\rangle \geq 0.$$

En el caso $p > 2$, podemos utilizar la desigualdad puntual (2.20) para obtener

$$0 \geq -2^{p-2}\int_{D_\epsilon} |\nabla v - \nabla u|^p \geq -\int_{D_\epsilon} \langle |\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u, \nabla v - \nabla u\rangle \geq 0$$

de donde se sigue

$$\nabla u \equiv \nabla v \tag{3.3}$$

en todo D_ϵ. En el caso $1 < p < 2$ también se obtiene (3.3) mediante la desigualdad (2.21). En ambos casos se deduce $u(x) - v(x) = C$ para todo $x \in D_\epsilon$ donde C es una constante por determinar. Utilizando ahora que $v - u$ es una función LSC y que por construcción $u(x) - v(x) = \epsilon$ para todo $x \in \partial D_\epsilon$ obtenemos $C = \epsilon$. Es decir,

$$u(x) = v(x) + \epsilon, \qquad x \in \overline{D_\epsilon}. \tag{3.4}$$

Finalmente, juntando (3.4) con el hecho de que, por construcción, $u(x) \leq v(x) + \epsilon$ para todo $x \in \Omega \setminus \overline{D}_\epsilon$, se concluye que

$$u(x) \leq v(x) + \epsilon, \qquad x \in \Omega,$$

desigualdad válida para todo $\epsilon > 0$. En particular, $u \leq v$ en Ω. □

Corolario 3.3. (Débil implica comparación)

(a) Si u es una subsolución débil de $-\Delta_p u = 0$ en Ω, entonces para todo subdominio $D \subset\subset \Omega$ con frontera C^1 y cada función h supersolución débil de $-\Delta_p u = 0$ en D, si $u \leq h$ en ∂D entonces $u \leq h$ en $\overline{D}$.

(b) Si v es una supersolución débil de $-\Delta_p v = 0$ en Ω, entonces para todo subdominio $D \subset\subset \Omega$ con frontera C^1 y cada función h subsolución débil de $-\Delta_p u = 0$ en D, si $v \geq h$ en ∂D entonces $v \geq h$ en $\overline{D}$.

Demostración. La prueba es inmediata tomando $\Omega := D$ en la Proposición 3.2. □

Observación. Existen versiones más generales de este resultado donde se considera donde se considera el problema no homogéneo. Lo formalizaremos en la Sección 4.1. De momento, en este Capítulo solamente necesitaremos tener en mente que el Corolario anterior también se tiene para el problema $-\Delta_p u = -\epsilon$ con $\epsilon > 0$.

3.1.2. Extremales libres

Los resultados de esta sección componen el contenido de [14]. Acabamos de ver en el Corolario 3.3 cómo la condición de solución débil implica la propiedad del principio de comparación. Para obtener una definición equivalente de solución débil, el siguiente paso es demostrar el recíproco, para lo que necesitaremos pasar por una noción intermedia conocida como extremales libres.

Consideramos el funcional

$$I(u,K) := \int_K |\nabla u|^p, \tag{3.5}$$

donde $u \in C(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ y K es un subconjunto compacto de Ω. La idea será tomar u como la solución débil y K como el soporte de la función test con la que estemos comprobando la igualdad integral de la formulación débil de (2.9).

Definición 3.4. (Extremal libre) Sean I como en (3.5) y $u \in C(\Omega) \cap W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Diremos que u es subextremal libre de I si para cada $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ se tiene

$$I(u, \operatorname{supp}(\varphi)) \leq I(u - \varphi, \operatorname{supp}(\varphi)).$$

Diremos que u es superextremal libre de I si para cada $\varphi \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ se tiene

$$I(u, \operatorname{supp}(\varphi)) \leq I(u + \varphi, \operatorname{supp}(\varphi)).$$

Diremos que u es extremal libre si es tanto subextremal como superextremal libre de I.

Veamos la relación de este concepto con el principio de comparación.

Lema 3.5. Sea $u \in C(\Omega) \cap W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ un superextremal libre del funcional I dado por (3.5). Entonces para cada $D \subset\subset \Omega$ con frontera C^1 y h función p-armónica en D tal que $h \leq u$ en ∂D se tiene $h \leq u$ en todo D.

Demostración. La clase de semisoluciones débiles de $-\Delta_p u = 0$ es cerrada bajo suma de constantes luego para todo $\epsilon > 0$ la función $h_\epsilon := h + \epsilon$ es p-armónica. Si definimos el conjunto

$$D_\epsilon := \{x \in \Omega \colon h_\epsilon(x) > u(x)\}$$

se puede comprobar, mediante un argumento similar a la prueba de la Proposición 3.2, que si D_ϵ no es el conjunto vacío entonces $\overline{D_\epsilon} \subset \Omega$. La función test

$$\varphi := \max\{h_\epsilon - u, 0\} \in W^{1,p}_0(\Omega)$$

es no negativa y tiene soporte en $\overline{D_\epsilon}$.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que el conjunto

$$\{x \in D_\epsilon \colon \nabla u(x) \neq \nabla h_\epsilon(x)\}$$

tiene medida no nula. Como u es superextremal libre

$$2I(u, D_\epsilon) \leq 2I\left(u + \left(\frac{h_\epsilon - u}{2}\right), D_\epsilon\right) = 2I\left(\left(\frac{h_\epsilon + u}{2}\right), D_\epsilon\right) < I(h_\epsilon, D_\epsilon) + I(u, D_\epsilon),$$

donde en la última desigualdad estricta se usa que $\nabla h_\epsilon \not\equiv \nabla u$: El funcional I es estrictamente convexo con lo que para todas $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ y todo $\lambda \in (0,1)$,

$$I(\lambda u + (1-\lambda)v, D_\epsilon) \leq \lambda I(u, D_\epsilon) + (1-\lambda) I(v, D_\epsilon)$$

donde la igualdad solamente se tiene si $u \equiv v$. En particular

$$I(u, D_\epsilon) < I(h_\epsilon, D_\epsilon). \tag{3.6}$$

Por otra parte, por ser p-armónica en D_ϵ, h_ϵ es la función que fijado $K = D_\epsilon$ minimiza I (véase el Teorema 2.3) luego

$$I(h_\epsilon, D_\epsilon) \leq I(u, D_\epsilon). \tag{3.7}$$

En vista de (3.6) y (3.7) llegamos a una contradicción, así que necesariamente

$$\nabla u \equiv \nabla h_\epsilon \qquad \text{en } D_\epsilon. \tag{3.8}$$

Juntando (3.8) con que $h_\epsilon = u$ en ∂D_ϵ obtenemos que, gracias a la continuidad de las funciones, $h_\epsilon = u$ en D_ϵ. En particular, $D_\epsilon = \emptyset$. En definitiva, como la elección de ϵ era arbitraria se sigue $h \leq u$ en D. □

Hemos dado la demostración del Lema 3.5 por completitud. Sin embargo, podemos observar que no obtenemos que extremal libre implica principio de comparación al completo, ya que la versión del Lema anterior compara con funciones p-armónicas h y no con subsoluciones.

La implicación recíproca es la que será de utilidad en la búsqueda de la equivalencia entre el concepto de solución débil y el principio de comparación es la recíproca.

Proposición 3.6. Supongamos que $u \in C(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ cumple el superprincipio de comparación. Entonces u es superextremal libre del funcional I dado por (3.5).

Observación. En la sección 2.3.1 definimos el funcional $J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p$ y vimos en los Corolarios 2.10 y 2.12 como este era SSLSC y SWLSC en $W^{1,p}(\Omega)$ (véase la Definición 2.6). Observando que el funcional $I(u, K)$ no es más que la restricción del funcional J a un dominio de integración más pequeño, podemos concluir que fijado un compacto K, $I(u, K)$ también tiene las propiedades de SSLSC y SWLSC. Asímismo, se puede comprobar que $I(u, K)$ es coercivo en $W^{1,p}(\Omega)$. Estas dos propiedades nos permitirán utilizar resultados de existencia y unicidad para el funcional restringido I.

Demostración. Sean u como en las hipótesis y $D \subset\subset \Omega$ con frontera C^1. Consideramos los conjuntos

$$\mathcal{F} := \left\{ v \in C(\overline{D}) \cap W^{1,p}(D) \colon v \geq u, v|_{\partial D} = u|_{\partial D} \right\}$$
$$\mathcal{G} := \left\{ v \in W^{1,p}(D) \colon v \geq u,\ Tr(v) = Tr(u) \right\}.$$

Observamos que ambos conjuntos son no vacíos: $u \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, y son débilmente cerrados de $W^{1,p}(\Omega)$. Como el funcional I es SWLSC y es coercivo en $W^{1,p}(\Omega)$, el Teorema 2.15 nos dice que existen dos funciones (únicas) que minimizan I respectivamente en cada conjunto. Además, por el resultado de regularidad dado por el Corolario 2.17, dichas funciones son continuas y coincidentes. Las denotaremos por $\bar{u}$.

Hemos de demostrar que $u = \bar{u}$. En efecto, si $\bar{u}$ es la función que minimiza I en $\mathcal{F}$ entonces para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(D)$ con $\varphi \geq 0$, podemos tomar $v := \bar{u} + \varphi \in \mathcal{F}$ para obtener

$$I(\bar{u}, D) \leq I(v, D) = I(\bar{u} + v - \bar{u}, D) = I(\bar{u} + \varphi, D),$$

que es exactamente que $\bar{u}$ sea superextremal libre de I y, por tanto, u lo es también. La desigualdad $u \leq \bar{u}$ se tiene por la propia definición del conjunto $\mathcal{F}$, solamente hay que comprobar que $\bar{u} \leq u$.

Para ello tomamos una sucesión minimizante $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ contenida en $\mathcal{F}$ tal que $u_k \rightharpoonup \bar{u}$. Fijado $k \in \mathbb{N}$ consideramos, para cada $\epsilon > 0$, los conjuntos abiertos

$$\{x \colon u(x) < u_k(x) - 2\epsilon\} \quad \text{y} \quad \{u(x) < u_k(x) - \epsilon\},$$

y definimos D_k, para $k \in \mathbb{N}$, como un conjunto abierto que cumple

$$\{u < u_k - 2\epsilon\} \subset D_k \subset \{u < u_k - \epsilon\}.$$

Notamos que si $x \notin D_k$ entonces

$$u_k(x) \leq u(x) + 2\epsilon. \tag{3.9}$$

Tomamos los conjuntos

$$\mathcal{H}_k := \{v \in C(\overline{D_k}) \cap W^{1,p}(D_k) \colon v|_{\partial D_k} = u_k|_{\partial D_k}\}$$

y observamos que $\{\mathcal{H}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos débilmente cerrados, luego para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una función h_k que minimiza I en $\mathcal{H}_k$. En particular, por el Teorema 2.3, h_k es función p-armónica en D_k. Por otra parte, por (3.9) tenemos que

$$u_k(x) \leq u(x) + 2\epsilon \quad \text{en} \quad \partial D_k,$$

con lo que

$$h_k(x) = u_k(x) \leq u(x) + 2\epsilon \quad \text{en} \quad \partial D_k. \tag{3.10}$$

Recordando que, por hipótesis, u cumple el superprincipio de comparación de (3.10) se sigue

$$h_k(x) \leq u(x) + 2\epsilon \quad \text{en } \overline{D_k}. \tag{3.11}$$

Definimos la función auxiliar

$$H_k := \begin{cases} h_k, & \text{en } D_k \\ u_k, & \text{en } D \setminus D_k, \end{cases}$$

y se comprueba que, por construcción, $H_k \in W^{1,p}(D)$, $Tr(H_k) = Tr(u_k) = Tr(u)$ y juntando (3.9) con (3.11) obtenemos

$$H_k(x) \leq u(x) + 2\epsilon \quad \text{en } D. \tag{3.12}$$

Asimismo, como h_k minimiza I en $\mathcal{H}_k$

$$I(H_k, D) = I(h_k, D_k) + I(u_k, D \setminus D_k) \leq I(u_k, D_k) + I(u_k, D \setminus D_k) = I(u_k, D). \tag{3.13}$$

Llegados a este punto, si pudiésemos extraer de la sucesión $\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente a $\bar{u}$ concluiríamos la prueba. Sin embargo, para ello resulta necesario poder comparar $I(H_k, D)$ con $I(\bar{u}, D)$, cosa que no es posible todavía ya que no sabemos si H_k pertenece al conjunto $\mathcal{F}$.

Aplicando el Principio del mínimo dado por la Proposición 2.18 a h_k (las soluciones débiles de $-\Delta_p u = 0$ en D_k) y usando la definición de D_k obtenemos

$$\inf_{D_k} h_k = \min_{\partial D_k} h_k = \min_{\partial D_k} u_k \geq \min_{\partial D_k} u + \epsilon > \min_{\partial D_k} u \geq \inf_D u =: M. \tag{3.14}$$

Por otra parte observamos que en $\overline{D_k}$, por continuidad de u , existe $C \geq 0$ tal que

$$|u + \epsilon| \leq C. \tag{3.15}$$

Sea $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\lambda \leq \max\left\{ \frac{\epsilon}{2|M|}, \frac{\epsilon}{2|C|} \right\}.$$

Si tomamos la combinación convexa

$$w_k = \lambda H_k + (1-\lambda) u_k,$$

observamos que $w_k \in W^{1,p}(D)$, $Tr(w_k) = Tr(u)$ y $w_k = u_k$ en $D \setminus D_k$. Además, por (3.14) y (3.15), en D_k se tiene

$$\begin{aligned} w_k &= (1-\lambda)u_k + \lambda H_k = (1-\lambda)u_k + \lambda h_k \geq (1-\lambda)(u+\epsilon) + \lambda M \\ &= u + \epsilon + (-\lambda)(u+\epsilon) + \lambda M \geq u + \epsilon + (-\lambda)C + \lambda M \\ &\geq u + \epsilon - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = u. \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que $w_k \in \mathcal{G}$. Asimismo, como $\bar{u}$ es la función que minimiza I en $\mathcal{G}$ se tiene que

$$I(\bar{u}, D) \leq I(w_k, D). \tag{3.16}$$

Utilizando (3.13) y que I es funcional convexo,

$$\begin{aligned} I(w_k, D) &\leq \lambda I(H_k, D) + (1-\lambda) I(u_k, D) \\ &\leq \lambda I(u_k, D) + (1-\lambda) I(u_k, D) \\ &= I(u_k, D), \end{aligned} \tag{3.17}$$

de donde deducimos

$$I(\bar{u}, D) \leq \lim_{k\to\infty} I(w_k, D) \leq \lim_{k\to\infty} I(u_k, D) = I(\bar{u}, D).$$

De aquí se sigue

$$\lim_{k\to\infty} I(w_k, D) = I(\bar{u}, D). \tag{3.18}$$

Como $\{I(u_k, D)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la sucesión minimizante, en particular es una sucesión acotada, luego por (3.17) la sucesión $\{I(w_k, D)\}_{k\in\mathbb{N}}$ también está acotada. A partir de la Proposición 2.13 obtenemos que I es coercivo en $\mathcal{G}$ luego, por el Teorema 2.23, $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{w_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$w_{k_i} \rightharpoonup w_\epsilon \quad \text{en } D$$

para algún $w_\epsilon \in W^{1,p}(D)$. Ahora observamos que como $\{w_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en $\mathcal{G}$, el límite w_ϵ está también en el conjunto $\mathcal{G}$. El Lema de Fatou y (3.18) permiten deducir que

$$I(\bar{u}, D) \leq I(w_\epsilon, D) \leq \liminf_{i\to\infty} I(w_{k_i}, D) = I(\bar{u}, D),$$

de donde se sigue

$$I(\bar{u}, D) = I(w_\epsilon, D).$$

Al igual que en (2.15), por la convexidad estricta del funcional I, el minimizante es único y, por tanto, $w_\epsilon = \bar{u}$.

