

Variedades riemannianas sin puntos conjugados

Javier Casado Álvarez

Máster en Matemáticas y Aplicaciones



MÁSTERES
DE LA UAM
2020–2021

Facultad de Ciencias

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Variedades riemannianas sin puntos conjugados

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
Máster en Matemáticas y Aplicaciones

Autor:

Javier Casado Álvarez

(Beneficiario de una ayuda Severo
Ochoa-ICMAT para estudiantes de
máster 2020-2021)

Director:

Luis Guijarro Santamaría

Curso 2020-2021

Resumen

Este trabajo pretende exponer algunos resultados sobre las variedades sin puntos conjugados. El interés principal de este tipo de variedades es que sus geodésicas son mínimos locales de la longitud entre las curvas con los mismos extremos. En su recubridor universal esto se traduce en una propiedad “muy euclídea”: Por cada dos puntos pasa una única geodésica.

La parte introductoria del trabajo está formada por dos capítulos. Primero haremos un estudio del flujo geodésico, que entre otras cosas ayudará a dar una interpretación geométrica de los campos de Jacobi (y por tanto de los puntos conjugados) o a generalizar la ecuación de Jacobi. Después comentaremos resultados clásicos de la geometría riemanniana que aporten información sobre los puntos conjugados. Por ejemplo, los teoremas de Hadamard, Rauch y Morse.

En la segunda parte del trabajo la atención se centrará en las variedades sin puntos conjugados. Presentaremos las funciones de Busemann, que serán de gran utilidad para la prueba de los resultados que siguen. Seguidamente se probarán dos teoremas que encuentran propiedades del grupo fundamental de una variedad sin puntos conjugados.

Finalmente, se discutirá la conjetura de E. Hopf, que afirma que todo toro sin puntos conjugados es en realidad plano. El propio Hopf dió una demostración para el caso de dimensión 2, pero no fue hasta 50 años después que Burago e Ivanov encontraron una prueba para dimensión arbitraria. En este trabajo se incluyen esas dos demostraciones.

Abstract

This project pretends to be an approach to the study of manifolds without conjugate points. Geodesic segments in this kind of manifolds are local minimums of length, considering fixed endpoints. If the manifold is simply connected, we can say even more: For every two points, there is only one geodesic segment joining them.

We have two introductory chapters. First we will study the geodesic flow of a manifold. This will give us a geometric interpretation of Jacobi fields (therefore an interpretation of conjugate points). We will also give a generalization of Jacobi's equation. In the second chapter we will prove classic theorems which concern conjugate points, such as Morse's index theorem.

Then we should be ready to discuss manifolds without conjugate points. We will define Busemann functions, and we will use them to prove two theorems about the fundamental group of a manifold without conjugate points.

Finally, we will talk about E. Hopf's conjecture. Hopf proved that a two dimensional torus without conjugate points is flat. But we had to wait almost 50 years until Burago and Ivanov gave a proof for arbitrary dimensions. Here we include both proofs.

Índice general

Introducción	1
1 Flujos geodésicos	3
1.1 El flujo geodésico	3
1.1.1 El espacio tangente al tangente	4
1.1.2 Estructura simpléctica y de contacto en el fibrado tangente	5
1.1.3 Una interpretación de los campos de Jacobi	9
1.2 La ecuación transversal de Jacobi	10
2 Variedades completas y teoremas globales	15
2.1 Variedades completas	16
2.2 Variaciones de la energía	20
2.3 El teorema de comparación de Rauch	25
2.4 El teorema del índice de Morse	30
2.5 Grupos fundamentales en curvatura negativa.	34
2.6 El conjunto de corte	39
3 Variedades sin puntos conjugados	43
3.1 Funciones de Busemann	44
3.2 El grupo fundamental de una variedad sin puntos conjugados (Ivanov-Kapovich)	46
3.3 El grupo fundamental de una variedad sin puntos conjugados (Croke-Schroeder)	56
4 La conjetura de E. Hopf	61
4.1 El toro bidimensional sin puntos conjugados es plano	61
4.2 Preliminares	65
4.2.1 Norma estable, desigualdad de Burago.	65
4.2.2 Dirección en el infinito	69
4.2.3 Foliaciones racionales	70
4.2.4 Recordando las funciones de Busemann	71
4.3 Geometría integral	73
4.4 La dirección es continua sobre vectores racionales	75
4.5 Redondez de una norma	79
4.6 Demostración de la conjetura de Hopf	83
A Fundamentos de la geometría riemanniana	85
A.1 Métricas riemannianas	85
A.2 Conexiones	86

A.3	Geodésicas y la aplicación exponencial	89
A.3.1	Propiedades minimizantes de las geodésicas	91
A.4	Curvatura	94
A.5	Campos de Jacobi	98
A.6	Inmersiones isométricas	102
B	Otros teoremas globales	107
B.1	Espacios con curvatura constante	107
B.2	El teorema de Moore	111
	Bibliografía	114

Introducción

Una variedad se dice sin puntos conjugados cuando cualquier geodésica es *un mínimo local* de la distancia entre curvas que conectan sus extremos. Estas variedades se caracterizan porque la aplicación exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ es un difeomorfismo local, y de hecho, una aplicación recubridora. Eso implicará, entre otras cosas, que por cada dos puntos fijos en el recubridor universal de M pasará una única geodésica, y así estas curvas minimizarán la distancia globalmente.

Las variedades sin puntos conjugados son un campo de gran interés dentro de la geometría riemanniana. Esto ha sido así desde la demostración de Eberhard Hopf [15] de que toda métrica en el toro bidimensional sin puntos conjugados tiene que ser plana, es decir, será localmente isométrica al plano. Esto también se puede reformular diciendo que cualquier métrica $\mathbb{Z}^2$ -periódica en el plano tal que haya una única geodésica entre dos puntos será plana.

La demostración de E. Hopf era puramente bidimensional, y dejó abierta la conjetura de si los toros de dimensión $n > 2$ sin puntos conjugados son planos durante casi 50 años, hasta que Burago e Ivanov [1] dieron una prueba con unas técnicas totalmente diferentes.

Otro tema candente en este campo consiste en encontrar una variedad sin puntos conjugados que esté obligada a tener curvatura positiva en algún punto. Es fácil ver que las variedades con curvatura seccional no positiva serán ejemplos de variedades sin puntos conjugados, pero sobre el recíproco no se conoce nada. ¿Admite toda variedad sin puntos conjugados una métrica con curvatura $K \leq 0$?

Aunque la opinión general acerca de esa pregunta sea negativa, estas variedades tienen muchas cosas en común. Por ejemplo, como el recubridor universal de ambas es $\mathbb{R}^n$, sus grupos de homotopía $\pi_k(M)$ con orden $k \geq 2$ se anularán, encerrando casi toda su información topológica en el grupo fundamental. En términos de topólogo, ambos serán espacios de Eilenberg-MacLane $K(\pi_1(M), 1)$.

En el primer capítulo vemos que el estudio de las geodésicas funciona especialmente bien en el fibrado tangente de la variedad. Los dos puntos clave son la prueba de la invariancia mediante el flujo geodésico de la medida de Liouville y una reinterpretación los campos de Jacobi como el *push-forward* de vectores tangentes al fibrado tangente por el flujo geodésico. Además se incluye una generalización reciente de la ecuación de Jacobi debida a Wilking.

En el segundo capítulo pasamos a estudiar los llamados teoremas globales, resultados clásicos en geometría riemanniana que en cierta manera unifican información local para obtener una conclusión sobre la totalidad de la variedad. Por ejemplo, si la curvatura está acotada inferiormente por un número positivo (información local), la variedad será compacta (información global). Todos tendrán una relación fuerte con los puntos conjugados, además de contribuir a darnos una idea general de la geometría riemanniana.

En el tercer capítulo nos centraremos por fin en las variedades sin puntos conjugados. Ahí probaremos varios resultados acerca del grupo fundamental de estas variedades, que ya se conocían anteriormente para variedades con curvatura $K \leq 0$. Uno de ellos debido a Croke y Schroeder [4], y el otro a Ivanov y Kapovitch [16].

El primer resultado descifrará la forma de cualquier centralizador $Z(\gamma) < \pi_1(M)$, para $\gamma \in \pi_1(M)$. Y es que existirá un subgrupo $G < Z(\gamma)$ de índice finito isomorfo a un producto directo $\mathbb{Z} \times G'$, donde el factor $\mathbb{Z}$ corresponde a $\langle \gamma \rangle$.

El segundo resultado probará que todo subgrupo abeliano es un *subgrupo plano*. Esta es una propiedad que hará que ese subgrupo se parezca a los subgrupos de isometrías del espacio euclídeo.

En el cuarto capítulo abordaremos el otro punto clave de este trabajo, las demostraciones de E. Hopf y Burago-Ivanov sobre que los toros sin puntos conjugados son planos.

La idea general de la demostración de Burago e Ivanov es la siguiente: Primero se utiliza un resultado previo [2] para encontrar una comparación a gran escala entre la métrica en $\mathbb{R}^n$ inducida por el toro sin puntos conjugados y un espacio normado. Después, por medio de geometría integral se puede comprobar que esa norma es en realidad euclídea. Y gracias a ello encontraremos unas coordenadas en las que la métrica tendrá la misma expresión en todo punto, y por tanto será plana.

Para la lectura de este trabajo se presupondrán conocimientos básicos de variedades diferenciables y geometría riemanniana. Esto esencialmente incluye las definiciones de métrica, curvatura, campos de Jacobi y puntos conjugados. Por si fuera necesaria, se incluye una exposición de esos temas en el primer apéndice.

CAPÍTULO 1

Flujos geodésicos

Por medio del flujo geodésico $\Phi_t : TM \rightarrow TM$ de una variedad riemanniana M podemos entender en conjunto todas las geodésicas y campos de Jacobi. Para ello, siguiendo a Paternain [21], hablaremos de qué estructuras podemos encontrar en TM , un espacio fundamental para el estudio de ese flujo. Luego utilizaremos la maquinaria establecida para probar un resultado que nos dará un sentido geométrico a los campos de Jacobi (y por tanto a los puntos conjugados). También probaremos la invariancia de la medida de Liouville por el flujo geodésico.

Después, como una muestra del poder de esta formulación, comentaremos una generalización a la ecuación de Jacobi atribuida a Wilking, tomando como referencia a Gromoll y Walschap [9]. De camino pasaremos por la ecuación de Ricatti, una forma de transformar la ecuación de Jacobi en otra de primer orden.

1.1. El flujo geodésico

Sea una variedad riemanniana M , sea $(p, v) \in TM$ y sea $\gamma_{(p,v)}(t)$ la única geodésica con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \gamma_{(p,v)}(0) &= p; \\ \gamma'_{(p,v)}(0) &= v. \end{cases}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$ se puede definir un difeomorfismo del fibrado tangente $\Phi_t : TM \rightarrow TM$ tomando cada (p, v) y avanzándolo un tiempo t a lo largo de la geodésica que define. Es decir,

$$\Phi_t(p, v) := \left(\gamma_{(p,v)}(t), \gamma'_{(p,v)}(t) \right).$$

Esta familia de difeomorfismos es, de hecho, un **flujo**, pues $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$. Esto se puede deducir por ejemplo de la unicidad de una geodésica respecto a sus condiciones iniciales. Conviene observar que se restringe adecuadamente a $T_1M = \{(p, v) \in TM : |v| = 1\}$, el fibrado tangente unitario de M . Esto es porque las geodésicas tienen velocidad constante en módulo. Llamaremos, tanto a Φ_t como a su restricción, el **flujo geodésico de M** .

1.1.1. El espacio tangente al tangente

Nuestro primer objetivo será una brevísima introducción a las geometrías simpléctica y de contacto. Después construiremos una división canónica de $T_\theta TM$ en suma directa con la que le daremos una estructura de variedad riemanniana y simpléctica a TM , y de variedad de contacto al fibrado tangente unitario T_1M .

Además, toda esa estructura se preservará por el flujo geodésico.

Definición 1.1. Una 2-forma es **simpléctica** si es cerrada y no degenerada. Que sea cerrada significa que $d\omega = 0$. Y será no degenerada si cuando para todo $y \in T_pM$ se cumple $\omega_p(x, y) = 0$, obligatoriamente $x = 0$.

Una **variedad simpléctica** es un par (M, ω) formado por una variedad M y una forma simpléctica ω definida en ella.

Obsérvese que la existencia de una 2-forma no degenerada implicaría dimensión n par, ya que mirando la matriz A asociada a la forma ω_p tendremos que $\det A = \det -A = (-1)^n \det A$, al ser antisimétrica. Claramente, ser no degenerada equivale a $\det A \neq 0$. Y estas dos cosas son compatibles únicamente para n par.

Definición 1.2. Sea (M, ω) una variedad simpléctica, y una función $H : M \rightarrow \mathbb{R}$. Habrá un campo vectorial X_H definido por $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$. O, en terminos del producto interior, $i_{X_H}\omega = dH$. Este será el **campo vectorial hamiltoniano** asociado a H . Su flujo será el **flujo hamiltoniano de H** .

Lema 1.3. $L_{X_H}\omega = 0$, siendo $L_{X_H}\omega$ la derivada de Lie de ω respecto al campo X_H .

Demostración. Por la fórmula de Cartan, $L_{X_H}\omega = d(i_{X_H}\omega) + i_{X_H}d\omega = 0$. $\square$

De aquí se deduce que $\varphi_t^*\omega = \omega$, siendo φ_t un flujo hamiltoniano.

Definición 1.4. Sea M una $(2n-1)$ -variedad orientable. Una 1-forma α es una **forma de contacto** si la $(2n-1)$ -forma $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ nunca se anula. El par (M, α) es una **variedad de contacto**. Y un **flujo de contacto** será aquel que preserve α .

Es fácil ver que existirá un único campo vectorial X con $i_X\alpha = 1$ y $i_X(d\alpha) = 0$. Esto es porque X debe apuntar en la única dirección nula de $(d\alpha)$ por la segunda condición, y la primera condición lo normaliza. Llamaremos a X el **campo vectorial característico**. Obsérvese que $L_X\alpha = 0$, por la fórmula de Cartan.

Habiendo terminado con las definiciones podemos pasar a hablar del fibrado tangente $\pi : TM \rightarrow M$. Una manera natural de entenderlo es como pares de puntos y velocidades. Nuestro primer objetivo será partir su espacio tangente $T_{(p,v)}TM$ como suma directa de dos espacios. Uno de ellos representará el movimiento en los puntos, y otro, el movimiento en las velocidades. Por supuesto, para tener una manera bien definida de “mantener las velocidades fijas” necesitaremos una **conexión**.

Primero definamos un subfibrado de TTM cuya fibra en $\theta = (p, v) \in TM$ viene de las curvas $\sigma(t) = (p, v + tw)$, para $w \in T_pM$. En otras palabras, definimos $V(\theta)$ como $\ker(d\pi)_\theta$. Este subespacio es llamado el **subespacio/subfibrado vertical**.

Para definir su complemento, el **subespacio/subfibrado horizontal**, utilizaremos la conexión definida por la métrica. Primero definiremos una aplicación $K : TTM \rightarrow TM$ como sigue. Dado $\xi \in T_\theta TM$ y $z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ una curva adaptada a ξ (o sea, con $z(0) = \theta, z'(0) = \xi$). Podemos entender esta curva como una curva $\alpha = \pi \circ z$ y un campo vectorial Z sobre ella. Así, definimos

$$K_\theta(\xi) := (\nabla_{\alpha'(0)} Z)(0).$$

Es fácil ver que K_θ está bien definida y además es lineal. El **subfibrado horizontal** se define por $H(\theta) = \ker K_\theta$. Hay otra manera de construirlo, y es por medio del **levantamiento horizontal**. Esto es una aplicación

$$L_\theta : T_p M \rightarrow T_\theta TM$$

definida como sigue. Dado un $v' \in T_p M$ tomamos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una curva adaptada a v' . Sea $Z(t)$ el transporte paralelo de v por α . Así, podemos definir una nueva curva $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ por $\sigma(t) = (\alpha(t), Z(t))$. Y finalmente, definimos el levantamiento por

$$L_\theta(v') := \sigma'(0) \in T_\theta TM.$$

Observación. $K_\theta \circ L_\theta \equiv 0$, pues $K_\theta(L_\theta(v')) = K_\theta(\sigma'(0)) = \nabla_{\alpha'(0)} Z(0) = 0$, al definirse Z como un transporte paralelo.

La aplicación L_θ está bien definida y es lineal. De hecho, $\ker(K_\theta) = \text{im}(L_\theta)$ y $(d\pi)_\theta \circ L_\theta = \text{id}_{T_p M}$. Es más, $(d\pi)_\theta : H(\theta) \rightarrow T_p M$ y $K_\theta : V(\theta) \rightarrow T_p M$ son isomorfismos lineales.

De esto se deduce que efectivamente tenemos la descomposición en suma directa $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta)$. Llamemos $j_\theta : T_\theta TM \rightarrow T_p M \times T_p M$ al isomorfismo

$$j_\theta(\xi) = ((d\pi)_\theta(\xi), K_\theta(\xi)) = (\xi_h, \xi_v).$$

Definición 1.5. Gracias a ese isomorfismo podemos dotar a TM de una métrica de forma que $H(\theta)$ y $V(\theta)$ sean ortogonales. Esa métrica es **la métrica de Sasaki**, definida por

$$\langle \langle \xi, \eta \rangle \rangle_\theta = \langle (d\pi)_\theta \xi, (d\pi)_\theta \eta \rangle_{\pi(\theta)} + \langle K_\theta(\xi), K_\theta(\eta) \rangle_{\pi(\theta)}.$$

El campo vectorial geodésico (es decir, $\frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_t(\theta)$ para Φ_t el flujo geodésico) se puede escribir en estos términos, pues $\Phi_t(\theta) = (\gamma_\theta(t), \gamma'_\theta(t))$ nos da una curva γ_θ adaptada a θ , y γ'_θ un transporte paralelo por definición de geodésica. Así,

$$G(\theta) = L_\theta(v) \quad (\text{O bien } G(\theta) = (v, 0) \text{ usando la identificación } j_\theta)$$

1.1.2. Estructura simpléctica y de contacto en el fibrado tangente

Podemos utilizar j_θ para definir una estructura casi compleja en TM , es decir, una aplicación $J_\theta : T_\theta TM \rightarrow T_\theta TM$ con $J_\theta^2 = -\text{id}$. Esta se define por

$$(\xi_h, \xi_v) \mapsto (-\xi_v, \xi_h).$$

Gracias a J_θ y la métrica de Sasaki podremos definir una forma simpléctica:

$$\Omega_\theta(\xi, \eta) := \langle \langle J_\theta \xi, \eta \rangle \rangle_\theta = \langle (d\pi)_\theta \xi, K_\theta(\eta) \rangle - \langle K_\theta(\xi), (d\pi)_\theta(\eta) \rangle.$$

Es fácil ver que es antisimétrica y no degenerada (fijado ξ elijo $\eta = (-\xi_v, \xi_h)$, y así $\Omega(\xi, \eta) = |\xi|^2$). Nos quedaría por ver que $d\Omega = 0$. Esto nos llevará un poquito más de trabajo, pero todo llegará.

Proposición 1.6. *El campo geodésico será el campo hamiltoniano de la **energía** $H(p, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_p$ respecto de Ω . Es decir,*

$$dH_\theta(\xi) = \Omega_\theta(G(\theta), \xi)$$

Demostración. Tomemos $z(t) = (\alpha(t), Z(t))$ una curva adaptada a ξ . Así,

$$\begin{aligned} (dH)_\theta(\xi) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(z(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\frac{1}{2} \langle Z(t), Z(t) \rangle_{\alpha(t)} \right) \\ &= \langle \nabla_{\alpha'(0)} Z, Z \rangle(0) = \langle K_\theta(\xi), v \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\Omega_\theta(G(\theta), \xi) = \langle (d\pi)_\theta(G(\theta)), K_\theta(\xi) \rangle - \langle K_\theta(G(\theta)), (d\pi)_\theta \xi \rangle = \langle v, K_\theta(\xi) \rangle.$$

En la última igualdad utilizamos $G(\theta) = L_\theta(v)$, para luego aplicar $(d\pi)_\theta \circ L_\theta(v) = v$ y $K_\theta \circ L_\theta(v) = 0$. $\square$

Corolario 1.7. *El flujo geodésico preserva la forma Ω .*

En ocasiones es ventajoso trabajar en el fibrado tangente unitario $T_1M = \{(p, v) \in TM : |v| = 1\}$, pues cuando M sea una variedad compacta este fibrado también lo será. Y nos encantaría que también tuviese alguna estructura preservada por el flujo geodésico.

Vamos a definir una 1-forma en TM que restringida a T_1M sea una forma de contacto. Además, su flujo característico será la restricción del flujo geodésico a T_1M . Conviene observar que el flujo geodésico Φ_t se restringe adecuadamente a T_1M , pues las geodésicas tienen velocidad constante.

Definimos la 1-forma α por

$$\alpha_\theta(\xi) := \langle \langle \xi, G(\theta) \rangle \rangle = \langle (d\pi)_\theta \xi, v \rangle_p$$

Obsérvese que, como $G(\theta) = L_\theta(v)$ era horizontal, α aniquila el subespacio vertical $V(\theta)$.

Proposición 1.8. $\Omega = -d\alpha$

Esta proposición terminaría de probar que Ω es una forma simpléctica. Demos un lema para su demostración:

Lema 1.9. *Sea $\bar{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de la métrica de Sasaki. Entonces, para todo $\eta \in H(\theta)$ tenemos que $\bar{\nabla}_\eta G \in V(\theta)$.*

Demostración. Sea U un entorno de $p = \pi(\theta)$. Podemos tomar una referencia ortonormal definida en ese abierto tal que $\nabla_{E_i} E_j = 0$ para todo i, j . Esta se construye en un entorno normal, extendiendo una base ortonormal $E_1(p), \dots, E_n(p)$ por transporte paralelo a lo largo de geodésicas. Así, $\nabla_{E_i} E_j = \frac{DE_j}{dt}|_{t=0}$, tomando la derivada covariante a lo largo de la geodésica $t \mapsto \Phi_t(p, E_i)$. Y E_j es paralelo a lo largo de esa curva por definición, así que esa derivada se anula.

Definamos el levantamiento de cada campo E_i como $X_i(q, w) := L_{(q,w)}(E_i(q))$. Estos vectores X_i serán ortonormales según la métrica de Sasaki, y generarán el subfibrado horizontal. Por ello bastará con demostrar que $\bar{\nabla}_{X_j} G(\theta)$ pertenece al espacio vertical $V(\theta)$.

Escribamos $G(q, w) = \sum_{i=1}^n \langle E_i(q), w \rangle X_i$, pues G es horizontal. Así,

$$\bar{\nabla}_{X_j} G = \sum_{i=1}^n X_j(\langle E_i(q), w \rangle) X_i + \sum_{i=1}^n \langle E_i(q), w \rangle \bar{\nabla}_{X_j} X_i.$$

El segundo sumando será vertical, pues para su componente horizontal podemos usar que $(d\pi)_\theta$ es un isomorfismo del subespacio horizontal a $T_p M$ que respeta la métrica (es decir, π es lo que se conoce como una **submersión riemanniana**) y tendremos que

$$(\bar{\nabla}_{X_j} X_i)(\theta)_h = \nabla_{E_j} E_i(p) = 0.$$

Por otro lado, el primer sumando se anula. Tomemos α_j una curva adaptada a E_j , y Z_j el transporte paralelo de algún vector $v \in T_{\alpha_j(0)} M$. Así,

$$X_j \langle E_i(\cdot), \cdot \rangle = \frac{d}{dt} \langle E_i(\alpha_j(t)), Z_j(t) \rangle = \langle \nabla_{\alpha'_j(0)} E_i, v \rangle + \langle E_i, 0 \rangle = 0.$$

Y ciertamente $\bar{\nabla}_{X_j} G$ será vertical, concluyendo el lema. $\square$

Demostración (de la proposición). La fórmula para la derivada exterior de una 1-forma nos dice que

$$d\alpha(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \alpha(\xi_2) - \xi_2 \alpha(\xi_1) - \alpha([\xi_1, \xi_2]).$$

Expandiendo con la definición de α tendremos que

$$(*) \quad d\alpha(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \langle \langle \xi_2, G \rangle \rangle - \xi_2 \langle \langle \xi_1, G \rangle \rangle - \langle \langle [\xi_1, \xi_2], G \rangle \rangle.$$

Metiendo las derivaciones por ξ_i dentro de la métrica, deducimos

$$(**) \quad d\alpha(\xi_1, \xi_2) = \langle \langle \xi_2, \bar{\nabla}_{\xi_1} G \rangle \rangle - \langle \langle \xi_1, \bar{\nabla}_{\xi_2} G \rangle \rangle.$$

Recordemos los vectores $X_i(q, w) = L_{(q,w)}(E_i(q))$ del lema anterior. Consideremos también los vectores $Y_i(q, w) = J_{(q,w)}(X_i(q, w))$, que junto a los X_i formarán una base de $T_{(q,w)} TM$. Sabremos que el corchete de Lie $[Y_i, Y_j]$ será vertical, pues los Y_i son tangentes a las fibras de TM . Así, por $(*)$ deduciremos que $d\alpha|_{V \times V} = 0$. Por otro lado, de $(**)$ y el lema previo tendremos que $d\alpha|_{H \times H} = 0$.

Solo falta por comprobar que $d\alpha_\theta(X_i, Y_j) = -\Omega_\theta(X_i, Y_j)$. Ciertamente,

$$d\alpha_\theta(X_i, Y_j) = -Y_j\alpha(X_i)(\theta) = -Y_j \langle \langle X_i, G \rangle \rangle (\theta),$$

ya que $[X_i, Y_j] = 0$. Así que tomando la curva integral de Y_j dada por $t \mapsto (p, tE_j(p) + v)$, tendremos que

$$d\alpha_\theta(X_i, Y_j) = -\frac{d}{dt} \langle E_i(p), E_j(p)t + v \rangle = -\delta_{ij}.$$

Y claro, evidentemente

$$\Omega_\theta(X_i, Y_j) = \langle \langle Y_i, Y_j \rangle \rangle = \delta_{ij} \quad \square$$

Ahora encadenemos una serie de observaciones que convertirán a α en una forma de contacto en T_1M . Antes fijemos cierta notación. Para $\theta = (p, v) \in T_1M$ definimos un subespacio de $T_\theta(T_1M)$ por $S(\theta) = \ker \alpha_\theta$. Obsérvese que, por definición de α , $S(\theta)$ es el complemento ortogonal a $G(\theta)$ por la métrica de Sasaki.

Observación. Podemos ir encadenando los siguientes hechos:

1. $\xi \in T_\theta TM$ está en $T_\theta T_1M$ si y solo si $\langle K_\theta(\xi), v \rangle = 0$.
2. $\Omega_\theta(\xi, G(\theta)) = 0$ para todo $\xi \in T_\theta T_1M$.
3. $\Omega_\theta(\xi, J_\theta G(\theta)) = 0$ para todo $\xi \in S(\theta) \subset T_\theta T_1M$.
4. El complemento ortogonal de $S(\theta)$ en $T_\theta TM$ es el subespacio generado por $G(\theta)$ y $J_\theta G(\theta)$. En particular $S(\theta)$ es J_θ -invariante.
5. $\Omega_\theta|_{S(\theta)}$ sigue siendo no degenerada.

Será interesante ver qué volumen define la métrica de Sasaki en T_1M . Para ello elijamos un entorno normal U donde tengamos una referencia ortonormal $E_1, \dots, E_n$. De esta manera tendremos un difeomorfismo $T_1U \cong U \times S^{n-1}$, pues a cada vector tangente unitario le podemos asignar sus coordenadas en la base $E_1, \dots, E_n$.

Ahora, la métrica de Sasaki actúa de forma diferenciada en $H(\theta)$ y $V(\theta)$. De esto se deduce que actúe por separado en U (correspondiente al subespacio horizontal) y S^{n-1} (correspondiente al subespacio vertical). Por eso, la medida definida por la métrica de Sasaki en $U \times S^{n-1}$ será una medida producto.

Además $(d\pi)$ era una isometría de $H(\theta)$ a T_pU . En particular, la medida correspondiente a U será la medida definida por la métrica en M . Por otro lado, es de esperar que $V(\theta)$ tenga la métrica euclídea, pues estos vectores miden el desplazamiento en el espacio tangente, y por cómo hemos elegido la referencia será un espacio plano.

Así, la métrica de Sasaki reducida a $U \times S^{n-1}$ definirá la medida producto entre la medida riemanniana en U con la medida de Lebesgue usual en S^{n-1} . Esta nueva medida es conocida como la medida de Liouville.

Ahora recordemos que $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ definía una forma de volumen en T_1M . ¿Tendrá alguna relación con la medida de Liouville? Ciertamente puedo considerar una referencia ortonormal sobre TU para un entorno U de cada punto formada por campos

$X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$, tales que $X_j(\theta) \in H(\theta)$ e $Y_j = J_\theta(X_j)$ para todo $j = 1, \dots, n$. Además, puedo asumir que X_n es paralelo a $G(\theta)$, e Y_n es ortogonal a $T_\theta T_1 U$. Omitiendo Y_n tendremos una referencia ortonormal para $T_1 U$. Y la forma de volumen ω definida en $T_1 U$ por la métrica de Sasaki valdrá $\omega(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{n-1}) = 1$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_{n-1}) &= (n-1)! \cdot \alpha(X_n) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} d\alpha(X_i, Y_i) \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

Así que $\frac{1}{(n-1)!} \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ coincidirá con la forma de volumen de la métrica de Sasaki, que define la medida de Liouville. En particular:

Proposición 1.10. *La medida de Liouville será invariante por el flujo geodésico, ya que la forma de contacto α lo es.*

1.1.3. Una interpretación de los campos de Jacobi

Vamos a reescribir hechos conocidos sobre campos de Jacobi con toda la terminología que hemos aprendido en esta sección. Gracias a ella, veremos que el campo de Jacobi con valores iniciales dados no es más que el *push-forward* del dato inicial por el flujo geodésico.

Recordemos que los campos de Jacobi eran aquellos campos de vectores definidos sobre una geodésica γ_θ que cumplían la ecuación $J'' + R(\gamma'_\theta, J)\gamma'_\theta = 0$. Dado $\xi \in T_\theta TM$ podemos construir un único campo de Jacobi. Para ello, tomamos $z(s) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM$ una curva adaptada a ξ . Después construimos la superficie parametrizada $f(s, t) = \pi \circ \Phi_t(z(s))$, que será una variación de γ_θ formada por geodésicas. Y su campo variacional será justamente

$$J_\xi(t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \pi \circ \Phi_t(z(s)).$$

Y ese es precisamente el campo de Jacobi con condiciones iniciales $J_\xi(0) = (d\pi)_\theta(\xi)$, $J'_\xi(0) = K_\theta(\xi)$. Obsérvese que tenemos un isomorfismo lineal canónico entre $T_\theta TM$ y el espacio $\mathcal{J}$ de campos de Jacobi sobre γ_θ . Es más, es fácil ver que $S(\theta) \subset T_\theta TM$ se corresponde con los campos de Jacobi normales a γ'_θ .

Proposición 1.11 (Diferencial del flujo geodésico). *Fijemos $\theta \in TM$ y $\xi \in T_\theta TM$. Entonces para $t \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$(d\Phi_t)_\theta(\xi) = (J_\xi(t), J'_\xi(t)).$$

Demostración. Es una cuenta. Manteniendo la notación de arriba, aplicamos la regla de la cadena. Primero,

$$J_\xi(t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} (\pi \circ \Phi_t)(z(s)) = d(\pi \circ \Phi_t)_\theta(\xi) = (d\pi)_{\Phi_t(\theta)}(d\Phi_t)_\theta(\xi).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} J'_\xi(t) &= \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\pi \circ \Phi_t)(z(s)) = \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} (\pi \circ \Phi_t)(z(s)) \\ &= \frac{D}{\partial s} \Big|_{s=0} (\gamma'_{z(s)}(t)) = K_{\Phi_t(\theta)}(d\Phi_t(\xi)). \end{aligned} \quad \square$$

Esta proposición muestra una visión geométrica sobre los campos de Jacobi que no tenemos si nos quedamos con la definición “son soluciones a una ecuación diferencial”. En particular nos darán una interpretación muy clara de los **puntos conjugados**.

Fijada una geodésica γ , recordemos que un punto $\gamma(t)$ con $t > 0$ es conjugado a $\gamma(0)$ cuando existe un campo de Jacobi no trivial sobre γ con $J(0) = J(t) = 0$ (ver sección A.5 para más detalles).

Con nuestra tecnología, que un campo cumpla $J(0) = 0$ significará que el dato inicial de J será un vector en $\ker(d\pi)$, y por tanto **vertical**. Y existirá un punto conjugado cuando $J(t) = 0$ para algún otro t . Es decir, un punto conjugado ocurre cuando al empujar un vector vertical por el flujo geodésico volvemos a llegar a un vector vertical.

Así mismo, una **variedad sin puntos conjugados** será aquella en la que al empujar vectores verticales por el flujo geodésico nunca volverán a ser verticales.

1.2. La ecuación transversal de Jacobi

En esta sección nos gustaría dar un enfoque más actual a la ecuación de Jacobi.

Consideremos $\mathcal{J}$ el espacio vectorial de campos de Jacobi ortogonales a una geodésica $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ (recuerdo que tiene dimensión $2n - 2$). Definamos una 2-forma en $\mathcal{J}$:

$$\omega(J_1, J_2) = \langle J_1, J'_2 \rangle - \langle J'_1, J_2 \rangle.$$

Obsérvese que esa combinación es constante a lo largo de c , así que está bien definida. De hecho será una forma simpléctica, pues para un campo de Jacobi J se cumplirá que $J(0) \neq 0$ o $J'(0) \neq 0$. Así que podemos considerar $\tilde{J}$ el campo de Jacobi con dato inicial $(J(0), 0)$ o $(0, J'(0))$ respectivamente, y $\omega(J, \tilde{J}) \neq 0$ luego ω es no degenerada.