Recapitulando, hemos obtenido una sucesión $\{w_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ creada a partir de una combinación convexa de las funciones H_{k_i} que, a diferencia de estas, está contenida en el conjunto $\mathcal{G}$ y además converge a $\bar{u}$, su función minimizante.

Recordando que $u_{k_i} \rightharpoonup \bar{u}$, como por definición de w_{k_i}

$$\lambda H_{k_i} + (1-\lambda)u_{k_i} = w_{k_i} \rightharpoonup w_\epsilon = \bar{u},$$

se sigue

$$H_{k_i} \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{en } D.$$

Finalmente, (3.12) implica que $\bar{u} \leq u + 2\epsilon$. Como la elección de ϵ era arbitraria, concluimos que

$$\bar{u} \leq u.$$

□

3.1.3. Equivalencia de las definiciones

Una vez visto cómo las soluciones débiles de $-\Delta_p u = 0$ cumplen el principio de comparación (Corolario 3.3), y las funciones que cumplen dicho principio son extremales libres (Proposición 3.6), solo falta ver como los extremales libres son soluciones débiles.

Proposición 3.7. Sea I el funcional dado por (3.5).

(a) Sea u un superextremal libre de I. Entonces u es supersolución débil del problema $-\Delta_p u = 0$.

(b) Sea u un subextremal libre de I. Entonces u es subsolución débil del problema $-\Delta_p u = 0$.

Demostración. Para cada $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\tilde{\varphi} \geq 0$, definimos la función

$$\Psi(t) := \int_K |\nabla(u + t\tilde{\varphi})|^p = I(u + t\tilde{\varphi}, K) \tag{3.19}$$

donde $K = \operatorname{supp}(\tilde{\varphi})$. Como por hipótesis u es superextremal libre de I y la función $t\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega)$, tenemos que Ψ en el intervalo $0 \leq t < \infty$ alcanza su valor mínimo en $t = 0$. Es decir, la función Ψ crece a partir de $t = 0$. Observando que Ψ es diferenciable, podemos concluir que $\Psi'(0) \geq 0$.

La Ψ que acabamos de definir es, salvo la igualdad $\Psi'(0) = 0$, análoga a la Ψ que se define en la demostración del Teorema 2.1. Si replicamos la prueba allí expuesta, se obtiene

$$0 \leq \Psi'(0) = \int_K |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\tilde{\varphi} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\tilde{\varphi}$$

que es exactamente la condición de supersolución débil del problema $-\Delta_p u = 0$.

Para el apartado (b) observamos que en el intervalo $0 < t < \infty$, esta vez es la función $\Psi(-t)$, con $\Psi(t)$ dada por (3.19), la que alcanza su mínimo en $t = 0$. Se sigue

$$0 \leq \Psi'(0) = -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\tilde{\varphi},$$

y, por tanto,

$$0 \geq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\tilde{\varphi}.$$

□

Por lo tanto, las Proposiciones 3.2, 3.6 y 3.7 nos proporcionan una definición equivalente de semisolución débil a través del principio de comparación. Para futuras referencias, lo enunciaremos como teorema.

Teorema 3.8. *(Equivalencia de semisoluciones débiles) Sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$. Son equivalentes*

(a) u es supersolución débil del problema $-\Delta_p u = 0$, i.e. para toda $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi \geq 0;$$

(b) u cumple el super principio de comparación, i.e. para todos $D \subset\subset \Omega$ con frontera C^1 y h función p-armónica en D tal que $h \leq u$ en ∂D se tiene

$$h \leq u \qquad \text{en } D;$$

(c) u es superextremal libre del funcional I dado por (3.5), i.e. para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\varphi \geq 0$,

$$\int_{supp(\varphi)} |\nabla u|^p \leq \int_{supp(\varphi)} |\nabla u + \nabla\varphi|^p.$$

3.2. Débil implica viscosa

Ya estamos en posición de poder abordar el problema de la equivalencia entre las soluciones débiles y las viscosas de $-\Delta_p u = 0$. Con este fin, a lo largo de esta sección, cuando hablemos de soluciones débiles siempre estaremos pensando en la versión (b) del Teorema 3.8.

Comenzaremos con una de las implicaciones, que resultará ser menos laboriosa que la implicación recíproca. Lo haremos solamente para supersoluciones, ya que la prueba para subsoluciones se puede obtener análogamente. Se puede encontrar el resultado en [[12], Teorema 2.5].

Proposición 3.9. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ una supersolución débil de $-\Delta_p u = 0$. Entonces u es supersolución viscosa del mismo problema.

Demostración. Supongamos, para llegar a una contradicción que u no es supersolución viscosa. Entonces existe un punto $x_0 \in \Omega$ y una función test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u - \varphi$ tiene un mínimo local estricto en x_0 y

$$\limsup_{x \to x_0} -\Delta_p \varphi(x) < 0$$

siempre que o bien $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ o bien x_0 sea un punto crítico aislado de φ. En particular, $u(x_0) = \varphi(x_0)$ y además existe un radio $r > 0$ tal que en todo $x \in B_r(x_0)$ se tiene $u(x) > \varphi(x)$ (podíamos suponer que el mínimo era estricto y se alcanzaba en el 0).

Reduciendo el radio r si fuera necesario se tiene

$$-\Delta_p\varphi(x) < 0 \tag{3.20}$$

en $B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$. Por otra parte, definimos

$$m := \inf_{x\in\partial B_r(x_0)} (u(x) - \varphi(x)),$$

que cumple $m > 0$ por hipótesis, a partir de lo cual consideramos la función $C^2(\Omega)$

$$\overline{\varphi}(x) := \varphi(x) + m.$$

Por (3.20), $\overline{\varphi}$ es subsolución clásica de $-\Delta_p\overline{\varphi} = 0$ en $B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ y, por tanto, también es subsolución débil en toda la bola $B_r(x_0)$. La segunda observación es que por definición de m, $\overline{\varphi} \leq u$ en $\partial B_r(x_0)$. Como por hipótesis, u cumple el superprincipio de comparación, podemos concluir que

$$\overline{\varphi} \leq u \quad \text{en } B_r(x_0).$$

Sin embargo, de aquí se sigue

$$u(x_0) \geq \overline{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) + m = u(x_0) + m,$$

una contradicción. □

Observación. Esta misma prueba sirve para demostrar que las supersoluciones débiles de $-\Delta_p u = -\epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ son también supersoluciones viscosas. Razonando de manera análoga, suponemos que existe un punto $x_0 \in \Omega$ y una función test $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u - \varphi$ tiene un mínimo local estricto en x_0 pero esta vez

$$\limsup_{x\to x_0} -\Delta_p\varphi(x) < -\epsilon < 0$$

y

$$-\Delta_p\varphi(x) < -\epsilon < 0,$$

en algún entorno de x_0. En particular, $\overline{\varphi} = \varphi + m$ seguirá siendo subsolución clásica de $-\Delta_p\overline{\varphi} = 0$, y el resto de la prueba sigue igual.

3.3. Herramientas y reducciones

Es el turno ahora de ver que las soluciones viscosas son también soluciones débiles. Los resultados de esta sección componen el contenido de [[12], Sección 3].

Proposición 3.10. Sea $v \in W^{1,p}(\Omega)$ una supersolución viscosa de $-\Delta_p v = 0$. Entonces v es supersolución débil del mismo problema.

Para ello, el objetivo será demostrar el siguiente Teorema, que será el contenido del resto del capítulo.

Teorema 3.11. *Sea $D \subset\subset \Omega$ con frontera C^1. Supongamos que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ es una subsolución débil de $-\Delta_p u = 0$ y v es una supersolución viscosa del mismo problema. Si $u \leq v$ en todo punto de ∂D, entonces $u \leq v$ en todo punto de D.*

La Proposición 3.10 se deduce inmediatamente de este resultado. Veamos que partiendo de una supersolución viscosa v podemos deducir que v es supersolución débil. Sean $D \subset\subset \Omega$ y u una subsolución débil de $-\Delta_p u = 0$ en D tal que $u \leq v$ en ∂D. En particular, u es subsolución débil y cumple $u \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ por la Proposición 2.31. Por el Teorema 3.11, $u \leq v$ en todo D, que es exactamente que v cumpla el superprincipio de comparación débil, y, por tanto, es supersolución débil.

Como al final demostraremos que las soluciones débiles y viscosas son equivalentes, todas las propiedades de unas también las tendrán las otras. En particular, ya teníamos un prinicipio de comparación débil, luego es natural que también se tenga:

Proposición 3.12. (Principio de comparación viscoso) Sea D un dominio acotado y sean u una subsolución viscosa y v una supersolución viscosa del problema $-\Delta_p w = 0$. Si para todo $\omega \in \partial D$ se tiene que

$$\limsup_{x \to \omega} u(x) \leq \liminf_{x \to \omega} v(x)$$

entonces $u \leq v$ en todo D.

La proposición anterior en realidad es una afirmación más fuerte que el Teorema 3.11. La prueba de cómo pasar de uno a otro se puede encontrar en [[12], sección 3, primera reducción].

3.3.1. Problema aproximado

La demostración del Teorema 3.11 requiere de múltiples pasos. El primero de ellos busca estudiar aproximaciones de las subsoluciones débiles del problema $-\Delta_p u = 0$. En particular, estudiaremos propiedades de las soluciones de $-\Delta_p u = -\epsilon$ con $\epsilon > 0$.

Lema 3.13. Sean Ω un dominio acotado con frontera C^1 y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una función p-armónica (continua) en Ω. Para cada $\epsilon > 0$, sea $u_\epsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ la solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon & \text{en } \Omega \\ u_\epsilon = u & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

Entonces $u_\epsilon \to u$ uniformemente sobre compactos de Ω.

Demostración. En primer lugar, observamos que $u - u_\epsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$, luego es admisible como función test. Como u y u_ϵ cumplen $-\Delta_p u = 0$ y $-\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon$ respectivamente en sentido débil, podemos restar las formulaciones débiles dadas por (2.23) para obtener

$$\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon, \nabla u - \nabla u_\epsilon \rangle = \epsilon \int_\Omega (u_\epsilon - u).$$

Utilizando ahora las desigualdades de Hölder y Poincaré obtenemos

$$\epsilon \int_\Omega (u_\epsilon - u) \leq \epsilon |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |u_\epsilon - u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C\epsilon \left(\int_\Omega |\nabla u_\epsilon - \nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

donde $C = C(n, p, \Omega)$. Por simplicidad, definimos

$$I_1 := \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon, \nabla u - \nabla u_\epsilon\rangle,$$

$$I_2 := \int_\Omega |\nabla u_\epsilon - \nabla u|^p.$$

En términos de I_1 e I_2 hemos obtenido

$$I_1 = \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon, \nabla u - \nabla u_\epsilon\rangle \leq C\epsilon \left(\int_\Omega |\nabla u_\epsilon - \nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} = C\epsilon I_2^{\frac{1}{p}}. \tag{3.22}$$

Uno de los propósitos de la prueba es ver que la sucesión $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ es covergente, por lo que nos será de utilidad establecer una cota uniforme de $\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^p$. Para ello, trataremos de acotar en su lugar $I_2 = \int_\Omega |\nabla u_\epsilon - \nabla u|^p$ valiéndonos de (3.22) y de las desigualdades puntuales (2.20) y (2.21). Conviene distinguir los casos $p \geq 2$ y $1 < p < 2$.

Si $p \geq 2$, entonces por (2.20) tenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega |\nabla u_\epsilon - \nabla u|^p \leq \frac{1}{2^{p-2}} \int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}|\nabla u_\epsilon|, \nabla u - \nabla u_\epsilon\rangle \\ &= \frac{1}{2^{p-2}} I_1 \leq C\epsilon I_2^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Tomando potencias p-ésimas se sigue que

$$I_2^p \leq C^p \epsilon^p I_2$$

es decir

$$I_2 \leq C^{\frac{p}{p-1}} \epsilon^{\frac{p}{p-1}}. \tag{3.24}$$

Si $1 < p < 2$, la desigualdad de Hölder aplicada a los exponentes $\left\{\frac{2}{p}, \frac{2}{2-p}\right\}$ permite deducir que

$$\begin{aligned} \|\nabla u_\epsilon - \nabla u\|_{L^p(\Omega)} &= \| |\nabla u_\epsilon - \nabla u|^p \|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{p}} = \left\| \frac{|\nabla u_\epsilon - \nabla u|^p (|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^{(2-p)\frac{p}{2}}}{(|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^{(2-p)\frac{p}{2}}} \right\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left\| \frac{|\nabla u_\epsilon - \nabla u|^p}{(|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^{(2-p)\frac{p}{2}}} \right\|_{L^{\frac{2}{p}}(\Omega)}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\| (|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^{(2-p)\frac{p}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{2-p}}(\Omega)}^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_\epsilon - \nabla u|^2}{(|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^{(2-p)}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^p \right)^{\frac{2-p}{2p}}. \end{aligned}$$

Así, podemos aplicar la desigualdad puntual (2.21) junto con (3.22) para concluir que

$$\begin{aligned} I_2^{\frac{1}{p}} = \|\nabla u_\epsilon - \nabla u\|_p &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_\epsilon - \nabla u|^2}{(|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^{(2-p)}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^p \right)^{\frac{2-p}{2p}} \\ &\leq C \left(\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}|\nabla u_\epsilon|, \nabla u - \nabla u_\epsilon\rangle \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^p \right)^{\frac{2-p}{2p}} \\ &= C \cdot I_1^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^p \right)^{\frac{2-p}{2}} \leq C \cdot \epsilon^{\frac{1}{2}} I_2^{\frac{1}{2p}} \left(\int_\Omega (|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^p \right)^{\frac{2-p}{2p}}, \end{aligned}$$

con $C = C(n, p, \Omega)$, de donde se sigue que

$$I_2 \le C\epsilon^p \left(\int_\Omega (|\nabla u_\epsilon| + |\nabla u|)^p \right)^{2-p}.$$

Ahora utilizamos la Proposición 2.29 que nos dice que existe una acotación uniforme de $\|\nabla u_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$ para obtener

$$I_2 \le C\epsilon^p \left(1 + \int_\Omega |\nabla u|^p \right)^{2-p}. \tag{3.25}$$

En vista de (3.24) y (3.25), podemos concluir que $\nabla u_\epsilon \to \nabla u$ en $L^p(\Omega)$ para todo $p \in (1, \infty)$. Recordando que $u_\epsilon - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la desigualdad de Poincaré nos garantiza que además $u_\epsilon \to u$ en $L^p(\Omega)$ y, por tanto,

$$u_\epsilon \to u \quad \text{en } W^{1,p}(\Omega) \tag{3.26}$$

cuando $\epsilon \to 0$. Una vez visto cual es el límite de la sucesión, queremos probar convergencia en un sentido más fuerte aplicando el teorema de Ascoli-Arzelá. Sea $\alpha \in (0, 1)$ el valor que cumple que $u_\epsilon \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$ (ver el Corolario 2.31). Consideramos, para un compacto $K \subset\subset \Omega$, el espacio $C^{0,\alpha}(K)$ y en él la familia de funciones $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ que son soluciones de $-\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon$ respectivamente.

La familia está equiacotada en $C^{0,\alpha}(K)$ ya que, por el teorema del valor medio, existen M y C^1 tales que

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon\|_{C^{0,\alpha}(K)} &= \sup_K |u_\epsilon| + \sup_{x \ne y} \frac{|u_\epsilon(x) - u_\epsilon(y)|}{|x-y|^\alpha} \le M + \sup_K \frac{|\nabla u_\epsilon||x-y|}{|x-y|^\alpha} \\ &\le M + C_0|x-y|^{1-\alpha} \le 2C_0|K|^{1-\alpha} \end{aligned}$$

donde en la primera desigualdad hemos utilizado el Lema 2.28 y en la segunda la Proposición 2.29.

Por otra parte, la Proposición 2.30 garantiza que la familia es equicontinua en $C^{0,\alpha}(K)$ ya que la constante que da la Hölder continuidad de las u_ϵ no depende de ϵ y solo de p, N, M, donde M viene dada por (2.30).

En definitiva, el Teorema de Ascoli-Arzelá nos garantiza que existe una subsucesión $\{u_{\epsilon_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ convergente en la topología de $C^{0,\alpha}(K)$, que es la topología de convergencia uniforme. Como además sabemos que $u_{\epsilon_m}, u \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$, podemos juntar la convergencia de la subsucesión con (3.26) para deducir que de hecho toda la sucesión $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ converge en $C^{0,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega)$, y su límite es u. □

3.3.2. Una propiedad viscosa

El segundo de los lemas previos que vamos a necesitar es el siguiente.

Lema 3.14. Sea $u_\epsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ una solución débil de $-\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon$ en un dominio Ω. Sean $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u_\epsilon - \varphi$ tiene un máximo local estricto en x_0. Entonces

$$\liminf_{x_0 \ne x \to x_0} (-\Delta_p \varphi(x)) \le -\epsilon \tag{3.27}$$

siempre que o bien $\nabla\varphi(x_0) \ne 0$ o bien x_0 sea un punto cítico aislado de φ.

Demostración. Supongamos que la conclusión es falsa. Es decir, existe un radio $r > 0$ tal que para todo $x \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ se tiene

$$-\Delta_p \varphi(x) > -\epsilon \quad \text{y} \quad \nabla\varphi(x_0) \neq 0. \tag{3.28}$$

Como $-\Delta_p$ solo depende de las derivadas podemos realizar una traslación para suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_0 = 0$. Denotaremos

$$B_r := B_r(0).$$

Sean $0 \leq \phi \in C_c^\infty(B_r)$ una función test no negativa y $\rho \in (0, r)$ un radio intermedio. En la corona

$$C_\rho := \{x \in \Omega\colon \rho < |x| < r\},$$

$-\Delta_p \varphi(x)$ está bien definida, luego

$$\int_{\rho<|x|<r} \phi(-\Delta_p \varphi) \geq -\epsilon \int_{\rho<|x|<r} \phi. \tag{3.29}$$

Por otra parte, utilizando que $\phi = 0$ en $|x| = r$ y el Teorema de la divergencia

$$\begin{aligned}
J_\rho :&= \oint_{|x|=\rho} \phi|\nabla\varphi|^{p-2} \left\langle \nabla\varphi, \frac{-x}{\rho} \right\rangle dS(x) \\
&= \oint_{\partial C_\rho} \phi|\nabla\varphi|^{p-2} \left\langle \nabla\varphi, \frac{-x}{\rho} \right\rangle dS(x) \\
&= \int_{C_\rho} \operatorname{div}(\phi|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) dx \\
&= \int_{C_\rho} |\nabla\varphi|^{p-2}\langle\nabla\phi, \nabla\varphi\rangle dx + \int_{C_\rho} \phi \cdot \operatorname{div}(|\nabla\varphi|^{p-2}\nabla\varphi) dx,
\end{aligned}$$

es decir

$$\int_{\rho<|x|<r} |\nabla\varphi|^{p-2}\langle\nabla\phi, \nabla\varphi\rangle dx = J_\rho + \int_{\rho<|x|<r} \phi \cdot (-\Delta_p\varphi) dx. \tag{3.30}$$

El objetivo es tomar $\rho \to 0^+$. Veamos cómo se comporta el flujo J_ρ cuando tomamos dicho límite.

$$\begin{aligned}
|J_\rho| :&= \left| \oint_{|x|=\rho} \phi|\nabla\varphi|^{p-2} \left\langle \nabla\varphi, \frac{-x}{\rho} \right\rangle dS(x) \right| \\
&\leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} \oint_{|x|=\rho} \left|\frac{x}{\rho}\right| dS(x) = \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} \oint_{|x|=\rho} dS(x) \\
&= \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega)} \omega_{N-1}\rho^{N-1}.
\end{aligned}$$

donde ω es la medida de la esfera unidad $N-1$ dimensional. Se sigue que

$$J_\rho \to 0 \tag{3.31}$$

cuando $\rho \to 0^+$. Juntando (3.29), (3.30) y (3.31) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |\nabla\varphi|^{p-2}\langle\nabla\varphi,\nabla\phi\rangle &= \lim_{\rho\to 0^+}\int_{\rho<|x|<r} |\nabla\varphi|^{p-2}\langle\nabla\varphi,\nabla\phi\rangle \\
&= \lim_{\rho\to 0^+}\left(J_\rho + \int_{\rho<|x|<r}\phi\cdot(-\Delta_p\varphi)dx\right) \\
&= \lim_{\rho\to 0^+}\int_{\rho<|x|<r}\phi\cdot(-\Delta_p\varphi)dx \\
&\geq \lim_{\rho\to 0^+} -\epsilon\int_{\rho<|x|<r}\phi \\
&= -\epsilon\int_{B_r}\phi.
\end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que φ es una supersolución débil del problema $-\Delta_p u = -\epsilon$. A partir de aquí basta con replicar la prueba de la Proposición 3.9. Se toma

$$m := \inf_{x\in\partial B_r(x_0)}(\varphi(x) - u_\epsilon(x)),$$

que cumple $m > 0$ por hipótesis, a partir de lo cual consideramos la función $C^2(\Omega)$

$$\overline{\varphi}(x) := \varphi(x) - m.$$

Entonces $\overline{\varphi}$ es supersolución débil de $-\Delta_p u = -\epsilon$ en $B_r(x_0)$ y además, por definición de m, $\overline{\varphi} \geq u_\epsilon$ en $\partial B_r(x_0)$. Aplicando la observación tras el Corolario 3.3 podemos concluir

$$\overline{\varphi} \geq u_\epsilon \quad \text{en } B_r(x_0).$$

Sin embargo, de aquí se sigue

$$u(x_0) \leq \overline{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) - m = u(x_0) - m,$$

una contradicción. □

3.3.3. Puntos de máximo y Jets

Terminamos los preparativos con un lema técnico y un teorema acerca de los Jets.

Lema 3.15. Sea $\mathcal{O}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^M$, $w \in USC(\mathcal{O})$, $0 \leq \Psi \in LSC(\mathcal{O})$ y

$$M_j = \sup_{\bar{x}\in\mathcal{O}}(w(\bar{x}) - j\Psi(\bar{x})). \tag{3.32}$$

para $j \in \mathbb{N}$. Supongamos que $|\lim_{j\to\infty} M_j| < \infty$ y sea $\{\bar{x}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{O}$ tal que

$$\lim_{j\to\infty}(M_j - [w(\bar{x}_j) - j\Psi(\bar{x}_j)]) = 0.$$

Si $\hat{x}$ es tal que $\bar{x}_j \to \hat{x}$, entonces:

(a) $\lim_{j\to\infty} j\Psi(\bar{x}_j) = 0$.

(b) $\Psi(\hat{x}) = 0$.

(c) $\lim_{j\to\infty} M_j = w(\hat{x}) = \sup_{\Psi(\bar{x})=0} w(\bar{x})$.

Demostración. Definimos

$$\delta_j := M_j - (w(\bar{x}_j) - j\Psi(\bar{x}_j)),$$

que cumple $\delta_j \to 0$. De la definición de M_j dada por (3.32), vemos que a medida que j crece, M_j decrece. Como $\Psi \geq 0$, se sigue que

$$M_{\frac{j}{2}} \geq w(\bar{x}_j) - \frac{j}{2}\Psi(\bar{x}_j) = w(\bar{x}_j) - j\Psi(\bar{x}_j) + \frac{j}{2}\Psi(\bar{x}_j) = M_j - \delta_j + \frac{j}{2}\Psi(\bar{x}_j),$$

es decir

$$2(M_{\frac{j}{2}} - M_j + \delta_j) \geq j\Psi(\bar{x}_j) \geq 0.$$

En particular, como la sucesión $\{M_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a un valor finito, tenemos que

$$j\Psi(\bar{x}_j) \to 0,$$

lo que prueba (a). Necesariamente entonces $\Psi(\bar{x}_j) \to 0$ si $j \to \infty$. Además, si $\bar{x}_j \to \hat{x}$ entonces por semicontinuidad inferior de Ψ

$$0 \leq \Psi(\hat{x}) \leq \liminf_{j\to\infty} \Psi(\bar{x}_j) \to 0$$

lo que prueba (b). Finalmente

$$w(\bar{x}_j) - j\Psi(\bar{x}_j) \geq M_j - \delta_j \geq \sup_{\Psi(\bar{x})=0} w(\bar{x}) - \delta_j \geq w(\hat{x}) - \delta_j.$$

Tomando límite superior en $j \to \infty$ obtenemos

$$w(\hat{x}) \geq \limsup_{j\to\infty}(w(\bar{x}_j) - j\Psi(\bar{x}_j)) \geq M_j \geq \sup_{\Psi(\bar{x})=0} w(\bar{x}) \geq w(\hat{x})$$

lo que prueba (c). □

El siguiente Teorema, que se puede encontrar en [[3], Teorema 3.2] y que está demostrado en el apéndice, establece una acotación sobre matrices pertenecientes a los Jets.

Teorema 3.16. *Sean Ω_i, $i = 1\dots k$ subespacios localmente compactos de $\mathbb{R}^{N_i}$,*

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k.$$

Fijamos $w(x) = u_1(x_1) + \cdots + u_k(x_k)$ con $x = (x_1, \dots, x_k)$ y $u_i \in USC(\Omega_i)$. Supongamos que Ψ es una función C^2 en un entorno de $\hat{x} := (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k) \in \Omega$ tal que $w - \Psi$ tiene un máximo local en $\hat{x}$. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existen matrices $X_i \in \mathcal{S}(N_i)$ tales que

$$(D_{x_i}\Psi(\hat{x}), X_i) \in \overline{J}^{2,+}_{\Omega_i} u_i(\hat{x}_i)$$

para cada $i \in 1\dots k$ y además

$$\begin{pmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_k \end{pmatrix} \leq A + \epsilon A^2$$

donde $A = D^2\Psi(\hat{x}) \in S(N)$, $N = \sum_{i=1}^k N_i$.

Observamos que este teorema trabaja con funciones u_i semicontinuas superiormente. A la hora de probar el Teorema 3.11, nos encontraremos con que habremos construido una w a base de funciones que son semicontinuas inferiormente. En ese caso $-w$ es función semicontinua superiormente y podremos aplicar el Teorema anterior con normalidad.

3.4. Viscosa implica débil

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema 3.11. A pesar de que los resultados previos hayan sido enunciados para dominios Ω para mantener la notación utilizada a lo largo del Capítulo 2, en la prueba los aplicaremos a los subdominios D, que son los que nos interesan para comprobar el principio de comparación.

3.4.1. Un problema regularizado

Para demostrar el Teorema 3.11, el primer paso consistirá en ver que podemos suponer que soluciones débiles u del problema homogéneo son en realidad soluciones del problema regularizado $-\Delta_p u = -\epsilon$.

Proposición 3.17. Sean $D \subset\subset \Omega$ tal que $\partial D \in C^1$ y $\epsilon > 0$. Si $u \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ es una solución débil de $-\Delta_p u = -\epsilon$ y v es una supersolución viscosa de $-\Delta_p v = 0$ tales que $u \leq v$ en todo punto de ∂D, entonces $u \leq v$ en todo punto de D.

Suponiendo cierta la Proposición 3.17, vamos a ver cómo esta implica el Teorema 3.11. Sean $u \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ una subsolución débil de $-\Delta_p u = 0$ y v es una supersolusción viscosa de $-\Delta_p u = 0$ con $u \leq v$ en todo punto de ∂D. Hemos de comprobar que bajo estas hipótesis se tiene $u \leq v$ en D.

Sea u_ϵ, para cada $\epsilon > 0$, la única solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon, & \text{en } D \\ \quad u_\epsilon = u, & \text{en } \partial D. \end{cases} \tag{3.33}$$

Como la condición de frontera implica $u_\epsilon = u \leq v$ en ∂D, la Proposición 3.17 permite deducir $u_\epsilon \leq v$ en todo D. Usando ahora el Lema 3.13, $u_\epsilon \to u$ uniformemente sobre compactos y en particular $u \leq v$ puntualmente.

3.4.2. El caso reducido

Tras haber realizado la reducción, estamos finalmente en posición de demostrar la equivalencia completa de soluciones débiles y viscosas probando la Proposición 3.17.