Ahora, fijemos un subespacio $V \subset \mathcal{J}$ donde se anule la forma $\omega(J_1, J_2)$ para todo $J_1, J_2 \in V$. Obsérvese que esto hace a la derivada covariante ser autoadjunta, en cierto sentido: $\langle J'_1, J_2 \rangle = \langle J_1, J'_2 \rangle$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos el espacio vectorial

$$V(t) := \{J(t) : J \in V\} \oplus \{J'(t) : J \in V, J(t) = 0\} \subset T_{c(t)}M$$

Llamemos (1) y (2) respectivamente a esos sumandos.

Lema 1.12. $\dim V(t) = \dim V$, y el segundo sumando es trivial en casi todo t .

La idea detrás de esto reside en que los puntos conjugados forman un conjunto discreto. Esto se probará más adelante, en el corolario 2.32 al teorema del índice de Morse.

Demostración. Primero observemos que la suma es efectivamente directa. Si $J_1 \in (1)$, y $J_2 \in (2)$, entonces

$$\langle J_1, J'_2 \rangle(t) = \langle J'_1, J_2 \rangle(t) = 0.$$

Ahora definamos espacios $V_1(t) = \{J \in V : J(t) = 0\}$ y $V_2(t) = \{J'(t) : J(t) = 0\}$. Hay una aplicación $V_1(t) \rightarrow V_2(t)$ evidente, definida por $J \mapsto J'(t)$. Por definición de estos espacios será sobreyectiva. Además, su núcleo es cero, pues $J(t) = 0$ y $J'(t) = 0$ implican $J \equiv 0$. Por tanto, $V_1(t) \cong V_2(t)$.

Fijado $t_0 \in \mathbb{R}$, tomemos $J_1, \dots, J_k$ una base de $V_1(t_0)$, y $J_{k+1}, \dots, J_l$ una extensión de esa base para que generen V . En particular $J_{k+1}, \dots, J_l$ serán una base de $\{J(t_0) : J \in V\}$. Así,

$$\dim V = k + (l - k) = \dim V_2(t_0) + \dim\{J(t_0) : J \in V\} = \dim V(t_0),$$

que era una afirmación que queríamos demostrar.

Veamos ahora la segunda parte del lema. En concreto veremos que hay un $\varepsilon > 0$ tal que $J_1(t), \dots, J_l(t)$ serán linealmente independientes $\forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$. Claro está, ya sabíamos que $J_{k+1}(t_0), \dots, J_l(t_0)$ eran linealmente independientes, y por continuidad seguirán siéndolo para $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ pequeño.

Ahora, elijamos $\varepsilon > 0$ de manera que $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ no tiene puntos conjugados de c . Así $J_1(t), \dots, J_k(t)$ serán linealmente independientes. Solo falta por ver que $\text{span}\{J_1, \dots, J_k\}$ y $\text{span}\{J_{k+1}, \dots, J_l\}$ son disjuntos.

Sea $J = \sum_{i=1}^{n-1} f_i E_i$, con E_i una base ortonormal paralela del espacio $\{c'\}^\perp$. En particular $f_i = \langle J, E_i \rangle$. Si $J \in \text{span}\{J_1, \dots, J_k\}$ se tiene que $f_i(t_0) = 0$. Podemos escribir $f_i(t) = (t - t_0)g_i(t)$ para alguna g . Y con esto, $J'(t_0) = \sum g_i(t_0)E_i$, que es perpendicular a $\text{span}\{J_{k+1}, \dots, J_l\}$. Luego efectivamente el segundo sumando será casi siempre trivial. $\square$

Supongamos ahora que $\dim V = n - 1$. Tal V es maximal entre los subespacios que anulan ω . Eso se conoce como un **subespacio lagrangiano**. Por el lema sabemos que para casi todo t $\{c'(t)\}^\perp$ se genera por los $J(t)$ con $J \in V$. Tendrá sentido definir un operador $S(t) : \{c'(t)\}^\perp \rightarrow \{c'(t)\}^\perp$ de la forma

$$S(t)u := J'(t), \quad \text{con } u \in \{c'(t)\}^\perp, \text{ y } J \in V \text{ el campo con } J(t) = u.$$

Obsérvese que S es autoadjunto, gracias a que en V se anula ω . Llamemos $R(t)$ al operador $R(c'(t), \cdot)c'(t)$. Podemos reescribir la ecuación de Jacobi en terminos de S :

$$-R(t)J(t) = J''(t) = (SJ)'(t) = S'J(t) + SJ'(t) = (S' + S^2)J(t).$$

Hemos deducido una versión de primer orden de la ecuación de Jacobi. Esta es conocida como la **ecuación de Ricatti**.

$$(R) \quad S' + S^2 + R = 0$$

Quizá una ecuación diferencial sobre operadores es difícil de manejar. Tomando trazas en (R) obtendremos una ecuación diferencial real

$$(*) \quad (\operatorname{tr} S)' + \operatorname{tr}(S^2) + \operatorname{Ric}(c'(t)) = 0.$$

Definamos un producto interno de operadores $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB)$. Y por otro lado, descompongamos

$$S = \frac{\operatorname{tr}(S)}{n-1} \operatorname{Id} + S_0.$$

S_0 será la parte sin traza de S . Obsérvese que $\langle \operatorname{Id}, S_0 \rangle = 0$. Combinando todo esto,

$$\operatorname{tr}(S^2) = |S|^2 = \frac{\operatorname{tr}(S)^2}{n-1} + |S_0|^2$$

Si definimos $s := \frac{\operatorname{tr}(S)}{n-1}$ y $r := \frac{\operatorname{Ric} + |S_0|^2}{n-1}$, la ecuación (*) queda en

$$s' + s^2 + r = 0.$$

Veamos una pequeña aplicación a (*):

Teorema 1.13. *Sea V un subespacio lagrangiano de $\mathcal{J}$, y S el correspondiente operador de Ricatti. Supongamos que $\{J(t) : J \in V\}$ nunca se anule, y genere todo $c'(t)^\perp$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si además $\operatorname{Ric}(c'(t)) \geq 0$, tendremos que $S \equiv 0$ y $\operatorname{Ric}(c'(t)) \equiv 0$.*

Demostración. Supongamos que S no sea idénticamente cero. Y consideremos nuestra ecuación $s' + s^2 + r = 0$. Obsérvese que si $s \equiv 0$, entonces $r \equiv 0$. Eso implicaría $|S_0|^2 = -\operatorname{Ric}/(n-1) \leq 0$, y por tanto $S = S_0 \equiv 0$.

Así pues, existe t_0 con $s(t_0) \neq 0$. Asumamos que $s(0) < 0$. De otra forma podemos reparametrizar la geodésica. Definamos por

$$f(t) = \frac{1}{t + 1/s(0)}$$

la solución de la EDO

$$\begin{cases} f' &= -f^2 \\ f(0) &= s(0). \end{cases}$$

Definamos también $y = f - s$, que en $(-\infty, -1/s(0))$ cumple la ecuación

$$y' = f' - s' = -f^2 + s^2 + r = (s + f)y + r, \quad \text{con } y(0) = 0.$$

Pongamos ahora que $x \neq 0$ satisface la ecuación homogénea $x' = -\frac{1}{2}(s + f)x$, y u satisface $u' = 2r/x^2$, con $u(0) = 0$, tendríamos que y coincide con $\frac{1}{2}ux^2$. Pero $u \geq 0$ implica que $y \geq 0$. Por tanto $s \leq f$. Pero $f(t) \rightarrow -\infty$ en tiempo finito $t = -\frac{1}{s(0)}$, luego s no estaría definido en cero. Hemos encontrado una contradicción. $\square$

Supongamos ahora que tomamos un subespacio con $\dim \mathcal{V} < n-1$. Tendremos una ecuación similar a la de Ricatti para campos de Jacobi transversales a $\mathcal{V}$. Supongamos que $\mathcal{J}$ sea un espacio lagrangiano para ω , y $\mathcal{V}$ su subespacio. Como antes definimos

$$V(t) = \{J(t) : J \in \mathcal{V}\} \oplus \{J'(t) : J \in \mathcal{V}, J(t) = 0\}.$$

Y otra vez, $V(t)$ tiene la misma dimensión que $\mathcal{V}$. Escribamos también un subespacio $H(t) = V(t)^\perp \cap \{c'(t)\}^\perp$. Tendremos $u = u^v + u^h$ una descomposición de u en $V(t) \oplus H(t)$.

En los t_0 donde $\{c'(t)\}^\perp$ se genere por $\{J(t_0) : J \in \mathcal{J}\}$, definimos el operador $S(t_0) : H(t_0) \rightarrow H(t_0)$ por

$$u \mapsto (Y')^h(t_0) \quad \text{con } Y = J^h, \text{ para el } J \in \mathcal{J} \text{ con } J(t_0) = u.$$

Estará bien definido, pues si $J_1(t_0) = J_2(t_0) = u$, tomando cualquier $J \in \mathcal{J}$ tenemos

$$\langle (J_1 - J_2)', J \rangle(t_0) = \langle (J_1 - J_2, J') \rangle(t_0) = 0.$$

Así que $J_1'(t_0) = J_2'(t_0)$. En particular, $(J_1')^h(t_0) = (J_2')^h(t_0)$.

Además, se cumple que $((J_i^v)')^h(t_0) = 0$, pues $J_i^v(t_0) = u^v = 0$ y para todo X tangente a H tendremos que

$$\langle (J_i^v)', X \rangle = \frac{d}{dt} \langle J_i^v, X \rangle - \langle J_i^v, X' \rangle = 0,$$

luego $(J_i^v)' \perp H$ y $((J_i^v)')^v = 0$. Por tanto, el operador está bien definido.

Ahora veamos que el operador es autoadjunto. Para ello tomemos $u_i = Y_i(t_0) \in H(t_0)$, donde Y_i es la parte horizontal de un campo de Jacobi J_i . Así,

$$\begin{aligned} \langle S(t_0)u_1, u_2 \rangle &= \langle (J_1^h)', J_2 \rangle = \langle (J_1 - J_1^v)', J_2 \rangle(t_0) = \langle J_1', J_2 \rangle(t_0) \\ &= \langle J_1, J_2' \rangle(t_0) = \langle u_1, S(t_0)u_2 \rangle. \end{aligned}$$

Observación. Hemos definido un operador derivada covariante $D^h : X \mapsto (X')^h$ sobre el fibrado $\{(t, u) : t \in \mathbb{R}, u \in H(t)\}$. Tendrá sentido hablar de transporte paralelo sobre H . En particular tendremos una identificación canónica de $H(t)$ con $E := H(t_0)$. Podremos entender los $S(t)$ definidos arriba como una familia de operadores definidos en E con un parámetro real. Así, tendrá sentido la derivación $S' = D^h S$.

Con eso en la cabeza, para $Y = J^h$,

$$(1.1) \quad Y'' = D^{h2}Y = D^h(SY) = (D^h S)Y + S(D^h Y) = (S' + S^2)Y.$$

Pero podemos calcular $D^{h2}Y$ de otra manera. Definamos $A(t) : V(t) \rightarrow H(t)$ como $A(t)u = J^{hh}(t)$, donde $J \in V$ con $J(t) = u$. Al igual que S será una aplicación lineal bien definida. Volvamos a tomar $Y = J^h$ con $Y(t_0) = J(t_0)$. Y fijemos una base ortonormal de campos D^h -paralelos $X_1, \dots, X_d$ con $X_1(t_0) = J(t_0)$. Entonces, para $Z \in V$,

$$\langle J', Z \rangle(t_0) = \langle J, Z' \rangle(t_0) = \langle J, AZ \rangle(t_0) = \langle A^* J, Z \rangle.$$

En particular $(J')^v(t_0) = A^*(t_0)J(t_0)$.

Similarmente, $X_i'(t) = -A^*(t)X_i(t)$, puesto que

$$0 = \langle X_i, Z' \rangle = \langle X_i', Z \rangle + \langle X_i, (Z')^h \rangle = \langle X_i', Z \rangle + \langle X_i, AZ \rangle = \langle X_i' + A^* X_i, Z \rangle.$$

Sea $R = R(c', \cdot)c'$ el operador curvatura sobre c . Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle D^{h^2}Y, X_k \rangle(t_0) &= \langle (J^h)'^{h'}, X_k \rangle(t_0) = \langle J^{h''h}, X_k \rangle'(t_0) - \langle J^{h''h}, X_k' \rangle(t_0) \\ &= \langle J^{h'}, X_k \rangle'(t_0) = \langle J^h, X_k \rangle''(t_0) - \langle J^h, X_k' \rangle' = \\ &= \langle J, X_k \rangle''(t_0). \end{aligned}$$

Es decir, hemos sacado las D^h del producto escalar como derivadas normales. Ahora volvamos a meterlas en el producto como derivadas covariantes usuales:

$$\begin{aligned} \langle D^{h^2}Y, X_k \rangle(t_0) &= \langle J'', X_k \rangle + 2\langle J', X_k' \rangle + \langle J, X_k'' \rangle \\ &= -\langle RJ, X_k \rangle - 2\langle A^*J, A^*X_k \rangle + \langle X_1, X_k'' \rangle \\ &= -\langle RY, X_k \rangle - 2\langle AA^*J, X_k \rangle - \langle X_1', X_k' \rangle + \langle X_1, X_k' \rangle'(t_0) \\ &= -\langle RY - 3AA^*Y, X_k \rangle(t_0). \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado que $\langle X_1', X_k' \rangle = \langle J', X_k' \rangle$, que coincide con $\langle A^*AJ, X_k \rangle$.

Así que definiendo el operador R^h por $R^hY := (RY)^h$, se tiene que

$$D^{h^2}Y = -R^hY - 3AA^*Y,$$

que junto con la ecuación 1.1 nos da una ecuación diferencial para S :

$$(J-W) \quad S' + S^2 + R^h + 3AA^* = 0.$$

Esta es la **ecuación transversal de Jacobi**, debida a Wilking.

Su superioridad respecto a la ecuación de Jacobi (o Ricatti) reside en que, al ser una generación de ésta, implicará versiones más fuertes de algunos teoremas conocidos. Por ejemplo en [10] se generalizan algunos resultados de comparación obtenidos mediante la ecuación de Ricatti que luego en [11] prueban teoremas inalcanzables por la comparación clásica (ver el teorema A y la sección 3.1 de ese último artículo).

CAPÍTULO 2

Variedades completas y teoremas globales

La geometría riemanniana por lo general está interesada en encontrar propiedades **globales**, en contraposición a las propiedades locales. Esto quiere decir que dependen de la variedad como un todo, y no son comprobables en entornos de cada punto. Estudiaremos los llamados **teoremas globales**, que combinarán una propiedad local con propiedades globales débiles (ser una variedad completa o simplemente conexa) para concluir propiedades globales mucho más fuertes.

Esto se entiende mucho mejor con un ejemplo. El teorema de Hadamard nos dirá que una variedad completa y simplemente conexa con curvatura seccional $K \leq 0$ (propiedad local, comprobable punto a punto) será difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (propiedad global muy restrictiva).

Obsérvese que la información circula en ambos sentidos. Podemos darle la vuelta al resultado diciendo que cualquier métrica riemanniana sobre la esfera tendrá que tener curvatura positiva en algún punto.

En este capítulo se definirán las variedades completas (el hábitat natural de las propiedades globales) y se cubrirán varios teoremas globales clásicos. Estos estarán seleccionados para darnos información sobre los **puntos conjugados** de la variedad. Otros resultados globales más alejados del tema del trabajo se podrán encontrar en el segundo apéndice.

La última sección es un poco diferente. Esta consistirá en unos pequeños comentarios sobre la minimalidad de las geodésicas y cómo los puntos conjugados son una obstrucción a ella.

Supondremos a lo largo de este trabajo que nuestra variedad es conexa. Para estudiar cualquier otra variedad siempre podremos trabajar por separado con cada una de sus componentes conexas.

2.1. Variedades completas

A la hora de hablar sobre propiedades globales tiene sentido querer tratar con “el todo más grande”. Más concretamente, nos gustaría no estar trabajando en abiertos posiblemente patológicos dentro de otra variedad riemanniana. Esto motivará la definición siguiente.

Definición 2.1. Una variedad riemanniana M es **completa** si $\exp_p(v)$ está bien definida para todo $(p, v) \in TM$. En cambio, M es **extendible** si es isométrica a un abierto propio de otra M .

Recordemos también que en nuestra variedad riemanniana tendremos una distancia $d(p, q)$ definida como el ínfimo de longitudes de curvas que unan p y q . Esta métrica induce la topología de M , pues de hecho una bola normal $B_r(p)$ coincidirá con la bola métrica $B_r^d(p)$, pues ahí las geodésicas minimizan longitudes.

Proposición 2.2. *Efectivamente los conceptos de variedad completa y extendible son opuestos. Una variedad completa no puede ser extendible y viceversa.*

Demostración. Supongamos que M es un abierto propio de otra variedad riemanniana M' . Existiría un $p \in \partial M$, y podríamos elegir $U' \subset M'$ un entorno normal de ese p . Desde ese punto tendré geodésicas que lleguen en tiempo finito a puntos de M . Reparametrizando $t \mapsto -t$ obtendremos geodésicas de M que se salen en tiempo finito, y M no es completa. $\square$

En realidad nuestra definición de variedad completa será una entre tantas posibles, como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 2.3 (Hopf-Rinow). *Sea M una variedad riemanniana y $p \in M$. Son equivalentes:*

1. $\exp_p$ está bien definida en todo $T_p M$
2. Los conjuntos cerrados y acotados son compactos
3. M es un espacio métrico completo
4. M es una variedad riemanniana completa
5. Existe una cadena de conjuntos compactos $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ con $\bigcup_n K_n = M$ tal que si $q_n \notin K_n$ entonces $d(q_n, p) \rightarrow \infty$

Además, todas estas afirmaciones implicarán

6. Para todo $q \in M$ existe una geodésica γ que une p y q , y además minimiza la distancia $\ell(\gamma) = d(p, q)$.

Demostración. Quizá la parte más interesante de la demostración reside en ver la existencia de una geodésica minimal entre dos puntos. Así pues, empecemos por ahí:

1 $\implies$ 6 : Pongamos $d(p, q) = r$, y tomemos $B_\delta(p)$ una bola normal (ver definición A.12 si es necesario), con S su frontera. Consideremos la función $x \mapsto d(q, x)$ definida para $x \in S$, y sea x_0 el mínimo de esa función. Así $x_0 = \exp_p(\delta v)$ para cierto $v \in T_p M$ con $|v| = 1$. Con ese valor definimos la geodésica $\gamma(s) = \exp_p(sv)$, bien definida para $s \in \mathbb{R}$ por hipótesis. Obsérvese que demostrar $\gamma(r) = q$ probaría la implicación.

Para demostrar eso, planteemos una ecuación un poco más general:

$$(*) \quad d(\gamma(s), q) = r - s$$

Definamos también el conjunto $A = \{s \in [0, r] \text{ tales que se satisfaga } (*)\}$. Nuestro objetivo pasa a ser probar que $r \in A$.

Claramente $0 \in A$ por la definición de r . También sabemos que A es cerrado, al ser la preimagen de un conjunto cerrado por una función continua.

Queremos ver que si $s_0 \in A$, entonces $s_0 + \delta' \in A$ para un $\delta' > 0$, por pequeño que sea. Así $\sup A = r$, y como A es cerrado habríamos completado la prueba.

Tomemos $s_0 \in A$, y sea $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ una bola normal, con S' su frontera. Como antes elegimos $x'_0 \in S'$ el mínimo de $d(x, q)$. Bastará ver que $x_0 = \gamma(s_0 + \delta')$. De ser el caso,

$$d(\gamma(s_0), q) = \delta' + d(x'_0, q)$$

y $s_0 + \delta$ satisface (*).

Definamos la curva

$$\tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} \gamma(s) & \text{si } s \leq s_0 \\ \text{arco geodésico de } \gamma(s_0) \text{ hasta } x_0 & \text{si } s_0 \leq s \leq s_0 + \delta' \end{cases}$$

Y como la desigualdad triangular nos dice

$$d(p, x'_0) \geq d(p, q) - d(q, x'_0) = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta',$$

entonces $\tilde{\gamma}$ debe minimizar la longitud hasta x'_0 . Así que será geodésica (ver proposición A.15) y obligatoriamente $\tilde{\gamma} \equiv \gamma$. Por tanto, $s_0 + \delta'$ cumple (*).

Veamos ahora la serie de equivalencias:

1 $\implies$ 2 : Si $A \subset M$ es un conjunto acotado cabe en una bola métrica B de centro p y radio r . Por el punto 6, $B_r(0) \subset T_p M$ será tal que $B \subset \exp_p \overline{B_r(0)}$, que es un conjunto compacto. Como A es cerrado, tendrá que ser compacto.

2 $\implies$ 3 : Sea $\{p_n\}$ una sucesión de Cauchy. Como conjunto estará acotado, así que su cierre es compacto. En particular, tendrá que tener una subsucesión convergente. Y una sucesión de Cauchy con subsucesión convergente es a su vez convergente.

3 $\implies$ 4 : Supongamos que M no es una variedad completa. Existirá una geodésica $\gamma(s)$ definida para $s < s_0$ pero no para $s = s_0$. Cualquier sucesión $s_n \uparrow s_0$ nos dará $d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq |s_n - s_m|$, y por tanto $\gamma(s_n)$ será de Cauchy. M completa implicaría

que $\gamma(s_n) \rightarrow \gamma(s_0)$, y tomando una bola normal en ese punto podremos extender más allá la geodésica.

4 $\implies$ 1 : Es obvia.

5 $\iff$ 2 : Es topología de espacios métricos elemental. $\square$

Observación. Una variedad compacta M será completa, pues al ser todo subconjunto cerrado un compacto se cumplirá el punto 2.

También se deduce del punto 2 que una subvariedad cerrada de una variedad completa tendrá que ser completa con la métrica inducida.

Como uno se puede imaginar, el teorema de Hopf-Rinow será el pan de cada día en el estudio de variedades completas. Aparecerá por ejemplo en la demostración de nuestro primer teorema global:

Teorema 2.4 (Hadamard). *Sea M una variedad simplemente conexa, y $p \in M$. Si $K(p, \sigma) \leq 0$ para todo $\sigma \subset T_p M$ subespacio de dimensión 2, entonces M es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, pues $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ será difeomorfismo.*

El peso de la demostración está sostenido por dos lemas que en realidad tienen bastante interés por si solos. El primero probará que una variedad con $K \leq 0$ será una variedad sin puntos conjugados. Y el segundo nos ayudará a ver que $\exp_p$ es aplicación recubridora cuando no hay puntos conjugados a p .

Recordemos la definición de punto conjugado. Si $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ es una geodésica, y existe sobre ella un campo de Jacobi $J(t)$ no trivial con $J(0) = J(a) = 0$, entonces $\gamma(0)$ y $\gamma(a)$ son puntos conjugados. Por la proposición A.30, los puntos conjugados se asocian a singularidades de la exponencial.

Lema 2.5. *Sea M una variedad riemanniana completa con curvatura seccional $K \leq 0$. Entonces ningún $p \in M$ tendrá puntos conjugados. En particular $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ será difeomorfismo local.*

Demostración. Sea $J(t)$ un campo de Jacobi sobre alguna geodésica γ . Pongamos que $J(0) = 0$ y $J'(0) \neq 0$. Observamos que

$$\langle J, J \rangle'' = 2 \langle J', J' \rangle + 2 \langle J'', J \rangle = 2|J'|^2 - 2 \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle \geq 0.$$

Y por tanto $\langle J, J \rangle'$ es una función creciente. Y como $\langle J, J \rangle'|_{t=0} = 2 \langle J(0), J'(0) \rangle = 0$, será una función no negativa para $t \geq 0$.

Así sabremos que $\langle J, J \rangle$ es no decreciente. Además, $\langle J(0), J(0) \rangle = \langle J(0), J'(0) \rangle = 0$, así que la segunda derivada $|J'|^2 > 0$ dirige ese producto en un entorno de cero. Concluimos que $|J(t)| > 0$ para $t > 0$, y no podrá haber un punto conjugado a $\gamma(0)$. $\square$

Lema 2.6. *Sea M una variedad completa, y $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo local a otra variedad riemanniana N . Si se cumple que para todo $(p, v) \in TM$, $|df_p(v)| \geq |v|$, entonces f será una aplicación recubridora.*

Demostración. Queremos demostrar que para todo punto de N existe un entorno U tal que si escribimos $f^{-1}(U)$ como unión de sus componentes conexas C_i , $f|_{C_i} : C_i \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Como f es un difeomorfismo local, bastaría probar que esa restricción es biyectiva.

Esa biyectividad en las restricciones adecuadas se deduce de la propiedad del levantamiento de caminos: Si $c : [0, 1] \rightarrow N$ es un camino, y elegimos $q \in M$ tal que $f(q) = c(0)$, existe un único levantamiento $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow M$ de c , es decir, $\bar{c}$ cumple que $f \circ \bar{c} = c$. Demostrémoslo:

Como f es difeomorfismo local, uno tiene una inversa para un entorno de q , y así podríamos definir $\bar{c}(t) = f^{-1} \circ c(t)$ para $t \in [0, t_0]$ con $t_0 > 0$ suficientemente pequeño.

Pongamos que $A = [0, t_1)$ es el conjunto de los t donde podemos levantar $c(t)$. Si $t_1 \in A$, entonces A sería un conjunto abierto y cerrado de $[0, 1]$, por lo que habríamos terminado.

Pero tomemos $t_n \uparrow t_1$, una sucesión creciente con límite t_1 . Entonces $\{\bar{c}(t_n)\}$ estarán contenidas en algún compacto de M . Si no fuese así, por completitud $d(\bar{c}(t_n), c(0)) \rightarrow \infty$. Y eso implicaría que c tuviese longitud infinita entre 0 y t_1 . Pero por otro lado

$$\int_0^{t_n} |c'(t)| dt = \int_0^{t_n} |df_{\bar{c}(t)}(\bar{c}'(t))| dt \geq \int_0^{t_n} |\bar{c}'(t)| dt \geq d(\bar{c}(t_n), \bar{c}(0)),$$

lo que no tendría sentido. Obsérvese cómo aparece la hipótesis en la primera desigualdad.

Hemos deducido que $\{\bar{c}(t_n)\}$ tiene un punto de acumulación $r \in M$. Si V es un entorno de r tal que $f|_V$ sea difeomorfismo, tendremos que $c(t_1) \in f(V)$, y por continuidad habrá todo un $C(I) \subset f(V)$ para cierto intervalo abierto I que contiene a t_1 . En particular, podemos extender $\bar{c}$ más allá de t_1 , y podremos levantar todo el camino. $\square$

Demostración (al teorema de Hadamard). Sea M simplemente conexa y completa, con $K \leq 0$. Entonces $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ estará bien definida para todo p , es sobreyectiva (pues por Hopf-Rinow existe una geodésica minimizante entre cualesquiera p y q), y además es difeomorfismo local.

Gracias a restringir $\exp_p$ a abiertos donde sea difeomorfismo, podemos imponer una métrica en $T_p M$ de manera que $\exp_p$ sea isometría local. Como por una isometría geodésicas van a parar a geodésicas, las líneas rectas que pasan por el origen en $T_p M$ serán geodésicas, que son prolongables infinitamente. El teorema de Hopf-Rinow nos dirá que entonces $T_p M$ es una variedad completa.

Por tanto, el segundo lema obliga a que $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ sea aplicación recubridora. Así que si M es simplemente conexa, tendrá que ser un difeomorfismo. $\square$

Realmente hemos demostrado algo un poco más general:

Corolario 2.7. *Si M es una variedad completa sin puntos conjugados, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ es una aplicación recubridora para todo $p \in M$. Por tanto, una variedad sin puntos conjugados simplemente conexa será difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

2.2. Variaciones de la energía

Nuestro próximo objetivo será introducir herramientas del **cálculo de variaciones** para obtener más resultados globales. La idea básica de esta disciplina será generalizar ese momento en un curso de cálculo en el que se miraba la derivada de una función para localizar máximos o mínimos. Nosotros buscaremos derivar, para encontrar mínimos, **funcionales** que tomen curvas de cierto espacio y devuelvan un número. Por ejemplo, su longitud.

Definición 2.8. Sea $c : [0, a] \rightarrow M$ una curva diferenciable en trozos $0 \leq t_i < t_{i+1} = a$. Una **variación de c** será una función $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $f(0, t) = c(t)$ y tal que $f|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]}$ es diferenciable.

Además, se dirá que es una variación **propia** si fija los extremos. Es decir, $f(s, 0) = c(0)$ y $f(s, a) = c(a)$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Podemos fijar s o t para obtener:

$$\begin{aligned} t &\mapsto f_s(t) := f(s, t) && \text{una curva en la variación.} \\ s &\mapsto f_t(s) := f(s, t) && \text{una curva transversal a la variación.} \end{aligned}$$

La velocidad de estas últimas curvas en $s = 0$ define un campo vectorial $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$, llamado el **campo variacional de f** .

Proposición 2.9. Para cualquier campo de vectores V diferenciable a trozos sobre c existirá una variación f del que es campo variacional. Si además $V(0) = V(a) = 0$, puede elegirse propia.

Demostración. Construyámosla: El conjunto $c([0, a])$ es compacto. Tomando un subrecubrimiento finito de entornos normales, podemos definir $\exp_{c(t)}$ en todo $v \in T_{c(t)}M$ que cumpla $|v| < \delta$ (para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño).

Fijemos $N = \max |V(t)|$, y $\varepsilon < \delta/N$. Así, la variación

$$f(s, t) = \exp_{c(t)}(sV(t))$$

estará bien definida en $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a]$. Además $\exp$ es diferenciable, luego la diferenciabilidad depende de V , que es a trozos.

Por último,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = (d \exp_{c(t)})_0(V(t)) = V(t). \quad \square$$

Nuestro objetivo será comparar la longitud de c con otras curvas de su variación. Es por eso que definiremos las funciones longitud

$$L(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \right| dt$$

y, por futura conveniencia, la **energía**

$$E(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) \right|^2 dt.$$

Con solo un vistazo a estas definiciones, uno preferiría trabajar con E antes que con L , al no tener una temible raíz cuadrada en el integrando. Por otro lado, es una cantidad a priori menos geométrica que la longitud. Veamos que aún así nos servirá para algo, pues minimizar la energía implica ser una geodésica que minimize la longitud:

Lema 2.10. *Sea γ una curva que une p y q puntos de M con longitud mínima. Entonces, para toda curva c con esos extremos, se tiene que $E(\gamma) \leq E(c)$, con igualdad si y solo si c es una geodésica minimizante.*

Demostración. La desigualdad de Cauchy-Schwartz nos dice que

$$L(c) = \int_0^a |c'(t)| dt \leq a^{1/2} \left(\int_0^a |c'(t)|^2 dt \right)^{1/2} = a^{1/2} E(c)^{1/2},$$

con la igualdad si y solo si $|c'(t)|$ es constante. Como γ debe ser una geodésica por la proposición A.15, tenemos que

$$E(\gamma) = \frac{L(\gamma)^2}{a} \leq \frac{L(c)^2}{a} \leq E(c).$$

Y la igualdad implicará que c minimice también la longitud y tenga velocidad constante, lo que la convertiría en geodésica. El recíproco es obvio. $\square$

Con el problema de encontrar mínimos en las longitudes en mente, nos gustaría calcular $E'(0)$ y $E''(0)$ para cualquier variación. Y es que existen unas fórmulas relativamente sencillas para estas derivadas.

Proposición 2.11 (Fórmula de la primera variación). *Sean f una variación de una curva c , V su campo variacional, y E su energía. Entonces*

$$(1V) \quad \frac{1}{2} E'(0) = - \int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt} c'(t) \right\rangle dt - \sum_{i=0}^{k+1} \langle V(t_i), c'(t_i^+) - c'(t_i^-) \rangle,$$

donde $0 = t_0 \leq t_i \leq t_{k+1} = a$ son los puntos no regulares de la curva, e interpretamos $c'(0^-) = c'(a^+) = 0$.

Demostración. Consiste en hacer la cuenta. Por definición,

$$E(s) = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Metiendo la derivada en la integral (gracias al teorema de la convergencia dominada) obtenemos:

$$\begin{aligned} E'(s) &= \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} 2 \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} 2 \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= 2 \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - 2 \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt, \end{aligned}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo en el primer sumando y después evaluando en $s = 0$ obtenemos lo que queríamos. $\square$

Esta fórmula tendrá una aplicación inmediata, reconocer geodésicas:

Proposición 2.12. *$c : [0, a] \rightarrow M$ es una geodésica si y solo si para toda variación propia f se tiene que $E'(0) = 0$.*

Demostración. Si c es geodésica todos los sumandos en (1V) se anularán, así que $E'(0) = 0$ para cualquier variación. Supongamos ahora $E'(0) = 0$ para toda variación propia de c .

Primero tomemos $V(t) = g(t) \cdot \frac{D}{dt}c'(t)$, para g una función suave y positiva salvo en los t_i , donde se anula. Así,

$$0 = \frac{1}{2}E'(0) = - \int_0^a g(t) \left\langle \frac{D}{dt}c'(t), \frac{D}{dt}c'(t) \right\rangle dt + 0.$$

En particular se anulará esa integral, lo que implicará que $\partial Ddtc'(t) = 0$ en todo $t \in (t_i, t_{i+1})$.

Para ver que pasa con esos puntos en los que posiblemente c no es regular, tomaremos $V(t)$ con $V(t_i) = c'(t_i^+) - c'(t_i^-)$. Utilizando que c es geodésica por intervalos, tenemos que

$$0 = \frac{1}{2}E'(0) = - \sum_{i=0}^{k+1} |c'(t_i^+) - c'(t_i^-)|^2,$$

concluyendo que c es regular en los t_i , y por tanto una geodésica. $\square$

Volvamos un momento la vista atrás para darnos cuenta de una ventaja de E sobre L . Minimizar la energía también nos obliga a que la curva esté parametrizada por longitud de arco, cosa necesaria en nuestra definición de geodésica. Observemos también que gracias a E y por la anterior proposición hemos conseguido una definición global de geodésica.