Demostración. Comenzamos fijando $\epsilon = 1$ por simplicidad: El argumento es análogo para cualquier otro $\epsilon > 0$. Supongamos, para llegar a una contradicción, que la conclusión de la Proposición 3.17 es falsa, es decir, existe algún punto de Ω tal que $u - v > 0$. En particular

$$\sup_D (u - v) > 0 \geq \sup_{\partial D} (u - v). \tag{3.34}$$

Definimos, para cada $j \in \mathbb{N}$, la función

$$w_j(x, y) := w(x, y) + \Psi_j(x, y) = v(x) - u(y) + \Psi_j(x, y)$$

donde $w(x,y) := v(x) - u(y)$ y

$$\Psi_j(x,y) := \frac{j}{q}|x-y|^q, \quad q > \max\left\{\frac{p}{p-1}, 2\right\}.$$

Sean (x_j, y_j) los puntos del conjunto compacto $\overline{D} \times \overline{D}$ donde w_j alcanza su mínimo. Equivalentemente, (x_j, y_j) son los puntos donde $-w_j = -w - \Psi_j$ alcanza su máximo.

De la sucesión $\{(x_j, y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ extraemos una subsucesión convergente, que seguiremos denotando $\{(x_j, y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, tal que

$$(x_j, y_j) \to (\hat{x}, \hat{y})$$

cuando $j \to \infty$.

Aplicando el Lema 3.15 a la función $-w$, que cumple que $-w$ es USC ya que por hipótesis v es LSC, con $\mathcal{O} := \overline{D} \times \overline{D}$ y $\Psi(\bar{x}) = \Psi(x,y) := \frac{1}{q}|x-y|^q$ obtenemos

$$-w(\hat{x}, \hat{y}) = \sup_{\Psi(x,y)=0} -w(x,y) = \sup_{z\in D} -v(z) + u(z) > \sup_{z\in\partial D} -v(z) + u(z)$$

donde la desigualdad estricta se tiene por (3.34).

En otras palabras, el valor límite $-w(\hat{x}, \hat{y})$ se alcanza en la diagonal de $\mathcal{O}$, y además dicho valor no puede alcanzarse en la frontera. Por tanto existe un M tal que para todo $j > M$, los puntos $\{(x_j, y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ de mínimo de w_j pertenecen al interior de $\overline{D} \times \overline{D}$. En particular, para todo $(x,y) \in D \times D$

$$v(x) - u(y) + \Psi_j(x,y) \geq v(x_j) - u(y_j) + \Psi_j(x_j, y_j)$$

para $j > M$. Tomando $x = x_j$, obtenemos

$$u(y) \leq u(y_j) - \Psi_j(x_j, y_j) + \Psi_j(x_j, y)$$

para todo y. En vista de la ecuación anterior, definimos

$$\varphi_j(y) := u(y_j) - \Psi_j(x_j, y_j) + \Psi_j(x_j, y) + \frac{1}{q-1}|y - y_j|^{q+1}.$$

Observamos que $(u - \varphi_j)(y_j) = 0$ y que

$$u - \varphi_j \leq -\frac{1}{q-1}|y - y_j|^{q+1} \leq 0,$$

donde la igualdad se tiene solamente cuando $y = y_j$. Se sigue que $u - \varphi_j$ tiene un máximo local en y_j. Además, por hipótesis $q > 2$ luego $\varphi_j \in C^2(D)$ y, por tanto, es una función test que junto con u cumple las hipótesis del Lema 3.14. Aplicándolo obtenemos

$$\liminf_{y\to y_j}(-\Delta_p \varphi_j(y)) \leq -\epsilon = -1, \tag{3.35}$$

de donde se deduce que

$$x_j \neq y_j.$$

En efecto, si fuese $x_j = y_j$ entonces

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi_j(y) &= \nabla\left(u(y_j) - \Psi_j(x_j, y_j) + \Psi_j(x_j, y) + \frac{1}{q-1}|y - y_j|^{q+1}\right) \\
&= \nabla\left(\frac{j}{q}|x_j - y|^q \frac{1}{q+1}|y - y_j|^{q+1}\right) \\
&= \left(j|y - y_j|^{q-1}(y - y_j) + |y - y_j|^q(y - y_j)\right) \\
&= (y - y_j)[j|y - y_j|^{q-1} + |y - y_j|^q].
\end{aligned}$$

Sustituyendo en el p-Laplaciano

(3.36)
$$\begin{aligned}\Delta_p\varphi_j(y) &= -\mathrm{div}(\nabla\varphi_j(y)|\nabla\varphi_j(y)|^{p-2})\\ &= \mathrm{div}\{(y-y_j)[j|y-y_j|^{q-1}+|y-y_j|^q]|(y-y_j)[j|y-y_j|^{q-1}+|y-y_j|^q]|^{p-2}\}\\ &= \mathrm{div}\{(y-y_j)|y-y_j|^{p-2}|j|y-y_j|^{q-1}+|y-y_j|^q|^{p-1}\}\\ &= \mathrm{div}\{(y-y_j)|y-y_j|^{p-2}|y-y_j|^{(q-1)(p-1)}|j+|y-y_j||^{p-1}\}\\ &= \mathrm{div}\{(y-y_j)|y-y_j|^{(p-2)}\}|y-y_j|^{(q-1)(p-1)}|j+|y-y_j||^{p-1}\\ &\quad + (y-y_j)|y-y_j|^{(p-2)}\nabla\{|y-y_j|^{(q-1)(p-1)}|j+|y-y_j||^{p-1}\}.\end{aligned}$$

Como por hipótesis $q-1>\frac{p}{p-1}-1=\frac{1}{p-1}$, todos los exponentes son mayores o iguales que 1 y $-\Delta_p\varphi_j(y)$ está bien definido para todo y. Se concluye que $-\Delta_p\varphi_j(y)\to 0$ cuando $y_j\to y$, que contradice (3.35).

El siguiente paso consiste en aplicar el Teorema 3.16 de manera adecuada. Recordamos el hecho de que $-w_j$ alcanza su máximo en (x_j,y_j). Según la notación del mismo Teorema, tomando $D_1,D_2:=\Omega$, $u_1:=-v$, $u_2:=u$ y $\Psi:=\Psi_j$ deducimos que, para cada $\delta>0$, existen matrices $X,Y\in S(N)$ tales que

$$\begin{aligned}&(D_x\Psi_j(\hat{x},\hat{y}),X)\in\overline{J}_\Omega^{2,+}(-v(\hat{x}))\\ &(D_y\Psi_j(\hat{x},\hat{y}),Y)\in\overline{J}_\Omega^{2,+}u(\hat{y})\end{aligned}$$

y

$$\begin{pmatrix} X & 0\\ 0 & Y\end{pmatrix}\le A+\delta A^2 \tag{3.37}$$

donde $A=D^2\Psi_j(\hat{x},\hat{y})$. Utilizando la propiedad de los Jets (2.40), deducimos

$$(D_x\Psi_j(\hat{x},\hat{y}),X)\in-\overline{J}_\Omega^{2,-}v(\hat{x})$$

y por tanto

$$(-D_x\Psi_j(\hat{x},\hat{y}),-X)\in\overline{J}_\Omega^{2,-}v(\hat{x}) \tag{3.38}$$

que resultará ser de más utilidad, ya que v es supersolución viscosa e interesa trabajar con sus subjets. Para lo que sigue nos hará falta conocer de manera explícita la matrices $D_x\Psi_j(\hat{x},\hat{y})$, $D_y\Psi_j(\hat{x},\hat{y})$ y A, así que realizamos el cálculo:

$$\begin{aligned}\Psi_j(x,y) &= \frac{j}{q}|x-y|^q=\frac{j}{q}\left((x_1-y_1)^2+\cdots+(x_N-y_N)^2\right)^{\frac{q}{2}},\\ \nabla\Psi_j(x,y) &= (D_x\Psi_j(x,y);D_y\Psi_j(x,y))\\ &= j|x-y|^{q-2}\left((x_1-y_1),\dots,(x_N-y_N);-(x_1-y_1),\dots,-(x_N-y_N)\right),\\ D^2\Psi_j(x,y) &= j(q-2)|x-y|^{q-4}\begin{pmatrix}((x_i-y_i)(x_j-y_j))_{i,j=1}^N & -((x_i-y_i)(x_j-y_j))_{i,j=1}^N\\ -((x_i-y_i)(x_j-y_j))_{i,j=1}^N & ((x_i-y_i)(x_j-y_j))_{i,j=1}^N\end{pmatrix}\\ &\quad + j|x-y|^{q-2}\begin{pmatrix} I_N & -I_N\\ -I_N & I_N\end{pmatrix}\end{aligned}$$

donde I_N es la matriz identidad de tamaño $N \times N$. De aquí podemos extraer dos conclusiones. Por una parte $-D_x\Psi_j(\hat{x},\hat{y}) = D_y\Psi_j(\hat{x},\hat{y})$ luego podemos definir

$$\eta_j := -D_x\Psi_j(\hat{x},\hat{y}) = D_y\Psi_j(\hat{x},\hat{y})$$

que además cumple $\eta_j \neq 0$ porque $x_j \neq y_j$. Por otra parte, la matriz $A = D^2\Psi_j(\hat{x},\hat{y})$ puede escribirse como

$$A = \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix}$$

donde Z es una matriz de tamaño $N \times N$. En particular, de (3.37) se deduce

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq A + \delta A^2 = \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2Z^2 & -2Z^2 \\ -2Z^2 & 2Z^2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la definición de desigualdad entre matrices a vectores de la forma (ξ,ξ) con $\xi \in \mathbb{R}^N$, se sigue que

$$\begin{pmatrix} \xi & \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \xi & \xi \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2Z^2 & -2Z^2 \\ -2Z^2 & 2Z^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = 0,$$

es decir $\xi^T X\xi + \xi^T Y\xi \leq 0$, y, por tanto,

$$Y \leq -X. \tag{3.39}$$

Ya estamos en posición de llegar a una contradicción. Recordamos que la función propia F que representa al p-Laplaciano viene dada por (véase (2.43))

$$F(\eta, W) = -|\eta|^{p-2}\left[tr(W) + (p-2)\left\langle W\frac{\eta}{|\eta|}, \frac{\eta}{|\eta|} \right\rangle \right].$$

En primer lugar, como u es solución débil de $-\Delta_p u = -\epsilon$ y $u - \varphi_j$ tiene máximo en y_j, la definición de subjet, (3.38) y el Lema 3.12 implican

$$F(\eta_j, Y) = F(D_y\Psi_j(x_j,y_j), Y) \leq -\epsilon = -1. \tag{3.40}$$

En segundo lugar, como v es supersolución viscosa de $-\Delta_p v = 0$ la definición de superjet implica

$$F(\eta_j, X) = F(-D_x\Psi_j(x_j,y_j), -X) \geq 0. \tag{3.41}$$

Finalmente, aplicando (3.39), (3.40) y (3.41)

$$0 > -1 \geq F(\eta_j, Y) \geq F(\eta_j, -X) \geq 0$$

que es una contradicción. $\square$

CAPÍTULO 4

Segunda equivalencia

Hasta ahora nos hemos preocupado de demostrar la equivalencia entre soluciones débiles y soluciones viscosas para el problema homogéneo.

El siguiente paso natural es tratar de extender la equivalencia de soluciones a problemas más generales como lo es el problema no homogéneo con lado derecho $f = f(x)$:

$$-\Delta_p u = f.$$

Una vez más nos centraremos únicamente en el caso de las supersoluciones, ya que a partir de este se puede demostrar el caso de las subsoluciones.

Definición 4.1. (Supersoluciones viscosas del p-Laplaciano no homogéneo) Sea f continua en Ω.

(a) Diremos que $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap LSC(\Omega)$ es supersolución viscosa de $-\Delta_p u = f$ si para todos $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0 se tiene

$$\limsup_{x \to x_0} -\Delta_p \varphi(x) \geq f(x_0)$$

siempre que o bien $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ o bien x_0 sea un punto crítico aislado de φ.

(b) Diremos que $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap USC(\Omega)$ es subsolución viscosa de $-\Delta_p u = f$ si para todos $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $u - \varphi$ tiene un máximo local en x_0 se tiene

$$\liminf_{x \to x_0} -\Delta_p \varphi(x) \leq f(x_0)$$

siempre que o bien $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ o bien x_0 sea un punto crítico aislado de φ.

Recordamos que, a diferencia del caso homogéneo, el Teorema 3.8 no es cierto, luego al hablar de soluciones débiles estaremos pensando en la definición mediante la formulación débil:

Definición 4.2. Sea f continua en Ω. Diremos que u es supersolución débil de $-\Delta_p u = f$ si para toda $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle \geq \int_\Omega f\varphi.$$

El objetivo principal del capítulo será probar el siguiente Teorema:

Teorema 4.3. *Sea $u \in L^{\infty}_{loc}(\Omega) \cap LSC(\Omega)$ una supersolución viscosa de $-\Delta_p u = f$ con f una función continua. Entonces u es supersolución débil del mismo problema.*

Su recíproco, menos laborioso, también es cierto (veáse la Proposición 4.5 más adelante).

Como ya hemos anticipado, la estrategia de utilizar el principio de comparación como definición equivalente de supersolución no va a funcionar ya que dicha equivalencia no se tiene para el problema no homogéneo. Como alternativa, la convolución ínfima será la herramienta principal. Esta requerirá que las funciones u sean acotadas, con lo que habrá que ver como podemos reducir a este caso.

Observamos que la elección $f = 0$ reduce al caso homogéneo, caso en el que la prueba seguirá siendo válida. Así conseguiremos dar una segunda demostración de la equivalencia de los dos tipos de soluciones en el caso homogéneo, complementando el Capítulo 3.

La demostración que daremos no necesita conocer los resultados de regularidad expuestos en [5] y nos bastará con saber solamente que las soluciones débiles son localmente acotadas.

Durante la prueba del caso homogéneo, un paso importante consistió en pasar del problema $-\Delta_p u = 0$ al problema regularizado $-\Delta_p u_\epsilon = -\epsilon$ ya que este cumplía que sus soluciones aproximaban la función objetivo u. Esta idea será también central, aunque como se tendrá que tener en cuenta la función lado derecho f, la aproximación adecuada será algo más complicada.

Este Capítulo usará, como guías principales, [10] y [17].

4.1. Débil implica viscosa

Comenzaremos probando, por completitud, el recíproco del Teorema 4.3 que solamente requiere del siguiente Lema que aparece en [[18], Corolario 3.4.2].

Lema 4.4. Sea f una función continua y $D \subset\subset \Omega$. Sean $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ es supersolución débil y $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ una subsolución débil del problema $-\Delta_p u = f$ respectivamente, tales que $u \geq v$ en ∂D. Entonces $u \geq v$ en todo D.