Antes de continuar, escribamos la fórmula de la primera variación para L , pues la utilizaremos más tarde.

Proposición 2.13 (Primera variación de la longitud). *Sea f una variación de c (a quien suponemos parametrizada con velocidad constante), y L su longitud. Entonces*

$$L'(0) = \frac{1}{|c'(0)|} \left(\left\langle c'(t), V(t) \right\rangle \Big|_a^b - \int_a^b \left\langle V(t), \frac{D}{dt}c'(t) \right\rangle dt \right)$$

La cuenta es muy parecida a la que hemos desarrollado para E . Se puede encontrar en las primeras páginas de [3].

Ahora el siguiente paso natural es intentar calcular $E''(0)$ cuando se anule $E'(0)$ para saber si estamos tratando con un máximo o mínimo. Así que vamos a ello.

Proposición 2.14 (Fórmula de la segunda variación). *Sea γ una geodésica, y f una variación propia. Se cumple*

(2V)

$$\frac{1}{2}E''(0) = - \int_0^a \left\langle V(t), \frac{D^2 V}{dt^2} + R(\gamma', V)\gamma' \right\rangle dt - \sum_{i=0}^k \left\langle V(t_i), \frac{DV}{dt}(t_i^+) - \frac{DV}{dt}(t_i^-) \right\rangle,$$

donde V es el campo variacional de f , y R el operador de curvatura.

Demostración. Consiste en derivar $E'(s)/2$, cantidad que habíamos calculado en la demostración de (1V). Así,

$$\begin{aligned} \frac{E''(s)}{2} &= \sum_{i=0}^k \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} + \sum_{i=0}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\ &\quad - \int_0^a \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^a \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

El tercer sumando se anula, pues γ es geodésica por hipótesis. El primero se anula telescopicamente por la regularidad de γ y por considerar una variación propia. Obsérvese que si la variación no fuese propia sobreviviría un $\left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \gamma' \right\rangle \Big|_{t=0}^{t=a}$ adicional.

Busquemos una manera de transformar los sumandos segundo y cuarto en algo más parecido a (2V). Para el cuarto sumando, la proposición A.20 nos dirá que

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D^2}{dt^2} V + R(\gamma', V)\gamma'.$$

Para el segundo sumando, usando la simetría de las derivadas covariantes (lema A.10) obtenemos que

$$\sum_{i=0}^k \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = - \sum_{i=1}^k \langle V(t_i), V'(t_i^+) - V'(t_i^-) \rangle.$$

Obsérvese cómo se anulan los extremos del sumatorio gracias a que la variación sea propia. Juntando todo esto deducimos la fórmula. $\square$

Ahora, definiendo la cantidad

$$I_a(V, V) = \int_0^a |V|^2 - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle dt,$$

(que aparte de simplificar la notación tendrá un significado, como veremos más tarde) uno puede escribir la fórmula de la segunda variación no propia como

$$(2V \text{ simple}) \quad \frac{1}{2}E''(0) = I_a(V, V) - \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \gamma' \right\rangle(0, 0) + \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}, \gamma' \right\rangle(0, a).$$

Y el caso de una variación propia queda en $\frac{1}{2}E''(0) = I_a(V, V)$.

Demostración. Si la variación no fuese propia, tendríamos la fórmula

$$\begin{aligned} \frac{E''(0)}{2} = & - \int_0^a \langle V, V'' + R(\gamma', V)\gamma' \rangle dt - \sum_{i=0}^{k+1} \langle V, V'(t_i^+) - V'(t_i^-) \rangle \\ & + \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \gamma' \right\rangle \Big|_{t=0}^{t=a} \end{aligned}$$

Por otro lado observamos que

$$\frac{d}{dt} \langle V, V' \rangle = \langle V, V'' \rangle + \langle V', V' \rangle$$

donde V sea diferenciable. Así, uno puede escribir

$$\int_0^a \langle V, V'' + R(\gamma', V)\gamma' \rangle dt = \sum_{i=0}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \langle V, V' \rangle dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} |V|^2 - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle dt.$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo obtendremos un sumatorio que se anulará con el de (2V) al sustituir esta expresión, demostrando así la fórmula simplificada. $\square$

Todas estas fórmulas tienen aplicación inmediata a la demostración de teoremas globales. Por ejemplo, el siguiente:

Teorema 2.15 (Bonnet-Myers). *Sea M una variedad completa de dimensión n . Supongamos que su curvatura de Ricci esté acotada inferiormente de la forma*

$$\text{Ric}_p(v) \geq \frac{1}{r^2} > 0 \quad \forall p \in M, \forall v \in (T_p M)_1.$$

Entonces M es compacta y $\text{diam}(M) \leq \pi r$.

Demostración. Sean $p, q \in M$. Tomemos $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodésica minimizante entre p y q (por tanto $|\gamma(t)| = l$, la longitud). Supongamos $d(p, q) > \pi r$, y busquemos una contradicción.

Tomemos $e_1(t), \dots, e_n(t)$ una base ortonormal en $T_{\gamma(t)}M$, obtenida por transporte paralelo, elegida de manera que $e_n(t) = \gamma'(t)/l$. Tomemos ahora los campos de vectores $V_j(t) = \sin(\pi t)e_j(t)$ para $j = 1, \dots, n-1$. Cada uno de ellos generará una variación de γ , cuya energía denotaremos E_j . Por la fórmula (2V simple), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{E_j''(0)}{2} &= - \int_0^1 \langle V_j, V_j'' + R(\gamma, V_j)\gamma' \rangle dt \\ &= - \int_0^1 \sin^2(\pi t) (\pi^2 - l^2 K(e_n(t), e_j(t))) dt, \end{aligned}$$

donde utilizamos que e_j son transportes paralelos para derivar los V_j con facilidad. Aquí K es la curvatura seccional generada por esos vectores. Si ahora sumamos en j , haremos aparecer la curvatura de Ricci:

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) = - \int_0^1 \sin^2(\pi t) ((n-1)\pi^2 - (n-1)l^2 \text{Ric}_\gamma(t)(e_n(t))) dt.$$

Usando la cota para la curvatura obtendríamos

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} E_j''(0) < \int_0^1 \sin^2(\pi t) ((n-1)\pi^2 - (n-1)\pi^2) dt = 0,$$

en particular una de las $E_j''(0)$ será negativa. Eso significa que en las variaciones correspondientes a V_j habrá curvas con longitud menor que γ , y eso impide a γ ser minimizante.

Concluimos que la acotación $d(p, q) \leq \pi r$ es obligatoria. Como el diámetro está acotado y la variedad es completa, gracias a Hopf-Rinow tendrá ser compacta. $\square$

El teorema de Bonnet-Myers es impresionante en sí mismo, pero sus consecuencias también serán muy interesantes:

Corolario 2.16. *Si $\text{Ric} \geq \delta > 0$, obtendremos las mismas conclusiones para el recubridor universal de M , al ser variedades localmente isométricas. Así $\pi^{-1}(p)$ tendrá un número finito de puntos, y por tanto el grupo fundamental $\pi_1(M)$ será finito.*

Como resultado de este corolario sabremos que no tendremos variedades sin puntos conjugados con curvatura de Ricci acotada inferiormente de la forma $\text{Ric} \geq \delta > 0$. Esto es porque su recubridor universal es $\mathbb{R}^n$, que no es compacto.

Corolario 2.17. *Si M tiene curvatura seccional $K \geq \delta > 0$, en particular $\text{Ric}_p \geq \delta$ y obtendremos las mismas conclusiones.*

Observación. La esfera con $K \equiv \frac{1}{r^2}$ tiene exactamente πr de diámetro. Curiosamente, existe un resultado de rigidez que dice que si tenemos ese diámetro M es una esfera.

2.3. El teorema de comparación de Rauch

Acompañando a la definición de los campos de Jacobi se suele comentar la estimación

$$|J(t)| = t - \frac{K}{6}t^3 + o(t^3),$$

siendo $K = K(\gamma'(0), J'(0))$. Ver por ejemplo el corolario [A.28](#).

Esto significa que para t pequeño la curvatura es la que dirige el módulo de los campos de Jacobi. Así podremos **comparar** módulos entre diferentes campos de Jacobi. Si $\tilde{J}$ es otro campo de Jacobi en otra variedad, y $\tilde{K}(\tilde{\gamma}'(0), \tilde{J}'(0)) \geq K(\gamma'(0), J'(0))$ entonces por ese desarrollo de Taylor se cumplirá para t pequeño que $|\tilde{J}(t)| \leq |J(t)|$.

Eso está bien, pero queremos más. Nos gustaría no tener que restringirnos a valores pequeños de t . Si quitásemos esa hipótesis la comparación nos permitirá afirmar, por ejemplo, que γ no tendrá puntos conjugados si no los tiene $\tilde{\gamma}$.

El teorema de Rauch será ese resultado global de comparación que deseamos. Antes de probarlo, adelantemos un par de lemas.

Lema 2.18. Sea $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ suave con $h(0) = 0$. Entonces existe una función ϕ suave con $\phi(0) = h'(0)$ y $h(t) = t\phi(t)$.

Demostración. Basta tomar $\phi(t) = \int_0^1 h'(st) ds$. □

Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica, $t_0 \in [0, a]$ y V un campo de vectores sobre γ . Definamos el **índice**

$$I_{t_0}(V, V) := \int_0^{t_0} \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle dt.$$

El siguiente lema nos dirá que, de no haber puntos conjugados de por medio, los campos de Jacobi tendrán índice mínimo entre los V con ciertos valores de contorno.

Lema 2.19 (del índice). Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica sin puntos conjugados a $\gamma(0)$. Sea J un campo de Jacobi con $\langle J, \gamma' \rangle = 0$. También tomemos un campo de vectores con $\langle V, \gamma' \rangle = 0$. Si $J(0) = V(0) = 0$ y $J(t_0) = V(t_0)$, se tendrá que

$$I_{t_0}(J, J) \leq I_{t_0}(V, V), \quad \text{con igualdad si } V = J.$$

Demostración. Recordemos que los campos de Jacobi sobre γ con $J(0) = 0$ y $J \perp \gamma'$ tienen dimensión $n - 1$, y por tanto tienen una base $\{J_1, \dots, J_{n-1}\}$, que podremos suponer ortonormal.

Para $t > 0$, uno puede escribir $V(t) = \sum f_i(t)J_i(t)$, con f_i funciones diferenciables a trozos en $(0, a]$. Vamos a intentar estirar esa construcción a $t = 0$. Para ello escribamos $J_i = tA_i$, con $A_i(0) = J'_i(0)$. Estos A_i serán linealmente independientes en $t = [0, a]$. Con ellos podremos escribir

$$V(t) = \sum g_i(t)A_i(t) \quad \forall t \in [0, a],$$

donde $g_i(0) = 0$ para todo i . Por el lema anterior, $g_i(t) = th_i(t)$ para cierta h_i suave en $t \in [0, a]$. Además, si $t > 0$ tenemos que $g_i(t) = tf_i(t)$. O sea que h_i extienden de forma suave las f_i a $t = 0$.

Aclarado eso, probemos la identidad

$$(*) \quad \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle = \left\langle \sum_i f'_i J_i, \sum_j f'_j J_j \right\rangle + \frac{d}{dt} \left\langle \sum_i f_i J_i, \sum_j f_j J_j \right\rangle,$$

válida en los subintervalos donde f_i es diferenciable. Para ello utilizaremos que, por linealidad de R ,

$$R(\gamma', V)\gamma' = \sum_i f_i R(\gamma', J_i)\gamma' = \sum_i -f_i J''_i.$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle &= \left\langle \sum f'_i J_i + \sum f_i J'_i, \sum f'_j J_j + f_j J'_j \right\rangle + \left\langle \sum f_i J''_i, \sum f_j J_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum f'_i J_i, \sum f'_j J_j \right\rangle + \left\langle f'_i J_i, \sum f_j J'_j \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum f_i J'_i, \sum f'_j J_j \right\rangle + \left\langle \sum f_i J'_i, \sum f_j J'_j \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum f_i J''_i, \sum f_j J_j \right\rangle \end{aligned}$$

Busquemos encontrar algunos de esos cinco sumandos en nuestro objetivo, el lado derecho de (*):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \sum f_i J_i, \sum f_j J'_j \right\rangle &= \left\langle \sum f'_i J_i, \sum f_j J'_j \right\rangle + \left\langle f_i J'_i, \sum f_j J'_j \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum f_i J_i, \sum f'_j J'_j \right\rangle + \left\langle \sum f_i J_i, \sum f_j J''_j \right\rangle \end{aligned}$$

Ciertamente, podemos encontrar los primer, segundo y cuarto sumandos de esta ecuación en la anterior (segundo, cuarto y quinto respectivamente). Sustituyendo esto, tenemos

$$\begin{aligned} \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V) \gamma', V \rangle &= \left\langle \sum f'_i J_i, \sum f'_j J'_j \right\rangle + \frac{d}{dt} \left\langle \sum f_i J_i, \sum f_j J'_j \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum f_i J'_i, \sum f'_j J'_j \right\rangle - \left\langle \sum f_i J_i, \sum f'_j J'_j \right\rangle. \end{aligned}$$

Obsérvese que, de cancelarse los dos últimos sumandos habremos probado (*). Y ciertamente se cancelarán, ya que si definimos $h(t) = \langle J'_i, J_j \rangle - \langle J_i, J'_j \rangle$, tendremos que

$$h'(t) = (\langle J''_i, J_j \rangle - \langle J_i, J''_j \rangle) + (\langle J'_i, J'_j \rangle - \langle J'_i, J'_j \rangle) = 0,$$

pues la segunda resta se cancela de manera obvia, y la primera utilizando la ecuación de Jacobi y las simetrías de $\langle R(\cdot, \cdot), \cdot \rangle$. Como además $h(0) = 0$, $h(t)$ se anulará para todo t .

Demostrada (*), veamos qué pasa con el índice:

$$\begin{aligned} I_{t_0}(V, V) &= \int_0^{t_0} \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V) \gamma', V \rangle dt \\ &= \left\langle \sum f_i J_i, \sum f_j J'_j \right\rangle \Big|_{t=t_0} + \int_0^{t_0} \langle f'_i J_i, \sum f'_j J'_j \rangle dt. \end{aligned}$$

Como esa última integral es de una función positiva, lo menor que puede ser es cuando $f'_i = 0$. Eso implicaría que f_i fuese constante, y que V fuese un campo de Jacobi.

Obsérvese que también hemos probado que

$$I_{t_0}(J, J) = \left\langle \sum f_i J_i, \sum f_j J'_j \right\rangle \Big|_{t=t_0} = \langle J(t_0), J'(t_0) \rangle. \quad \square$$

Sin más dilación, el teorema de Rauch:

Teorema 2.20 (Rauch). *Tomemos dos geodésicas $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ y $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \tilde{M}$, definidas en variedades riemannianas M y $\tilde{M}$ con dimensiones n y $n + k$ respectivamente. Sean J y $\tilde{J}$ campos de Jacobi sobre ellas, con*

$$J(0) = \tilde{J}(0), \quad \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = \langle \tilde{J}'(0), \tilde{\gamma}'(0) \rangle, \quad y \quad |J'(0)| = |\tilde{J}'(0)|.$$

Además, supongamos que $\tilde{\gamma}$ no contiene puntos conjugados a $\gamma(0)$. Si $\forall x \in T_{\gamma(t)}M$, $\forall \tilde{x} \in T_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{M}$ se tiene

$$\tilde{K}(\tilde{x}, \tilde{\gamma}'(t)) \geq K(x, \gamma'(t)),$$

entonces tendremos que

$$|\tilde{J}(t)| \leq |J(t)| \quad \text{para todo } t \in [0, a].$$

Si además se da la igualdad en un t_0 , también la habrá en las curvaturas.

Demostración. Por la proposición A.34, las primeras hipótesis nos dirán que

$$\langle J(t), \gamma(t) \rangle = \langle \tilde{J}(t), \tilde{\gamma}(t) \rangle.$$

Esto implicará que las componentes de J y $\tilde{J}$ tangenciales a su geodésica coincidirán, así que podemos descartarlas y suponer ese producto igual a 0.

Si $|J'(0)| = |\tilde{J}'(0)| = 0$, ambos campos de Jacobi son triviales, así que también descartaremos ese caso.

Definamos $|J|^2 = v(t)$ y $|\tilde{J}|^2 = \tilde{v}(t)$. Que $\tilde{\gamma}$ no tenga puntos conjugados hará que $v/\tilde{v}$ sea una función bien definida. Además, por la regla de l'Hopital,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t)}{\tilde{v}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v'(t)}{\tilde{v}'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v''(t)}{\tilde{v}''(t)} = \frac{|J'(0)|^2}{|\tilde{J}'(0)|^2} = 1.$$

Bastaría ver que $v/\tilde{v}$ sea no decreciente, es decir, que tenga derivada ≥ 0 . Equivalentemente, bastaría que $v'\tilde{v} \geq v\tilde{v}'$.

Vamos a por ello. Fijemos un $t_0 \in (0, a]$. Si $v(t_0) = |J(t_0)|^2 = 0$, entonces $v'(t_0) = 2\langle J'(t_0), J(t_0) \rangle = 0$ y esa desigualdad se cumplirá trivialmente. Así que ignorando esos casos, definimos los campos de Jacobi

$$U(t) = \frac{1}{\sqrt{v(t_0)}} J(t), \quad \text{y} \quad \tilde{U}(t) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}(t_0)}} \tilde{J}(t).$$

Se cumple que

$$\frac{v'(t_0)}{v(t_0)} = \frac{2\langle J'(t_0), J(t_0) \rangle}{\langle J(t_0), J(t_0) \rangle} = 2I_{t_0}(U, U),$$

y también se cumplirá la versión con tildes. Así, bastará probar que $I_{t_0}(\tilde{U}, \tilde{U}) \leq I_{t_0}(U, U)$ para completar la prueba. Para ello, busquemos una manera de “incluir” el campo U en $\tilde{M}$ y aplicar el lema del índice que hemos probado antes.

Consideremos $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{n+k}\}$ bases ortonormales sobre γ y $\tilde{\gamma}$ obtenidas mediante transporte paralelo. Podemos suponer que $e_1(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$, $e_2(t_0) = U(t_0)$, y lo mismo para sus contrapartes con tildes.

Definiremos una aplicación φ que transforma vectores tangentes sobre γ a vectores tangentes sobre $\tilde{\gamma}$ de forma subordinada a estas bases. En concreto, para $V = \sum g_i(t)e_i(t)$ se define

$$\varphi V = \sum g_i(t)\tilde{e}_i(t).$$

Obsérvese que para campos V_1, V_2 sobre γ , se cumple

$$\begin{aligned} \langle \varphi V_1, \varphi V_2 \rangle &= \langle V_1, V_2 \rangle, \\ (\varphi V_1)' &= \varphi(V_1'), \end{aligned}$$

pues al trabajar con transportes paralelos todo se reduce a las g_i .

Con esas dos propiedades y la hipótesis impuesta a la curvatura, podemos deducir que

$$\langle \varphi U', \varphi U' \rangle - \langle \varphi U, R(\gamma', \varphi U) \gamma' \rangle \leq \langle U', U' \rangle - \langle U, R(\gamma', U) \gamma' \rangle,$$

de donde se deduce que $I_{t_0}(\varphi U, \varphi U) \leq I_{t_0}(U, U)$. Por otro lado, como $\tilde{U}$ es un campo de Jacobi, el lema del índice (2.19) nos dice que

$$I_{t_0}(\tilde{U}, \tilde{U}) \leq I_{t_0}(\varphi U, \varphi U) \leq I_{t_0}(U, U),$$

lo que termina de demostrar el teorema. $\square$

El teorema de Rauch tendrá una infinidad de aplicaciones. Por ejemplo, nos dará una manera de comparar longitudes entre variedades:

Proposición 2.21. *Sean $\tilde{M}$ y M dos variedades de dimensión n tal que las curvaturas seccionales de la primera acoten por arriba las de la segunda. Fijemos también una isometría lineal $i : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$. Tomemos $r > 0$ para que $\exp_p|_{B_r(0)}$ sea difeomorfismo a su imagen, y $\exp_{\tilde{p}}|_{\tilde{B}_r(0)}$ sea no singular.*

Por último, sea $c : [0, a] \rightarrow \exp_p(B_r(0))$ una curva diferenciable, y $\tilde{c} = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} \circ c$. Entonces $\ell(c) \geq \ell(\tilde{c})$.

Demostración. Consideremos la curva $\hat{c} = \exp_p^{-1} \circ c$ en $T_p M$. Podemos definir una superficie parametrizada

$$f(s, t) = \gamma_s(t) = \exp_p(t\hat{c}(s)).$$

Como vimos en su momento, $\frac{\partial f}{\partial s}(t, s)$ define un campo de Jacobi J_s sobre cada curva γ_s . Además

$$J'_s(0) = \frac{D}{dt} ((d\exp_p)_{t\hat{c}(s)}(t\hat{c}'(s))) = \hat{c}'(s).$$

Por otro lado, consideremos

$$\tilde{f}(s, t) = \tilde{\gamma}_s(t) = \exp_{\tilde{p}}(ti(\hat{c}(s))),$$

y el campo de Jacobi $\tilde{J}_s = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s}$.

Se cumplen las hipótesis del teorema de Rauch, pues $\tilde{J}_s(0) = 0$, $\tilde{J}_s(1) = \tilde{c}'(s)$ y $\tilde{J}'_s(0) = i \circ \hat{c}'(s)$. Además, siendo i una isometría, $|\tilde{J}'_s| = |J'_s|$ en $t = 0$, y

$$\langle \tilde{J}'_s(0), \tilde{\gamma}'_s(0) \rangle = \langle i \circ \hat{c}'(s), i \circ \gamma'_s(0) \rangle = \langle \hat{c}'(s), \gamma'_s(0) \rangle = \langle J'_s(0), \gamma'_s(0) \rangle.$$

Aplicando el teorema concluimos que

$$|\tilde{c}'(s)| = |\tilde{J}_s(1)| \leq |J_s(1)| = |c'(s)|,$$

e integrando completamos la proposición. $\square$

Otra aplicación un poco más relacionada con nuestro trabajo es como unas acotaciones en la curvatura $0 < L \leq K \leq H$ controlarán la distancia entre puntos conjugados:

Proposición 2.22. *Sea M una variedad riemanniana con curvatura seccional K que satisfaga*

$$0 < L \leq K \leq H,$$

para dos constantes H y L . Sea γ una geodésica en M . Entonces, la distancia d entre dos puntos conjugados consecutivos de γ satisface

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

Demostración. Para obtener la desigualdad $d \geq \pi/\sqrt{H}$ compararemos la variedad M con la esfera $S^n(H)$ de curvatura seccional constante H .

En curvatura seccional constante, podemos suponer que el campo de Jacobi $J(t)$ es de la forma $f(t) \cdot w(t)$, para $w(t)$ un transporte paralelo a lo largo de $\gamma(t)$, y $f(t)$ una función. Así la ecuación de Jacobi se reduce a $f''(t) + Hf(t) = 0$, que tiene fácil solución. Si $f(0) = 0$, tendremos que

$$f(t) = C \cos(\sqrt{H}t),$$

para alguna constante C . En particular, el primer cero con $t > 0$ de f será $t = \pi/\sqrt{H}$.

Sea $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ una geodésica normalizada con $\gamma(0) = p$, y J un campo de Jacobi sobre γ tal que $J(0) = 0$ y $\langle J, \gamma' \rangle = 0$. Por otro lado, elijamos un punto $\tilde{p} \in S^n(H)$ y una geodésica normalizada $\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow S^n(H)$ con $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$. Sea $\tilde{J}$ un campo de Jacobi sobre $\tilde{\gamma}$ con $\tilde{J}(0) = 0$ y $\langle \tilde{J}, \tilde{\gamma}' \rangle = 0$. Supongamos además que $|\tilde{J}'(0)| = |J'(0)|$.

Por el calculo hecho arriba, $\tilde{\gamma}$ no tendrá puntos conjugados en $(0, \pi/\sqrt{H})$. Así aplicando el teorema de comparación de Rauch, $|J(t)| \geq |\tilde{J}(t)| > 0$, si $t \in (0, \pi/\sqrt{H})$. Y por tanto la distancia d entre p y su primer punto conjugado cumple $d \geq \pi/\sqrt{H}$.

Para obtener la desigualdad $d \leq \pi/\sqrt{L}$ se hace un análogo con la esfera $S^n(L)$. Si $d > \pi/\sqrt{L}$, aplicaría el teorema de comparación de Rauch y $S^n(L)$ tendría puntos conjugados a distancia mayor que $\pi/\sqrt{L}$, cosa que no tiene sentido. $\square$

2.4. El teorema del índice de Morse

En esta sección vamos a profundizar en el significado de $I_a(V, V)$, cantidad que nos hemos encontrado a lo largo de las dos secciones anteriores. Es una forma cuadrática de campos de vectores, y resultará que cuenta el número de puntos conjugados en un segmento geodésico. Como consecuencia se seguirá que **los puntos conjugados formarán un conjunto discreto**.

Fijemos una geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$, y llamemos $\mathcal{V}$ al espacio vectorial de campos de vectores sobre γ , diferenciables a trozos y nulos en los extremos ($V(0) = V(a) = 0$).

La **forma del índice** es una forma bilineal simétrica $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I_a(V, W) = \int_0^a \langle V', W' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', W \rangle dt.$$

No haré muchas distinciones entre la forma bilineal simétrica y su forma cuadrática asociada. Debería reconocerse por el contexto, pero generalmente hablaremos de la segunda.

Definición 2.23. El **índice** de una forma bilineal f definida en un espacio vectorial V es la máxima dimensión de un subespacio $W \subset V$ tal que $f|_W$ sea definida negativa.

La **nulidad** será la dimensión del subespacio $\{v \in V : f(v, w) = 0 \ \forall w \in V\}$. Si esta cantidad no es cero, diremos que f es **degenerada**.

Teorema 2.24 (del índice de Morse). *El índice de la forma I_a es finito, y es igual al número de puntos conjugados a $\gamma(0)$ en $\gamma((0, a))$, contando multiplicidades.*

Vamos a establecer la maquinaria con la que probar el resultado.

Proposición 2.25. *Un $V \in \mathcal{V}$ anula I_a si y solo si es un campo de Jacobi sobre γ .*

Demostración. Escribamos la forma I_a como sigue:

$$I_a(V, W) = \int_0^a \langle V'' + R(\gamma', V)\gamma', W \rangle dt - \sum_{j=1}^{k-1} \langle V'(t_j^+) - V'(t_j^-), W(t_j) \rangle.$$

Es obvio que si V es Jacobi, la forma se anulará. Por otro lado, si $I_a(V, W) = 0$ para todo W , podemos tomar $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función suave que se anule exactamente en los t_j donde V no es derivable. Así,

$$0 = I_a(V, W) = \int_0^a -f(t)|V'' + R(\gamma', V)\gamma'|^2 dt,$$

es decir que V satisface la ecuación de Jacobi (J) en los (t_{j-1}, t_j) . Para ver que V es regular tomamos un campo T con $T(t_j) = V'(t_j^+) - V'(t_j^-)$. Así,

$$0 = I_a(V, T) = - \sum_{j=1}^{k-1} |V'(t_j^+) - V'(t_j^-)|^2,$$

y V es derivable en $(0, a)$, por lo que es un campo de Jacobi. $\square$

Corolario 2.26. *I_a es degenerada si y solo si $\gamma(0), \gamma(a)$ son puntos conjugados. Recordemos que los vectores de $\mathcal{V}$ por definición se anulan en los extremos.*

Observación. Como $\gamma([0, a])$ es compacto, puedo tomar una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = a$ tal que $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ esté contenido en un entorno totalmente normal. Ahí γ es minimizante, y por ello no tendrá puntos conjugados. Fijemos esta subdivisión.

Definamos también el subespacio $\mathcal{V}^- \subset \mathcal{V}$, formado por los campos V tales que $V|_{(t_i, t_{i+1})}$ sean de Jacobi. Obsérvese que este espacio tendrá dimensión finita. Por último, sea $\mathcal{V}^+$ el conjunto de los campos W con $W(t_1) = \dots = W(t_{k-1}) = 0$.

Proposición 2.27. $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-$. Y ambos subespacios son ortogonales respecto de I_a . Además, $I|_{\mathcal{V}^+}$ es definida positiva.

Demostración. Sea $V \in \mathcal{V}$ y $W \in \mathcal{V}^-$ tal que $W(t_j) = V(t_j)$. Este W se puede construir a trozos como el campo de Jacobi J en $[t_i, t_{i+1}]$ con datos $J(t_i) = V(t_i)$ y $J(t_{i+1}) = V(t_{i+1})$. Existe al no haber puntos conjugados en ese intervalo.

Obsérvese que $V - W \in \mathcal{V}^+$. Esto aclara la descomposición en suma directa.

Ahora, si $X \in \mathcal{V}^-$ y $Y \in \mathcal{V}^+$,

$$I_a(X, Y) = - \int (\text{ecuación de Jacobi sobre } W) dt - \sum (Y \text{ evaluado donde se anula}) = 0.$$

Veamos finalmente que $I_a|_{\mathcal{V}^+}$ es definida positiva. Como $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ es minimizante, la energía E de la variación definida por $V \in \mathcal{V}^+$ tomará un mínimo. Así, $E''(0) \geq 0$, y por la fórmula de la segunda variación, $I_a(V, V) \geq 0$.

Ahora supongamos que $V \in \mathcal{V}^+ \setminus \{0\}$ con $I_a(V, V) = 0$ y veamos que V anula I_a . Si $W \in \mathcal{V}^-$, por ortonormalidad ya sabemos que $I_a(V, W) = 0$. Y si $W \in \mathcal{V}^+$ sabemos que

$$0 \leq I_a(V + cW, V + cW) = 2cI_a(V, W) + c^2I_a(W, W).$$

Es decir, existen números reales $A \geq 0$ y B tales que $Ac^2 + 2Bc \geq 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Esto solo tiene sentido si $B = 0$, es decir, $I_a(V, W) = 0$.

Ahora, como V anula I_a debe ser un campo de Jacobi. Y como vale cero en los t_j tiene que ser el campo $V \equiv 0$. La forma es efectivamente definida positiva en $\mathcal{V}^+$. $\square$

Corolario 2.28. El índice de I_a coincide con el índice de $I_a|_{\mathcal{V}^-}$. En particular será un número finito. Lo mismo ocurre con la nulidad.

Y por fin estamos preparados para demostrar el teorema del índice de Morse:

Demostración al teorema del índice. Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica, y tomemos γ_t la restricción a $[0, t] \subset [0, a]$. Sea I_t su forma del índice, e $i(t)$ el índice de esa forma. Observemos que, como $\gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ es minimizante $i(t)$ tendrá que valer 0 en un entorno de 0.

Además, $i(t)$ es no decreciente, pues si tenemos un subespacio $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}(0, t)$ (siendo este último el espacio $\mathcal{V}$ para la geodésica γ_t) donde se anula I_t , cada campo $V \in \mathcal{U}$ se extiende a $[0, \bar{t}]$ para algún $\bar{t} > t$, simplemente haciendo $\bar{V}(s) = V(s)$ si $s < t$ y $\bar{V}(s) = 0$ si $s > t$.

Ahora, $i(t)$, como no depende de la subdivisión podríamos elegir una para que t no coincida con los t_i . Así, el índice de I_t es el índice de $I_t|_{\mathcal{V}^-(0, t)}$. Y como los vectores de $\mathcal{V}^-$ se determinan por sus valores en los t_i podemos escribir

$$\mathcal{V}^-(0, t) = T_{\gamma(t_1)}M \oplus \cdots \oplus T_{\gamma(t_{j-1})}M = S_j$$

Mientras variemos t en (t_{j-1}, t_j) , los $\mathcal{V}^-(0, t)$ serán isomorfos como espacio vectorial.

Podemos considerar I_t como una familia de formas cuadráticas definida en S_j , que varía continuamente con t . Ahora, daremos un par de lemas sobre $i(t)$ que resolverán la demostración:

Lema 2.29. Si $\varepsilon > 0$ es pequeño, $i(t - \varepsilon) = i(t)$.

Demostración. Ya sabemos que $i(t - \varepsilon) \leq i(t)$. Por otro lado, sea $\bar{S}$ un subespacio de S_j donde I_t sea definida negativa y $\dim(\bar{S}) = i(t)$. Por continuidad existirá $\varepsilon > 0$ tal que $I_{t-\varepsilon}$ sigue siendo definida negativa en $\bar{S}$, así que $i(t - \varepsilon) \geq i(t)$, y tenemos la igualdad. $\square$

Lema 2.30. Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, $i(t + \varepsilon) = i(t) + d$, siendo d la nulidad de I_t .

Demostración. Como $\dim S_j = n(j - 1)$, I_t será definida positiva en un subespacio de dimensión $n(j - 1) - i(t) - d$. Por continuidad, $I_{t+\varepsilon}$ también. Así que

$$i(t + \varepsilon) \leq n(j - 1) - [n(j - 1) - i(t) - d] = i(t) + d.$$

La otra desigualdad se seguirá del lema del índice 2.19. Sea $V \in S_j$ con $V(t_{j-1}) \neq 0$, y sea V_{t_0} el campo de Jacobi a trozos que coincide vale $V(t_i)$ en t_i , pero que se desvanece en $t_0 \in (t_{j-1}, t_j)$.

Tomemos también W_{t_0} el vector en $\gamma([0, t + \varepsilon])$ coincidente con V_{t_0} en $[0, t_0]$ y nulo en $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. El lema del índice nos dirá que

$$I_{t_0}(V_{t_0}, V_{t_0}) = I_{t_0+\varepsilon}(W_{t_0}, W_{t_0}) > I_{t_0+\varepsilon}(V_{t_0+\varepsilon}, V_{t_0+\varepsilon}).$$

Por otro lado, para $V \in S_j$ con $I_t(V, V) \leq 0$, entonces $I_t(V, V) < 0$. Es decir, I_t se hará negativa en los vectores del espacio nulo. Por tanto, $i(t + \varepsilon) \geq i(t) + d$, lo que prueba la igualdad. $\square$

Gracias a estos lemas sabemos que $i(t)$ es escalonada, continua por la izquierda, y con un escalon de altura d según haya puntos donde se anule I_t . Y precisamente esos son los puntos conjugados a $\gamma(0)$, luego hemos demostrado el teorema del índice. $\square$

Podemos entender el teorema del índice de Morse como una generalización de este resultado clásico:

Corolario 2.31 (Jacobi). Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ es una geodésica tal que $\gamma(a)$ no sea conjugado a $\gamma(0)$. Entonces γ no tiene puntos conjugados en $(0, a)$ si y solo si para toda variación existe un δ tal que $E(s) < E(\delta)$ si $0 < |s| < \delta$. En particular, que γ sea minimizante implica la ausencia de puntos conjugados.

Demostración. De haber puntos conjugados, tenemos un campo de Jacobi J nulo en $t = 0, t_0$. Por lo que hemos visto, a partir de t_0 habrá campos que hagan negativo el índice. La variación por uno de esos campos tendrá segunda derivada negativa, de donde deducimos el corolario. $\square$

Corolario 2.32. Los puntos conjugados forman un conjunto discreto.

Como curiosidad y para enlazar un poco con el capítulo anterior, la ecuación transversal de Jacobi será muy útil para contar puntos conjugados a lo largo de una geodésica. Se puede consultar por ejemplo los artículos [8] y [10].

2.5. Grupos fundamentales en curvatura negativa.

Nuestro próximo objetivo será obtener información sobre $\pi_1(M)$, siendo M una variedad completa con curvatura $K < 0$. El grupo fundamental será especialmente importante en este caso, pues será el único grupo de homotopía no trivial. Esto es porque si $K < 0$ tendremos una variedad sin puntos conjugados (lema 2.5), y su recubridor universal será $\mathbb{R}^n$. Y claro, los grupos de homotopía de M de orden superior coinciden con los de su recubrimiento universal. Así, $\pi_k(M) \cong \pi_k(\mathbb{R}^n) = \{1\}$ para $k \geq 2$.

Además, la hipótesis de $K < 0$ nos dará mucha información sobre el grupo fundamental. Veremos entre otras cosas que no será abeliano y que sus subgrupos abelianos serán cíclicos infinitos.

De camino probaremos un teorema de Cartan sobre la existencia de geodésicas cerradas en una clase de homotopía. Este nos servirá para ver que las transformaciones recubridoras actúan sobre M fijando al menos una geodésica, hecho que nos será útil para sacar información sobre el grupo fundamental de una variedad a partir de la estructura riemanniana.

Fijemos la notación. Consideremos $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ el recubridor universal de M , con la métrica inducida. Llamemos $A(\tilde{M}) \cong \pi_1(M)$ a los automorfismos $f : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ tales que $\pi \circ f = \pi$ (las transformaciones recubridoras). El isomorfismo entre $A(\tilde{M})$ y $\pi_1(M)$ viene dado porque cada $f \in A(\tilde{M})$ se determina por la imagen de un punto. Tomando un levantamiento de un camino $[\gamma] \in \pi_1(M)$, la aplicación en $A(\tilde{M})$ asociada viene dada por enviar el punto inicial del camino al punto final. Hay más detalles sobre esto en la proposición 1.39 de [13].

Definición 2.33. Sea $\mathcal{L}$ un conjunto de caminos cerrados en M . Diremos que es una **clase libre de homotopía** si dadas $f \in \mathcal{L}$ y $g : I \rightarrow M$, cuando existe una homotopía entre f y g entonces $g \in \mathcal{L}$. Llamemos $C_1(M)$ al conjunto de estas clases.

La diferencia con las clases de equivalencia en el grupo fundamental es simplemente que aquí también permitimos al extremo de cada curva desplazarse.

Llamaremos **geodésica cerrada** a una curva cerrada que sea geodésica en todos sus puntos. Si perdemos la regularidad en un punto, será un **lazo geodésico**.

Teorema 2.34 (Cartan). *Si M es una variedad compacta y $\mathcal{L} \rightarrow C_1(M)$ no es la clase de la curva constante, existe una geodésica cerrada en $\mathcal{L}$.*

Demostración. Sea d el ínfimo de las longitudes de curvas en $\mathcal{L}$. Al no ser la clase trivial, $d > 0$. Podemos tomar curvas $\gamma_j \in \mathcal{L}$ tales que $\ell(\gamma_j) \rightarrow d$. Además, podemos suponer que sean geodésicas a trozos, definidas en $[0, 1]$ con velocidad constante.

Si $L = \sup \ell(\gamma_j)$ (que es finito, pues $\ell(\gamma_j) \rightarrow d$), entonces tenemos que

$$d(\gamma_j(t_1), \gamma_j(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} |\gamma_j'(t)| dt \leq L(t_2 - t_1).$$

Es decir que tendremos equicontinuidad en el conjunto $\{\gamma_j\}$. Además, como M es compacta, el conjunto de curvas estará equiacotado. Tendrá que existir una subsucesión (a

la que renombramos γ_j) convergente uniformemente a una nueva curva $\gamma_0 : [0, 1] \rightarrow M$. De momento solo sabemos que esa curva es continua.

Fijemos una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ tal que $\gamma_0([t_j, t_{j+1}])$ esté contenido en un entorno totalmente normal. Definamos una nueva curva γ como concatenación de los segmentos geodésicos $\gamma^i = \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ que unen $\gamma_0(t_i)$ con $\gamma_0(t_{i+1})$.

Claramente $\gamma \in \mathcal{L}$, y por tanto $\ell(\gamma) \geq d$. Vamos a demostrar que de hecho $\ell(\gamma) = d$. De no ser así, podremos tomar $\varepsilon = \frac{\ell(\gamma) - d}{2k+1} > 0$. Tendrá que existir un j tal que

$$\ell(\gamma_j) - d < \varepsilon \quad \text{y} \quad d(\gamma_j(t), \gamma_0(t)) < \varepsilon,$$

por la convergencia de $\ell(\gamma_j)$ y γ_j respectivamente.

Sea ahora γ_j^i el trozo $\gamma_j|_{[t_{i-1}, t_i]}$. Por cómo hemos elegido j se cumple que:

$$\sum_{i=1}^k (\ell(\gamma_j^i) + 2\varepsilon) = \ell(\gamma_j) + 2k\varepsilon < d + (2k+1)\varepsilon = \ell(\gamma) = \sum \ell(\gamma^i).$$

Por tanto existe un entero i tal que $\ell(\gamma_j^i) + 2\varepsilon < \ell(\gamma^i)$ (o no se daría esa desigualdad).

Pero entonces γ^i no es minimizante, pues uniendo γ_j^i con los extremos de γ^i añadiríamos una distancia de menos de 2ε , construyendo una curva aún más corta.

O sea que γ debe de ser minimizante en $\mathcal{L}$, y por tanto será geodésica a trozos. Para ver que también es regular en los puntos $p_i = \gamma(t_i)$ podemos tomar una bola convexa B centrada en p_i y elegir $q_1, q_2 \in \gamma \cap B$ (uno antes de p_i , otro después) de manera que el triángulo geodésico formado por p_i, q_1 y q_2 sea homotópico a un punto. La geodésica entre q_1 y q_2 será de longitud menor o igual al trozo de γ entre esos dos puntos. Y como γ era minimizante y el triángulo era contractible, estos trozos deben coincidir. En particular, γ será regular en todos sus puntos. $\square$

Como curiosidad, si M es una variedad simplemente conexa y compacta seguirá existiendo una geodésica cerrada, aunque la prueba de eso se sale de nuestro alcance.

Definición 2.35. Una isometría $f : M \rightarrow M$ es una **traslación** si fija una geodésica γ de M . Esta geodésica será un **eje** de la isometría.

Proposición 2.36. Sea M compacta y $\alpha \in A(\tilde{M})$. Entonces α es una traslación en $\tilde{M}$.

Demostración. Asumamos que $\alpha \neq \text{id}$, pues de otra manera no hay nada que probar. Fijemos $p \in M$ y $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$. Sea $g \in \pi_1(M; p)$ la clase correspondiente a unir $\tilde{p}$ con $\alpha(\tilde{p})$.

Por el teorema de Cartan existirá una geodésica cerrada γ en la clase de homotopía (libre) de g . Sea ahora un punto $q \in \gamma$. La geodésica γ tendrá que ser homotópica al camino cerrado $\sigma g \sigma^{-1}$ (pues claramente está en la clase de g), para σ un camino que une p con q . Tomemos $\tilde{q}$ el punto final del levantamiento $\tilde{\sigma}$ definido por $\sigma(0) = \tilde{p}$ (es decir, $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$). Y tomemos $\tilde{\gamma}$ el levantamiento de γ con $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{q}$.

Veamos que α fija $\tilde{\gamma}$. Sea $\alpha_{\tilde{q}} \in A(\tilde{M})$ la transformación recubridora correspondiente a $[\gamma] \in \pi_1(M; q)$, obtenida llevando $\tilde{q}$ al punto final de $\tilde{\gamma}$, y extendiendo la aplicación al resto de puntos de manera coherente. Como $\gamma \sim \sigma g \sigma^{-1}$, sus levantamientos desde $\tilde{q}$ tendrán el mismo punto final. Luego $\alpha(\tilde{q}) = \alpha_{\tilde{q}}(\tilde{q})$. Así pues, $\tilde{q}$ es fijado por $\alpha \circ \alpha_{\tilde{q}}^{-1}$, y serán la misma transformación recubridora.

Así, si $\tilde{\gamma}(s)$ es un punto del levantamiento de γ por $\tilde{q}$, tendremos que $\alpha(\tilde{\gamma}(s)) = \alpha_{\tilde{q}}(\tilde{\gamma}(s)) \in \tilde{\gamma}$, o sea que $\tilde{\gamma}$ es una geodésica invariante por α . $\square$

Ahora centraremos nuestra atención en deducir propiedades algebraicas de los grupos fundamentales de variedades con $K < 0$.

Teorema 2.37 (Preissman). *Sea M una variedad compacta de curvatura negativa. Todo subgrupo abeliano de $\pi_1(M)$ será cíclico infinito.*

Dividiremos la demostración en cuatro sencillos lemas. El primero es (casi) geometría elemental, pues hablaremos de triángulos, vértices y ángulos.

Definición 2.38. Un **triángulo geodésico** T es un conjunto formado por tres geodésicas minimizantes normalizadas (llamadas **lados**). Estas deben cumplir

$$\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0) \quad i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Se definen también los **vértices** $\gamma_i(0)$ y **ángulos** $|\pi - \arccos \langle \gamma'_i(l_i), \gamma'_{i+1}(0) \rangle|$ para $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Lema 2.39. *Sea $\tilde{M}$ una variedad completa, simplemente conexa con $K \leq 0$. Sean puntos $a, b, c \in \tilde{M}$. Estos serán los vértices de único triángulo T . Llamemos α, β y γ a sus respectivos ángulos. Sean A, B, C las longitudes de los lados opuestos. Entonces, se cumplirá*

1. $A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma \leq C^2$ (con desigualdad estricta para $K < 0$)
2. $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

La demostración consistirá en utilizar el difeomorfismo $\exp_c$ para comparar los triángulos con la geometría plana.

Demostración. 1. Sean γ_A, γ_B y γ_C los lados del triángulo. Definamos $\Gamma_i = \exp_c^{-1}(\gamma_i)$, para $i \in \{A, B, C\}$. Estas serán curvas en $T_c \tilde{M}$, y de hecho Γ_A, Γ_B serán rectas que pasan por el origen con $\ell(\Gamma_A) = A$ y $\ell(\Gamma_B) = B$.

Sea Γ_0 la línea recta entre $\exp_c^{-1}(a)$ y $\exp_c^{-1}(b)$. Se cumplirá que $\ell(\Gamma_0) \leq \ell(\Gamma_C)$. Por otro lado, la geometría plana dice que

$$\ell(\Gamma_0) = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma.$$

Por último la comparación de longitudes del teorema de Rauch (proposición 2.21) resulta en $\ell(\Gamma_c) \leq \ell(\gamma_c)$, de donde se deduce la primera afirmación.

2. Como $C = d(a, b)$, $B = d(a, c)$ y $A = d(b, c)$, la desigualdad triangular acota un lado por la suma de los otros dos. Así existirá un triángulo en el plano (¡de los de siempre!) con lados de longitud A, B y C . Este tendrá ángulos α', β' y γ' que cumplan $\alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$. Utilizando el primer punto se tiene que

$$A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma \leq C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma'.$$

De ahí se deduce que $\gamma \leq \gamma'$. Permutando los lados en la desigualdad tendremos también $\alpha \leq \alpha'$ y $\beta \leq \beta'$. Sumándolo todo:

$$\alpha + \beta + \gamma \leq \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$$

□

Lema 2.40. Sea $\tilde{M}$ variedad completa, simplemente conexa con $K < 0$. Sea $f : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ una traslación no trivial sobre $\tilde{\gamma}$. Entonces $\tilde{\gamma}$ es la única geodésica invariante por f .

Demostración. Supongamos que f fije dos geodésicas $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$. Como f no tiene puntos fijos, $\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\gamma}_2 \neq \emptyset$, o las geodésicas se intersectarían en varios puntos. Esto es imposible, pues por el teorema de Hadamard $\exp_p : T_p \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ es un difeomorfismo que lleva las geodésicas que pasan por p a las rectas vectoriales.

Tomemos ahora $\tilde{p}_1 \in \tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{p}_2 \in \tilde{\gamma}_2$. Sea $\tilde{\gamma}_3$ una geodésica minimizante entre esos dos puntos. Tendremos pues un cuadrilátero formado por $\tilde{p}_1, f(\tilde{p}_1), \tilde{p}_2$, y $f(\tilde{p}_2)$. Al ser f isometría, tendrá que tener ángulos $\alpha, \pi - \alpha, \beta, \pi - \beta$, con suma 2π . Así que dividiéndolo en dos triángulos, uno de ellos tendrá que tener suma de ángulos $\geq \pi$. Esto contradice el lema anterior. □

Lema 2.41. Si $K < 0$ y $g : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ es una isometría sin puntos fijos que conmuta con una traslación f sobre $\tilde{\gamma}$, g sera otra traslación sobre $\tilde{\gamma}$.

Demostración. $g(\tilde{\gamma})$ es una geodésica. Y está fija por f , ya que $fg(\tilde{\gamma}) = gf(\tilde{\gamma}) = g(\tilde{\gamma})$. Así que por el lema anterior, $g(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. □

Lema 2.42. Si todos los elementos de un subgrupo $H \leq \pi_1(M)$ no trivial fijan $\tilde{\gamma}$, H será cíclico infinito.

Demostración. Fijemos $\tilde{p} \in \tilde{\gamma}$. Entendamos $\pi_1(M)$ como las transformaciones recubridoras en $\tilde{M}$. Definimos $\theta : H \rightarrow \mathbb{R} = \pm d(\tilde{p}, h(\tilde{p}))$, eligiendo el signo según $h(\tilde{p})$ tenga parámetro mayor o menor que $\tilde{p}$ en la geodésica.

Esto será un homomorfismo de grupos. Además es inyectivo, pues $h_1(\tilde{p}) = 0$ implica $h_1 = \text{id}$. Así que podemos entender H como subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Por tanto, H es denso o cíclico infinito. Y la primera opción no tiene sentido, pues la acción de $\pi_1(M)$ es propiamente discontinua. □

Demostración al teorema de Preissman. Tomemos $H < \pi_1(M)$ un subgrupo abeliano no trivial. Ya sabemos que sus elementos son traslaciones. Y la conmutatividad nos obliga a que estas traslaciones sean sobre la misma geodésica (lema 2.41). El lema anterior obliga entonces a que H sea cíclico infinito. □

El teorema de Preissman es una herramienta muy útil para ver que ciertas variedades no admitirán métricas con curvatura estrictamente negativa. Por ejemplo, el toro $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ tendrá grupo fundamental $\mathbb{Z}^n$, que es abeliano pero no cíclico cuando $n \geq 2$.

Este teorema admite una generalización a H soluble que, como no requiere mucho más esfuerzo, incluiremos en esta memoria. De camino probaremos otro interesante resultado:

Teorema 2.43. *Si M es una variedad compacta con curvatura $K < 0$, entonces $\pi_1(M)$ no es abeliano.*

La demostración es inmediata asumiendo el siguiente lema, de mayor generalidad:

Lema 2.44. *Sea M una variedad completa con $K \leq 0$. Si existe una geodésica $\tilde{\gamma}$ invariante por todo $\pi_1(M) \cong A(\tilde{M})$, M no será compacta.*

Demostración. Supongamos que exista tal $\tilde{\gamma}$. Fijemos un punto $\tilde{p} \in \tilde{\gamma}$. Consideremos también una geodésica $\tilde{\beta} : [0, t] \rightarrow \tilde{M}$ con dato inicial $\tilde{\beta}(0) = \tilde{p}$ y $\tilde{\beta}'(0) \perp \tilde{\gamma}'$.

Llamemos γ , p y β a las proyecciones por $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ de respectivos objetos. Consideremos α_t la geodésica minimizante entre $\beta(t)$ y p . Veamos que $\ell(\alpha_t) = t$.

Sea $\tilde{\alpha}_t$ el levantamiento de α_t desde el punto $\tilde{\beta}(t)$. Su punto final siempre estará en $\tilde{\gamma}$, al ser una geodésica invariante por $A(\tilde{M})$.

Como $K \leq 0$, y $\beta' \perp \gamma'$, el lema 2.39 nos dirá que $\ell(\tilde{\alpha}_t) \geq \ell(\tilde{\beta})$. Por otro lado

$$\ell(\tilde{\alpha}_t) = \ell(\alpha_t) \leq \ell(\beta) = \ell(\tilde{\beta}),$$

al construirse minimizante.

Así que efectivamente $\ell(\alpha_t) = t$, por lo que M no podrá ser compacta. $\square$

Gracias a esto podremos probar la generalización al teorema de Preissman de la que hablabamos:

Teorema 2.45 (Byers). *Si M es compacta con $K < 0$, y $H < \pi_1(M)$ es soluble, será cíclico infinito. Además $\pi_1(M)$ no tendrá un grupo cíclico de índice finito.*

Demostración. Que H sea soluble significa que existe una cadena

$$H_k = \{\text{id}\} \trianglelefteq H_{k-1} \cdots \trianglelefteq H_0 = H$$

tales que cada cociente H_i/H_{i+1} sea abeliano. En particular H_{k-1} es un subgrupo abeliano de $\pi_1(M)$, y por Preissman tendrá que ser cíclico infinito.

Sea $g \in H_{k-1}$ un generador del grupo, y $\tilde{\gamma}$ la geodésica invariante por g . Si $a \in H_{k-2}$, y $b \in H_{k-1}$, la combinación $(a^{-1}b^{-1}a)b$ está en H_{k-1} (por definición de subgrupo normal). Así, $a^{-1}b^{-1}ab = g^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Y ese elemento fija $\tilde{\gamma}$. Por tanto, $ba(\tilde{\gamma}) = ab(\tilde{\gamma})$, así que b fija $a(\tilde{\gamma})$. Y como $a(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$, por unicidad y el lema 2.42 el subgrupo H_{k-2} será cíclico infinito.

Repitiendo este argumento llegaremos a que H es cíclico infinito. Ahora, supongamos que $H \leq \pi_1(M)$ es cíclico de índice finito. Tomemos $g \in H$ un generador, y $\tilde{\gamma}$ la geodésica que fija. Sea $a \in \pi_1(M) \setminus H$. Como el índice es finito, $a^n \in H$, y por tanto $a^n(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$. Esto implica $a(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$, por unicidad en la geodésica que puede fijar a . Así que $\pi_1(M)$ tendría que ser cíclico infinito, lo que ya sabemos que no tiene sentido. $\square$

2.6. El conjunto de corte

Para cerrar este capítulo apuntando hacia las variedades sin puntos conjugados, vamos a hablar de cuáles son las consecuencias de un punto conjugado. Ya sabemos que tiene que ver con irregularidades en la aplicación exponencial. Por el teorema de Jacobi (corolario 2.31) en ellos se encontrará una posible obstrucción a la minimalidad en las geodésicas. Pero este tema se puede tratar con más profundidad. Para ello, demos la siguiente definición:

Definición 2.46. Sea $p \in M$ un punto en una variedad completa. Sea $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ un rayo geodésico desde p , normalizado. Ya sabemos que para t pequeño, $\gamma([0, t])$ es minimizante, es decir, se cumple que $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$. Y claramente, si para $t = t_1$ esa geodésica no es minimizante, para $t > t_1$ tampoco lo será.

Así, los parámetros donde el rayo es minimizante formarán un conjunto de la forma $[0, t_0]$ o $[0, \infty)$. Por tanto, si existe tal t_0 podemos definir **el punto de corte de p sobre γ** como $\gamma(t_0)$. Llamemos **conjunto de corte** al conjunto $C_m(p)$ formado por los puntos de corte de los diferentes rayos que parten de p .

Obsérvese que en una variedad compacta las distancias están acotadas, así que siempre habrá puntos de corte.

Proposición 2.47. Sea $\gamma(t_0)$ un punto de corte de $p = \gamma(0)$. Entonces

1. O bien $\gamma(t_0)$ es el primer punto conjugado de $\gamma(0)$ sobre γ ,
2. o bien existe otra geodésica σ de p a $\gamma(t_0)$ con $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$.

Recíprocamente, Tanto 1 como 2 implican que existe un $\tilde{t} \in [0, t_0]$ tal que $\gamma(\tilde{t})$ es punto de corte.

Demostración. Veamos primero la implicación directa. Tomemos tal t_0 , y elijamos una sucesión de números $\varepsilon_i > 0$ que decrezca a cero. Sean σ_i las geodésicas minimizantes de p a $\gamma(t_0 + \varepsilon_i)$.

Como la esfera unidad en $T_p M$ es compacta, podemos asumir tomando una sucesión que $\{\sigma'_i(0)\}$ es convergente. Tomemos la geodésica σ con valores iniciales $\sigma(0) = p$ y $\sigma'(0) = \lim_i \sigma'_i(0)$. Por continuidad será minimizante de p a $\gamma(t_0)$. Así que $\ell(\sigma) = \ell(\gamma)$. Si las geodésicas fuesen distintas tendríamos el punto 2. Así que supongamos que coincidan y que $\gamma(t_0)$ no es punto conjugado a p , y vamos a encontrar una contradicción.

Si $\gamma(t_0)$ no es un punto conjugado, $d \exp_p$ será no singular en $t_0\gamma'(0)$. Existirá entonces un entorno U de $t_0\gamma'(0)$ donde $\exp_p$ sea difeomorfismo. Escribamos también $\sigma(t_0 + \varepsilon) = \sigma_j(t_0 + \varepsilon'_j)$. Para ciertos $\varepsilon'_j > 0$ con $\varepsilon'_j \leq \varepsilon_j$ al ser minimizante cada σ_j .

Ahora, si ε_j es muy pequeño, ambos $(t_0 + \varepsilon'_j)\sigma'_j(0)$ y $(t_0 + \varepsilon_j)\gamma'(0)$ estarán en U . Así,

$$\exp_p(t_0 + \varepsilon_j)\gamma'(0) = \gamma(t_0 + \varepsilon_j) = \sigma_j(t_0 + \varepsilon'_j) = \exp_p(t_0 + \varepsilon'_j)\sigma'_j(0).$$

Y como $\exp_p$ es difeomorfismo en U , γ coincide con σ_j . Y esto contradice la minimalidad de t_0 . Por tanto tenemos la implicación directa.

Veamos ahora la implicación inversa. Supongamos 1. Como una geodésica no minimiza tras un punto conjugado, por el corolario 2.31 tendremos que $\tilde{t} \leq t$.

Ahora supongamos 2. Es decir, tenemos dos geodésicas γ y σ de p a $\gamma(t_0)$ con la misma longitud. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\sigma(t_0 - \varepsilon)$ y $\gamma(t_0 + \varepsilon)$ están en un entorno totalmente normal de $\gamma(t_0)$.

Ahí existirá una geodésica minimizante τ entre esos dos puntos. Empalmando la curva de p a $\sigma(t_0 - \varepsilon)$ con τ , deberá medir estrictamente menos que $t_0 + \varepsilon$. En particular, tendrá que ocurrir un punto de corte para $\tilde{t} \leq t_0 + \varepsilon$. Como ε era arbitrario, podemos hacerlo tender a cero, y $\tilde{t} \leq t_0$. $\square$

Corolario 2.48. *Si q es punto de corte de p por γ , entonces p es punto de corte de q por $-\gamma$. Es decir,*

$$q \in C_m(p) \iff p \in C_m(q),$$

pues tanto 1 como 2 son simétricas.

Corolario 2.49. *Si $q \in M \setminus C_m(p)$, existe una única geodésica minimizante de p a q .*

Gracias a todo esto sabemos que $\exp_p$ es inyectiva a una bola $B_r(p)$ solo si ese radio r es menor o igual que $d(p, C_m(p))$. Por eso es interesante la cantidad

$$i(M) := \inf_{p \in M} d(p, C_m(p)),$$

llamada el **radio de inyectividad de M** .

La proposición 2.47 dice que se pierde la minimalidad cuando hay un punto conjugado, o bien hay otra geodésica diferente con los mismos extremos. Pero de hecho, si no estamos en el primer caso sabremos que esa segunda geodésica no puede ser muy próxima a la primera. En concreto, veremos que la ausencia de puntos conjugados implicará que la geodésica será un mínimo local de la longitud en el espacio de curvas con los mismos extremos. Más rigurosamente:

Proposición 2.50. *Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica. Llamemos $\gamma(0) = p$ y $\gamma(a) = q$ a sus extremos. Y supongamos que no haya puntos conjugados a p sobre γ . Entonces existe un entorno $\mathcal{U}$ de γ en $\mathcal{C}_{pq}$ (el espacio de curvas diferenciables a trozos de p a q con la topología compacto-abierta) tal que $\ell(c) \geq \ell(\gamma)$ para toda $c \in \mathcal{U}$, con la desigualdad estricta si $\gamma([0, a]) \neq c([0, a])$.*

Demostración. Escribamos $\gamma(t) = \exp_p(tu)$, para $u = \gamma'(0)$. Como no existen puntos conjugados sobre γ , $\exp_p$ es regular en tu para todo $0 \leq t \leq a$. Así que podemos tomar una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = a$ con bolas U_i recubriendo el segmento $[t_{i-1}, t_i]u \subset T_p M$ tal que $\exp_p|_{U_i}$ sea un difeomorfismo para $i = 1, \dots, k$.

Ahora podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que el entorno abierto $\mathcal{U}_\varepsilon := \{c \in C_{pq} : \max_{0 \leq t \leq a} d(c(t), \gamma(t)) < \varepsilon\}$ satisfaga lo siguiente: Para cada $c \in \mathcal{U}_\varepsilon$ existe una variación $\{c_s\}_{0 \leq s \leq 1}$ de γ en C_{pq} con $c_0 = \gamma$, $c_1 = c$, de manera que $c_s([t_{i-1}, t_i]) \subset \exp_p U_i$ para $i = 1, \dots, k$ y $0 \leq s \leq 1$.

Y por la minimalidad de las geodésicas en bolas normales (ver proposición A.13) habremos terminado. $\square$

Este resultado nos dará la caracterización de variedad sin puntos conjugados que habíamos usado en la introducción: Una variedad será sin puntos conjugados cuando las geodésicas sean un mínimo local de la distancia entre las diferentes curvas que conectan sus extremos. El recíproco viene del teorema de Jacobi (corolario 2.31), que implicaba que tras un punto conjugado la geodésica dejaba de ser minimizante aún en entornos de γ .

Cerremos la sección con algunas consideraciones topológicas sobre el conjunto de corte. El corolario 2.49 nos dice que $M \setminus C_m(p)$ es homeomorfo a una bola abierta. Así que en cierto sentido la topología de M está contenida en $C_m(p)$.

Como aplicación, veamos algunos resultados sobre la relación entre el conjunto de corte y la compacidad de la variedad. Para ello, conviene definir una función auxiliar $f : T_1 M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de esta forma: Si $\theta \in T_1 M$, podemos tomar la geodésica $\gamma_\theta(t) = \Phi_t(\theta)$ con esas condiciones iniciales y devolver el t_0 tal que $\gamma_\theta(t_0)$ sea el punto de corte de $\gamma_\theta(0)$ por γ_θ , o ∞ si no existe tal punto.

Lema 2.51. *La función f es continua.*

Demostración. Tomemos θ_i una sucesión en $T_1 M$ convergente a θ , y tomemos γ_i la geodésica que define cada θ_i . Llamemos γ a la geodésica que define θ . Así, $\gamma_i(0) \rightarrow \gamma(0)$ y $\gamma'_i(0) \rightarrow \gamma'(0)$.

Sean $\gamma_i(t_0^i)$ y $\gamma(t_0)$ los puntos de corte de esas geodésicas. Queremos demostrar que $t_0^i \rightarrow t_0$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Empecemos por ver que $\limsup t_0^i \leq t_0$. Podemos suponer que $t_0 \neq 0$, pues de otra forma no habría nada que demostrar. Si esto no fuese verdad, tendría que haber una colección infinita de índices J y un $\varepsilon > 0$ tales que $t_0 + \varepsilon < t_0^j$ para todo $j \in J$. Pero en ese caso,

$$d(\gamma_j(0), \gamma_j(t_0 + \varepsilon)) = t_0 + \varepsilon,$$

y por continuidad deduciríamos que

$$d(\gamma(0), \gamma(t_0 + \varepsilon)) = t_0 + \varepsilon,$$

lo que implicaría que t_0 no nos da un punto de corte. Por tanto, efectivamente $\limsup t_0^i \leq t_0$.

Veamos ahora que $\bar{t} = \liminf t_0^i \geq t_0$. Si demostrásemos eso habríamos terminado, pues

$$t_0 \leq \liminf t_0^i \leq \limsup t_0^i \leq t_0.$$

Supongamos que $\bar{t} < \infty$, o no habría nada que probar. Y sea t_0^j una subsucesión de t_0^i convergente a $\bar{t}$. Si esta sucesión fuese tal que $\gamma_j(0)$ y $\gamma_j(t_0^j)$ fuesen conjugados, la continuidad nos diría que $\gamma(\bar{t})$ sería conjugado a $\gamma(0)$, demostrando que $\bar{t} \geq t_0$.

Si no pudieramos asumir eso tendríamos que, como t_0^j son puntos de corte aún así, existen geodésicas $\sigma_j \neq \gamma_j$ con los mismos extremos y la misma longitud. Tomando una subsucesión otra vez si es necesario, podemos asumir que $\gamma_j \rightarrow \gamma$, una geodésica que une $\gamma(0)$ con $\gamma(\bar{t})$. Si son distintas, $t_0 \leq \bar{t}$. Y si son iguales, tendríamos que $\gamma(\bar{t})$ es conjugado a $\gamma(0)$ y por tanto otra vez $\bar{t} \geq t_0$. Eso completa la casuística. $\square$

Proposición 2.52. *El conjunto de corte $C_m(p)$ es un cerrado para todo $p \in M$. Si además M es compacta, será compacto.*

Demostración. Podemos escribir el conjunto de corte de la siguiente forma:

$$C_m(p) = \{\gamma(t) : \text{para } \gamma \text{ una geodésica tal que } \gamma(0) = p, |\gamma'(0)| = 1 \text{ y } t = f(p, \gamma'(0))\}$$

Si q es un punto de acumulación $C_m(p)$, tendremos una sucesión $\gamma_j(t_j) \in C_m(p)$ convergente a él. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $\gamma_j'(0)$ convergen a un vector $v \in T_p M$ unitario. Sea γ la geodésica con valor inicial (p, v) . Por continuidad de f ,

$$\begin{aligned} q &= \lim \gamma_j(t_j) = \lim \gamma_j(f(p, \gamma_j'(0))) = \lim \exp_p(f(p, \gamma_j'(0)) \cdot \gamma_j'(0)) \\ &= \exp_p(f(p, \gamma'(0)) \cdot \gamma'(0)) = \gamma(f(p, \gamma'(0))), \end{aligned}$$

y por tanto $q \in C_m(p)$. $\square$

Corolario 2.53. *Si M es completa y existe un p tal que toda geodésica con $\gamma(0) = p$ tenga un punto de corte, entonces M es compacta.*

Demostración. Basta demostrar que M está acotada. Y efectivamente, podemos escribir

$$M = \bigcup \{\gamma(t) : t \leq f(p, \gamma'(0))\},$$

donde la unión se toma en las geodésicas γ con $\gamma(0) = p$. Y claro, f estaría acotada por hipótesis, así que la distancia de p a cualquier otro punto también lo estará. $\square$

CAPÍTULO 3

Variedades sin puntos conjugados

Después de haber establecido las bases de la geometría riemanniana podemos pasar al tema central del trabajo, las **variedades sin puntos conjugados**. La propiedad fundamental de estas variedades es que $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ es una aplicación recubridora. Eso implicará que en variedades simplemente conexas habrá solo un segmento geodésico uniendo dos puntos dados. Así, la distancia entre puntos será sencillamente la longitud de la única geodésica que los une, y por tanto las geodésicas serán **globalmente minimizantes**.

Por otro lado la proposición 2.50 junto con el corolario 2.31 nos daban una caracterización que aporta intuición sobre ellas: Una variedad será sin puntos conjugados si y solo si las geodésicas son un mínimo local de la distancia entre las diferentes curvas que conectan sus extremos.