El lema anterior nos dice que aún para un lado derecho no homogéneo, seguimos teniendo un principio de comparación débil.

Proposición 4.5. Sean $1 < p < \infty$ y sea $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ una supersolución débil de $-\Delta_p u = f$ con f una función continua. Entonces u es supersolución viscosa del mismo problema.

La demostración es análoga a la de la Proposición 3.9, así que solo daremos los pasos principales.

Demostración. Supongamos, para llegar a una contradicción, que u no es supersolución viscosa, es decir, existen $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene mínimo local en un entorno B de x_0, $\nabla\varphi(x) \neq 0$ en $B \setminus \{x_0\}$ y

$$\limsup_{x \to x_0}(-\Delta_p \varphi(x)) < f(x_0).$$

Por continuidad de la f existe un entorno, que volveremos a llamar B, tal que para todo $x \in B$

$$\limsup_{x \to x_0}(-\Delta_p \varphi(x)) < f(x). \tag{4.1}$$

Tomando

$$m := \inf_{\partial B}(u - \varphi) > 0$$

se comprueba que

$$\overline{\varphi}(x) = \varphi(x) + m$$

es subsolución débil (y clásica) del problema $-\Delta_p u = f$ en $B \setminus \{x_0\}$. En definitiva, tenemos $u \geq \overline{\varphi}$ en ∂B lo que significa, por el Lema 4.4, que

$$u \geq \overline{\varphi}$$

en B. Pero como $x_0 \in B$,

$$u(x_0) \geq \overline{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) + m = u(x_0) + m$$

que es una contradicción. □

4.2. Reducción a funciones acotadas

Para poder atacar el Teorema 4.3 mediante el uso de las convoluciones ínfimas, que abordaremos en la sección 4.3.1, necesitaremos trabajar con soluciones viscosas de $-\Delta_p u = f$ que sean acotadas. Esta sección está dedicada a comprobar que basta probar el Teorema 4.3 añadiendo la hipótesis

$$u \in L^\infty(\Omega).$$

Lema 4.6. Sea $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ una supersolución viscosa del problema $-\Delta_p u = f$ con f continua. Sea $F \in C(\overline{\Omega})$ una supersolución débil de $-\Delta_p u = f$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{R}$, la función $\min\{u, F + k\}$ es supersolución viscosa del mismo problema.

Observación. Aunque no toda supersolución débil de $-\Delta_p u = f$ es continua hasta la frontera, siempre podemos tomar una que sí lo sea. Sea $\phi \in C(\overline{\Omega})$ una solución débil de $-\Delta_p \phi = 1$. Entonces la función

$$F = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}} \phi$$

es la supersolución buscada, ya que si $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una función test no negativa entonces

$$\int_\Omega |\nabla F|^{p-2} \langle \nabla F, \nabla \varphi \rangle = \int_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)} |\phi|^{p-2} \langle \nabla \phi, \nabla \varphi \rangle = \int_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \varphi \geq \int_\Omega f \varphi.$$

Demostración. Sean $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $\min\{u, F + k\} - \varphi$ tiene mínimo local en x_0 y si φ tiene un punto crítico en x_0 entonces es aislado. Hemos de comprobar que

$$\limsup_{x \to x_0} -\Delta_p \varphi(x) \geq f(x_0).$$

En el caso en el que $u(x_0) > F(x_0) + k$, como u es LSC, existe un entorno B de x_0 tal que

$$u(x) > F(x) + k$$

para todo $x \in B$, con lo que $\min\{u, F+k\} = F+k$ en B. Como $F+k$ es supersolución débil, se termina usando la Proposición 4.5.

En caso contrario en el que $u(x_0) \leq F(x_0)+k$, en un entorno de x_0 tenemos por hipótesis

$$u(x)-\varphi(x) \geq \min\{u, F+k\}(x)-\varphi(x) \geq \min\{u, F+k\}(x_0)-\varphi(x_0) = u(x_0)-\varphi(x_0),$$

luego se termina usando que u es supersolución viscosa. □

Lema 4.7. Sean $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una supersolución viscosa y $F \in C(\overline{\Omega})$ una supersolución débil de $-\Delta_p u = f$ con f continua respectivamente. Supongamos que para todo $k \in \mathbb{R}$, las funciones

$$\min\{u, F+k\}$$

son supersoluciones débiles del problema $-\Delta_p u = f$ con f continua. Entonces u es supersolución débil del mismo problema.

Demostración. Definimos $v_k := \min\{u, F+k\}$ y fijamos $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. En el conjunto de puntos

$$\{x \in \Omega \colon u(x) > F+k\},$$

que tiene interior no vacío si u es LSC, se cumple $\nabla v_k = 0$. Por hipótesis se sigue

$$\int_\Omega f\varphi \leq \int_\Omega |\nabla v_k|^{p-2}\nabla v_k \nabla\varphi = \int_{\Omega\cap\{u\leq F+k\}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\mathbf{1}_{\{u\leq F+k\}}.$$

Por el Teorema de la convergencia dominada, haciendo $k \to \infty$ llegamos a

$$\int_\Omega f\varphi \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi.$$

□

Proposición 4.8. Sea $u \in L^\infty(\Omega) \cap LSC(\Omega)$ una supersolución viscosa de $-\Delta_p u = f$ con f una función continua. Entonces u es supersolución débil del mismo problema.

Los dos lemas anteriores permiten ver que el Teorema 4.3 y la Proposición anterior son equivalentes:

Si $u \in L^\infty(\Omega)\cap LSC(\Omega)$ es supersolución viscosa de $-\Delta_p u = f$ en particular $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ y se aplica el Teorema.

Si $u \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega) \cap LSC(\Omega)$ es supersolución viscosa de $-\Delta_p u = f$ entonces para todo k, por el Lema 4.6, las funciones $\min\{u, F+k\}$ son supersoluciones viscosas el mismo problema donde F es una supersolución débil de $-\Delta_p u = f$. Como podemos suponer $F \in C(\overline{\Omega})$, y por tanto acotada, las funciones $\min\{u, F+k\}$ son supersoluciones débiles por hipótesis. Finalmente, el Lema 4.7 garantiza que u en realidad es supersolución débil.

4.3. Herramientas

Acabamos de ver como para demostrar el Teorema 4.3 basta con probar la Proposición 4.8. A continuación, expondremos las herramientas necesarias para poder abordar el problema reducido, siendo el gran protagonista la convolución ínfima.

A lo largo de esta sección, será habitual considerar los subdominios

$$\Omega_r := \{x \in \Omega\colon\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > r\} \tag{4.2}$$

donde $r > 0$.

4.3.1. La convolución ínfima

La convolución ínfima es una familia de funciones que nos permitirán aproximar las supersoluciones viscosas de partida. Dedicaremos esta sección a definirla y exponer sus propiedades básicas.

Todos los resultados que demostraremos ya tienen en cuenta que u es una función acotada, poniendo en evidencia la necesidad de la reducción de la sección anterior.

Definición 4.9. Sean Ω un dominio acotado, $u \in LSC(\Omega)$ y $q \geq 2$. Para cada $\epsilon > 0$ la función

$$u_\epsilon(x) := \inf_{y \in \Omega} \left(u(y) + \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right) \tag{4.3}$$

se conoce como la convolución ínfima de la función u.

Observación. La que acabamos de dar es solo una de las muchas versiones de convoluciones ínfimas que se definen en general como

$$u_\epsilon(x) = \inf_{y \in \Omega} \left(u(y) + \frac{d_x(y)}{\epsilon} \right)$$

donde $d_x(y) = d(x, y)$ es una distancia en Ω. La ventaja de tomar $d_x(y) = \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-2}}$ es el hecho de que, mediante un cálculo similar al realizado en (3.36), se verifica que para cada x fijo

$$-\Delta_p d_x(y) = 0 \tag{4.4}$$

cuando $q \geq 2$.

Las primeras propiedades de las convoluciones ínfimas que nos interesan tienen que ver con el dominio donde se alcanza el ínfimo.

Lema 4.10. Sean Ω un dominio acotado con frontera C^1 y $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada semicontinua inferiormente. Si u_ϵ es la convolución ínfima de u, entonces

(a) $\forall \epsilon > 0$, $\exists r = r(\epsilon)$ tal que $r(\epsilon) \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$ y

$$u_\epsilon(x) = \inf_{y \in B_r(\epsilon) \cap \Omega} \left(u(y) + \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right), \tag{4.5}$$

(b) u_ϵ crece a medida que $\epsilon \to 0$ y además

$$u_\epsilon \to u$$

puntualmente.

Como nos estaremos refiriendo de manera reiterada a la función u_ϵ y al ínfimo de las funciones que la definen, por claridad en los argumentos denotaremos

$$U_y^\epsilon(x) := \left(u(y) + \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right) \tag{4.6}$$

con lo que

$$u_\epsilon = \inf_{y\in\Omega} U_y^\epsilon(x).$$

Cuando se sobreentienda, omitiremos la dependencia de U con ϵ.

Demostración. Dados

$$M := \sup_\Omega u \quad \text{y} \quad m := \inf_\Omega u$$

elegimos $r = r(\epsilon)$ de manera que se cumpla

$$\frac{r^q}{q\epsilon^{q-1}} = M - m. \tag{4.7}$$

Por definición la sucesión $\{r(\epsilon)\}_{\epsilon>0}$ tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0$. Además, para todo $y \in \Omega \setminus \overline{B}_r(x)$

$$U_y^\epsilon(x) = u(y) + \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} > m + \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \geq M \geq u(x) = U_x^\epsilon(x).$$

Se sigue que el $\inf_{y\in\Omega} U_y^\epsilon(x)$ no puede alcanzarse en ningún $y \in \Omega \setminus \overline{B}_r(x)$. Esto es el apartado (a).

A raíz de (4.5) se ve que para el cálculo de u_ϵ cada vez estamos tomando ínfimos sobre conjuntos más pequeños a medida que $\epsilon \to 0$. Como además $\frac{1}{\epsilon^{q-1}}$ crece cuando $\epsilon \to 0$ ya que $q \geq 2$, necesariamente la función u_ϵ crece.

De (4.5) también se deduce fácilmente que para todo x, $u_\epsilon(x) \to u(x)$. En efecto, por definición de semicontinuidad inferior tenemos que para todo $\delta > 0$ existe un $\overline{\epsilon}$ tal que si $\epsilon < \overline{\epsilon}$ entonces

$$u|_{B_{r(\epsilon)}} > u(x) - \delta.$$

Sumando el término $\frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}}$ a ambos lados y tomando ínfimos $B_{r(\epsilon)}$ se obtiene

$$u(x) - \delta = u(x) - \delta + \inf_{y\in B_{r(\epsilon)}\cap\Omega} \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \leq \inf_{y\in B_{r(\epsilon)}\cap\Omega} \left(u(y) + \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right) = u_\epsilon(x) \leq u(x).$$

Se sigue, tomando $\epsilon \to 0$

$$u(x) - \delta \leq \lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x) \leq u(x),$$

válido para todo δ. Esto es el apartado (b). □

El objetivo de las funciones u_ϵ recién introducidas es conseguir aproximar las soluciones u mediante funciones que tengan una mayor regularidad. Aunque lo deseable sería que fuesen dos veces diferenciables, solo vamos a tener Lipschitz continuidad y existencia de segundas derivadas en casi todo punto.

Lema 4.11. Sea $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ acotada semicontinua inferiormente. Entonces la convolución ínfima u_ϵ es localmente Lipschitz continua.

Demostración. Se deduce directamente del hecho de que $d(x,y) = \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}}$ es una distancia en $\mathbb{R}^N$ para todo $q \geq 2$. La desigualdad triangular nos dice que para todos $x_1, x_2 \in \Omega_{r(\epsilon)}$

$$u_\epsilon(x_1) \leq u(y) + d(x_1,y) \leq u(y) + d(x_2,y) + d(x_1,x_2)$$

$$u_\epsilon(x_2) \leq u(y) + d(x_2,y) \leq u(y) + d(x_1,y) + d(x_1,x_2)$$

para todo $y \in B_{r(\epsilon)}$. Tomando el ínfimo sobre $y \in B_{r(\epsilon)}$ se sigue que

$$u_\epsilon(x_1) \leq u_\epsilon(x_2) + d(x_1,x_2)$$

$$u_\epsilon(x_2) \leq u_\epsilon(x_1) + d(x_1,x_2)$$

y, por tanto,

$$|u_\epsilon(x_1) - u_\epsilon(x_2)| \leq d(x_1,x_2) = \frac{|x_1-x_2|^{q-1}}{q\epsilon^{q-1}}|x_1-x_2|.$$

□

En cuanto a las segundas derivadas, las nociones de concavidad y semiconcavidad juegan un papel importante.

Definición 4.12. Diremos que $u \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función semicóncava si existe una constante $C > 0$ tal que

$$x \mapsto u(x) - C|x|^2$$

es una función cóncava.

Lema 4.13. Sea $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ acotada y semicontinua inferiormente. Entonces la convolución ínfima u_ϵ es semicóncava en el dominio reducido $\Omega_{r(\epsilon)}$.

Demostración. Sean $x \in \Omega_{r(\epsilon)}$ e $y \in \Omega \cap B_{r(\epsilon)}(x)$. Observamos que la función $U_y(x)$ dada por (4.6) es $C^2(\Omega)$ ya que $q \geq 2$. Si calculamos la matriz de segundas derivadas

$$D^2U_y(x) = \frac{1}{\epsilon^{q-1}}\left[|x-y|^{q-2}I_N + (q-2)|x-y|^{q-4}A\right] \tag{4.8}$$

donde

$$\begin{aligned} A &:= ((x_i-y_i)(x_j-y_j))_{i,j=1}^N \\ &= \begin{pmatrix} (x_1-y_1)^2 & (x_1-y_1)(x_2-y_2) & \cdots & (x_1-y_1)(x_N-y_N) \\ (x_2-y_2)(x_1-y_1) & (x_2-y_2)^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (x_N-y_N)(x_1-y_1) & \cdots & \cdots & (x_N-y_N)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observamos que al diagonalizar la matriz A se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |x-y|^2 \end{pmatrix},$$

luego (4.8) se reescribe

$$
\begin{aligned}
D^2U_y(x) &= \frac{1}{\epsilon^{q-1}}\left[|x-y|^{q-2}I_N + (q-2)|x-y|^{q-4}A\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^{q-1}}\left[|x-y|^{q-2}I_N + (q-2)|x-y|^{q-2}I_N\right] \\
&= \frac{q-1}{\epsilon^{q-1}}|x-y|^{q-2}I_N \\
&\leq 2CI_N
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

para todo $y \in B_{r(\epsilon)}$, donde $C = \frac{q-1}{2\epsilon}r(\epsilon)^{q-2}$. Se sigue que la función $U_y(x)-C|x|^2$ es cóncava ya que cumple $D^2(U_y(x) - C|x|^2) \leq 0$. Finalmente, tomando el ínfimo sobre $y \in B_{r(\epsilon)} \cap \Omega$ se concluye que $u_\epsilon(x) - C|x|^2$ es cóncava. □

El Teorema de Alexandrov (Teorema 2.24) nos garantiza que si una función es cóncava, entonces la matriz de segundas derivadas existe en casi todo punto. En el caso de las funciones u_ϵ, al ser semicóncavas, existen las segundas derivadas de $u_\epsilon - C|x|^2$ en casi todo punto. Como además la función $C|x|^2$ es dos veces diferenciable en casi todo punto:

Corolario 4.14. Sea $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ acotada y semicontinua inferiormente. Entonces las segundas derivadas de u_ϵ existen en casi todo punto.