Nuestro estudio se fundamentará en el uso de la minimalidad global. Una de las ventajas de esto es la existencia de las llamadas **funciones de Busemann**, que serán una poderosa herramienta a la hora de probar resultados sobre variedades sin puntos conjugados cualesquiera trabajando sobre su recubridor universal.

Gracias a ellas podremos probar diferentes propiedades del grupo fundamental de una variedad sin puntos conjugados, y además nos ayudarán en la demostración de la conjetura de E. Hopf.

Recordemos que el lema 2.5 prueba que todas las variedades con curvatura seccional $K \leq 0$ serán variedades sin puntos conjugados, así que el espacio euclídeo o el hiperbólico darán ejemplos de este tipo de variedades.

Aportemos un poco de claridad sobre las afirmaciones hechas en el primer párrafo:

Lema 3.1. *Las geodésicas de una variedad simplemente conexa $\tilde{M}$ sin puntos conjugados minimizan globalmente la distancia.*

Demostración. Sabemos que los puntos conjugados equivalen a puntos críticos en la aplicación exponencial, y su ausencia la convertirá en un difeomorfismo local. Por tanto $\exp_p : T_p \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ es aplicación recubridora para todo $\tilde{p}$ (recordemos el corolario 2.7). Como $\tilde{M}$ es simplemente conexa, $\exp_p$ es un difeomorfismo. Por tanto, la única geodésica salvo reparametrización que una dos puntos p y q será $t \mapsto \exp_p(tv)$, para $v = \exp_p^{-1}(q)$. Y como es única tendrá que ser la geodésica minimizante. $\square$

3.1. Funciones de Busemann

Sea $\tilde{M}$ una variedad simplemente conexa. Tomemos un punto $\theta = (p, v)$ en el fibrado tangente unitario $T_1\tilde{M}$, y sea γ_θ su geodésica asociada, $\gamma_\theta(t) = \exp_p(tv)$.

Definición 3.2. Se define la **función de Busemann** asociada a θ como una función $b^\theta : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$b^\theta(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma_\theta(t)) - t$$

También es interesante definir las **horosferas** $H_\theta(t)$ como los conjuntos de nivel de b^θ . El parámetro t significa que $\gamma_\theta(t) \in H_\theta(t)$. En concreto, como $b^\theta(\gamma_\theta(s)) = -s$, entonces $H_\theta(s) = \{x \in \tilde{M} : b^\theta(x) = -s\}$. Obsérvese que γ_θ cortará exactamente una vez a cada horosfera.

Las funciones de Busemann están bien definidas. Esto es porque $t \mapsto d(x, \gamma_\theta(t)) - t$ es una función no decreciente y acotada inferiormente, así que existirá su límite:

Está acotada inferiormente porque

$$t = d(\gamma_\theta(0), \gamma_\theta(t)) \leq d(x, \gamma_\theta(0)) + d(x, \gamma_\theta(t)),$$

y por tanto $d(x, \gamma_\theta(t)) - t \geq d(x, \gamma_\theta(0))$. Obsérvese que ya hemos necesitado utilizar que γ_θ es minimizante.

Veamos que esa función es no decreciente. Tomemos $t_1 < t_2$, y efectivamente

$$\begin{aligned} d(x, \gamma_\theta(t_2)) - d(x, \gamma_\theta(t_1)) - (t_2 - t_1) &\leq d(x, \gamma_\theta(t_1)) + d(\gamma_\theta(t_1), \gamma_\theta(t_2)) \\ &\quad - d(x, \gamma_\theta(t_1)) - (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Utilizando la minimalidad de γ_θ vemos que el lado derecho de esa desigualdad es cero.

Veamos algunas de las propiedades básicas de las funciones de Busemann.

Lema 3.3. Sea (M, g) una variedad riemanniana, y $b^\theta(x)$ una función de Busemann para $\theta \in T_1\tilde{M}$. Se cumple que

1. b^θ es una función diferenciable.
2. Su gradiente ∇b^θ tiene norma 1. En particular, b^θ es Lipschitz con constante 1.

Probaremos este hecho siguiendo a [6]. Recordemos que el gradiente de una función f se define como el campo vectorial ∇f que cumple $\langle \nabla f, x \rangle = (df)(x)$ para todo vector tangente x .

Demostración. Que b^θ sea Lipschitz se sigue del resto del lema, pero es muy fácil de probar por sí solo, ya que

$$|b^\theta(x) - b^\theta(y)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |d(x, \gamma_\theta(t)) - t - (d(y, \gamma_\theta(t)) - t)| \leq d(x, y),$$

por la desigualdad triangular al revés.

Para probar la diferenciabilidad vamos a definir primero las funciones auxiliares $b_s^\theta(x) = d(\gamma_\theta(s), x) - s$ para $s > 0$. Claramente, $\lim_{s \rightarrow \infty} b_s^\theta(x) = b^\theta(x)$ decrecientemente. Adelantemos un pequeño resultado sobre cómo estas funciones controlan una función de Busemann:

Lema (auxiliar). *Sea $q \in H_\theta(0)$, y $w \in (T_1\tilde{M})_q$ tal que $\nabla b_{s_i}^\theta \rightarrow w$ para alguna sucesión $s_i \rightarrow \infty$. Entonces para todo $s \geq 0$,*

$$-b_s^{(q, -w)} \geq b^\theta \geq b_s^{(q, w)}.$$

Demostración (del lema auxiliar). Tomemos $s_i \rightarrow \infty$ esa sucesión tal que por hipótesis los gradientes $w_i = \nabla b_{s_i}^\theta(q)$ convergen a w . Para $\varepsilon > 0$ y cualquier $x \in M$ podemos tomar un número $i \in \mathbb{N}$ tal que

1. $b^\theta(x) \geq b_{s_i}^\theta(x) - \varepsilon/3$,
2. $0 = b^\theta(q) \geq b_{s_i}^\theta(q) - \varepsilon/3$, y por tanto $s_i \geq d(\gamma_\theta(s_i), q) - \varepsilon/3$,
3. $d(\gamma_{(q, w_i)}(s), \gamma_{(q, w)}(s)) \leq \varepsilon/3$, y así $d(\gamma_\theta(s_i), q) \geq s + d(\gamma_\theta(s_i), \gamma_{(q, w)}(s)) - \varepsilon/3$.

Es claro que las dos primeras existen por la convergencia de las funciones de Busemann. La tercera se obtiene de que la convergencia $w_i \rightarrow w$ induce una convergencia puntual en las geodésicas, en concreto para el parámetro fijo s . Las consecuencias mencionadas para esas tres condiciones se obtienen de desigualdades triangulares bien elegidas. Juntado todo esto, se sigue:

$$\begin{aligned} b^\theta(x) &\geq s_i - d(\gamma_\theta(s_i), x) - \varepsilon \\ &\geq d(\gamma_\theta(s_i), q) - d(\gamma_\theta(s_i), x) - 2\varepsilon/3 \\ &\geq s + d(\gamma_\theta(s_i), \gamma_{(q, w)}(s)) - d(\gamma_\theta(s_i), x) - \varepsilon \\ &\geq s - d(\gamma_{(q, w)}(s), x) - \varepsilon \\ &= b_s^{(q, w)}(x) - \varepsilon \end{aligned}$$

Que es la acotación por abajo en nuestro lema. La acotación por arriba es muy similar, eligiendo desigualdades opuestas a las 1, 2 y 3. Se encuentra en detalle en [6]. $\square$

Ahora, para deducir que b^θ es diferenciable tomemos un $q \in \tilde{M}$ arbitrario. Podemos asumir que $q \in H^\theta(0)$ si sumamos una constante a la función de Busemann (es razonable, pues esto equivale a reparametrizar la geodésica).

Por la compacidad de la esfera deberá existir un vector $w \in (T_1\tilde{M})_q$ tal que los gradientes $\nabla b_{s_i}^\theta(q)$ convergen a w para cierta sucesión $s_i \rightarrow \infty$. En ese contexto aplica nuestro lema. Pero la diferencia entre la cota inferior y la superior será

$$b_s^{(q, w)}(x) + b_s^{(q, -w)}(x) = 2s - d(\gamma_{(q, w)}(s), x) - d(\gamma_{(q, -w)}(s), x) \leq 0.$$

Es ≤ 0 por una desigualdad triangular y la igualdad $d(\gamma_{(q, w)}(s), \gamma_{(q, -w)}(s)) = 2s$. En particular para $x = q$ esta diferencia alcanza un máximo, y por tanto su gradiente se anula.

De esta manera $b_s^{(q,w)}$ y $-b_s^{(q,-w)}$ nos dan una misma aproximación lineal de b^θ en torno a q , luego b^θ debe ser diferenciable en q con gradiente $\nabla b^\theta(q) = \nabla b_s^{(q,w)} = w$.

Obsérvese que también hemos probado que el gradiente tiene norma 1, pues w estaba en el espacio tangente unitario. Volvemos a concluir que b^θ será Lipschitz con constante 1. $\square$

3.2. El grupo fundamental de una variedad sin puntos conjugados (Ivanov-Kapovich)

Hemos comentado antes que las variedades con curvatura seccional no positiva, $K \leq 0$, serán variedades sin puntos conjugados. Y ciertamente en muchos aspectos las variedades sin puntos conjugados se parecen a las variedades de curvatura $K \leq 0$. Es por eso que se ha planteado el siguiente problema:

Problema abierto. ¿Admite toda variedad M sin puntos conjugados una métrica con $K \leq 0$?

Aunque se sospecha que la respuesta sea negativa, existen varios resultados sobre variedades con curvatura no positiva que se generalizan a las variedades sin puntos conjugados. Veremos un teorema de Ivanov y Kapovitch [16] sobre el grupo fundamental de una variedad sin puntos conjugados que ya se conocía para variedades con $K \leq 0$.

Teorema 3.4 (Ivanov-Kapovitch). *Sea $\bar{M}$ una variedad cerrada que admita una métrica sin puntos conjugados. Entonces el centralizador $Z(\gamma)$ de todo $\gamma \in \pi_1(\bar{M})$ tiene un subgrupo $G < Z(\gamma)$ de índice finito que es isomorfo a un producto directo $\mathbb{Z} \times G'$. De hecho, el factor $\mathbb{Z}$ corresponde a $\langle \gamma \rangle$.*

Antes de comenzar con la demostración vamos a establecer unas definiciones y resultados sencillos. Llamemos M al recubridor universal de $\bar{M}$ (quizá lo hayamos hecho al revés a lo largo de esta memoria, pero esta notación será más clara ya que a lo largo de esta prueba vamos a tomar otros cocientes de M), y $\Gamma \cong \pi_1(\bar{M})$ al grupo de transformaciones recubridoras sobre M . Así, $\bar{M} = M/\Gamma$.

Las geodésicas se supondrán parametrizadas por longitud de arco, y gracias a la minimalidad de las geodésicas en M tendremos que la distancia $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ es suave fuera de la diagonal.

Fijemos un elemento $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$. Definimos la **función desplazamiento** $d_\gamma : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$d_\gamma(x) = d(x, \gamma(x)), \quad x \in M.$$

Es suave, pues es una composición de d con $x \mapsto (x, \gamma(x))$, cuya imagen está fuera de la diagonal.

Recordemos que una geodésica completa $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ es un **eje de γ** si la isometría γ traslada c dentro de sí misma. Es decir, existe $L > 0$ tal que $\gamma(c(t)) = c(t + L)$. Toda $\gamma \in \Gamma$ tendrá al menos un eje, como vimos en la proposición 2.36.

Denotemos por A_γ a la unión de todos los ejes de γ .

Lema 3.5. *Con esa notación,*

1. *La función d_γ toma un mínimo. De hecho, ese valor se alcanzará exactamente en los puntos de A_γ .*
2. *La isometría γ traslada todos los ejes el mismo valor L . Concretamente $L = \min d_\gamma$.*
3. *$\min d_{\gamma^m} = m \cdot \min d_\gamma$, para todo entero $m \geq 1$.*
4. *A_γ será justamente el conjunto de puntos críticos de d_γ .*

Demostración. Probaremos simultaneamente los puntos 1 y 4. Los puntos 2 y 3 son observaciones sencillas que se deducen de estos dos.

Sea x_i una sucesión de M con $d_\gamma(x_i) \rightarrow \inf d_\gamma$. Como el cociente M/Γ es compacto tendremos un dominio fundamental compacto $F \subset M$ para Γ . Así existirán isometrías γ_i tales que $\gamma_i(x_i) \in F$. Y tomando una subsucesión podremos asumir que $\gamma_i(x_i)$ es convergente a un punto $y \in \bar{M}$.

Como $d_{\gamma_i \gamma_i^{-1}}(\gamma_i(x_i)) = d(\gamma_i(x_i), \gamma_i \gamma_i^{-1}(x_i)) = d_\gamma(x_i)$, esa sucesión está acotada (pues converge al ínfimo). Y como $\gamma_i(x_i)$ se aproxima a y , entonces $d_{\gamma_i \gamma_i^{-1}}(y)$ también estará acotada.

Además, la acción de Γ es discreta, así que tendrá que haber una subsucesión de γ_i que tome un valor fijo $\alpha \in \Gamma$. Así, en esa subsucesión, $\lim d_\gamma(x_i) = d_{\alpha \gamma \alpha^{-1}}(y) = d_\gamma(\alpha^{-1}(y))$. En particular, d_γ alcanza su mínimo.

El siguiente paso consiste en calcular el gradiente de d_γ . Para ello, definamos para cada $x \in M$ el vector $V^+(x) \in T_x M$ que determina la geodésica que une x con $\gamma(x)$. Similarmente denotamos por $V^-(x)$ a la velocidad inicial de la geodésica entre x y $\gamma^{-1}(x)$. Afirmamos que

$$\nabla d_\gamma(x) = -(V^+(x) + V^-(x)).$$

Para probar esto tomamos $c : [0, d_\gamma(x)] \rightarrow M$ la geodésica que une x con $\gamma(x)$. Por otro lado, para $w \in T_x \bar{M}$ definamos $c_w : \mathbb{R} \rightarrow M$ la geodésica con valores iniciales $c'(0) = w$.

La fórmula de la primera variación nos dirá que

$$(d_\gamma \circ c_w)'(0) = \langle c'(d_\gamma(x)), (d\gamma)w \rangle - \langle c'(0), w \rangle.$$

Y aplicando $(d\gamma)^{-1}$ en el primer producto escalar obtendremos

$$(d_\gamma \circ c_w)'(0) = -\langle V^-(x), w \rangle - \langle V^+(0), w \rangle,$$

de donde se deduce nuestra afirmación.

Ahora, si x está en un eje de γ obligatoriamente $V^+(x) = -V^-(x)$, y x tendrá que ser un punto crítico de d_γ . Recíprocamente, si x es punto crítico se tiene que

$V^+(x) = -V^-(x)$. Así, los tres puntos $\gamma(x)$, x y $\gamma^{-1}(x)$ están en una única geodésica c , y γ la dejará invariante.

Así, si d_γ alcanza el mínimo en un punto x , entonces será un punto crítico y está contenido en un eje de γ . Veamos ahora que en cualquier eje $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ se alcanza ese mínimo.

Por hipótesis, $\gamma \circ c(t) = c(t + L)$ para cierto $L > 0$. Sea $\theta = (c(0), c'(0))$. Entonces la función de Busemann b^θ cumple

$$b^\theta(\gamma x) = \lim d(\gamma x, c(t)) - t = \lim d(x, c(t - L)) - t = b^\theta(x) - L$$

Y como b^θ es Lipschitz con constante 1, se cumple que, para todo $x \in M$,

$$|b^\theta(\gamma x) - b^\theta(x)| = L \leq d(\gamma x, x) = d_\gamma(x).$$

Así, d_γ alcanza su mínimo en c . Obsérvese que de camino hemos deducido el punto 2. Para el punto 3 basta comentar que un eje de γ también será eje de γ^m . Y mirando cómo actúa la isometría sobre ese eje se sigue que $\min d_{\gamma^m} = m \cdot \min d_\gamma$. $\square$

Sea ahora $\alpha \in \Gamma$ un elemento que conmuta con γ . Podemos observar que $d_\gamma(\alpha(x)) = d(\gamma\alpha(x), \alpha(x)) = d(\alpha\gamma(x), \alpha(x)) = d(\gamma(x), x)$. Por tanto d_γ induce una función $\bar{d}_\gamma$ bien definida en $M/Z(\gamma)$. También se deduce que α deja invariante el conjunto de ejes de γ , al que habíamos llamado A_γ . Así, tendrá sentido el siguiente lema.

Lema 3.6. *La función $\bar{d}_\gamma$ en $M/Z(\gamma)$ es propia.*

Demostración. Sea a una constante positiva. Basta demostrar que $S_a = \{\bar{x} \in M/Z(\gamma) : \bar{d}_\gamma(\bar{x}) \leq a\}$ es un conjunto compacto. Tomemos una sucesión $\bar{x}_i \in S_a$ y busquemos una subsucesión convergente.

Primero tomemos $x_i \in \pi^{-1}(\bar{x}_i)$ (siendo $\pi : M \rightarrow M/Z(\gamma)$ el paso al cociente). Como antes, al ser M/Γ compacto existirán $\gamma_i \in \Gamma$ tales que $\gamma_i(x_i) \in F$, para F un dominio fundamental compacto.

Así existirá una subsucesión convergente a $y \in F$. Como sobre esa subsucesión tenemos $d_{\gamma_i\gamma_i^{-1}}(\gamma_i(x_i)) = d_\gamma(x_i) \leq a$, para i suficientemente grande se cumplirá $d_{\gamma_i\gamma_i^{-1}}(y) \leq a + 1$.

Y por la discreitud del grupo Γ solo podrá haber un número finito de esas $\gamma_i\gamma_i^{-1}$, así que pasando a una subsucesión podemos asumir que $\gamma_i\gamma_i^{-1} = \gamma_j\gamma_j^{-1}$ para todo j . En particular $\gamma_j^{-1}\gamma_i \in Z(\gamma)$.

Y como $d(\gamma_j^{-1}\gamma_i(x_i), x_j) = d(\gamma_i(x_i), \gamma_j(x_j)) \leq \text{diám}(F)$, tendremos que $d(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \leq \text{diám}(F)$. Así que habrá una subsucesión convergente. $\square$

A continuación probaremos un teorema clásico de Morse sobre la homotopía en variedades de la forma $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$ para distintos $a \in \mathbb{R}$. Lo necesitaremos en la demostración del próximo lema.

Teorema 3.7 (Morse). *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función real suave sobre una variedad M . Tomemos $a < b$, y supongamos que el conjunto $f^{-1}([a, b])$ es compacto y no contiene puntos críticos de f . Entonces M^a será difeomorfa a M^b , y además M^a es retracto de deformación fuerte de M^b .*

Demostración. La idea es empujar M^b siguiendo las superficies $f = c$, es decir, con dirección ∇f .

Sea p una función suave que vale $1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$ en el compacto $f^{-1}[a, b]$, y que se anule fuera de un entorno compacto de ese conjunto. Así el campo vectorial X definido por $X(q) = p(q)\nabla f(q)$ será suave en M . Este campo tendrá bien definido un flujo global. Esto es una familia de difeomorfismos $\phi_t : M \rightarrow M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{d}{dt}\phi_t(q) = X(\phi_t(q))$ y $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

Consideremos, para $q \in M$ fijo la función $t \mapsto f(\phi_t(q))$. Si $\phi_t(q)$ está en $f^{-1}[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(q)) = (df)(X) = \langle X, \nabla f \rangle = 1.$$

Así nuestra función $t \mapsto f(\phi_t(q))$ será lineal con derivada 1 mientras $f(\phi_t(q))$ esté en $f^{-1}[a, b]$. Por tanto, $\phi_{b-a} : M \rightarrow M$ enviará M^a difeomorficamente a M^b . Esto prueba la primera parte del teorema.

La retracción de M^b a M^a vendrá dada por

$$r_t(q) := \begin{cases} q & \text{si } f(q) \leq a \\ \phi_{t(a-f(q))}(q) & \text{si } a \leq f(q) \leq b. \end{cases}$$

Obsérvese que efectivamente r_0 es la identidad y r_1 es una retracción de M^b a M^a . $\square$

Lema 3.8. *El conjunto A_γ es conexo.*

Demostración. Sabemos que $\bar{d}_\gamma$ es propia, y por el lema 3.5 no tiene puntos críticos fuera de $\bar{A}_\gamma = \pi(A_\gamma)$.

Gracias a eso aplica el teorema de Morse que acabamos de demostrar, y todo conjunto de subnivel

$$\bar{U}_\varepsilon = \{x \in M/Z(\gamma) : \bar{d}_\gamma(x) \leq \text{mín } \bar{d}_\gamma + \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

será retracto de deformación fuerte de $M/Z(\gamma)$. Y como la proyección $\pi : M \rightarrow M/Z(\gamma)$ es aplicación recubridora, se sigue que el conjunto

$$U_\varepsilon = \pi^{-1}(\bar{U}_\varepsilon) = \{x \in M : d_\gamma(x) \leq \text{mín } d_\gamma + \varepsilon\}$$

es retracto de deformación fuerte de M . En particular, U_ε es conexo. Y como $A_\gamma = \bigcap_{\varepsilon > 0} U_\varepsilon$, se sigue el lema. $\square$

Observación. También hemos probado que $Z(\gamma)$ es finitamente generado (y finitamente presentado), pues $M/Z(\gamma)$ es homotópicamente equivalente a $\bar{U}_\varepsilon$ que, como $\bar{d}_\varepsilon$ es propia, es una variedad compacta con frontera. En particular es una unión finita de entornos homeomorfos a discos, así que el teorema de van Kampen (contado en [13]) nos garantiza que su grupo fundamental sea finitamente generado.

Aclaremos en un pequeño lema cómo se comportan las funciones de Busemann sobre los ejes de γ .

Lema 3.9. Sean c, c_1 ejes de γ , y $\theta = (c(0), c'(0))$. Entonces

1. $b^\theta(\gamma x) = b^\theta(x) - \min d_\gamma$ para todo $x \in M$.
2. b^θ decae a velocidad constante sobre c_1 , es decir $b^\theta(c_1(t + t_1)) = b^\theta(c_1(t)) - t_1$, para todo $t, t_1 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Ya habíamos demostrado el primer punto al probar el lema 3.5. Y el segundo resultado se sigue de este, pues

$$b^\theta(c_1(t + mL)) = b^\theta(\gamma^m c_1(t)) = b^\theta(c_1(t)) - mL$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. Así que para extender el resultado a números reales, bastará con verlo para $t_1 \in (0, L)$. Pero claro,

$$(*) \quad b^\theta(c_1(t + t_1)) \leq b^\theta(c_1(t)) - t_1,$$

al ser b^θ y c funciones 1-Lipschitz. Por otro lado,

$$\begin{aligned} b^\theta(c_1(t)) - L &= b^\theta(c_1(t + t_1 - t_1 + L)) \leq b^\theta(c_1(t + t_1)) - L + t_1 \\ &\leq b^\theta(c_1(t)) - t_1 - L + t_1 = b^\theta(c_1(t)) - L. \end{aligned}$$

Luego $(*)$ debe ser una igualdad, y tenemos lo que queríamos. $\square$

El siguiente paso será lograr probar esta proposición:

Proposición 3.10. Sea $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}$, y sean c y c_1 ejes de γ , con valores iniciales θ y θ_1 . Entonces $b^\theta - b^{\theta_1}$ es constante en M .

De este resultado se deducirá con facilidad el teorema deseado. Por desgracia, la prueba de esta proposición será el mayor pico de dificultad de este capítulo.

Si $\theta = (p, v)$, definiremos $-\theta := (p, -v)$. De esta manera, si $c(t)$ es la geodésica con valor inicial θ , entonces $c(-t)$ será la geodésica con valor inicial $-\theta$. Querremos considerar ambas funciones de Busemann. Y de hecho también trabajaremos con la función $b_0^\theta = b^\theta + b^{-\theta}$. Gracias a la definición de función de Busemann y una desigualdad triangular, vemos que $b_0^\theta \geq 0$.

Así podremos demostrar un par de lemas que nos ayudarán con nuestra proposición:

Lema 3.11. Sea c un eje de γ , y $L = \min d_\gamma$. Definamos $f(x) = d_\gamma(x) - L$ para $x \in M$. Entonces existirá $C > 0$ tal que

$$(3.1) \quad |b_0^\theta(x) - b_0^\theta(y)| \leq C(d(x, y)^2 + f(x) + f(y))$$

para todo $x, y \in M$.

Demostración. Podemos asumir que $d(x, y)$ es pequeño. En concreto, asumiremos $d(x, y) \leq L/2$. En otro caso, como las funciones de Busemann son 1-Lipschitz, tendremos

$$|b_0^\theta(x) - b_0^\theta(y)| \leq 2d(x, y) \leq 4L^{-1}d(x, y)^2$$

y podríamos tomar cualquier $C \geq 4L^{-1}$.

También podremos asumir que $f(x) \leq 1$ y $f(y) \leq 1$. De otra manera

$$|b_0^\theta(x) - b_0^\theta(y)| \leq 2d(x, y) \leq L \leq L(f(x) + f(y)),$$

y bastaría tomar $C \geq L$.

Aclaradas esas trivialidades podemos empezar con el grueso de la demostración. Fijemos la notación $x_+ = \gamma(x)$ y $x_- = \gamma^{-1}(x)$. Obsérvese que

$$d(x, x_+) = d(x, x_-) = d_\gamma(x) = L + f(x).$$

Por el lema 3.9, sabemos que $b^\theta(x) = b^\theta(x_+) + L$, y $b^{-\theta}(x) = b^{-\theta}(x_-) + L$. Usando que las funciones de Busemann son 1-Lipschitz, tendremos que

$$b^\theta(y) - b^\theta(x) = b^\theta(y) - b^\theta(x_+) - L \leq d(y, x_+) - L$$

y similarmente

$$b^{-\theta}(y) - b^{-\theta}(x) = b^{-\theta}(y) - b^{-\theta}(x_-) - L \leq d(y, x_-) - L.$$

Sumando, obtendremos una estimación

$$(3.2) \quad b_0^\theta(y) - b_0^\theta(x) \leq d(y, x_+) + d(y, x_-) - 2L.$$

El plan es seguir acotando el lado derecho de esa desigualdad.

Para p y q puntos de M consideremos la notación $p\vec{q}$ para la velocidad inicial de la única geodésica que une p con q . Concretamente, será la normalización de $\exp_p^{-1}(q)$, pues nuestras geodésicas están parametrizadas por longitud de arco. Tomemos los vectores $v_+ = x\vec{x}_+$ y $v_- = x\vec{x}_-$. Sea $z \in M$ un punto con $d(x, z) \leq L/2$. Entonces escribiendo el desarrollo de Taylor de orden 2 para $h(z) = d(z, x_\pm)$ en torno a $z = x$ (en realidad hacemos este desarrollo en las coordenadas dadas por $\exp_x$, pero usamos que $|\exp_x^{-1}(z)| = d(x, z)$ para escribirlo en función de puntos de la variedad)

$$\begin{aligned} d(z, x_\pm) &\leq d(x, x_\pm) - \langle x\vec{z}, v_\pm \rangle \cdot d(x, z) + C_1 d(x, z)^2 \\ &= L + f(x) - \langle x\vec{z}, v_\pm \rangle \cdot d(x, z) + C_1 d(x, z)^2. \end{aligned}$$

También usaremos que $dh(x\vec{z}) = \langle -v_\pm, x\vec{z} \rangle$, gracias a la fórmula de la primera variación. Ahora, sumando ambas versiones tenemos

$$(3.3) \quad d(z, x_+) + d(z, x_-) \leq 2L + 2f(x) - \langle x\vec{z}, v_+ + v_- \rangle \cdot d(x, z) + 2C_1 d(x, z)^2.$$

Aquí $C_1 > 0$ es una constante que depende únicamente de M y L . Es una cota superior a la segunda derivada de la distancia a $x_\pm$ en el segmento geodésico $[x, z]$. Es uniforme en x pues M admite la acción por Γ con M/Γ compacto, y $L \leq d(x, x_\pm) \leq L + 1$.

Si ponemos $z = y$, la desigualdad (3.3) aplicada en (3.2) implicará

$$(3.4) \quad \begin{aligned} b_0^\theta(y) - b_0^\theta(x) &\leq 2f(x) - \langle \vec{x}\vec{y}, v_+ + v_- \rangle \cdot d(x, y) + 2C_1 d(x, y)^2 + 2C_1 d(x, y)^2 \\ &\leq 2f(x)\sigma \cdot d(x, y) + 2C_1 d(x, y)^2. \end{aligned}$$

Donde $\sigma = |v_+ + v_-|$.

Para cerrar nuestro lema necesitamos una estimación para ese σ . Consideremos el punto $z = \exp_x(t_0 v)$, donde $v \in T_x M$ es el vector unitario proporcional a $v_+ + v_-$, y $t_0 = \sqrt{f(x)/C_1}$. Asumamos que C_1 es lo bastante grande como para que $t_0 \leq L/2$ (podemos, pues $f(x) \leq 1$). Para ese z , la desigualdad (3.3) toma la forma

$$d(z, x_+) + d(z, x_-) \leq 2L + 2f(x) - \sigma t_0 + 2C_1 t_0^2.$$

Por otro lado,

$$d(z, x_+) + d(z, x_-) \geq d(x_+, x_-) = d_{\gamma^2}(x_-) \geq \min d_{\gamma^2} = 2L,$$

gracias a una desigualdad triangular y al lema 3.5. Juntando las dos cosas,

$$0 \leq 2f(x) - \sigma t_0 + 2C_1 t_0^2 = -\sigma \sqrt{f(x)/C_1} + 4f(x),$$

o, más clarito, $\sigma \leq 4\sqrt{C_1 f(x)}$. Así tendremos la acotación

$$\sigma \cdot d(x, y) \leq 4\sqrt{C_1 f(x) d(x, y)^2} \leq 2f(x) + 2C_1 d(x, y)^2,$$

por la desigualdad de medias $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$, si $a, b \in \mathbb{R}^+$. Esta es la acotación que deseabamos añadir a (3.4), y hacerlo resultará en

$$b_0^\theta(y) + b_0^\theta(x) \leq 4f(x) + 4C_1 d(x, y)^2.$$

Como x e y son arbitrarios, podemos intercambiarlos, obteniendo

$$b_0^\theta(x) + b_0^\theta(y) \leq 4f(y) + 4C_1 d(x, y)^2.$$

Y así el teorema se satisfecerá para $C \geq \max\{4C_1, 4\}$. □

El proximo paso es puramente analítico y local. No necesitaremos las hipótesis de que M no tenga puntos conjugados o su cociente sea compacto.

Lema 3.12. *Sea M una variedad riemanniana, $f \in C^\infty(M)$ y $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que*

$$(3.5) \quad |g(x) - g(y)| \leq C(d(x, y)^2 + |f(x)| + |f(y)|)$$

para alguna $C > 0$ y todo $x, y \in M$. Si $X = f^{-1}(0)$, entonces el conjunto $g(X) \subset \mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue cero.

Demostración. Argumentaremos por inducción en $n = \dim M$. Como el caso $n = 0$ es trivial, asumiremos $n \geq 1$ y que el lema es cierto en dimensión $(n - 1)$.

Como M se puede recubrir por una cantidad contable de entornos coordenados y la unión contable de conjuntos de medida cero también lo es, bastará asumir que M es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$. Así podemos extender f a un conjunto compacto. Llamemos Z al conjunto de puntos de X donde todas las derivadas de f se anulan, y $Y = X \setminus Z$.

El conjunto Y estará contenido en una unión contable de variedades $(n - 1)$ -dimensionales, así que $g(Y)$ tendrá medida cero. Ciertamente, para cada multiíndice $I = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$, $k \geq 0$ podemos considerar la derivada parcial $f_I = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$. Sea Σ_I el conjunto de puntos de M donde f_I se anula, pero su primera derivada no. Como $f_I \in \mathcal{C}^\infty$, Σ_I será una variedad $(n - 1)$ -dimensional suave. Y claramente Y estará contenida en la unión de estas subvariedades.

Nos queda ver qué sucede con $g(Z)$. Sabemos que f y sus derivadas hasta el orden $2n$ se anulan en Z . Además estarán acotadas en M , gracias a la extensión suave a un conjunto compacto. Así, gracias al teorema de Taylor existirá $C_1 > 0$ tal que

$$(3.6) \quad |f(x)| = |f(x) - f(z)| \leq C_1 |x - z|^{2n}$$

para todo $x \in M$ y $z \in Z$.

Sabiendo esto, vamos a acotar

$$(3.7) \quad |g(z) - g(z')| \leq C_2 |z - z'|^{n+1},$$

para alguna $C_2 > 0$ y todo $z, z' \in Z$ tal que $|z - z'| \leq 1$. Esto concluirá el resultado, pues esto obliga a que $g(Z)$ tenga dimensión de Hausdorff menor que $n/(n + 1)$, y en particular medida 1-dimensional cero.

Para probar esa última desigualdad, escribamos $\delta = |z - z'|$, y elijamos un natural N tal que $\delta^{1-n} \leq N \leq 2\delta^{1-n}$. También vamos a dividir el segmento $[z, z']$ en N segmentos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$, de igual longitud. Observemos que

$$|x_i - x_{i-1}| = \delta/N \leq \delta^n$$

por cómo hemos elegido N . Así, utilizando (3.6) tendremos

$$|f(x_i)| + |f(x_{i-1})| \leq C_1 |x_i - z|^{2n} + |x_{i-1} - z|^{2n} \leq 2C_1 \delta^{2n}.$$

Además, sustituyendo x_i y x_{i-1} en los lugares de x e y en (3.5), se tiene

$$|g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq C(|x_i - x_{i-1}|^2 + |f(x_i)| + |f(x_{i-1})|) \leq C(\delta^{2n} + 2C_1 \delta^{2n}).$$

Por tanto,

$$|g(z) - g(z')| \leq \sum_{i=1}^N |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq NC(1 + 2C_1)\delta^{2n} \leq 2C(1 + 2C_1)\delta^{n+1},$$

y tenemos la desigualdad (3.7) para $C_2 = 2C(1 + 2C_1)$. Y como decíamos, esta implicará que

$$\dim_H(g(Z)) \leq \frac{\dim_H(Z)}{n+1} \leq \frac{n}{n+1},$$

con $\dim_H$ la dimensión de Hausdorff, y se sigue que $g(Z)$ tiene medida cero. $\square$

Corolario 3.13. *Sea c un eje de γ , y $\theta \in TM$ sus valores iniciales. Entonces $b_0^\theta = 0$ en A_γ .*

Demostración. Sea $L = \min d_\gamma$. El lema 3.11 nos dice que $f = d_\gamma - L$ y $g = b_0^\theta$ satisfacen las hipótesis del lema 3.12. Y como $A_\gamma = f^{-1}(0)$, sabremos que $b_0^\theta(A_\gamma)$ es un conjunto de medida cero en $\mathbb{R}$. También sabemos que A_γ es conexo, y por tanto $b_0^\theta(A_\gamma)$ también. Un conjunto conexo de medida cero en $\mathbb{R}$ debe ser un punto. Además, como $c(0) \in A_\gamma$ y $b_0^\theta(c(0)) = 0$, esa constante será cero. $\square$

Ya estamos listos para probar nuestra proposición.

Demostración (de la proposición 3.10). Sean c y c_1 dos ejes de γ , y θ, θ_1 sus respectivos valores iniciales. Reparametrizando c_1 , podemos asumir que $b^\theta(c_1(0)) = 0$. Así bastará probar que $b^\theta = b^{\theta_1}$.

Para empezar, veremos que $b^\theta(c_1(0)) = 0$ es una relación simétrica, es decir, implicará $b^{\theta_1}(c(0)) = 0$. Para ello utilizaremos que $c_1(0) \in A_\gamma$, y por tanto $b_0^\theta(c_1(0)) = 0$ gracias al corolario anterior. En particular $b^{-\theta}(c_1(0)) = 0$. Esto significa que

$$d(c_1(0), c(-t)) \leq t + \varepsilon(t),$$

donde $\varepsilon(t)$ es una función que tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. Y como

$$b^{\theta_1}(c(-t)) \leq d(c(-t), c_1(0)),$$

se sigue que $b^\theta(c_1(-t)) \leq t + \varepsilon(t)$. Esto junto a la segunda parte del lema 3.9 implicará que

$$b^{\theta_1}(c(0)) = b^{\theta_1}(c(-t)) - t \leq \varepsilon(t),$$

y tomando $t \rightarrow \infty$ obtenemos $b^{\theta_1}(c(0)) \leq 0$. El mismo argumento servirá para obtener $b^{-\theta}(c(0)) \leq 0$. Y esas desigualdades deberán ser igualdades, pues sabemos que $b^\theta + b^{-\theta} \geq 0$. Así que efectivamente, $b^{\theta_1}(c(0)) = 0$.

Ahora tomemos $x \in M$ y $\varepsilon > 0$. Por definición de función de Busemann, existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$(d(x, c_1(t_1)) - t_1) - b^{\theta_1}(x) < \varepsilon.$$

Similarmente para $t_0 \in \mathbb{R}$ suficientemente grande,

$$(d(x', c(t_0)) - t_0) - b^\theta(x') < \varepsilon,$$

Y como $b^\theta(c_1(0)) = 0$, la segunda parte del lema 3.9 implicará que $b^\theta(c_1(t_1)) = -t_1$. Así, tomando $x' = c_1(t_1)$ esa segunda desigualdad se queda en

$$d(c_1(t_1), c(t_0)) < t_0 - t_1 + \varepsilon,$$

que combinada con la anterior resulta en

$$d(x, c(t_0)) \leq d(x, c_1(t_1)) + d(c_1(t_1), c(t_0)) < b^{\theta_1}(x) + t_0 + 2\varepsilon,$$

de lo que se deduce que $b^\theta(x) \leq b^{\theta_1}(x)$, pues ε era arbitrario.

Y como el argumento es simétrico en c y c_1 , tendremos que $b^{\theta_1} \leq b^\theta$, y por tanto la igualdad deseada. $\square$

Con esto hemos terminado con la parte más tediosa de la demostración. Ahora obtener el teorema deseado será coser y cantar.

Lema 3.14. *Sea $\alpha \in Z(\gamma)$ un elemento del centralizador de γ , y c un eje de γ con dato inicial $\theta \in TM$. Entonces $b^\theta(\alpha x) - b^\theta(x)$ no depende de $x \in M$.*

Demostración. Obsérvese que $\alpha^{-1}c$ sigue siendo un eje de γ , pues si $L = \min d_\gamma$, entonces

$$\gamma(\alpha^{-1}c(t)) = \alpha^{-1}\gamma c(t) = \alpha^{-1}c(t + L).$$

Así, si θ' son valores iniciales para $\alpha^{-1}c$, por nuestra proposición central 3.10 $b^{\theta'} - b^\theta$ es constante. Además, claramente $b^{\theta'}(x) = b^\theta(\alpha x)$. $\square$

Corolario 3.15. *Existe un homomorfismo $h : Z(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ no trivial*

Demostración. Si c es un eje de γ con dato inicial $\theta \in TM$, para $\alpha \in Z(\gamma)$ podemos definir

$$h(\alpha) := b^\theta(\alpha x) - b^\theta(x),$$

con $x \in M$ cualquier punto. Gracias al lema anterior, está bien definido. Y es homomorfismo, pues para $\alpha, \beta \in Z(\gamma)$ tenemos

$$h(\alpha\beta) = b^\theta(\alpha\beta x) - b^\theta(x) = b^\theta(\alpha\beta x) - b^\theta(\beta x) + b^\theta(\beta x) - b^\theta(x) = h(\alpha) + h(\beta).$$

Es no trivial pues $h(\gamma) = -\min d_\gamma \neq 0$, gracias a la primera parte del lema 3.9. $\square$

Con esto, todo lo que nos queda de la demostración es simple teoría de grupos. Llamemos $H_1(Z(\gamma)) := Z(\gamma)/[Z(\gamma), Z(\gamma)]$ a la abelianización del centralizador. Y llamemos π al homomorfismo de paso al cociente.

Corolario 3.16. *$\pi(\gamma)$ tiene orden infinito en la abelianización $H_1(Z(\gamma))$.*

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es conmutativo, el homomorfismo del corolario anterior factoriza de la forma $h = \bar{h} \circ \pi$, para cierto homomorfismo $\bar{h} : H_1(Z(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}$. Y como $\bar{h}(\pi(\gamma)^n) = h(\gamma^n) = n \cdot h(\gamma) \neq 0$, $\pi(\gamma)$ tiene orden infinito. $\square$

Esto es en realidad una forma más sencilla de escribir el resultado del teorema.

Demostración (al teorema 3.4). Ya hemos observado (precediendo al lema 3.9) que $Z(\gamma)$ es finitamente generado, así que también lo será $H_1(Z(\gamma))$. Por el corolario anterior, y la clasificación de grupos abelianos finitamente generados, $\pi(\gamma)$ será un elemento de un subgrupo $H < H_1(Z(\gamma))$ de índice finito e isomorfo a $\mathbb{Z}^k$. Podemos permitirnos decir que $\pi(\gamma)$ será enviado a $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^k$ por ese isomorfismo. Llamemos $p : H \cong \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}$ a la proyección en la primera coordenada.

Sea $G := \pi^{-1}(H)$. Este también será un subgrupo de $Z(\gamma)$ con índice finito. Y $\phi := p \circ \pi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ será un homomorfismo que envía γ a $1 \in \mathbb{Z}$. La existencia de ese homomorfismo, junto con el hecho de que γ está en el centro de G implicarán que $G \cong \mathbb{Z} \times G'$, con $G' = \ker \phi$. Y el factor $\mathbb{Z}$ viene del subgrupo generado por γ , como queríamos demostrar. $\square$

3.3. El grupo fundamental de una variedad sin puntos conjugados (Croke-Schroeder)

La información que hemos obtenido sobre las funciones de Busemann de la variedad M nos acerca mucho a otro resultado sobre el grupo fundamental de una variedad sin puntos conjugados. Este fue probado por Croke y Schroeder [4], originalmente para el caso de una métrica analítica. Gracias al trabajo de Ivanov y Kapovitch [16] podemos retirar esa hipótesis¹.

Para comprender el enunciado, primero deberíamos definir lo que es una **norma de palabras** (traducido de *word norm*). Supongamos que tenemos un grupo finitamente generado Γ , y $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ son sus generadores. Para $\gamma \in \Gamma$ definimos una norma $|\gamma|_\Gamma$ como la longitud de la palabra más corta formada por generadores y sus inversos que represente a γ .

Por supuesto, esta norma depende de la elección de generadores. Pero es fácil ver que dos normas $|\cdot|_\Gamma^1$ y $|\cdot|_\Gamma^2$ de este estilo serán **equivalentes**. Es decir, existen constantes $m, M > 0$ tales que

$$m|\gamma|_\Gamma^1 \leq |\gamma|_\Gamma^2 \leq M|\gamma|_\Gamma^1 \quad \text{para todo } \gamma \in \Gamma.$$

La demostración es sencilla, bastará escribir el conjunto de generadores usado en una primera norma en función de los de la segunda, y viceversa. Las longitudes de estas palabras estarán acotadas, pues son una cantidad finita. Y de ahí obtenemos nuestras M y m .

Diremos que un subgrupo $\Gamma_0 < \Gamma$ finitamente generado es **recto** en Γ si las normas $|\cdot|_{\Gamma_0}$ y $|\cdot|_\Gamma$ son equivalentes sobre Γ_0 . Obsérvese que, por lo ya comentado, este problema es independiente de los generadores utilizados. Con esto, ya estamos en condiciones de entender el resultado central de esta sección:

Teorema 3.17 (Croke-Schroeder). *Sea $\bar{M}$ una variedad compacta sin puntos conjugados. Entonces todo subgrupo abeliano de $\pi_1(\bar{M})$ es recto.*

Compartiremos la demostración de este resultado en tres pequeños lemas.

Lema 3.18. *Si $\bar{M}$ es una variedad compacta sin puntos conjugados, todo subgrupo cíclico $\Gamma_0 < \Gamma = \pi_1(\bar{M})$ es recto.*

Demostración. Para dos elementos $\alpha, \beta \in \Gamma$ tenemos que, por la desigualdad triangular,

$$d(\alpha\beta(x), x) \leq d(\alpha\beta(x), \alpha(x)) + d(\alpha(x), x) = d(\beta(x), x) + d(\alpha(x), x).$$

Si $\{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ es un conjunto de generadores de Γ y $\gamma = \beta_{i_1}^{\pm 1} \cdot \beta_{i_2}^{\pm 1} \cdot \dots \cdot \beta_{i_q}^{\pm 1}$, iterando esa desigualdad obtendremos

$$d(\gamma(x), x) \leq \sum_{j=1}^q d(\beta_{i_j}^{\pm 1}(x), x) \leq q \cdot \max\{d(\beta_i(x), x)\}.$$

¹Ellos comentan en su artículo que hay demostraciones más sencillas al resultado de Croke y Schroeder sin pedir que la métrica sea analítica, pero nosotros ya hemos hecho el trabajo duro al probar el teorema de Ivanov y Kapovich.

Es decir, $d(\gamma(x), x) \leq (\max_i \{d(\beta_i(x), x)\}) \cdot |\gamma|_\Gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y $x \in M$.

Sea α un generador de Γ_0 . Entonces $\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_p\}$ son generadores de Γ , y así $|\alpha^n| \leq n = |\alpha^n|_{\Gamma_0}$. Bastaría demostrar que $|\alpha^n|_\Gamma \geq \text{const} \cdot n$. Para ello fijamos un $x_0 \in M$, y simplemente $d(\alpha^n(x_0), x_0) \geq \min d_{\alpha^n} = n \cdot \min d_\gamma$, usando el lema 3.5. Así, basta tomar $\text{const} = \min d_\alpha / \max_i \{d(\beta_i(x_0), x_0)\}$. $\square$

Ahora fijaremos un subgrupo abeliano Γ_0 de $\Gamma = \pi_1(\bar{M})$. Como no tiene elementos de torsión (consecuencia del lema 3.5), será isomorfo a $\mathbb{Z}^k$ para algún k . Tomando una base $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de Γ_0 , podemos identificar Γ_0 con $\mathbb{Z}^k$ como retículo en $\mathbb{R}^k$, con la correspondencia $\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_k^{n_k} \iff (n_1, \dots, n_k)$.

Fijemos también un punto $x_0 \in M$, y normalicemos todas las funciones de Busemann (sumando una constante/reparametrizando la geodésica) para que sean 0 en el punto x_0 . Así $b^\theta = b^{\theta_1}$, para θ, θ_1 valores iniciales de ejes de un $\gamma \in \Gamma$ (gracias a la proposición 3.10). Será razonable introducir la notación $b_\gamma := b^\theta = b^{\theta_1}$.

Lema 3.19. *Para cada $\gamma \in \Gamma_0$ se cumple $b_\gamma(\alpha_1^{n_1} \cdot \alpha_2^{n_2} \cdots \alpha_k^{n_k}(x_0)) = \sum_{i=1}^k n_i b_\gamma(\alpha_i(x_0))$.*

En otras palabras, fijado x_0 , la aplicación $b_\gamma : \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{R}$ inducida de la forma $b_\gamma(n_1, \dots, n_k) := b_\gamma(\alpha_1^{n_1} \cdot \alpha_2^{n_2} \cdots \alpha_k^{n_k}(x_0))$ es lineal.

Demostración. Esto no es más que una extensión al lema 3.14. Todo Γ_0 conmuta con γ , así que se puede aplicar sin problema.

Sea $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma_0$. Como $b_\gamma(\beta_1 \beta_2(x_0)) - b_\gamma(\beta_2(x_0)) = b_\gamma(\beta_1(x_0))$, tendremos que $b_\gamma(\beta_1 \beta_2(x_0)) = b_\gamma(\beta_1(x_0)) + b_\gamma(\beta_2(x_0))$. Iterando esto obtenemos el lema. $\square$

Y en el próximo lema estará quizá la parte más dura de la demostración.

Lema 3.20. *Existe una elección de $\gamma_i \in \Gamma_0$, $i = 1, \dots, k$, y una constante $c_1 > 0$ tal que para todo $\beta \in \Gamma_0$ existe un $i \in \{1, \dots, k\}$ con $|b_{\gamma_i}(\beta(x_0))| \geq c_1 |\beta|_{\Gamma_0}$.*

Demostración. Sabemos por el lema anterior que b_γ es lineal en $\mathbb{Z}^k$. Por tanto, existe una única aplicación lineal $r_\gamma : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende a b_γ . Bastará encontrar $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ tal que $r_{\gamma_1}, \dots, r_{\gamma_k}$ sean linealmente independientes.

De tener esos r_{γ_i} , la aplicación $v \mapsto (r_{\gamma_1}(v), \dots, r_{\gamma_k}(v))$ será un isomorfismo lineal $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$. Si ponemos la norma $\|\cdot\|_1$ en el dominio, y la norma $\|\cdot\|_\infty$ en la imagen, existirá una constante c_1 tal que $\|r(v)\|_\infty \geq c_1 \|v\|_1$ (utilizando que todas las normas son equivalentes). Si v es un punto del mallado obtenemos la conclusión al lema.

Vamos a buscar esos $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Por un argumento de inducción supondremos que tenemos $\gamma_1, \dots, \gamma_j$ con $j < k$ tales que $r_{\gamma_1}, \dots, r_{\gamma_j}$ sean linealmente independientes, y encontremos al γ_{j+1} . Sea K la intersección de los núcleos de $r_{\gamma_1}, \dots, r_{\gamma_j}$. Este subespacio tendrá dimensión $\dim K = k - j \geq 1$.

Tomemos una constante c_2 tal que para todo $\gamma \in \Gamma_0$ se cumpla que $|r_\gamma(v)| \leq c_2 \|v\|_2$. Para ver que esta constante existe, ponemos $v = (a_1, \dots, a_k)$. Utilizando que $|b_\gamma(y)| \leq d(y, x_0)$ (las funciones de Busemann son Lipschitz, y esta vale 0 en x_0)

deducimos

$$\begin{aligned} |r_\gamma(v)| &= \left| \sum_{i=1}^n a_i b_\gamma(\alpha_i(x_0)) \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right) \left(\max_i |b_\gamma(\alpha_i(x_0))| \right) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right) \left(\max_i d(\alpha_i(x_0), x_0) \right) \leq c_2 \|v\|_2. \end{aligned}$$

Al final aparece $\|v\|_1 = \sum |a_i|$, pero podemos sustituirla por $\|v\|_2$ utilizando que todas las normas son equivalentes.

Ahora recordemos el lema 3.5 y la función d_γ . Para cada $x \in M$ y $\gamma \in \Gamma$, el desplazamiento $d_\gamma(x)$ es la longitud de un lazo geodésico en $\bar{M}$ (la proyección de la geodésica que une x con $\gamma(x)$). En particular $\min d_\gamma \geq \text{sys}(\bar{M})$, siendo $\text{sys}(\bar{M})$ la longitud de la menor geodésica no contractible. El lema 3.9 nos dirá además que $|b_\gamma(\gamma(x_0))| \geq \text{sys}(\bar{M})$.

Tomemos γ_{j+1} un punto en el retículo de forma que su distancia con K sea menor que $\text{sys}(\bar{M})/2c_2$. Y sea $v_0 \in K$ tal que

$$\|v_0 - \gamma_{j+1}\|_2 \leq \frac{\text{sys}(\bar{M})}{2c_2}.$$

Entonces, haciendo $r_{\gamma_{j+1}}(v_0) = r_{\gamma_{j+1}}(\gamma_{j+1}) + r_{\gamma_{j+1}}(v_0 - \gamma_{j+1})$, tendremos que:

$$\begin{aligned} |r_{\gamma_{j+1}}(v_0)| &\geq |r_{\gamma_{j+1}}(\gamma_{j+1})| - |r_{\gamma_{j+1}}(v_0 - \gamma_{j+1})| \\ &= |b_{\gamma_{j+1}}(\gamma_{j+1}(x_0))| - |r_{\gamma_{j+1}}(v_0 - \gamma_{j+1})| \\ &\geq \text{sys}(\bar{M}) - c_2 \|v_0 - \gamma_{j+1}\|_2 \\ &\geq \text{sys}(\bar{M}) - c_2 \frac{\text{sys}(\bar{M})}{2c_2} \\ &= \frac{\text{sys}(\bar{M})}{2} > 0. \end{aligned}$$

En particular $r_{\gamma_{j+1}}(v_0) \neq 0$, así que $r_{\gamma_{j+1}}$ será independiente a los r_{γ_i} anteriores, y hemos terminado la prueba. Obsérvese que $\text{sys}(\bar{M}) > 0$ pues por el teorema de Cartan (teorema 2.34 en estas notas) existen geodésicas cerradas en cada clase de homotopía, y si esa longitud tendiese a cero alguna tendría que ser contractible. $\square$

Ya estamos listos para demostrar el teorema de Croke y Schroeder:

Demostración (Croke-Schroeder). Sea $\Gamma_0 \subset \Gamma$ un subgrupo abeliano con generadores $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Podemos extender este conjunto a un conjunto $\{\beta_i\}$ de generadores de Γ . Con estos generadores consideremos las normas $|\cdot|_{\Gamma_0}$ y $|\cdot|_\Gamma$.

Por cómo hemos elegido los generadores, ya tenemos que $|\gamma|_{\Gamma_0} \geq |\gamma|_\Gamma$ para los $\gamma \in \Gamma_0$. Para la otra cota tomemos c_1 del lema 3.20 y $c_3 = \max_i \{d(\beta_i(x_0), x_0)\}$. En la demostración al lema 3.18 hemos visto que $|\gamma|_\Gamma \geq d(\gamma(x_0), x_0)/c_3$. Y fijado $\gamma \in \Gamma_0$, tomemos γ_P el elemento de Γ_0 tal que, por el lema 3.20, $|b_{\gamma_P}(\gamma(x_0))| \geq c_1 |\gamma|_{\Gamma_0}$. Combinando todo esto,

$$|\gamma|_\Gamma \geq \frac{1}{c_3} d(\gamma(x_0), x_0) \geq \frac{1}{c_3} |b_{\gamma_P}(\gamma(x_0))| \geq \frac{c_1}{c_4} |\gamma|_{\Gamma_0}. \quad \square$$

Este resultado abre la veda a algunas consecuencias muy interesantes. Por ejemplo, Croke y Schroeder prueban en su artículo dos afirmaciones que enunciaremos juntas en el siguiente teorema.

Teorema 3.21. *Sea $\bar{M}$ una variedad compacta sin puntos conjugados. Entonces todo subgrupo nilpotente de $\pi_1(\bar{M})$ es abeliano. Además, todo subgrupo $\Sigma < \pi_1(\bar{M})$ soluble es un grupo de Bieberbach.*

Un grupo de Bieberbach es un subgrupo discreto de isometrías de algún espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ tal que el cociente $\mathbb{R}^n/\Sigma$ sea una variedad compacta. Es decir, son los posibles grupos fundamentales de las variedades compactas y planas.

O sea, estamos afirmando que los subgrupos solubles del grupo fundamental $\pi_1(\bar{M})$ estarán profundamente relacionados con la geometría euclídea, al ser subgrupos de isometrías de $\mathbb{R}^n$.

CAPÍTULO 4

La conjetura de E. Hopf

Vamos a exponer la demostración de Burago e Ivanov [1] a la conjetura de Eberhard Hopf, que afirma que todo toro de dimensión n con una métrica sin puntos conjugados será en realidad un toro plano. Equivalentemente, $\mathbb{R}^n$ con una métrica $\mathbb{Z}^n$ -periódica y tal que por cada dos puntos haya una única geodésica será el espacio euclídeo.

El propio Hopf [15] dió una demostración elemental para el caso $n = 2$ que expon-dremos en la primera sección. Por desgracia, el caso general es mucho más complicado.

La idea de Burago consiste en que la distancia d definida por la métrica en $\mathbb{R}^n$ será comparable a una cierta norma $\|\cdot\|$. Esa norma será en realidad euclídea, pues cumplirá una propiedad extremal que solo se puede dar en ese caso. Gracias a eso, por medio de geometría integral podremos comprarar la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ con una métrica euclídea, probando que efectivamente estamos en un espacio plano.

4.1. El toro bidimensional sin puntos conjugados es plano

A lo largo de la demostración de los resultados de Hopf y de Burago-Ivanov utilizaremos una medida m definida en el fibrado tangente unitario $T_1M = \{(p, v) \in TM : |v| = 1\}$ de una variedad riemanniana M . Hablamos de la **medida de Liouville**.

Esta se define localmente, pues en abiertos $U \subset M$ suficientemente pequeños tendremos que $T_1U \cong U \times S^{n-1}$. Y ahí podemos considerar el producto de la medida riemanniana en M (dada por $\sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n$) y la medida de Lebesgue en la esfera.

Una propiedad importantísima de esta medida es que **será invariante por el flujo geodésico** $\Phi_t : T_1M \rightarrow T_1M$. Hemos visto esto en la proposición 1.10. Alternativamente, do Carmo [5] da pistas hacia una demostración más elemental en los ejercicios del capítulo 3 de su libro.

Teorema 4.1. *Sea S una superficie compacta sin puntos conjugados. Entonces,*

$$\int_S K dA \leq 0$$

donde K es la curvatura gaussiana. Además, si esa integral se anula, K será cero en toda la superficie.

Está claro que esto demostrará que un toro sin puntos conjugados es plano, pues el teorema de Gauss-Bonnet nos dice que $\int K = 0$, y combinado con este resultado se sigue $K \equiv 0$.

Demostración. Sea γ una geodésica cualquiera sobre S . Los campos de Jacobi ortogonales a γ cumplirán la ecuación

$$J''(\gamma(s)) + K(s)J(\gamma(s)) = 0.$$

Podemos escribir $J(\gamma(s))$ como $y(s)E(s)$, siendo E el transporte paralelo de un vector unitario ortogonal a γ e $y(s)$ una función real. Entonces y satisface la EDO

$$(4.1) \quad y''(s) + K(s)y(s) = 0.$$

Ahora, tendremos una única solución $y(s; a, b)$ a esa ecuación que cumpla

$$y(a; a, b) = 1, \quad y(b; a, b) = 0.$$

Nosotros ya conocíamos la existencia. La unicidad se sigue de no haber puntos conjugados: De haber dos soluciones y_1 e y_2 cumpliendo esas condiciones su resta $y_1 - y_2$ también sería solución y se anularía en dos parámetros, por lo que tendríamos un punto conjugado.

Se satisface además la identidad

$$(4.2) \quad y(s; a, b) = y(\alpha; a, b)y(s; \alpha, \beta) + y(\beta; a, b)y(s; \beta, \alpha),$$

ya que las funciones de ambos lados de la igualdad son soluciones de (4.1), y coinciden para $s = \alpha$ y $s = \beta$. Después tenemos una versión simplificada de esto:

$$(4.3) \quad y(s; a, b) = y(a'; a, b)y(s; a', b)$$

Otras dos observaciones interesantes sobre estas soluciones son

$$(4.4) \quad y(s; a, b') > 0 \quad \text{si } a, s < b', \text{ y}$$

$$(4.5) \quad y(s; a, b) \geq y(s; a, b') \quad \text{para } s \leq a < b < b',$$

que se deducen de que dos soluciones se pueden cruzar en un único punto.

Obsérvese ahora que (4.4) y (4.5) permiten que exista el límite

$$y(s; a) = \lim_{b \rightarrow \infty} y(s; a, b)$$

Esto es porque para $s \leq a$ (4.5) nos da una sucesión monótona decreciente pero positiva por (4.4). Después se deduce para todo s utilizando (4.2) con α y β por debajo de a . De ahí se deduce también que

$$(4.6) \quad y'(s; a) = \lim_{b \rightarrow \infty} y'(s; a, b)$$

Esa función cumple las propiedades

$$y(a; a) = 1, \quad y(s; a) \geq 0$$

y de hecho es solución de (4.1), luego la desigualdad anterior será en realidad estricta.

Podemos considerar entonces

$$u(s) = \frac{y'(s; a)}{y(s; a)}.$$

Esa función es independiente de a , pues al cambiarlo podemos utilizar (4.4) y ver que solo aparecería un factor $y(a'; a, b)$ en numerador y denominador de diferencia, que se cancelarán.

Es fácil comprobar que cumplen la ecuación de Ricatti:

$$(4.7) \quad u'(s) + u^2(s) + K(s) = 0$$

Como S es una superficie compacta, $K > -A^2$ para algún $A > 0$.

Proposición 4.2. $|u| \leq A$.

Demostración. Consideremos la ecuación diferencial

$$z''(s) - A^2 z(s) = 0,$$

y sea $z(s; a, b)$ la solución que vale 1 en a , y 0 en b . Sería fácil darla explícitamente si fuese necesario.

Consideremos después $f = zy' - yz'$. Tiene por derivada

$$f' = zy'' - yz'' = (-K + A^2)zy.$$

Para $s, a < b$, ambas y y z serán positivas, y nuestra función f será decreciente. Además, $f(b) = 0$, pues ahí se anulan y y z .

O sea que $zy' - yz' > 0$ si $s < b$, es decir,

$$\frac{y'}{y} > \frac{z'}{z} = -A.$$

Y haciendo $b \rightarrow \infty$, concluimos $u \geq -A$.

La otra desigualdad se obtiene similarmente, pero considerando b por debajo de a . □

Ahora trabajaremos en $T_1 S$, el fibrado tangente unitario de S . Para cada $P = (p, v) \in T_1 S$ tengo una $u = u(P)$ solución a la ecuación de Ricatti sobre la geodésica $\gamma(t) = \Phi_t(P)$. Veamos que $u(P, t)$ es medible.

Escribamos

$$u(s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{y'(s; a, b)}{y(s; a, b)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{Y'(s, b)}{Y(s, b)}$$

para Y la solución a la ecuación de Jacobi con $Y(b) = 0$, $Y'(b) = 1$. En particular podemos tomar ese límite de forma discreta,

$$u(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y'(s, s+n)}{Y(s, s+n)}.$$

Así,

$$u(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y'_n(s; P)}{Y_n(s; P)} \Big|_{s=0},$$

siendo $Y_n(s, P)$ la solución a la ecuación de Jacobi $Y''(s) + K(\Phi_s(P))Y(s) = 0$ con $Y(\phi_n(P)) = 0$ y $Y'(\phi_n(P)) = 1$. Por ello, Y_n y su derivada serán continuas respecto a P y por tanto medibles. Esto hará medible al límite de Y'_n/Y_n , como queríamos demostrar.

Además, u es acotada. Así, integrando la ecuación de Ricatti tendremos

$$\int_0^1 u'(P, t) + u^2(P, t) + K(\Phi_t(P)) dt = 0,$$

que se puede reescribir como

$$u(\Phi_1(P)) - u(\Phi_0(P)) + \int_0^1 K(\Phi_t(P)) dt = - \int_0^1 u^2(\Phi_t(P)) dt.$$

Integrando esto en T_1S (en el sentido de la medida de Liouville), podemos escribir el lado izquierdo como

$$\begin{aligned} \int_{T_1S} u(\Phi_1(P)) - u(P) dm + \int_{T_1S} \int_0^1 K(\Phi_t(P)) dt dm &= \int_0^1 \int_{T_1S} K(\Phi_t(P)) dm dt \\ &= \int_{T_1S} K(P) dm \\ &= 2\pi \int_S K(p) dA, \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad usamos que Φ_1 preserva la medida de Liouville para anular la primera integral y aplicamos el teorema de Fubini en la otra. En la segunda igualdad volvemos a utilizar que Φ_t conserva la medida de Liouville.

Tenemos entonces

$$2\pi \int_S K(p) dA = - \int_{T_1S} \int_0^1 u^2(\Phi_t(P)) dt dm,$$

luego efectivamente la curvatura total es negativa.

Por otro lado, si $\int K dA = 0$, tendremos que

$$\int_0^1 u^2(\Phi_t(P)) dt = 0 \quad \text{en casi todo punto } P \in T_1S,$$

y gracias a la continuidad la función u se anulará sobre todas las geodésicas. Mirando a la ecuación de Ricatti (4.7) concluimos $K(p) = 0$ para todo $p \in S$. $\square$

4.2. Preliminares

En esta sección haré algunos comentarios que se utilizarán a lo largo de la demostración del caso general de la conjetura de Hopf. Denotemos por $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ al toro n -dimensional con una métrica riemanniana sin puntos conjugados. Llamaremos d a la distancia en $\mathbb{R}^n$ resultante de levantar la distancia que define la métrica en el toro. Una distancia de ese estilo es llamada **distancia periódica**, al ser invariante por traslaciones por vectores en $\mathbb{Z}^n$. Es decir, $d(x+a, y+a) = d(x, y)$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{Z}^n$.

4.2.1. Norma estable, desigualdad de Burago.

Nuestro primer objetivo es demostrar el siguiente teorema atribuido a Burago [2]. Consiste en una comparación a gran escala de la distancia periódica d con una norma. Esta desigualdad es una pieza fundamental de la prueba, aparecerá continuamente.

Teorema 4.3 (Burago). *Sea d una distancia $\mathbb{Z}^n$ -periódica en $\mathbb{R}^n$. Existe una norma $\|\cdot\|$ tal que*

$$|d(x, y) - \|x - y\|| < C$$

para alguna constante C , y cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Esta norma es conocida como la **norma estable**. Empezaremos definiéndola para $v \in \mathbb{Z}^n$ como

$$\|v\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d(0, mv)}{m}$$

Este límite efectivamente existe, como nos dirá el siguiente lema:

Lema. *Sea $(x_m)_{m=1}^\infty$ una sucesión de números reales tal que $x_{m_1+m_2} \leq x_{m_1} + x_{m_2}$. Entonces la sucesión $(x_m/m)_{m=1}^\infty$ tendrá límite.*

Demostración. Sea $\alpha = \inf_m x_m/m$. Veamos que nuestra sucesión será convergente a ese ínfimo. Para todo $\varepsilon > 0$ habrá un $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j/j < \alpha + \varepsilon$. Y todo número natural m se puede descomponer por el algoritmo de la división de la forma

$$m = kj + r \quad \text{con } k, r \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq r < j.$$

Así,

$$x_m \leq kx_j + x_r \leq kj(\alpha + \varepsilon) + x_r \leq m(\alpha + \varepsilon) + C(j),$$

donde $C(j) = \max_{0 \leq r < j} x_r$. Por tanto,

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{x_m}{m} \leq \alpha + \varepsilon,$$

y como ε era arbitrario, tenemos la convergencia. □

Y por supuesto, esto aplica a nuestra sucesión. Si $v \in \mathbb{Z}^n$ y $n, m \in \mathbb{N}$, por la desigualdad triangular y la periodicidad de la distancia tendremos

$$d(0, (m+n)v) \leq d(0, mv) + d(mv, (m+n)v) = d(0, mv) + d(0, nv).$$

Obsérvese que la norma será homogénea para números enteros, y verifica la desigualdad triangular (pues d lo hace).

Extendamos $\|\cdot\|$ a $\mathbb{Q}^n$ de la única forma que mantiene la homogeneidad. Si $p_i, q \in \mathbb{Z}$ y $q > 0$, definimos

$$\|(p_1/q, \dots, p_n/q)\| = \frac{1}{q} \|(p_1, \dots, p_n)\|.$$

Esta norma será Lipschitz sobre $\mathbb{Q}^n$. Sean $e_1, \dots, e_n$ los vectores de la base canónica, y $x \in \mathbb{Q}^n$. Escribamos $x = \sum x_i e_i$. Entonces

$$\|x\| \leq \sum |x_i| \|e_i\| \leq n \max \|e_i\| \cdot \|x\|_{\text{euclídea}}.$$

Gracias a esto existirá una única extensión continua de $\|\cdot\|$ a todo $x \in \mathbb{R}^n$, definiendo $\|x\|$ como $\lim \|x_j\|$, donde x_j es una sucesión racional que aproxima x . Como la norma es Lipschitz, ese límite será el mismo para las diferentes sucesiones que podamos tomar.