La última propiedad destacable de las funciones u_ϵ es que ellas son las que aproximarán de manera adecuada las supersoluciones viscosas. Necesitaremos también aproximar la f, lado derecho del problema, lo cual conseguiremos mediante las funciones

$$
f_\epsilon(x) := \inf_{y \in B_{r(\epsilon)}(x)\cap\Omega} f(y), \qquad x \in \Omega_{r(\epsilon)} \tag{4.10}
$$

Proposición 4.15. Sean u una supersolución viscosa de $-\Delta_p u = f$. Entonces la convolución ínfima u_ϵ es supersolución viscosa de

$$
-\Delta_p u_\epsilon = f_\epsilon
$$

en $\Omega_{r(\epsilon)}$. En particular, se tiene

$$
-\Delta_p u_\epsilon(x) = f_\epsilon(x)
$$

en casi todo punto.

Demostración. Hemos de ver que $u_\epsilon(x)$ es supersolución viscosa del problema con lado derecho f_ϵ. Para ello basta ver que las funciones $U_y(x)$ son supersoluciones viscosas del mismo problema. En efecto, sean $x_0 \in \Omega_{r(\epsilon)}$ y $\varphi \in C^2(\Omega_{r(\epsilon)})$ tales que $u_\epsilon - \varphi$ cumple $u_\epsilon(x_0) = \varphi(x_0)$ y $u_\epsilon(x) > \varphi(x)$ para todo $x \in \Omega_{r(\epsilon)}$. El Lema 4.17 más adelante nos dice que existe un $\bar{y} \in B_{r(\epsilon)}$ tal que $U_{\bar{y}}(x_0) = u_\epsilon(x_0)$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_0) &= u_\epsilon(x_0) = U_{\bar{y}}(x_0) \\
\varphi(x) &\leq u_\epsilon(x_0) \leq U_{\bar{y}}(x),
\end{aligned}
$$

es decir, φ es función test admisible para la condición de supersolución viscosa de $U_{\bar{y}}(x)$ con lo que $-\Delta_p\varphi \geq f_\epsilon$ pudiendo concluir.

Realizada la reducción, en primer lugar observamos que podemos hacer una traslación al origen:

$$u_\epsilon(x) = \inf_{y \in B_{r(\epsilon)}(x)\cap\Omega} \left(u(y) + \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right) = \inf_{z \in B_{r(\epsilon)}(0)\cap\Omega} \left(u(z-x) + \frac{|z|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right).$$

Definimos

$$\overline{U}_z(x) := \left(u(z-x) + \frac{|z|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right),$$

y sean $x_0 \in \Omega$ y $\varphi \in C^2(\Omega)$ tales que $\overline{U}_z - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0. Explícitamente

$$\overline{U}_z(x_0) = u(z-x_0) + \frac{|z|^q}{q\epsilon^{q-1}} = \varphi(x_0)$$
$$\overline{U}_z(x) = u(z-x) + \frac{|z|^q}{q\epsilon^{q-1}} \geq \varphi(x).$$

Si reordenamos los términos y hacemos el cambio de variables $y = z - x$, tomando $y_0 = z - x_0$ obtenemos

$$u(y_0) = \varphi(z-y_0) - \frac{|z|^q}{q\epsilon^{q-1}}$$
$$u(y) \geq \varphi(z-y) - \frac{|z|^q}{q\epsilon^{q-1}},$$

es decir, la función $\overline{\varphi}(y) := \varphi(z-y) - \frac{|z|^q}{q\epsilon^{q-1}} \in C^2(\Omega_{r(\epsilon)})$ es tal que $u(y) - \overline{\varphi}(y)$ tiene un mínimo local en y_0. Como u es supersolución viscosa de $-\Delta_p u = f$ en todo Ω, se sigue que

$$\limsup_{y\to y_0} -\Delta_p \varphi(z-y) = \limsup_{y\to y_0} -\Delta_p \overline{\varphi}(y) \geq f(y_0),$$

con lo que cada $\overline{U}_z(x)$ es supersolución viscosa de $-\Delta_p u = f$. Deshaciendo el cambio de variables

$$\limsup_{x\to x_0} -\Delta_p \varphi(x) \geq f(z-x_0) \geq \inf_{y\in B_{r(\epsilon)}(x_0)} f(y) = f_\epsilon(x),$$

es decir, U_y es supersolución viscosa de $-\Delta_p U_y = f_\epsilon$.

Finalmente, como por el Corolario 4.14 las segundas derivadas existen en casi todo punto, se tiene

$$-\Delta_p u_\epsilon(x) = f_\epsilon(x)$$

en casi todo punto mediante la consistencia de soluciones dada por el Lema 2.35. □

4.3.2. El conjunto de alcance

Nos va a interesar el conjunto de puntos donde el ínfimo que define la convolución se alcanza y algunas propiedades acerca del mismo.

Definición 4.16. Para $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada semicontinua inferiormente y $x \in \Omega_{r(\epsilon)}$, definimos su conjunto de alcance como

$$Y_\epsilon(x) := \left\{ y \in \Omega\colon u_\epsilon(x) = u(y) + \frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right\}.$$

Lema 4.17. El conjunto de alcance Y_ϵ es un cerrado no vacío contenido en $B_{r(\epsilon)}$.

Demostración. La propiedad $Y_\epsilon(x) \subset B_{r(\epsilon)}$ es consecuencia inmediata del Lema 4.10 (a).

Para la propiedad $Y_\epsilon \neq \emptyset$, por definición de ínfimo sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $B_{r(\epsilon)}(x)$ minimizante, es decir, tal que

$$\lim_{n\to\infty}\left(u(y_n)+\frac{|x-y_n|^q}{q\epsilon^{q-1}}\right)=u_\epsilon(x).$$

Como $\overline{B_{r(\epsilon)}}$ es compacto, existe una subsucesión que volvemos a llamar $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \to y \in \overline{B_{r(\epsilon)}}$. Entonces, como u es LSC,

$$u(y)+\frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \leq \liminf_{n\to\infty}\left(u(y_n)+\frac{|x-y_n|^q}{q\epsilon^{q-1}}\right)=u_\epsilon(x)\leq u(y)+\frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \tag{4.11}$$

donde la última desigualdad se tiene por definición de u_ϵ. Se sigue

$$u_\epsilon(x)=u(y)+\frac{|x-y|^q}{q\epsilon^{q-1}}.$$

La propiedad de ser cerrado se deduce inmediatamente de (4.11). □

El siguiente lema permitirá deducir propiedades puntuales entre u y u_ϵ a través del conjunto de alcance.

Proposición 4.18. Sean $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada semicontinua inferiormente, u_ϵ su convolución inferior e Y_ϵ su conjunto de alcance.

(a) La función $x \mapsto \max_{y\in Y_\epsilon(x)} |y-x|$ es semicontinua superiormente.

(b) Si existe $\nabla u_\epsilon(x)$, entonces para todo $y \in Y_\epsilon(x)$ se tiene

$$\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right)^{q-1} \leq |\nabla u_\epsilon(x)|.$$

En particular, si $|\nabla u_\epsilon(x)| = 0$, entonces $u_\epsilon(x) = u(x)$.

Observamos que la función $x \mapsto \max_{y\in Y_\epsilon(x)} |y-x|$ está bien definida ya que Y_ϵ es un conjunto cerrado y acotado de Ω.

Demostración. Sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Ω que converge a un punto $x_0 \in \Omega$. Para probar (a), hemos de ver que

$$\limsup_{m\to\infty}\max_{y\in Y_\epsilon(x_m)}|y-x_m| \leq \max_{y\in Y_\epsilon(x_0)}|y-x_0|.$$

Como Y_ϵ es no vacío, para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $y_m \in Y_\epsilon(x_m)$ un punto que cumple

$$|y_m-x_m| = \max_{y\in Y_\epsilon(x_m)}|y-x_m|. \tag{4.12}$$

Veamos que si y_0 está en la clausura de la sucesión $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ entonces $y_0 \in Y_\epsilon(x_0)$. Para ello, como Y_ϵ es cerrado, basta demostrar que $y_m \in Y_\epsilon(x_0)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por construcción tenemos que

$$u_\epsilon(x_m)=u(y_m)+\frac{|x_m-y_m|}{q\epsilon^{q-1}}. \tag{4.13}$$

Haciendo $x_m \to x_0$, como u_ϵ es Lipschitz continua (véase Lema 4.11),

$$u_\epsilon(x_0) = u(y_m) + \frac{|x_0 - y_m|}{q\epsilon^{q-1}} \tag{4.14}$$

que es exactamente $y_m \in Y_\epsilon(x_0)$. Finalmente, observamos que como u es LSC, $-u$ es USC y, por tanto,

$$\limsup_{m\to\infty} -u(y_m) \leq -u(y_0). \tag{4.15}$$

Juntando (4.12), (4.13), (4.14) y (4.15) deducimos

$$\begin{aligned}
\limsup_{m\to\infty} \max_{y\in Y_\epsilon(x_m)} |y - x_m| &= \limsup_{m\to\infty} |y_m - x_m| \\
&= \limsup_{m\to\infty} (u_\epsilon(x_m) - u(y_m))q\epsilon^{q-1} \\
&\leq (u_\epsilon(x_0) - u(y_0))q\epsilon^{q-1} \\
&= |x_0 - y_0| \\
&\leq \max_{y\in Y_\epsilon(x_0)} |y - x_0|.
\end{aligned}$$

Para el apartado (b) definimos, para $y \in Y_\epsilon(x)$, el vector de módulo 1

$$\eta := \frac{y - x}{|y - x|}.$$

Entonces, si $h > 0$

$$u_\epsilon(x + h\eta) = \inf_{\bar{y}\in B_r(x+h\eta)\cap\Omega} \left(u(\bar{y}) + \frac{|x + h\eta - \bar{y}|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right) \leq u(y) + \frac{|x + h\eta - y|^q}{q\epsilon^{q-1}}.$$

Como $\nabla u_\epsilon(x)$ existe, podemos evaluar su derivada direccional para obtener

$$\begin{aligned}
\langle \nabla u_\epsilon(x), \eta \rangle &= \lim_{h\to 0^+} \frac{u_\epsilon(x + h\eta) - u_\epsilon(x)}{h} \\
&\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left(u(y) + \frac{|x + h\eta - y|^q}{q\epsilon^{q-1}} - u(y) - \frac{|x - y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left(|(y - x) - h\eta|^q - |x - y|^q \right) \frac{1}{q\epsilon^{q-1}} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left(|y - x|^q \left| \frac{y - x}{|y - x|} - \frac{h\eta}{|y - x|} \right|^q - |x - y|^q \right) \frac{1}{q\epsilon^{q-1}} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left(\left| \eta - \frac{h\eta}{|y - x|} \right|^q - 1 \right) \frac{|x - y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left(\left| 1 - \frac{h}{|y - x|} \right|^q - 1 \right) \frac{|x - y|^q}{q\epsilon^{q-1}} = -\left(\frac{|x - y|}{\epsilon} \right)^{q-1}.
\end{aligned}$$

Se termina observando que, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$-|\nabla u_\epsilon(x)| \leq \langle \nabla u_\epsilon(x), \eta \rangle.$$

□

Finalmente, el uso principal que daremos al conjunto de alcance será para poder deducir propiedades puntuales del lado derecho del problema.

Proposición 4.19. Sea $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada supersolución viscosa del problema

$$-\Delta_p u = f.$$

Si $\hat{x} \in \Omega_{r(\epsilon)}$ es tal que u_ϵ es diferenciable en $\hat{x}$ y $\nabla u_\epsilon(\hat{x}) = 0$, entonces

$$f(\hat{x}) \leq 0.$$

Demostración. La proposición 4.18 (b) nos dice que para todo $y \in Y_\epsilon(x)$ se tiene

$$\left(\frac{|\hat{x}-y|}{\epsilon}\right)^{q-1} \leq |\nabla u_\epsilon(\hat{x})| = 0,$$

luego $\hat{x} = y$ y $u_\epsilon(\hat{x}) = u(\hat{x})$. Definimos la función

$$\varphi(y) := u(\hat{x}) - \frac{|\hat{x}-y|^q}{q\epsilon^{q-1}}.$$

Está claro que $\varphi \in C^2(\Omega)$ y $\varphi(\hat{x}) = u(\hat{x})$. Además,

$$u(\hat{x}) = u_\epsilon(\hat{x}) \leq u(y) + \frac{|\hat{x}-y|^q}{q\epsilon^{q-1}},$$

es decir

$$\varphi(y) = u(\hat{x}) - \frac{|\hat{x}-y|^q}{q\epsilon^{q-1}} \leq u(y).$$

En definitiva, φ cumple todas las condiciones de función test para la condición de supersolución viscosa de u, con lo que

$$0 = \limsup_{y\to\hat{x}} -\Delta_p \varphi(y) \geq f(\hat{x}).$$

□

4.4. La convolución ínfima como supersolución débil

Tras haber expuesto las herramientas, estamos en posición de demostrar el Teorema 4.3, que consta de dos pasos. El primero, que expondremos en esta sección, consiste en verificar que la convolución ínfima u_ϵ es supersolución débil del problema

$$-\Delta_p u_\epsilon = f_\epsilon$$

en $\Omega_{r(\epsilon)}$ con f continua. El segundo paso, que será el razonamiento de la siguiente sección 4.5, comprobará que al tomar límites en $\epsilon \to 0$ en la formulación débil de $-\Delta_p u_\epsilon = f_\epsilon$ se obtiene la formulación débil de $-\Delta_p u = f$, concluyendo que la supersolución viscosa u de partida es supersolución débil.

4.4.1. Caso $p \geq 2$

Comenzaremos con el caso del p-Laplaciano degenerado.

Proposición 4.20. Sea $p \geq 2$. Si u es supersolución viscosa acotada del problema $-\Delta_p u = f$ entonces u_ϵ es supersolución débil de $-\Delta_p u = f_\epsilon$.