Proposición 4.4. Sean $p \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{Z}^n$. El límite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d(p, p + mv)}{m}$$

existe y coincide con $\|v\|$.

Demostración. Sean a, b, c, e puntos en algún espacio métrico. Se cumple

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) \leq d(a, c) + d(c, e) + d(e, b).$$

Si pasamos $d(c, e)$ restando tenemos

$$d(a, b) - d(c, e) \leq d(a, c) + d(e, b).$$

Y por simetría

$$|d(a, b) - d(c, e)| \leq d(a, c) + d(e, b).$$

Sustituyendo en esa desigualdad tenemos

$$\frac{1}{m} |d(p, p + mv) - d(0, mv)| \leq \frac{1}{m} (d(0, p) + d(p + mv, mv)) = \frac{2d(0, p)}{m},$$

y pasando al límite se demuestra la proposición. $\square$

Observación: Basta demostrar el teorema 4.3 para x, y en la misma órbita bajo la acción de $\mathbb{Z}^n$. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$ generales podemos definir $v = y - x$, y separar parte

entera y parte fraccionaria, de la forma $v = v' + \bar{v}$ con $v' \in \mathbb{Z}^n$, $\bar{v} \in [0, 1]^n$. Así, con dos desigualdades triangulares podremos acotar

$$|d(x, y) - \|x - y\|| \leq |d(x, y) - d(x, x + v')| + |\|x - y\| - \|x - (x + v')\|| \\ + |d(x, x + v') - \|x - (x + v')\||.$$

El último sumando estará acotado por una constante universal si se cumple nuestro teorema 1 en elementos de una misma órbita. Los otros dos sumandos se acotan uniformemente de la misma manera, así que solo lo escribiré para el primero. Obsérvese que

$$|d(x, y) - d(x, x + v')| \leq d(y, x + v') = d(x + \bar{v}, x),$$

al aplicar la desigualdad triangular al revés para d , y luego usando que la traslación por $v' \in \mathbb{Z}$ es una isometría de d . Ahora observemos que por otra traslación entera podemos suponer $x \in [0, 1]^n$. Y la función $(a, b) \mapsto d(a + b, a)$ alcanzará un máximo para $a, b \in [0, 1]^n$, luego efectivamente podemos acotar ese sumando. $\square$

Ahora, fijados $p \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{Z}^n$ definimos la función auxiliar $f(m) = d(p, p + mv)$ para $m \in \mathbb{N}$. Obsérvese que $f(m)/m$ converge a la norma estable de v por nuestra proposición. Además, f verificará dos **propiedades**:

1. $f(m_1 + m_2) \leq f(m_1) + f(m_2)$ para $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.
2. $f(2m) \geq 2f(m) - C$ para $m \in \mathbb{N}$ y alguna constante $C > 0$.

Antes de demostrarlas, veamos que esas dos propiedades implican el teorema 4.3. Para todo $k, m \in \mathbb{N}$ podemos acotar

$$\frac{f(mk)}{k} \leq f(k) \leq \frac{f(2k)}{2} + C/2 \leq \dots \leq \frac{f(2^m k)}{2^m} + C \sum_{j=1}^m 2^{-j}.$$

La primera desigualdad se consigue con la propiedad 1, y el resto son sucesivas aplicaciones de la propiedad 2. Obsérvese que haciendo $m \rightarrow \infty$, esas desigualdades quedan en

$$k\|v\| \leq f(k) \leq k\|v\| + C,$$

y luego evaluando en $k = 1$ tenemos el teorema.

Entonces, si demostramos esas dos propiedades hemos concluido. La primera es simplemente la desigualdad triangular combinada con la periodicidad de la métrica:

$$f(m_1 + m_2) = d(p, p + m_1 v + m_2 v) \leq d(p, p + m_1 v) + d(p + m_1 v, p + m_1 v + m_2 v) \\ = d(p, p + m_1 v) + d(p, p + m_2 v) = f(m_1) + f(m_2)$$

La segunda es un poco más difícil. Necesitaremos la ayuda de un poderosísimo lema:

Lema 4.5. Si $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva continua, existirá una colección de intervalos $[a_i, b_i] \subset [0, 1]$ con $i = 1, \dots, k \leq \frac{n+1}{2}$ tales que

$$\sum_{i=1}^k s(b_i) - s(a_i) = \frac{s(1) - s(0)}{2}.$$

Demostración. Sea $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Definamos $t_i = \sum_{j=1}^i x_j^2$. Obsérvese que los t_i forman una partición del intervalo $[0, 1]$ ya que

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1.$$

Definimos la aplicación $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f(x) = \sum \text{sign}(x_i)(s(t_{i+1}) - s(t_i)).$$

Esa aplicación es continua e impar, luego por el teorema de Borsuk-Ulam existe $x_0 \in S^n$ tal que $f(x_0) = 0$. Sobre ese x_0 separamos los $s(t_{i+1}) - s(t_i)$ tales que el signo de x_i sea positivo de los de signo negativo. Para que la suma de todos (contando signos) se anule, los dos grupos de segmentos tienen que sumar el mismo vector.

Además, si sumamos todos ignorando los signos obtenemos $s(1) - s(0)$. Por tanto cada una de esas dos separaciones tendrá que sumar $\frac{s(1)-s(0)}{2}$. Además, como entre las dos tienen n segmentos, una de ellas tendrá que tener menos de $\frac{n+1}{2}$ segmentos. Y con eso concluimos la demostración del lema. $\square$

Utilicemos esto para probar que $2f(m) \leq f(2m) + C$ para nuestra función auxiliar. Sea $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ la geodésica minimizante entre p y $p + 2mv$. Por el lema tenemos segmentos $[a_i, b_i] \subset [0, 1]$ con $i = 1, \dots, k$ (y k menor que $\frac{n+1}{2}$) tales que

$$\sum s(b_i) - s(a_i) = \frac{s(1) - s(0)}{2} = mv.$$

Definamos ahora una colección de puntos $p_i \in \mathbb{R}^n, i = 0, \dots, k$ de forma recursiva. Empezamos por $p_0 = p$. Y después definimos $p_i = p_{i-1} + s(b_i) - s(a_i)$. Supongamos que se cumple

$$(4.8) \quad d(p_i, p_{i-1}) \leq d(s(b_i), s(a_i)) + C$$

para una constante C que solo depende de la métrica y la dimensión. Esto lo veremos más adelante. De ser así, tendremos

$$f(m) = d(p, p_k) \leq \sum_{i=1}^k d(p_{i-1}, p_i) \leq \sum_{i=1}^k d(s(a_i), s(b_i)) + kC$$

Además, se puede observar que los segmentos complementarios

$$[s(0), s(a_i)], \dots, [s(b_i), s(a_{i+1})], \dots, [s(b_k), s(1)]$$

también sumarán mv . Luego repitiendo la misma cuenta obtenemos dos desigualdades:

$$f(m) \leq (\text{parte de la longitud de } s) + kC$$

$$f(m) \leq (\text{el resto de la longitud de } s) + kC$$

Y claro, una de esas dos partes de la longitud de s no podrá ser mayor que la mitad de la longitud total. Además, por cómo hemos elegido s , esa longitud total será $f(2m)$. Concluimos entonces que

$$f(m) \leq \frac{f(2m)}{2} + kC.$$

Solo queda aclarar la ecuación (4.8). Recojamos su prueba en formato de proposición.

Proposición 4.6. Sean a, b y p, q los vértices de dos segmentos trasladados. Es decir, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $p = a + v$, $q = b + v$. Entonces, tendremos la desigualdad

$$d(a, b) \leq d(p, q) + C$$

para una $C > 0$ independiente de los puntos.

Demostración. Dividamos $v = v' + \bar{v}$, con $v' \in \mathbb{Z}^n$, y $\bar{v} \in [0, 1]^n$. En ese caso,

$$\begin{aligned} d(a, b) &= d(a + v', b + v') \\ &\leq d(a + v', a + v' + \bar{v}) + d(a + v' + \bar{v}, b + v' + \bar{v}) + d(b + v' + \bar{v}, b + v') \\ &= d(a + v', (a + v') + \bar{v}) + d(p, q) + d((b + v') + \bar{v}, b + v') \end{aligned}$$

Entonces bastará acotar por una constante absoluta la función $(x, y) \mapsto d(x, x + y)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in [0, 1]^n$. Pero podemos separar otra vez $x = x' + \bar{x}$, con $x' \in \mathbb{Z}^n$, $\bar{x} \in [0, 1]^n$ y por la periodicidad tenemos que

$$d(x, x + y) = d(\bar{x}, \bar{x} + y).$$

O sea, hemos reducido el problema a acotar la función para $x, y \in [0, 1]^n$, y eso es posible por la continuidad de d . $\square$

4.2.2. Dirección en el infinito

De aquí en adelante asumimos que la métrica no tiene puntos conjugados. Así la longitud de cualquier segmento geodésico será la distancia entre sus extremos.

Dado $(p, v) \in T_1\mathbb{R}^n$, definimos la **dirección en el infinito** $D(p, v)$ como el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp_p(tv) - p}{t}.$$

Este límite existirá para casi todo (p, v) gracias al siguiente teorema. Esta formulación está sacada de [22] (página 24). Una demostración se podrá encontrar en [17].

Teorema ergódico de Birkhoff para flujos. Sea $\psi_t : N \rightarrow N$ un flujo sobre una variedad completa N . Sea μ una medida invariante por ψ_t , y sea $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces

1. La función

$$\bar{f}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\psi_t(x)) dt$$

está bien definida para casi todo $x \in N$

2. $\bar{f}$ es integrable, invariante por ψ_t , y su integral es justamente

$$\int_N \bar{f}(x) d\mu = \int_N f(x) d\mu.$$

Tomemos $N = T_1\mathbb{R}^n$ el fibrado tangente unitario, y $\Phi_t : T_1\mathbb{R}^n \rightarrow T_1\mathbb{R}^n$ el flujo geodésico, que conserva la medida de Liouville μ . Busquemos escribir ese límite en la forma de nuestro teorema:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\exp_p(Tv) - p}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \exp_p(sv) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \pi \circ \Phi_t(p, v) dt$$

siendo π la proyección de $T_1\mathbb{R}^n$ a S^{n-1} , identificando $T_1\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times S^{n-1}$. Obsérvese que $\pi \circ \Phi_t$ no toma valores en $\mathbb{R}$, sino en $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Estamos aplicando Birkhoff coordenada a coordenada, donde sí tenemos valores reales.

Cerramos esta sección observando que la imagen de D está contenida en F , la esfera unidad para la norma estable. Esto es porque $\|\exp_p(tv) - p\| \leq d(\exp_p(tv), p) + c = t + c$, gracias al teorema 4.3. Similarmente esa norma está acotada inferiormente por $t - c$. Por tanto, con el paso al límite tenemos

$$\|D(p, v)\| = 1.$$

4.2.3. Foliaciones racionales

Dado un punto $p \in F \subset \mathbb{R}^n$, con F la bola unidad de la norma estable $\|\cdot\|$, diremos que es **racional** si existe $a > 0$ con $ap \in \mathbb{Z}^n$. Evidentemente para cada p racional habrá un a mínimo tal que $ap \in \mathbb{Z}^n$.

Si $tp \in \mathbb{Z}^n$, entonces t será un múltiplo entero de ese mínimo a . De no ser el caso, uno podría sustraer a tp el vector ap una cantidad k de veces para obtener otro $(t - ak)p \in \mathbb{Z}^n$ con $0 < t - ak < a$, y a no sería mínimo.

Proposición 4.7. *Sean tales p, a . Existe un campo vectorial $v_p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_1\mathbb{R}^n$ que es $\mathbb{Z}^n$ -invariante y tal que sus trayectorias son geodésicas de dirección p (es decir, $D(v_p(x)) = p$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$). Además, verifica que*

$$\exp_x tv_p(x) = x + tp$$

para los $t \in \mathbb{R}$ con $tp \in \mathbb{Z}^n$.

Demostración. Como $\exp$ es un difeomorfismo, podemos definir un campo vectorial suave por

$$v_p(x) = a^{-1} \exp_x^{-1}(x + ap).$$

Este es $\mathbb{Z}^n$ -invariante, pues al tratar con una métrica periódica tenemos que

$$(dT_v)_x \exp_x^{-1}(x + ap) = \exp_{x+v}^{-1}(x + v + ap) \quad \forall v \in \mathbb{Z}^n,$$

siendo T_v la traslación por v .

Además, por su definición es inmediato que

$$\exp_x av_p(x) = x + ap,$$

y por tanto, para $t = ak$ con $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\exp_x tv_p(x) = \exp_{x+ap}(t - ap)v_p(x) = \exp_{x+tp}(0) = x + tp,$$

una de las propiedades deseadas.

Solo queda por demostrar que $D(v_p(x)) = p$. Ciertamente, se cumplirá que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp_x(tv_p(x)) - x}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in a\mathbb{N}}} \frac{\exp_x(tv_p(x)) - x}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t \in a\mathbb{N}}} \frac{x + tp - x}{t} = p.$$

Podemos reducir el límite a lo largo de esa subsucesión porque $t \in \mathbb{R}^+$ siempre está a distancia $< a$ de un punto de la subsucesión. Así, la diferencia entre los numeradores estará acotada, y como el denominador tiende a cero efectivamente tendrán el mismo límite. A las foliaciones determinadas por v_p se les llama **foliaciones racionales**. $\square$

4.2.4. Recordando las funciones de Busemann

Sea M una variedad riemanniana sin puntos conjugados, y sea γ un rayo geodésico parametrizado por longitud de arco en M . Recordemos que **la función de Busemann asociada a γ** es una función $F_\gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$ que se define por

$$F_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\rho(x, \gamma(t)) - t),$$

donde ρ es la distancia que define la métrica en M .

En nuestro caso, la función de Busemann hará el papel del producto escalar en un $\mathbb{R}^n$ posiblemente no euclideo, devolviendo la longitud de la proyección “ortogonal” sobre γ . Son pieza clave de la demostración, pues probaremos la conjetura de Hopf viendo que en este caso las funciones de Busemann se reinterpretan como un auténtico producto escalar euclideo y además coincidirán con la métrica.

Trabajaremos con dos casos diferentes, que son nuestro $\mathbb{R}^n$ con su distancia periódica d , y $\mathbb{R}^n$ con la norma estable $\|\cdot\|$ que hemos construido. Las funciones de Busemann en el primer caso serán, fijado un rayo γ con la estructura riemanniana, de la forma

$$B_\gamma(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(\gamma(t), y) - t).$$

Para $\mathbb{R}^n$ con la norma estable usaremos los rayos que define esa norma, que serán de la forma $\{tp : t \geq 0\}$ para $p \in F$. Así obtendremos

$$B_p(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\|tp - y\| - t).$$

Ya sabemos que las funciones de Busemann son 1-Lipschitz, y de hecho son diferenciables. Es más, podemos encontrar su gradiente cuando γ sea parte de la foliación racional. Utilizaremos que el gradiente se puede encontrar con la identidad

$$(4.9) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} B_\gamma(\exp_x tv) = \langle v, \nabla B_\gamma(x) \rangle.$$

Para ello, primero tomemos $v = v_p(x)$ un vector de la foliación a la que pertenece el rayo $\gamma(t) = \exp_{x_0}(tv_p(x_0))$

Como $B_\gamma(\exp_x av_p(x)) = B_{\gamma(\cdot+a)}(x) = B_\gamma(x) - a$ y B_γ es 1-Lipschitz, por el mismo argumento que hicimos al probar el lema 3.9 deducimos que

$$B_\gamma(\exp_x tv_p(x)) = B_\gamma(x) - t.$$

Y derivando respecto a t obtenemos $\langle v_p(x), \nabla B_\gamma(x) \rangle = -1$ para casi todo x . Como además el gradiente tiene módulo 1, podemos concluir que

$$\nabla B_\gamma(x) = -v_p(x).$$

Esto implica que las funciones de Busemann para distintas γ en nuestra foliación racional tienen el mismo gradiente. Por tanto, diferirán en una constante. Así que podemos escribir

$$B_\gamma(x) = B_{\gamma_p}(x) + C,$$

para $B_{\gamma_p}(x)$ la función de Busemann del rayo desde el origen $\gamma_p(t) = \exp_0(tv_p(0))$, y C una constante que solo depende de γ . Además, el teorema 4.3 nos dice que la función B_{γ_p} está a distancia acotada de B_p . En particular tendremos dos rayos de la foliación con funciones de Busemann que acotan por arriba y por abajo a B_p .

Por otro lado, los conjuntos de nivel de B_p son traslaciones del cono tangente a $-p \in F$. La idea de esto es que podemos conseguir este cono dilatando la esfera trasladada $F+p$ (más rigurosamente, dilataríamos la bola de centro p y luego tomaríamos la frontera). Pero un conjunto de nivel de B_p se puede escribir como

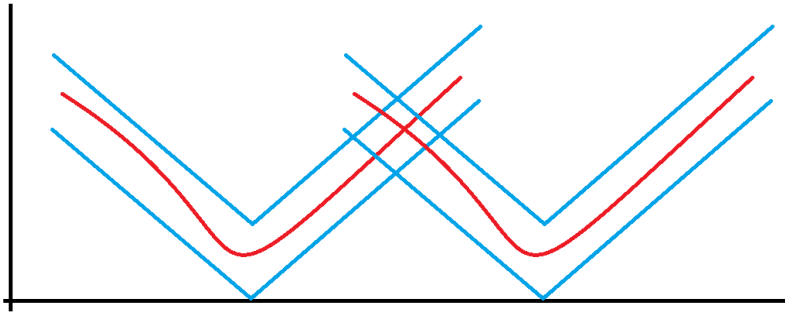
$$\{x : \lim_{t \rightarrow \infty} \|x - pt\| - t = c\} \quad \text{para algún } c.$$

Esto si $c = 0$ será justamente un límite de dilataciones de la bola centrada en p que pasa por el origen. Y si $c \neq 0$, obtenemos el mismo conjunto pero trasladado:

$$\{x : \lim_{t \rightarrow \infty} \|x - pt\| - t = c\} = \{x : \lim_{t \rightarrow \infty} \|(x + pc) - p(t + c)\| - (t + c) = 0\}$$

Ese segundo conjunto no es más que el cono tangente a $-p$ trasladado por $-pc$.

Veamos que ese cono es en realidad un plano. Por lo discutido antes, cada conjunto de nivel de B_{γ_p} estará encerrado entre dos conjuntos de nivel de B_p , que son trasladados al cono. Si ese cono no fuese recto, podemos cortar $\mathbb{R}^n$ con un 2-plano de manera que la intersección con estos conos fuese la unión de dos semirrectas que forman un ángulo menor que π . Esto se ve muy bien en un dibujo:



Las líneas azules representan a los trasladados al cono tangente, y la curva roja representa a algún conjunto de nivel de B_{γ_p} encerrado por ellas. En el dibujo se observa también que si se toma una traslación a la derecha lo suficientemente grande, los dos conos se cortarían con sus dos trasladados.

Además podemos suponer que la traslación es entera, pues tenemos un ángulo abierto de direcciones en las que elegirla. Ahora, esto entra en conflicto con afirmaciones hechas anteriormente, pues hemos encontrado una horosfera entre esos dos conos que se cortará con su trasladada por un vector entero. Y eso no tiene sentido, pues las horosferas formaban una foliación $\mathbb{Z}^n$ -invariante, así que su trasladada tendría que ser otro elemento de la foliación y no podrían intersectarse.

La única posibilidad es que el cono tangente a F en $-p$ sea un plano, convirtiéndolo en un **punto suave** de F . Además, como los conjuntos de nivel de B_p son traslaciones de planos se seguirá que B_p es una función lineal, pues el valor de B_p varía linealmente con cambios lineales en la posición.

4.3. Geometría integral

Como hemos comentado en la sección anterior, las funciones de Busemann B_p serán funciones de soporte de puntos suaves en la esfera F . En este capítulo utilizaremos el teorema 4.3 para, gracias a nuestra estructura riemanniana, obtener una desigualdad integral para $B_p(q)$ con $p, q \in F$ que después nos dará la rigidez que necesitamos para ver que $B_p(q)$ es un producto escalar euclídeo y coincide (en cierto sentido) con la métrica.

Fijemos un $p \in F$ racional, $(x, w) \in T_1\mathbb{R}^n$, y $q = D(x, w)$ su dirección en el infinito. Sea también $(\gamma(t), \gamma'(t)) = \Phi_t(x, w)$, con Φ el flujo geodésico en $T_1\mathbb{R}^n$. Gracias a (4.9) y al teorema fundamental del cálculo, podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \gamma'(t), -v_p \rangle dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} (B_{\gamma_p}(\gamma(T)) - B_{\gamma_p}(\gamma(0))) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} (B_p(\gamma(T)) - B_p(\gamma(0))) \\ &= B_p(\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} (\gamma(T) - \gamma(0))) = B_p(q). \end{aligned}$$

Obsérvese que podemos cambiar γ por γ_p en la primera igualdad pues sus respectivas funciones de Busemann solo difieren en una constante. En la segunda desigualdad cambiamos B_{γ_p} por B_p alegremente por estar a distancia acotada una de otra, y no alterar eso el límite gracias al factor T^{-1} . Para la tercera usamos que B_p es lineal. Ahora, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que:

$$\begin{aligned} B_p(q)^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \left(\int_0^T \langle \gamma'(t), -v_p \rangle dt \right)^2 \\ &\leq \liminf \frac{1}{T^2} \left(\int_0^T 1 dt \right) \left(\int_0^T \langle \gamma'(t), -v_p \rangle^2 dt \right) \\ &= \liminf \frac{1}{T} \int_0^T \langle \gamma'(t), v_p \rangle^2 dt \end{aligned}$$

Recordemos el teorema ergódico de Birkhoff para flujos geodésicos. Este nos dirá que ese límite inferior existe para casi todo $L(x, w) \in T_1\mathbb{R}^n$, con $(x, w) \in T_1\mathbb{T}^n$ y $L : T_1\mathbb{T}^n \rightarrow T_1\mathbb{R}^n$ algún levantamiento tal que $(d\pi) \circ L = \text{Id}$ (siendo $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ la aplicación recubridora obvia).

En la notación del teorema, N es el fibrado $T_1\mathbb{T}^n$. Nuestra f será dada por

$$f(w) = \langle L(w), v_p \rangle^2 = \langle w, d\pi(v_p) \rangle^2.$$

μ será la medida de Liouville, que se conserva por el flujo geodésico. Así, integrando la desigualdad en los $L(x, w)$ con $(x, w) \in T_1\mathbb{T}^n$ y utilizando la propiedad 2 en nuestro enunciado del teorema de Birkhoff, tenemos que

$$\int_{T_1\mathbb{T}^n} \langle L(w), v_p \rangle^2 d\mu(w) \geq \int_{T_1\mathbb{T}^n} (B_p(D \circ L(w)))^2 d\mu(w).$$

Pero obsérvese que los argumentos de B_p están en F , así que podríamos simplemente escribir la segunda integral como

$$\int_F (B_p(q))^2 dm(q),$$

para cierta medida m en F definida empujando¹ μ mediante $D \circ L$. Esto se puede entender intuitivamente como “la medida en F barrida por el flujo geodésico”.

Ahora reescribiremos la primera integral. Denotaremos μ_x la medida en la fibra $(T_1\mathbb{T}^n)_x$, y sea V la medida de volumen en $\mathbb{T}^n$. Supongamos esas medidas normalizadas, de manera que la primera integral se divida de la siguiente forma:

$$\int_{T_1\mathbb{T}^n} \langle L(w), v_p \rangle^2 d\mu(w) = \int_{\mathbb{T}^n} \int_{(T_1\mathbb{T}^n)_x} \langle w, d\pi(v_p) \rangle^2 d\mu_x(w) dV$$

Ahora, por cómo se define la medida de Liouville, podemos escribir la integral en cada fibra de $T_1\mathbb{T}^n$ como una integral en S^{n-1} con la medida estándar (pero normalizada) λ . Y como el resultado será el mismo para cada x y V está normalizada, la integral en $\mathbb{T}^n$ es redundante. Así pues,

$$\int_{T_1\mathbb{T}^n} \langle L(w), v_p \rangle^2 d\mu(w) = \int_{S^{n-1}} \langle w, v \rangle_{\mathbb{R}^n}^2 d\lambda(w),$$

para cierto $v \in S^{n-1}$ que proviene originalmente de $d\pi(v_p)$ pero del que en realidad no depende la integral, ya que con una rotación podemos llevarlo a cualquier punto de S^{n-1} sin variar λ ni el conjunto que recorre w .

Ahora, consideremos esa misma integral para $v = e_1, \dots, e_n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Como el resultado es el mismo, sumándolas tendremos que

$$n \int_{S^{n-1}} \langle w, v \rangle_{\mathbb{R}^n}^2 d\lambda(w) = \int_{S^{n-1}} \sum_{j=1}^n \langle w, e_j \rangle^2 d\lambda(w) = \int_{S^{n-1}} |w|^2 d\lambda(w) = 1.$$

¹Utilizo “empujar” como adaptación del anglicismo *push-forward*.

Así que nuestra desigualdad terminará siendo

$$(4.10) \quad \int_F (B_p(q))^2 dm(q) \leq \frac{1}{n}.$$

Esta desigualdad originalmente para $p \in F$ racional se extiende a los puntos suaves de F , ya que B_p varía continuamente con p en los puntos suaves al ser una función de soporte.

4.4. La dirección es continua sobre vectores racionales

Esta sección está dedicada a probar que D es continua en los vectores $v_p(x)$, los cuales formarán un conjunto denso. Esto nos servirá para poder afirmar que la medida m (obtenida empujando la medida de Liouville por $D \circ L$) tendrá soporte denso, cosa que utilizaremos más tarde.

Antes de probar esto, veamos un lema que nos será de gran ayuda.

Lema. *Sea $p \in F$ racional, y P el hiperplano tangente a F en p (ya sabemos que existe). Entonces P solo interseca a F en p .*

Demostración. Razonaremos por contradicción, suponiendo dos puntos distintos $p, q \in F \cap P$. La bola unidad es convexa, así que P no cortará a puntos interiores. Y como el conjunto de puntos $tp + (1-t)q$ con $t \in (0, 1)$ estarán en P y en la bola unidad, al ser ambos conjuntos convexos, en particular tendrán que estar en F .

De todo esto nos quedamos con que el vector $tp + (1-t)q$ tiene norma 1 para todo t , y sustituyendo $t = a/(a+b)$ para $a, b > 0$ deducimos que $\|ap + bq\| = a + b$ para cualesquiera $a, b \geq 0$.

Ahora tomemos² un $\delta > 0$ tal que para las geodésicas γ de la foliación racional que cumplan $\|D(\gamma') - p\| \geq \|p - q\|/2$ exista un $t > 0$ donde $1 - \langle \gamma'(t), v_p \rangle \geq \delta$.

Después tomemos la cantidad

$$s = \min\{a + b - d(\exp_x av, \exp_x -bw) : a, b \geq 1, \\ (x, v), (x, w) \in T_1\mathbb{R}^n, 1 - \langle v, w \rangle \geq \delta\},$$

que será positiva puesto que podemos reducir el mínimo al caso $a, b = 1$ aplicando dos desigualdades triangulares a d

$$-d(\exp_x av, \exp_x -bw) \geq -d(\exp_x av, \exp_x v) - d(\exp_x v, \exp_x -w) \\ - d(\exp_x -w, \exp_x -bw),$$

y utilizando que $d(\exp_x av, \exp_x v) = a - 1$ al tener una métrica sin puntos conjugados. Después la periodicidad en x nos permite bajar las exponenciales a $T_1\mathbb{T}^n$, donde tenemos compacidad y sabremos que se alcanza el mínimo.

²No he conseguido producir una explicación aceptable de por qué existe tal δ . Todo lo que escribe Burago es que “las derivadas de los proyectores a lo largo de rayos de la foliación racional sobre una horosfera estarán uniformemente acotadas”.

El siguiente paso es tomar $a \geq 1$ tal que ap tenga coordenadas enteras. También aproximaremos q por una sucesión de $q_N \in F$ racionales (es decir, $b_N q_N \in \mathbb{Z}^n$ para algún $b_N \geq 1$).

Pero además pediremos que esa aproximación verifique $\lim_{N \rightarrow \infty} b_N \|q - q_N\| = 0$. Podemos gracias al siguiente resultado clásico. Una buena referencia es el segundo capítulo de [24].

Teorema de Dirichlet (versión simultánea). *Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ números reales, y N natural positivo. Entonces existen enteros $a_1, \dots, a_d, b \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq b \leq N$ tales que*

$$\left| \alpha_i - \frac{a_i}{b} \right| < \frac{1}{bN^{1/d}}$$

Tomemos por $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ las coordenadas de q . Aplicando ese resultado encontraremos racionales a_i/b que los aproximan. Definamos la cantidad $M = \|(a_1/b, \dots, a_n/b)\|$. Nuestra aproximación a q por puntos racionales en F vendrá dada por la sucesión $q_N = (a_1/bM, \dots, a_n/bM)$, con los a_i, b, M que nos da el teorema.

Y claro, $\|q - q_N\|$ será comparable a $\sum |\alpha_i - a_i/b| < \frac{n}{bN^{1/d}}$ ya que los M convergen a 1. Y esa cota converge a 0 aún multiplicada por bM , que sería el b_N en nuestro contexto.

Ahora bastará tomar un N suficientemente grande, de manera que se cumplan las siguientes desigualdades:

$$\|q - q_N\| < \|q - p\|/2 \quad \text{y} \quad b_N \|q - q_N\| < s/2$$

Para ese N ponemos $r = q_N$ y $b = b_N$. Así tendremos para todo $x \in \mathbb{R}^n$ que

$$d(\exp_x av_p, \exp_x -bv_r) = d(x + ap, x - br) = \|ap + br\|,$$

donde la primera igualdad es por las propiedades de cada v_p , y la segunda porque ap y br están en $\mathbb{Z}^n$, donde d y $\|\cdot - \cdot\|$ coinciden.

Por último, eligiendo como γ una geodésica integral a v_r en la definición de δ puedo encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $1 - \langle v_p(x), v_r(x) \rangle \geq \delta$. Esto es porque evidentemente $D(\gamma) = r = q_N$, y habíamos pedido $\|q - q_N\| < \|p - q\|/2$, lo que implicará $\|q_N - p\| \geq \|p - q\|/2$ o se incumpliría la desigualdad triangular.

De esta manera $v_r(x)$ y $v_p(x)$ nos darán una expresión

$$a + b - d(\exp_x av_p, \exp_x -bv_r)$$

que esté acotada inferiormente por s . Combinando esto con la igualdad que comentamos justo encima tendremos que

$$a + b - \|br + ap\| \geq s.$$

Y por otro lado, una simple desigualdad triangular nos dice que

$$\|br + ap\| = \|bq + ap - b(q - r)\| \leq \|pq + ap\| + b\|q - r\|.$$

Pero ojo, sabemos desde el principio que $\|bq + ap\| = a + b$, y hemos elegido N tal que $b\|q - r\| = b_N\|q - q_N\| \leq s/2$, de manera que tendría que cumplirse

$$a + b - \|br + ap\| < s/2,$$

y hemos encontrado una contradicción. $\square$

Y con esto estamos preparados para ver la continuidad de D . La demostración puede ser tediosa, pero en realidad es una cuenta elemental, sin trucos.

Proposición 4.8. *D es continua sobre los vectores de las foliaciones racionales.*

Demostración. Sea $\gamma(t) = \exp_x tv_p(x)$ un rayo de nuestra foliación racional. Sea $N_\varepsilon = \{q \in F : \|p - q\| \leq \varepsilon\}$ un entorno de p , para $0 < \varepsilon < 1$ cualquiera.

Queremos encontrar U_ε un entorno de (x, v) tal que $D(U_\varepsilon) \subset N_\varepsilon$ y así demostrar la continuidad.

Tomemos

$$s = \min\{2 - \|p + q\| : q \in F, \|p - q\| = \varepsilon\}.$$

Gracias al lema anterior, $s > 0$, pues p es racional y por tanto $(p + q)/2$ tendrá que estar contenido en el interior de la bola unidad.

Sea $T > 0$ tal que $Tp \in \mathbb{Z}^n$, y además $T > 100(1+10c)/(s\varepsilon)$ (con c la constante que teníamos en el teorema 4.3). Elijamos el entorno U_ε de manera que $d(\gamma(t), \exp_y tw) < c$ para todo $(y, w) \in U_\varepsilon$ y $t \leq 3T$. Llamemos $(*)$ a esta acotación.

Ahora razonaremos por contradicción, y supongamos $D(U_\varepsilon) \not\subset N_\varepsilon$. Tomemos pues un punto $(y, w) \in U_\varepsilon$ fuera de N_ε , es decir,

$$\|D(y, w) - p\| \geq \varepsilon.$$

Esto significa que habrá un $t > T$ tal que

$$(4.11) \quad \left\| \frac{\exp_y(T+t)w - \gamma(T)}{\|\exp_y(T+t)w - \gamma(T)\|} - p \right\| = \varepsilon.$$

Esto es porque para $t = T$ el lado izquierdo de la igualdad está por debajo de ε , pero para t grande converge a $\|D(y, w) - p\| \geq \varepsilon$. Veámoslo:

Para $t = T$ podemos usar la acotación

$$\frac{100(1+10c)}{s\varepsilon} \leq T \leq \|\gamma(T) - \exp_y(2Tw)\| \leq d(\gamma(T), \exp_y(2Tw)) + c \leq 2c,$$

donde la primera desigualdad es por hipótesis de T , la segunda por una desigualdad triangular, la tercera por el teorema 4.3, y la cuarta por $(*)$. Combinando esto, concluiremos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\exp_y 2Tw - \gamma(T)}{\|\exp_y 2Tw - \gamma(T)\|} - p \right\| &\leq \frac{s\varepsilon (\|\exp_y 2Tw - \gamma(T)\| + \|\exp_y 2Tw - \gamma(T)\|)}{100(1+10c)} \\ &\leq \frac{4cs\varepsilon}{100(1+10c)} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En la primera desigualdad combinamos desigualdades triangulares con nuestra acotación de arriba. En la segunda usamos el teorema 4.3 junto con (*). En la tercera, simplemente usamos $s \leq 2$.