Demostración. Sea $u \in LSC(\Omega)$ una supersolución viscosa de $-\Delta_p u = f$ con f una función continua. Para este caso, tomaremos $q = 2$ al hacer la convolución ínfima. Si recopilamos todos los resultados de la sección 4.3.1, tenemos que la familia $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ es una sucesión creciente de supersoluciones viscosas semicóncavas del problema $-\Delta_p u = f_\epsilon$ cuyas segundas derivadas existen en casi todo punto.

En particular, el Corolario 4.14 nos garantiza que

$$-\Delta_p u_\epsilon = -|\nabla u_\epsilon|^{p-2}\left(\Delta u_\epsilon + (p-2)\left\langle D^2 u_\epsilon \cdot \frac{\nabla u_\epsilon}{|\nabla u_\epsilon|}, \frac{\nabla u_\epsilon}{|\nabla u_\epsilon|}\right\rangle\right) \geq f_\epsilon \tag{4.16}$$

en casi todo punto de $\Omega_{r(\epsilon)}$.

Queremos demostrar que

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi\rangle \geq \int_\Omega (-\Delta_p u_\epsilon)\varphi \tag{4.17}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\varphi \geq 0$, ya que (4.16) nos garantiza que entonces

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi\rangle \geq \int_\Omega f_\epsilon \varphi,$$

que es exactamente que u_ϵ sea supersolución débil de $-\Delta_p u_\epsilon = f_\epsilon$. Nuevamente, nos valdremos de aproximaciones para verificar (4.17). Definimos la función cóncava

$$\phi(x) := u_\epsilon(x) - C|x|^2.$$

y consideramos una molificación $\{\phi_j := N_j * \phi\}_{j\in\mathbb{N}}$, donde $\{N_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una aproximación de la identidad tal que $\phi_j \to \phi$ en $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. En particular, podemos suponer que la sucesión $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ está compuesta por funciones cóncavas y están todas en $C^2(\Omega)$. Además, el Teorema de Alexandrov (Teorema 2.24) también garantiza que (véase [7], p.242) $D^2\phi_j \to D^2\phi$ cuando $j \to \infty$.

A partir de la molificación, consideramos aproximaciones de las convoluciones ínfimas

$$u_{\epsilon,j}(x) := \phi_j(x) + \frac{1}{2\epsilon}|x|^2.$$

Observamos que para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene $u_{\epsilon,j} \in C^2(\Omega)$ con lo que podemos evaluar el p-Laplaciano de las funciones para obtener

$$\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon,j}|^{p-2}\langle \nabla u_{\epsilon,j}, \nabla \varphi\rangle = \int_\Omega (-\Delta_p u_{\epsilon,j})\varphi. \tag{4.18}$$

Por otra parte, el Lema 4.11 garantiza que las funciones u_ϵ son localmente Lipschitz continuas. En particular, para cada compacto K subconjunto de Ω, existe una constante

$C = C(K)$ tal que $|\nabla u_\epsilon| \leq C$ en K. En consecuencia, como $\int_\Omega N_j = 1$. por definición de núcleo de sumabilidad

$$\begin{aligned}\|\nabla \phi_j\|_{L^\infty(K)} &= \|\nabla(N_j * \phi)\|_{L^\infty(K)} = \|N_j * \nabla\phi\|_{L^\infty(K)} \leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty(K)} \\ &\leq \|\nabla u_\epsilon\|_{L^\infty(K)} + C\|x\|_{L^\infty(K)},\end{aligned}$$

con lo que

$$|\nabla u_{\epsilon,j}| = \left|\nabla\phi_j + \frac{1}{\epsilon}x\right| \leq \|\nabla\phi_j\|_{L^\infty(K)} + \frac{1}{\epsilon}|x| \leq \overline{C} \tag{4.19}$$

en todo K con $\overline{C}$ independiente de j. Mediante el Teorema de la convergencia dominada, se sigue

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} |\nabla u_{\epsilon,j}|^{p-2}\langle\nabla u_{\epsilon,j}, \nabla\varphi\rangle = \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\langle\nabla u_\epsilon, \nabla\varphi\rangle. \tag{4.20}$$

Pasamos ahora a analizar las segundas derivadas de $u_{\epsilon,j}$. Como las ϕ_j son funciones cóncavas tenemos que

$$D^2 u_{\epsilon,j} = D^2\phi_j + D^2\frac{1}{2\epsilon}|x|^2 \leq 0 + \frac{1}{\epsilon}I_N.$$

Utilizando una vez más (4.19) tenemos que

$$\begin{aligned}-\Delta_p u_{\epsilon,j} &= -|\nabla u_{\epsilon,j}|^{p-2}\left(\Delta u_{\epsilon,j} + (p-2)\left\langle D^2 u_{\epsilon,j}\cdot\frac{\nabla u_{\epsilon,j}}{|\nabla u_{\epsilon,j}|}, \frac{\nabla u_{\epsilon,j}}{|\nabla u_{\epsilon,j}|}\right\rangle\right) \\ &\geq -C^{p-2}\left(\frac{N}{\epsilon} + \frac{p-2}{\epsilon}\right) =: -\bar{C},\end{aligned}$$

con lo que $-\Delta_p u_{\epsilon,j}$ está acotada inferiormente de manera uniforme en j por $\overline{C}$. Podemos entonces aplicar el Lema de Fatou a las funciones no negativas $-\Delta_p u_{\epsilon,j} + \bar{C}$ para obtener

$$\liminf_{j\to\infty}\int_\Omega(-\Delta_p u_{\epsilon,j})\varphi \geq \int_\Omega \liminf_{j\to\infty}(-\Delta_p u_{\epsilon,j})\varphi. \tag{4.21}$$

Finalmente, podemos juntar (4.18), (4.20) y (4.21) para obtener

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\langle\nabla u_\epsilon, \nabla\varphi\rangle &= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon,j}|^{p-2}\langle\nabla u_{\epsilon,j}, \nabla\varphi\rangle \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega(-\Delta_p u_{\epsilon,j})\varphi \\ &\geq \int_\Omega \liminf_{j\to\infty}(-\Delta_p u_{\epsilon,j})\varphi \\ &= \int_\Omega(-\Delta_p u_\epsilon)\varphi,\end{aligned}$$

que es exactamente (4.17). □

4.4.2. Caso $1 < p < 2$

Al igual que en el caso $p \geq 2$ expuesto en la sección anterior, el primer paso para demostrar el Teorema 4.3 es comenzar probando que las convoluciones ínfimas son supersoluciones viscosas del problema regularizado. Ahora el valor de q usado será el exponente conjugado de p. Como $p \in (1, 2)$, $q \in (2, \infty)$ luego seguimos dentro del marco de la teoría de la sección 4.3.1.

Proposición 4.21. Sea $1 < p < 2$. Si u es supersolución viscosa acotada del problema $-\Delta_p u = f$ entonces u_ϵ es supersolución débil de $-\Delta_p u = f_\epsilon$.

La gran diferencia con el caso degenerado $p \geq 2$ es que $-\Delta_p u$ no está bien definido en los puntos críticos de la función. Es por ello que para obtener una desigualdad análoga a (4.17), será preciso tomar una aproximación del operador p-Laplaciano.

Demostración. Consideramos, para cada $\delta > 0$, el operador p-Laplaciano δ-regularizado denotado por $-\Delta_{p,\delta}$ que se define como

$$-\Delta_{p,\delta} u := -\mathrm{div}[(|\nabla u|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u].$$

Aún siendo $1 < p < 2$, el p-Laplaciano δ-regularizado ya no tiene puntos singulares. Es por ello que podemos replicar la demostración de la Proposición 4.20, donde solo necesitamos la semiconcavidad de u_ϵ y la regularidad de operador. Sustituyendo el p-Laplaciano habitual por su versión regularizada se obtiene una desigualdad análoga a (4.17):

$$\int_\Omega (|\nabla u_\epsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi \rangle \geq - \int_\Omega \mathrm{div}[(|\nabla u_\epsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\epsilon] \varphi, \tag{4.22}$$

para toda $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. El objetivo ahora es ver que existe el límite cuando $\delta \to 0$ de ambos lados.

El lado izquierdo es una aplicación directa del Teorema de la convergencia dominada: Está claro que

$$(|\nabla u_\epsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi \rangle \to |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi \rangle$$

en casi todo punto. En cuanto a la dominación, como $\frac{p-2}{2} < 0$, la desigualdad de Cauchy-Swartz nos permite deducir

$$(|\nabla u_\epsilon|^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi \rangle \leq (|\nabla u_\epsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi \rangle \leq |\nabla u_\epsilon|^{p-1} |\nabla \varphi|$$

y, usando que $u_\epsilon \in W^{1,p}(\Omega)$, $|\nabla u_\epsilon|^{p-1} |\nabla \varphi|$ es integrable y domina uniformemente en δ.

Para estudiar el lado derecho, consideramos $\hat{x} \in \Omega$ un punto tal que $\exists \nabla u_\epsilon(\hat{x})$ y $\exists D^2 u_\epsilon(\hat{x})$. Por la Proposición 4.18 (b), para todo $y \in Y_\epsilon(\hat{x})$ se tiene

$$|\hat{x} - y| \leq |\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^{\frac{1}{q-1}} \epsilon. \tag{4.23}$$

Por otra parte, como por la Proposición 4.18 (a) $x \to \max_{y \in Y_\epsilon(\hat{x})} |y - x|$ es USC, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe ρ_n tal si $x \in B_{\rho_n}(\hat{x})$ entonces

$$\max_{y \in Y_\epsilon(\hat{x})} |y - x| \leq |\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^{\frac{1}{q-1}} \epsilon + \frac{1}{n}. \tag{4.24}$$

Por definición de conjunto de alcance $\inf_{y \in B_{r(\epsilon)} \cap \Omega} U_y(x)$ se alcanza en algún $y \in Y_\epsilon(x)$. Para este y, (4.24) implica que

$$|y - x| \leq |\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^{\frac{1}{q-1}} \epsilon + \frac{1}{n} = r_n.$$

Por tanto el $\inf_{y \in B_{r(\epsilon)} \cap \Omega} U_y(x)$, ínfimo que define u_ϵ (véase (4.5)), se alcanza en B_{r_n} para todo $x \in B_{\rho_n}(\hat{x})$, donde

$$r_n := |\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^{\frac{1}{q-1}} \epsilon + \frac{1}{n}.$$

Con la estimación anterior vamos a ver que

$$-\mathrm{div}[(|\nabla u_\epsilon|^2+\delta)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_\epsilon] = -\left(|\nabla u_\epsilon|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(\Delta u_\epsilon + \frac{p-2}{|\nabla u_\epsilon|^2+\delta}\left\langle D^2u_\epsilon\nabla u_\epsilon, \nabla u_\epsilon\right\rangle\right)$$

está acotada inferiormente en $\mathrm{supp}(\varphi)$ de manera uniforme en δ. Para ello, analizaremos de manera explícita $D^2u_\epsilon(\hat{x})$ cuya existencia en casi todo punto está garantizada por el Teorema de Alexandrov. Realizando los cálculos necesarios (véase (4.9)) obtenemos

$$D^2U_y(x) = \frac{q-1}{\epsilon^{q-1}}|x-y|^{q-2}I_N \leq \frac{q-1}{\epsilon^{q-1}}r_n^{q-2}I_N$$

para todo $y \in B_{r_n}(x)$, es decir, la función

$$U_y(x) - \frac{q-1}{\epsilon^{q-1}}r_n^{q-2}|x|^2$$

es cóncava. Tomando $\inf_{y\in B_{r_n}(x)}$ se sigue que

$$u_\epsilon(x) - \frac{q-1}{\epsilon^{q-1}}r_n^{q-2}|x|^2$$

es cóncava con lo que

$$D^2u_\epsilon(x) \leq \frac{q-1}{\epsilon^{q-1}}r_n^{q-2}I_N.$$

Asimismo, $r_n \to |\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^{\frac{1}{q-1}}\epsilon$ cuando $n\to\infty$ y, por tanto,

$$D^2u_\epsilon(\hat{x}) \leq \frac{q-1}{\epsilon}|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^{\frac{q-2}{q-1}}I_N. \tag{4.25}$$

Recapitulando, en el subconjunto denso de $\mathrm{supp}(\varphi)$ de puntos donde existen las primeras y segundas derivadas de u_ϵ tenemos (4.25). Si $\nabla u_\epsilon(\hat{x}) = 0$ entonces $D^2u_\epsilon(\hat{x}) \leq 0$ y

$$-\mathrm{div}[(|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^2+\delta)^{\frac{p-2}{2}}\nabla u_\epsilon(\hat{x})] \geq 0.$$

Si por el contrario $\nabla u_\epsilon(\hat{x}) \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
-\Delta_{p,\delta}u &= -\left(|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(\Delta u_\epsilon(\hat{x}) + \frac{p-2}{|\nabla u_\epsilon|^2+\delta}\left\langle D^2u_\epsilon(\hat{x})\nabla u_\epsilon(\hat{x}), \nabla u_\epsilon(\hat{x})\right\rangle\right)\\
&\geq -\left(|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^2+\delta\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(N + \frac{p-2}{|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^2+\delta}|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^2\right)\frac{q-1}{\epsilon}|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^{\frac{q-2}{q-1}}\\
&\geq -\left(|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}(N+p-2)\frac{q-1}{\epsilon}|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^{\frac{q-2}{q-1}}\\
&= -(N+p-2)\frac{q-1}{\epsilon}|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|^{\frac{(q-2)}{q-1}+p-2}\\
&\geq -C(n,p,\mathrm{supp}\varphi)
\end{aligned}$$

donde la acotación de $|\nabla u_\epsilon(\hat{x})|$ depende de $\mathrm{supp}(\varphi)$ por ser u_ϵ localmente Lipschitz continua. Hemos usado también que

$$\frac{(q-2)}{q-1} + p - 2 = \frac{q(p-1)-p}{q-1} > \frac{p-p}{q-1} = 0.$$

En definitiva, hemos comprobado que existe una constante C tal que $-\Delta_{p,\delta}u + C \geq 0$ lo que permite aplicar el Lema de Fatou a la sucesión $\{-\Delta_{p,\delta}u_\epsilon\}_{\delta>0}$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\liminf_{\delta\to 0}\int_\Omega(-\Delta_{p,\delta}u_\epsilon)\varphi &= \liminf_{\delta\to 0}\int_{\nabla u_\epsilon\neq 0}(-\Delta_{p,\delta}u_\epsilon)\varphi + \liminf_{\delta\to 0}\int_{\nabla u_\epsilon=0}(-\Delta_{p,\delta}u_\epsilon)\varphi\\
&\geq \liminf_{\delta\to 0}\int_{\nabla u_\epsilon\neq 0}(-\Delta_{p,\delta}u_\epsilon)\varphi\\
&\geq \int_{\nabla u_\epsilon\neq 0}\liminf_{\delta\to 0}(-\Delta_{p,\delta}u_\epsilon)\varphi\\
&= \int_{\nabla u_\epsilon\neq 0}(-\Delta_p u_\epsilon)\varphi\\
&\geq \int_{\nabla u_\epsilon\neq 0} f_\epsilon\varphi.
\end{aligned}\tag{4.26}$$

Como la Proposición 4.19 nos dice que para los puntos tales que $\nabla u_\epsilon(x) = 0$ se tiene $0 \geq f(x)$, si incorporamos este hecho a (4.26) concluimos que

$$\liminf_{\delta\to 0}\int_\Omega(-\Delta_{p,\delta}u_\epsilon)\varphi \geq \int_{\nabla u_\epsilon\neq 0} f_\epsilon\varphi \geq \int_\Omega f_\epsilon\varphi.\tag{4.27}$$

En definitiva, podemos tomar $\liminf_{\delta\to 0}$ en (4.22) y por (4.27) obtenemos

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\langle\nabla u_\epsilon, \nabla\varphi\rangle \geq \int_\Omega f_\epsilon\varphi.$$

□

4.5. El límite de la convolución ínfima

En la sección anterior hemos concluido que para todos los $p \in (1,\infty)$ y todos los lados derechos, ya sea homogéneo o no homogéneo, la convolución ínfima u_ϵ es solución débil del problema regularizado, es decir

$$\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\langle\nabla u_\epsilon, \nabla\varphi\rangle \geq \int_\Omega f_\epsilon\varphi\tag{4.28}$$

para toda $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. El paso final de la demostración del Teorema 4.3 es comprobar que podemos tomar $\epsilon \to 0$ y obtener

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle\nabla u, \nabla\varphi\rangle \geq \int_\Omega f\varphi,$$

que es exactamente que u sea supersolución débil de $-\Delta_p u = f$.

4.5.1. Caso homogéneo

Comenzamos exponiendo el caso homogéneo, para el que usaremos la estimación de tipo Caccioppoli dada por el Lema 2.19.

Proposición 4.22. Sean u una función acotada y u_ϵ su convolución ínfima. Supongamos que u_ϵ es supersolución débil de $-\Delta_p u_\epsilon = 0$. Entonces u es supersolución débil de $-\Delta_p u = 0$.

Demostración. Sean $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $K = \operatorname{supp}(\varphi)$ y $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ y $\xi|_K \equiv 1$. Por el Lema 2.19, existe una constante $C = C(n, p, \varphi)$ tal que

$$\int_K (|\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon)^{\frac{p}{p-1}} = C\int_K |\nabla u_\epsilon|^p \leq C\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^p \xi^p \leq Cp^p \int_\Omega |u_\epsilon|^p |\nabla \xi|^p. \tag{4.29}$$

Como u_ϵ es una sucesión creciente de funciones que tiende a u, para todo $\epsilon < 1$ se tiene

$$\inf_K u_1 \leq \inf_K u_\epsilon \leq u_\epsilon \leq \sup_K u_\epsilon \leq \sup_K u$$

con lo que $|u_\epsilon|$ está uniformemente acotada en ϵ. Podemos encontrar así, para cada compacto $K \subset \Omega$, una acotación uniforme de la integral $\int_K (|\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon)^{\frac{p}{p-1}}$, lo que implica que la sucesión $\{|\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ está acotada en $L_{\text{loc}}^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Se sigue que $|\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon$ converge en la topología débil de $L_{\text{loc}}^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Faltaría ver el límite.

Para ello definimos

$$\eta := (u - u_\epsilon)\theta$$

con $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$, $\theta \geq 0$. Observamos que $\eta \in W^{1,p}(\Omega)$, luego es válida como función test para la formulación débil. Por tanto,

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\langle \nabla u_\epsilon, \nabla \eta\rangle, \tag{4.30}$$

que es equivalente a

$$\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon, \nabla \eta\rangle \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla(u - u_\epsilon)\rangle\theta \tag{4.31}$$

Sabemos que $\{|\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ converge en la topología débil de $L_{\text{loc}}^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ luego ∇u_ϵ converge en la topología débil $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$. Como además $u_\epsilon \to u$ puntualmente por el Lema 4.10 (b), $u_\epsilon \rightharpoonup u$ en $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$. En particular la integral de la derecha de (4.31) tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0$. La parte izquierda se reescribe

$$\begin{aligned}\int_\Omega \theta\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon, \nabla(u - u_\epsilon)\rangle \\ + \int_\Omega (u - u_\epsilon)\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon, \nabla\theta\rangle.\end{aligned} \tag{4.32}$$

La segunda integral de (4.32) admite la estimación

(4.33)
$$\begin{aligned}&\int_\Omega (u - u_\epsilon)\langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon, \nabla\theta\rangle \\ &\quad\leq \|\nabla\theta\|_{L^\infty(K)}\|u - u_\epsilon\|_{L^p(K)}\||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(K)} \\ &\quad\leq \|\nabla\theta\|_{L^\infty(K)}\|u - u_\epsilon\|_{L^p(K)}\left(\||\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(K)} + \||\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(K)}\right),\end{aligned}$$

donde $\bar{K} = \operatorname{supp}(\theta)$, que tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0$ ya que

$$\||\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(K)} = \|\nabla u_\epsilon\|_{L^p(K)}$$

se puede acotar uniformemente de manera análoga a (4.29). En definitiva, utilizando (4.31), (4.32) y las desigualdades puntuales dadas por el Lema 2.20 concluimos

$$0 \leq \limsup_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} \theta \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon, \nabla(u - u_\epsilon) \rangle = 0, \tag{4.34}$$

válido para toda θ. Utilizando [[11], Lema 3.73] se sigue

$$|\nabla u_\epsilon|^{p-2} \nabla u_\epsilon \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \nabla u$$

en $L^{\frac{p}{p-1}}_{\text{loc}}(\Omega)$ débil. En particular, como $\nabla \varphi \in L^{\frac{p}{p-1}}_{\text{loc}}(\Omega)^* = L^p_{\text{loc}}(\Omega)$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle,$$

e, introduciendo en (4.28),

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi \rangle \to \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle$$

cuando $\epsilon \to 0$, que es exactamente que u sea supersolución débil de $-\Delta_p u = 0$. □

4.5.2. Caso no homogéneo

Una vez demostrado el caso homogéneo, en esta última sección vamos a ver cómo podemos extender la prueba al caso no homogéneo.

Proposición 4.23. Sean u una función acotada y u_ϵ su convolución ínfima. Supongamos que u_ϵ es supersolución débil de $-\Delta_p u_\epsilon = f_\epsilon$. Entonces u es supersolución débil del problema $-\Delta_p u = f$.

Como ya hemos adelantado podemos obtener de manera análoga la desigualdad (4.17). Juntando con la Proposición 4.15 obtenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi \rangle \geq \int_{\Omega} (-\Delta_p u_\epsilon) \varphi \geq \int_{\Omega} f_\epsilon \varphi. \tag{4.35}$$

Para concluir que u es supersolución débil de $-\Delta_p u = f$ tenemos que ver

$$(a) \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^{p-2} \langle \nabla u_\epsilon, \nabla \varphi \rangle \to \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle,$$

$$(b) \int_{\Omega} f_\epsilon \varphi \to \int_{\Omega} f \varphi,$$

en ambos casos cuando $\epsilon \to 0$.

Para ver el apartado (a) bastaría con conocer unas estimaciones de Caccioppoli válidas para el problema no homogéneo.

Lema 4.24. (Estimaciones de Caccioppoli no homogneneas) Sean $u \in W^{1,p}(\Omega)$ una supersolución débil de $-\Delta_p u = f$ con f continua y $\phi = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$. Entonces para toda $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ existe $C = C(p, \Omega, \phi)$ tal que

$$\int_{\Omega} \xi^p |\nabla u|^p \leq C \left[(\text{osc}_K u)^p \left(\int_{\Omega} |\nabla \xi|^p \right) + \text{osc}_K u \right].$$

donde $K := \text{supp}(\xi)$ y $osc_K u := \sup_K u - \text{ínf}_K u$ es la oscilación en K de u.

Demostración. Consideramos $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ la función dada por

$$\psi(x) := (\sup_K u(x) - u(x))\xi^p(x).$$

Utilizando ψ como función test en la formulación débil del problema $-\Delta_p u = f$ obtenemos

$$\int_\Omega f\psi \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla \psi\rangle = -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\left\langle \nabla u, \xi^p \nabla u - p\xi^{p-1}\nabla \xi \left(\sup_K u - u\right)\right\rangle.$$

Reordenando los términos

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \xi^p \leq \int_\Omega p\xi^{p-1}|\nabla u|^{p-2}\left\langle \nabla u, \nabla \xi \left(\sup_K u - u\right)\right\rangle - \int_\Omega f\psi. \tag{4.36}$$

Por claridad, definimos $I_1 := \int_\Omega p\xi^{p-1}|\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla\xi(\sup_K u - u)\rangle$ e $I_2 := -\int_\Omega f\psi$. Podemos acotar I_2 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_2 = -\int_\Omega f\psi &\leq \|\phi\|_{L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)}\int_K \psi = \|\phi\|_{L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)}\int_K (\sup_K u - u)\xi^p \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)}\int_K (\sup_K u - \inf_K u)\xi^p \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)}|\Omega|\text{osc}_K u. \end{aligned}$$

Por otra parte, la desigualdad de Young generalizada con exponentes $\left\{\frac{p}{p-1}, p\right\}$ nos dice que para todos $a, b \geq 0$ y todo $\delta > 0$

$$ab \leq \delta a^{\frac{p}{p-1}} + \delta^{1-p}b^p.$$

Aplicándola a I_1, se sigue

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega p\xi^{p-1}|\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla\xi(sup_K u - u)\rangle \leq \int_\Omega [\xi^{p-1}|\nabla u|^{p-1}][p|\nabla\xi|(sup_K u - u)] \\ &\leq \int_\Omega \delta\xi^p|\nabla u|^p + p^p\int_\Omega \delta^{1-p}|\nabla\xi|^p(\text{osc}_K u)^p. \end{aligned}$$

En definitiva, incorporando las acotaciones de I_1 e I_2 en (4.36) y tomando $\delta < 1$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^p &\leq \frac{1}{1-\delta}\left(p^p\int_\Omega \delta^{1-p}|\nabla\xi|^p(\text{osc}_K u)^p + \|\phi\|_{L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)}|\Omega|\text{osc}_K u\right) \\ &\leq C(p,\phi,\Omega)\left[(\text{osc}_K u)^p\left(\int_\Omega |\nabla\xi|^p\right) + \text{osc}_K u\right]. \end{aligned}$$

□

Con este lema se puede rehacer la prueba de la Proposición 4.22 para el caso no homogéneo. La formulación débil (4.30) se convierte en

$$\int_\Omega f_\epsilon \eta \leq \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\langle \nabla u_\epsilon, \nabla \eta\rangle,$$

que se reescribe

$$\int_\Omega \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon, \nabla\eta\rangle \leq -\int_\Omega f_\epsilon\eta + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla \eta\rangle.$$

Mediante la acotación $|f_\epsilon| \leq |f| \leq \phi$ se obtiene

$$\limsup_{\epsilon\to 0} -\int_\Omega f_\epsilon \eta \leq \|\phi\|_\infty \limsup_{\epsilon\to 0} \int_\Omega \eta = \|\phi\|_\infty \limsup_{\epsilon\to 0} \int_\Omega (u-u_\epsilon)\theta = 0$$

que permite deducir

$$0 \leq \limsup_{\epsilon\to 0} \int_\Omega \theta \langle |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_\epsilon|^{p-2}\nabla u_\epsilon, \nabla(u-u_\epsilon)\rangle = 0.$$

Desde aquí, la prueba termina igual repitiendo los pasos tras (4.34).

El apartado (b) es simplemente una aplicación del Teorema de la convergencia monótona: Como $f_\epsilon(x) = \inf_{y\in B_{r(\epsilon)}(x)} f(y)$ es sucesión creciente de funciones que tiende en casi todo punto a $f(x)$ cuando $\epsilon \to 0$, $f_\epsilon\varphi$ crece hacía $f\varphi$ en casi todo punto luego

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_\Omega f_\epsilon\varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Bibliografía

[1] Bardi, M., & Dolcetta, I. C. (1997). *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations* (Vol. 12). Boston: Birkhäuser.

[2] Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* (Vol. 2, No. 3, p. 5). New York: Springer.

[3] Crandall, M. G., Ishii, H., & Lions, P. L. (1992). *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* Bulletin of the American mathematical society, 27(1), pp. 1-67.

[4] Di Benedetto, E. (1993) *Degenerate Parabolic Equations.* Springer-Verlag, New York, 1993

[5] Di Benedetto, E. (1983). *$C^{1,\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations.* Nonlinear Analysis 7 , pp. 827-850.

[6] Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations* (Vol. 19). American mathematical society.

[7] Evans, L.C. & Gariepy, R.F. (1992). *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton, FL: CRC Press.

[8] Giusti, E. (2003). *Direct methods in the calculus of variations.* World Scientific.

[9] Gilbarg, D., & Trudinger, N. S. (1977). *Elliptic partial differential equations of second order* (Vol. 224, No. 2). Berlin: Springer.

[10] Julin, V., & Juutinen, P. (2012). *A new proof for the equivalence of weak and viscosity solutions for the p-Laplace equation.* Communications in Partial Differential Equations, 37(5), pp. 934-946.

[11] Heinonen, J., Kilpelainen, T., & Martion, O. (2006) *Non-Linear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations* Dover Publications, Mineola.

[12] Juutinen, P., Lindqvist, P., & Manfredi, J. J. (2001). *On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation.* SIAM journal on mathematical analysis, 33(3), pp. 699-717.

[13] Lewis, J. L. (1983). *Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations.* Indiana University Mathematics Journal, 32(6), pp. 849-858.

[14] Lindqvist, P. (1983). *On the comparison principle in the calculus of variations.* Arkiv för matematik, 21(1), 185-190.

[15] Lindqvist, P. (1986). *On the definition and properties of p-superharmonic functions.*

[16] Lindqvist, P. (2006). *Notes on the p-Laplace equation.*

[17] Medina, M., & Ochoa, P. (2019). *On viscosity and weak solutions for non-homogeneous p-Laplace equations.* Advances in Nonlinear Analysis, 8(1), pp. 468-481.

[18] Pucci, P., & Serrin, J. (2007) *The Maximum Principle.* Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 73, Birkhäuser, Boston.

[19] Tegby, O. (2019). *The Laplacian in its different guises.*