Ahora veamos qué pasa con esa cantidad para $t \rightarrow \infty$. Bastaría con ver que

$$\frac{\exp_y(T+t)w - \gamma(T)}{\|\exp_y(T+t)w - \gamma(T)\|} \rightarrow D(y, w).$$

Equivalentemente lo hará

$$\frac{\exp_y(T+t)w - \exp_y(T)w}{\|\exp_y(T+t)w - \gamma(T)\|},$$

ya que por (*) la diferencia tiende a cero, al estar acotado el numerador.

Pero es que además $\|\exp_y(T+t)w - \gamma(T)\|$ es comparable a t , gracias a un par de desigualdades triangulares, luego efectivamente tendremos esa convergencia que queríamos, y existe el t de la ecuación (4.11).

Por comodidad llamemos q a la fracción de (4.11), y R a su denominador. Ya estamos preparados para encontrar la contradicción.

Por un lado,

$$\begin{aligned} d(y, \exp_y(T+t)w) &= T + d(\exp_y Tw, \exp_y(T+t)w) \\ &\geq T + d(\exp_y(T+t)w, \gamma(T)) - d(\gamma(T), \exp_y Tw) \\ &\geq T + R - c - c. \end{aligned}$$

Aquí utilizamos primero una desigualdad triangular, y luego utilizamos (*) junto con el teorema 4.3. Esto implicará, por (*) otra vez, que

$$d(x, \exp_y(T+t)w) \geq d(y, \exp_y(T+t)w) - d(x, y) \geq T + R - 3c.$$

Pero esto se contradice con

$$\begin{aligned} d(x, \exp_y(T+t)w) &\leq \|\exp_y(T+t)w - x\| + c \\ &= \|\exp_y(T+t)w - \gamma(T) + \gamma(T) - x\| + c \\ &= \|Rq + Tp\| + c \\ &\leq T\|p + q\| + (R - T) + c \\ &\leq T(2 - s) + (R - T) + c \\ &\leq T + R + c - \frac{100(1 + 10c)}{\varepsilon} < T + R - 100c. \end{aligned}$$

Conviene aclarar que en las últimas desigualdades hemos utilizado la definición de s , y que por hipótesis $T > 100(1 + 10c)/s\varepsilon$. También utilizamos en la segunda igualdad que $\gamma(T) = x + Tp$ porque $Tp \in \mathbb{Z}^n$. $\square$

4.5. Redondez de una norma

Hagamos un descanso de nuestro contexto del toro sin puntos conjugados para probar un resultado que necesitaremos para rematar la demostración a nuestro gran teorema.

Pongamos que tenemos una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, y F es su esfera unidad. Como habíamos comentado ya, un punto $p \in F$ es suave si tiene un único hiperplano tangente. Equivalentemente, tendrá una única función lineal $-B_p$ con $-B_p(p) = 1$ y $-B_p(x) \leq 1$ para todo $x \in F$. Esto es lo que se conoce como función de soporte/apoyo.

También supondremos que tenemos una medida m de probabilidad en F . Con toda esa estructura podremos definir, en cada $p \in F$ suave, la cantidad

$$r(p, F, m) = \int_F (B_p(q))^2 dm(q).$$

Nos interesará particularmente hablar de cuán grande puede ser r , definiendo la **pérdida de redondez** por

$$R(F, m) = \sup\{r(p, F, m) : p \in F \text{ punto suave}\}.$$

Su evocador nombre se justifica por el resultado central de esta sección:

Teorema 4.9. *Para toda F, m tendremos que $R(F, m) \geq 1/n$. Y además, si el soporte de m es denso en F y se da la igualdad $R(F, m) = 1/n$, entonces F será un elipsoide, y de hecho $r(p, F, m) = 1/n$ en cada $p \in F$.*

En términos sencillos, si la pérdida de redondez es lo más pequeña posible, F será un elipsoide. Para probar eficazmente este resultado daremos primero una serie de definiciones y resultados que irán cobrando sentido por el camino.

Denotaremos por A el espacio de formas cuadráticas $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no negativas. Para cada $Q \in A$ denotaremos por B_Q la bola unidad $\{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq 1\}$. Además definiremos una función $v : A \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$v(Q) = \frac{1}{(\text{vol}(B_Q))^2},$$

donde vol es el volumen según la medida de Lebesgue. Si ese volumen es infinito, pondremos $v(Q) = 0$. El siguiente resultado se puede (e incluso debe) interpretar como una derivada direccional de v .

Lema. *Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, y $\|L\|_Q = \max\{L(x) : Q(x) = 1\}$. Entonces, para toda Q no degenerada,*

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} v((1-\varepsilon)Q + \varepsilon L^2) = nv(Q)(\|L\|_Q^2 - 1).$$

Demostración. La clave será encontrar una aplicación lineal H que transforme la bola B_Q en la de esa forma cuadrática más extraña. De esta manera sabremos que el

volumen se dilata por su determinante, y podremos derivar este con respecto a ε sin ningún problema.

Elijamos coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ tales que $Q = \sum_{j=1}^n x_j^2$, pero de manera que $x_1 = L/\|L\|_Q$. Esto se consigue tomando como primer vector de la base a L (normalizado) y completándolo según el producto escalar que define Q a una base Q -ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

De esta manera,

$$(1 - \varepsilon)Q + n\varepsilon L^2 = (1 - \varepsilon)Q + n\varepsilon \|L\|_Q^2 x_1^2 = (1 - \varepsilon) \left(Q + n\varepsilon \frac{\|L\|_Q^2 x_1^2}{(1 - \varepsilon)} \right),$$

y por tanto $B_{(1-\varepsilon)Q+n\varepsilon L^2} = (1 - \varepsilon)^{-1/2} H(B_Q)$, para H la aplicación lineal dada por

$$H(a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{(1 - \varepsilon)^{1/2}}{(1 + n\varepsilon \|L\|_Q^2)^{1/2}} a_1, a_2, \dots, a_n \right)$$

así pues, el cambio de volumen entre las bolas vendrá dado por el determinante de $(1 - \varepsilon)^{-1/2} H$, muy fácil de calcular en este caso.

$$\text{vol}((1 - \varepsilon)Q + n\varepsilon L^2) = (1 - \varepsilon)^{-n/2} \left(\frac{(1 - \varepsilon)^{1/2}}{(1 + n\varepsilon \|L\|_Q^2)^{1/2}} \right) \text{vol}(Q)$$

y por tanto podemos trasladar esa comparación a nuestra función v .

$$v(((1 - \varepsilon)Q + n\varepsilon L^2)) = (1 - \varepsilon)^n \left(\frac{1 + n\varepsilon \|L\|_Q^2}{1 - \varepsilon} \right) v(Q)$$

Ahora es sencillísimo derivar esto respecto a ε , concluyendo así la prueba. $\square$

Enunciemos y demostremos un teorema de análisis convexo que utilizaremos en la prueba de nuestro teorema.

Teorema (Carathéodory). *Sea P un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y x un punto en su envoltura convexa (el menor subconjunto convexo que contiene a P). Entonces x será combinación convexa de como mucho $n + 1$ puntos de P .*

Demostración. Sea x en esa envoltura convexa. Entonces es una combinación convexa de puntos de P , es decir,

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$$

para $x_j \in P$, $\lambda_j \geq 0$ y $\sum \lambda_j = 1$. De momento, k es un número natural desconocido.

Supongamos que $k > d + 1$, y hagamos álgebra lineal para que vaya decreciendo ese número. Empecemos por observar que los vectores

$$x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$$

son más de $n + 1$, y por tanto son linealmente dependientes. Es decir, existen números reales $\mu_2, \dots, \mu_k$ no todos cero tales que

$$\sum_{j=2}^k \mu_j (x_j - x_1) = 0.$$

Ahora definimos $\mu_1 = -\sum_{j=2}^k \mu_j$. De esta manera se cumplirán las igualdades

$$\sum_{j=1}^k \mu_j x_j = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^k \mu_j = 0.$$

Y como hay μ_j no nulos pero suman cero, tendrá que haber alguno positivo. Podemos así definir la misteriosa cantidad

$$\alpha = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}.$$

Y, usando que $\sum \mu_j x_j = 0$ podemos escribir x de la siguiente forma:

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j - \sum_{j=1}^k \alpha \mu_j x_j = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha \mu_j) x_j$$

Pero claro, por la definición de α se cumple que $\lambda_j - \alpha \mu_j \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, k$. Así pues, hemos escrito x como combinación convexa con unos nuevos coeficientes. Además, se anulará el correspondiente al índice i donde se alcanzaba el mínimo, pues $\lambda_i = \alpha \mu_i$. O sea que hemos escrito x como combinación convexa de como mucho $k - 1$ puntos de p . Y repitiendo este proceso llegaremos a que nos bastan $n + 1$ puntos de P . $\square$

Y por fin estamos listos para demostrar el teorema central de esta sección.

Demostración. Sea F^* el conjunto de funciones lineales de soporte en F (no necesariamente en los puntos suaves). Y consideremos $A_F = \{nL^2 : L \in F^*\}$ un subconjunto del espacio de formas cuadráticas no negativas A . Este espacio puede entenderse como un abierto convexo de las matrices simétricas, el cual se asocia con $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. Consideraremos también $\bar{A}_F$ la envoltura convexa de A_F . Por el teorema de Caratheodory, cada $Q \in \bar{A}_F$ se representará de la forma

$$Q = n \sum a_i L_i^2 \quad \text{para } i \leq n(n+1)/2 + 1, \quad L_i \in F^*, \quad a_i \geq 0, \quad \text{y} \quad \sum a_i = 1.$$

Buscamos una forma cuadrática $Q \in \bar{A}_F$ cuya bola unidad esté inscrita en F . Tomemos $Q = n \sum a_i L_i^2$ que maximice la función v en $\bar{A}_F$. Podemos porque A_F es un compacto (uno puede observar que los funcionales lineales de soporte a una esfera también son homeomorfos a una esfera), y por tanto su envoltura también lo es. Al ser máximo, la derivada que hemos calculado en el lema anterior se tiene que anular, lo que implicará $\|L_i\|_Q^2 = 1$ siempre que $a_i \neq 0$.

Ahora, sea $P = \{L(x) = 1\}$ un hiperplano de soporte de F , y L su respectiva función de soporte. El lema nos vuelve a dar $\|L\|_Q^2 = 1$. Así que para x con $Q(x) < 1$, se tiene que $L(x) < 1$. En particular, no habrá puntos de P en el interior de la bola unidad B_Q . Y esto implica que B_Q esté inscrita en F , pues por convexidad todo punto de F tiene al menos un plano P de soporte.

Ahora, como $\|L_i\|_Q = 1$, estas funciones también serán de soporte en B_Q . Cada una soportará un punto $p_i \in F \cap B_Q$, que será suave gracias a que B_Q es un elipsoide, y otra función de soporte en F para ese punto también funcionaría en B_Q . Así, podemos hablar de la función de soporte en p_i , $L_i = B_{p_i}$.

Razonemos por contradicción para probar la desigualdad. Si no se cumpliese, tendríamos para todo i que

$$\int_F (B_{p_i})^2(q) dm(q) < 1/n.$$

Y así,

$$n \int_F \sum a_i(B_{p_i})^2(q) dm(q) = \int_F Q(q) dm(q) < 1.$$

Pero eso no puede ser cierto, porque al estar B_Q inscrita en F , $Q(F) \geq 1$, y su integral es mayor que 1.

Supongamos ahora que tenemos la igualdad y el soporte de m sea denso. Como $\sup r(p, F, m) \leq 1/n$, en particular se cumplirá para nuestros puntos p_i , es decir,

$$\int_F (B_{p_i}(q))^2 dm(q) \leq 1/n.$$

Con una combinación convexa igual a la cuenta anterior, eso implicará que

$$\int_F Q(q) dm(q) \leq 1,$$

y como habíamos hablado que $Q(F) \geq 1$, en esa integral tenemos una igualdad. De hecho, esa cota inferior para Q implica que el conjunto

$$\{q \in F : Q(q) > 1\}$$

tendrá m -medida cero. Como el soporte de m es denso, esto significa que

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = 1\},$$

y nuestra F es efectivamente un elipsoide.

Veamos por último que $r(p, F, m) = 1/n$ en todo $p \in F$. De no ser así tendríamos un funcional B_p con $\int (B_p)^2 < 1/n$. Pero ahora, al igual que en la demostración de nuestro lema podemos tomar coordenadas tales que $Q = x_1^2 + \dots + x_n^2$, con $x_1 = B_p$ (sabemos ya que tiene norma 1), y $x_2, \dots, x_n$ otros funcionales lineales. Así encontramos la contradicción

$$\int_F Q(q) dm(q) = \sum_{j=1}^n \int_F x_j(q)^2 dm(q) < 1$$

pues hemos supuesto que $\int x_1^2 < 1/n$, y el resto están acotados por su supremo, de manera que son $\leq 1/n$. $\square$

4.6. Demostración de la conjetura de Hopf

Ahora combinaremos todos los resultados de las secciones anteriores para ver que nuestro toro sin puntos conjugados es plano. Probemos antes un pequeño lema de cálculo que nos hará el trabajo.

Lema. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx = -s, \quad y \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = s^2.$$

Entonces,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(x) + s)^2 dx = 0.$$

Demostración. No puede ser más sencillo. Simplemente expandimos el cuadrado.

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (f(x) + s)^2 dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)^2 dx + 2s \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s^2 dx \\ &= s^2 - 2s^2 + s^2 = 0 \end{aligned} \quad \square$$

Empecemos a juntar piezas. La medida m definida en F en la segunda sección tendrá que tener un soporte denso, pues se define empujando la medida μ de soporte denso por $D \circ L$, y hemos probado que $D \circ L$ es continua sobre un conjunto denso de puntos.

De esta manera, la desigualdad (4.10) implicará que $R(F, m) = 1/n$ en el contexto de la sección anterior. Así, nuestra norma estable $\|\cdot\|$ será de hecho una norma euclídea.

Fijado un punto racional $p \in F$. Para casi toda geodésica γ teníamos la desigualdad

$$\liminf T^{-1} \int_0^T \langle \gamma'(t), v_p \rangle^2 dt \geq B_p(D(\gamma'))^2$$

que integrábamos para obtener

$$\frac{1}{n} = \int_{T_1 \mathbb{T}^n} \langle L(w), v_p \rangle^2 d\mu(w) \geq \int_F (B_p(q))^2 dm(q).$$

Ahora, como consecuencia de la sección anterior ya sabemos que eso es una igualdad, luego se cumplirá que

$$(4.12) \quad \lim \frac{1}{T} \int_0^T \langle \gamma'(t), v_p \rangle^2 dt = B_p(D(\gamma'))^2.$$

Además ya sabíamos que

$$\lim \frac{1}{T} \int_0^T \langle \gamma'(t), v_p \rangle dt = B_p(D(\gamma')),$$

así que por nuestro lema de cálculo tenemos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\langle \gamma'(t), v_p \rangle + B_p(D(\gamma'(t))))^2 dt = 0.$$

Pero una consecuencia del teorema ergódico de Birkhoff es que la integral de ese límite coincidirá con la integral de su integrando. Y como ese integrando es ≥ 0 y su integral vale cero, deducimos de aquí que

$$\langle w, v_p \rangle = -B_p(D(w))$$

en casi todo punto. Y como D es continua en $w = v_q$ para $q \in F$ racional, tendremos que

$$\langle v_q, v_p \rangle = -B_p(q).$$

Ahora, tomando n puntos racionales $p_i \in F$ linealmente independientes, podemos considerar sus rayos $\gamma_{p_i}(t) = \exp_0 t v_{p_i}(0)$, y tomar sus respectivas funciones de Busemann

$$(B_{\gamma_{p_1}}(x), \dots, B_{\gamma_{p_n}}(x))$$

como funciones coordenadas. Y claro, la referencia que define estas coordenadas es $\{v_{p_1}, \dots, v_{p_n}\}$ por lo que la expresión local de la métrica es

$$g_{ij} = \langle v_{p_i}, v_{p_j} \rangle = -B_{p_i}(p_j).$$

Como no depende del punto base, la métrica es constante, y por tanto la curvatura es cero. Esto completa la demostración a la conjetura de Hopf. $\square$

Recordemos que la conjetura de Hopf se puede reformular sobre $\mathbb{R}^n$, donde una métrica $\mathbb{Z}^n$ -periódica sin puntos conjugados será la métrica euclídea. Desde ese punto de vista podremos enmarcar este resultado en una familia de teoremas de rigidez que, partiendo de una métrica en $\mathbb{R}^n$ sin puntos conjugados con ciertas restricciones adicionales, concluirán que la métrica es en realidad plana.

Así, podremos citar algunos resultados similares pero más actuales. Por ejemplo en el artículo [12] se demuestra que, si $\mathbb{R}^n$ tiene una métrica sin puntos conjugados que es *asintóticamente euclídea* (es decir, cuanto más nos alejemos de 0 más cerca estará de ser la métrica euclídea) entonces la métrica será en realidad euclídea.

Otro ejemplo es [7], donde se demuestra que si una métrica en el plano $\mathbb{R}^2$ cumple el axioma de las paralelas de Euclides (dada una primera geodésica y un punto, existe exactamente una segunda geodésica que pase por ese punto sin cortar a la primera) y además la curvatura total $\int_{\mathbb{R}^2} K$ está bien definida (aunque sea infinito), entonces la métrica es plana. De hecho, se conjetura que este resultado podría ser cierto aún sin esa hipótesis sobre la curvatura.

APÉNDICE A

Fundamentos de la geometría riemanniana

A.1. Métricas riemannianas

Supongamos conocido el concepto de variedad, que no es más que un espacio topológico con una serie de condiciones que hacen que se parezca localmente a $\mathbb{R}^n$. Esas condiciones son bastante restrictivas, lo que nos permite construir una teoría interesantísima sobre estas variedades diferenciables.

A nosotros nos interesará trabajar con todavía más estructura. Queremos añadir una manera de **medir** en variedades, ya sean ángulos, longitudes o volúmenes. Y para ello necesitaremos definir dentro de M una variedad el siguiente objeto:

Definición A.1. Llamaremos **métrica riemanniana** a una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

definida para cada $p \in M$ que sea bilineal, simétrica y definida positiva.

Además, pediremos que varíe suavemente con p . Eso es que si tengo unas coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ definidas en algún abierto $U \subset M$, estas nos definirán una referencia $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ que generan el fibrado tangente a U . Por la bilinealidad del producto, podremos reducir cualquier producto $\langle v, w \rangle_p$ a una combinación de los números

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle_p$$

junto a los coeficientes de v y w en nuestra referencia. A estos $g_{ij}(p)$ les llamaremos **coeficientes de la métrica en p** , y diremos que la métrica varía suavemente con p si esos coeficientes $g_{ij}(p)$ son suaves en p .

Dada una curva α , es decir, una aplicación suave $\alpha : I \rightarrow M$ donde I es un intervalo, podemos definir su longitud como

$$\ell(\alpha) = \int_I \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{1/2} dt.$$

Si M es orientable se puede definir el volumen de un subconjunto $R \subset M$ primero en un entorno coordenado (U, φ) (pongamos $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$) de la forma siguiente:

$$\text{Vol}(R) = \int_{\varphi(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n$$

Esta definición es invariante por cambios de coordenadas, por lo que partiendo un subconjunto $R \subset M$ arbitrario en trozos también podremos conocer su volumen.

Aunque yo no las haya motivado, estas definiciones abstractas de longitud y volumen generalizan las que conocemos desde el colegio, y tienen una razón de ser muy intuitiva. Esto es porque ambas consisten en integrar medidas en el espacio tangente, donde trabajamos con vectores o paralelepípedos y conocemos su longitud o volumen respectivamente.

Así pues, una métrica riemanniana es todo lo que podemos necesitar para medir en una variedad. De hecho, también nos ayudará a definir una derivada de campos de vectores canónica. Para ello tendremos que hablar de derivaciones en un sentido más general.

A.2. Conexiones

Llamemos $\mathcal{X}(M)$ al conjunto de campos de vectores sobre M .

Definición A.2. Una **conexión** ∇ es una aplicación que toma dos campos de vectores $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ y devuelve otro.

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

Además, para $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $X, X', Y, Y' \in \mathcal{X}(M)$, cumple

- $\nabla_{fX+gX'} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_{X'} Y,$
- $\nabla_X (Y + Y') = \nabla_X Y + \nabla_X Y'$
- $\nabla_X (fY) = Xf + f\nabla_X Y$

Estas condiciones se pueden resumir en que ∇ es $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal en la primera entrada, y cumple análogos a las reglas de la suma y producto de derivadas en la segunda.

Esto será lo que necesitamos para derivar campos de vectores a lo largo de una curva. Supongamos primero que V es un campo de vectores definido sobre una curva α , pero además V es una restricción de un campo en M . Entonces estaríamos en condiciones de definir una derivada

$$V \mapsto \frac{DV}{dt} := \nabla_{\alpha'(t)} V.$$

Más tarde comprobaremos que esto funcionará para campos un poco más generales, que en cada parámetro t devuelvan un vector de $T_{\alpha(t)}M$.

La manera de hacer cálculos con esto será otra vez por medio de las expresiones locales. En un abierto coordenado tendremos una referencia canónica $X_1, \dots, X_n$, dada por $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Podemos definir unas funciones $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$\nabla_{X_i}(X_j) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Esto serán los **símbolos de Christoffel** para esas coordenadas. Y serán interesantes porque aplicando las propiedades de una conexión uno puede escribir cualquier derivación $\nabla_X Y$ en términos de esos coeficientes. Pongamos por ejemplo que $X = \sum_i x_i X_i$, e $Y = \sum_i y_i X_i$ son las expresiones locales de dos campos de vectores. Entonces una breve cuenta nos dirá que

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(X(y_k) + \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k \right) X_k.$$

Proposición A.3. *Existe una derivación $\frac{D}{dt}$ de campos sobre una curva α que cumple las reglas:*

- $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$
- $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$

para V, W campos y f una función. Además, coincide con $\nabla_{\alpha'(t)}V$ cuando eso tenga sentido.

Demostración. La primera observación será que basta comprobar esto en un entorno coordenado (U, φ) . Ahí dentro, supongamos por un momento que tal derivación exista. Escribamos $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ una expresión local de α , y como antes $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Así el campo V tendrá una expresión local $V = \sum_j v^j X_j$.

Si nuestra derivación cumple las reglas que imponemos, se cumple que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Si también coincide con $\nabla_{\alpha'(t)}V$, podemos expandir

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}X_j = \nabla_{\sum_i x'_i X_i}X_j = \sum_i x'_i \nabla_{X_i}X_j.$$

Por tanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} x'_i v^j \nabla_{X_i}X_j.$$

De esta expresión podemos concluir que, si existe tal derivación será única. Pero además podemos definir la derivación de forma local gracias a esa fórmula que hemos deducido, y tendrá las propiedades deseadas. $\square$

Gracias a una conexión se define el concepto de **campo de vectores paralelo a lo largo de una curva**. Si $V(t)$ es un campo de vectores tangente a una curva $\alpha(t)$ en una variedad riemanniana con una conexión, será paralelo si no varía a ojos de la conexión, es decir, si

$$\frac{DV}{dt} = 0 \quad \forall t.$$

Proposición A.4 (Transporte paralelo). *Si $\alpha : I \rightarrow M$ es una curva en una variedad riemanniana M con una conexión ∇ , y v_0 es un vector tangente a $\alpha(t_0)$, $t_0 \in I$, existe un único campo V tangente a α con $V(t_0) = v_0$.*

Demostración. En entornos coordenados de M esto es muy fácil de resolver, pues $\frac{DV}{dt} = 0$ nos da una ecuación diferencial de primer orden para la expresión local de V . Así que fijado un valor inicial $V(t_0) = v_0$ tendremos existencia y unicidad local del campo V .

Pero podemos recubrir la imagen de α por entornos coordenados, en los cuales podremos elegir una solución a la ecuación diferencial que pegue bien en la intersección con entornos coordenados anteriores. $\square$

Llamaremos **transporte paralelo** de v_0 a lo largo de α al campo V .

Quizá el lector está preocupado por detalles técnicos sobre la conexión. ¿Existe alguna que podamos utilizar? Si es que hay varias, ¿cuál deberíamos elegir? Estas preguntas se resuelven hablando de la **conexión de Levi-Civita**, que en esencia es una conexión definida por la métrica con unas propiedades especialmente benévolas.

Definición A.5. Una conexión ∇ es **compatible con la métrica** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si para dos campos de vectores $V(t), W(t)$ a lo largo de la misma curva α se cumple la regla producto

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

Además, diremos que ∇ es **simétrica** si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie.

Teorema-definición A.1. *Sea M una variedad riemanniana. Existirá una única conexión simétrica y compatible con la métrica. La llamaremos **conexión de Levi-Civita**.*

Demostración. Argumentemos de forma similar a la proposición anterior. Primero supondremos que existe para así encontrar una expresión sencilla, y después la definiremos de esa manera.

Tomemos tres campos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Por la compatibilidad por la métrica, deberán cumplirse las identidades

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Si sumamos las dos primeras y restamos la tercera, utilizando la simetría de ∇ deducimos

$$X \langle X, Y \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle,$$

de donde podemos despejar

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} (X \langle X, Y \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle). \end{aligned}$$

Esta expresión define ∇ únicamente por medio de la métrica. Es fácil ver que efectivamente está bien definida y cumple las propiedades deseadas. Además, como cualquier conexión simétrica y compatible con la métrica debe cumplir esa ecuación, esta conexión será única. $\square$

De aquí en adelante, al hablar de ∇ y $\frac{D}{dt}$ en una variedad riemanniana, asumiremos que estamos trabajando con la conexión de Levi-Civita. También llamaremos a esa derivada $\frac{D}{dt}$ la **derivada covariante**. Así pues, en una variedad riemanniana M tenemos una forma canónica de derivar campos de vectores.

A.3. Geodésicas y la aplicación exponencial

A continuación estudiaremos las **geodésicas** de una variedad riemanniana. Estas son unas curvas muy especiales, pues pretenden ser las “líneas rectas”. Se caracterizan por tener aceleración cero a ojos de la métrica, pues en cierto sentido girar implica una aceleración. En seguida veremos que poseen propiedades muy deseables, y de hecho nos ayudarán a conocer la estructura global de nuestra variedad M .

Definición A.6. Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva. Diremos que es **geodésica** en $t_0 \in I$ si

$$(A.1) \quad \left. \frac{D}{dt} \right|_{t=t_0} (\gamma'(t)) = 0.$$

Diremos que simplemente es **geodésica** si esto ocurre en todo I .

Observación. Para una geodésica se cumple que

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma', \gamma' \rangle = 2 \left\langle \frac{D\gamma'}{dt}, \gamma' \right\rangle = 0.$$

En particular, el módulo de la velocidad será constante. Esto significa, entre otras cosas, que el parámetro t es proporcional a la longitud recorrida por γ . Diremos que una geodésica es **unitaria**, o que está parametrizada **por longitud de arco** si $|\gamma'(t)| = 1$. Es decir, si t mide la longitud recorrida.

¿Existen tales curvas? ¿Cuántas hay? Quizá tiene más sentido estudiar estas preguntas en un entorno coordenado $(U, (x_1, \dots, x_n))$, donde podemos llevarnos los problemas a $\mathbb{R}^n$ para así utilizar la teoría de ecuaciones diferenciales.

Efectivamente, utilizando la expresión local para la derivada covariante obtenemos

$$0 = \frac{D\gamma'}{dt} = \sum_k \left(x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k x_i' x_j' \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones

$$x_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k x_i' x_j' = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

En la asignatura de ecuaciones diferenciales, cuando uno se encontraba un sistema con derivadas segundas lo transformaba en uno de primer orden añadiendo unas variables extras y_i , e imponiendo las ecuaciones $x_i' = y_i$.

Esto motivará el traslado de nuestro estudio de geodésicas al fibrado tangente TM . Obsérvese que una curva $\gamma(t)$ en M determina otra curva $(\gamma(t), \gamma'(t))$ en TM . De esta manera podemos hablar de unas ecuaciones de las geodésicas en TM , que localmente serán de la forma

$$\begin{cases} y_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k y_i y_j &= 0 & k = 1, 2, \dots, n; \\ x_k' &= y_k & k = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Podemos definir un campo G de vectores tangentes a TM cuya expresión en coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ sea

$$G|_{TU} = \sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k y_i y_j \right) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Así pues, la ecuación de las geodésicas nos está diciendo precisamente que la velocidad de la curva $(\gamma(t), \gamma'(t)) \in TM$ coincidirá con el campo de vectores G evaluado en el punto correspondiente. Hemos reducido el problema de encontrar geodésicas al de calcular un flujo, cosa que sabemos de Geometría Diferencial. Este flujo se conoce como **el flujo geodésico de M** .

Precisamente, sabemos que alrededor de cada $p \in U \subset M$ con unas coordenadas $(U, (x_1, \dots, x_n))$ existirá un abierto $\mathcal{U} \subset TM$ y un número $\delta > 0$ tal que tenemos definido el flujo geodésico $\Phi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow TU$, y $\gamma(t) = \pi \circ \Phi(t, q, v)$ (siendo $\pi : TM \rightarrow M$ la proyección canónica) será la geodésica que parta de q con dirección v para cualquier par $(q, v) \in \mathcal{U}$.

Podemos elegir $\mathcal{U}$ de la forma

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V \text{ y } v \in T_q M \text{ con } |v| < \varepsilon_1\},$$

siendo $V \subset U$ abierto.

Obsérvese que el intervalo de definición de las geodésicas $(-\delta, \delta)$ es único para todo dato inicial en $\mathcal{U}$. De hecho, es posible aumentar la velocidad inicial de las geodésicas disminuyendo ese intervalo, o viceversa, gracias al siguiente lema.

Lema A.7 (de homogeneidad). Si $t \mapsto \Phi(t, q, v)$ está definida en $(-\delta, \delta)$ y tenemos $a > 0$, entonces la geodésica $t \mapsto \Phi(t, q, av)$ está definida para $t \in (-\delta/a, \delta/a)$. De hecho,

$$\Phi(t, q, av) = \Phi(at, q, v).$$

Demostración. Simplemente definimos la función $t \mapsto \Phi(at, q, v)$, que obviamente será una geodésica con velocidad inicial av y ese intervalo de definición. Y por la unicidad de las soluciones coincidirá con $\Phi(t, q, av)$. $\square$

Gracias a ese lema, cambiando ε_1 podremos asumir $\delta = 1, 2$ o el número que queramos. Eligiendo $\delta = 2$ y un $\varepsilon > 0$ adecuado, habrá un abierto $\mathcal{U}$ donde esté definida la **aplicación exponencial**:

$$\exp(q, v) := \Phi(1, q, v) = \Phi(|v|, q, \frac{v}{|v|})$$

¡Esta aplicación será diferenciable, pues Φ lo es! En muchas ocasiones será interesante hablar de $\exp_q = \exp(q, \cdot)$, la misma aplicación con un punto base elegido.

La aplicación exponencial recoge el estudio de las geodésicas de la variedad y por tanto será de vital importancia para nosotros. Demos un primer resultado sobre ella.

Proposición A.8. Para todo $q \in M$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$$

sea un difeomorfismo a su imagen.

La explicación es sencilla, $d(\exp_q)_0$ es invertible y por el teorema de la aplicación inversa $\exp_q$ es un difeomorfismo local en algún entorno de $0 \in T_q M$.

Demostración.

$$d(\exp_q)_0(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_q(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(1, q, tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(t, q, v) = v,$$

y por tanto $d(\exp_q)_0 = \text{id}_{T_q M}$. $\square$

A.3.1. Propiedades minimizantes de las geodésicas

Antes hemos hablado de que las geodésicas recuerdan a las líneas rectas del plano, pues en cierto sentido no se curvan. Pero por lo que realmente destacan las líneas rectas es por **minimizar la distancia entre dos puntos**. Así, aparece una pregunta natural: ¿Cumplen esto las geodésicas?

La respuesta es, en esencia, sí. Demostraremos que en entornos pequeños de M todas las geodésicas minimizan la distancia entre los puntos que unen. Bastante más tarde comentaremos la versión global: Si una curva minimiza la distancia entre dos puntos tendrá que ser una geodésica. Por desgracia, puede haber geodésicas de distinta longitud uniendo los mismos puntos (por ejemplo en la esfera), así que no todas las geodésicas minimizarán la distancia globalmente.

Pero antes de probar esa minimalidad local tenemos que hacer un trabajo previo.

Definición A.9. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto conexo con frontera diferenciable a trozos. Una **superficie parametrizada** es una aplicación $s : A \rightarrow M$ diferenciable. Un **campo de vectores** V a lo largo de la superficie s asocia a cada $q \in A$ un vector de $T_{s(q)}M$ de forma suave (es decir, para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la función $q \mapsto V(q)f$ es suave).

Podemos empujar la referencia estandar ∂_u, ∂_v de $\mathbb{R}^2$ por medio de la diferencial (ds), obteniendo una referencia de vectores tangentes a la superficie, denotados $\frac{\partial s}{\partial u}$ y $\frac{\partial s}{\partial v}$. Estos también pueden entenderse como las velocidades de las curvas $s(u, v_0)$ y $s(u_0, v)$ para u_0, v_0 fijos.

Similarmente, podemos definir las derivadas covariantes de un campo V a lo largo de esas dos curvas. Las denotaremos $\frac{DV}{\partial u}$ y $\frac{DV}{\partial v}$ respectivamente.

Tenemos una cierta simetría para las derivadas covariantes de los vectores tangentes a s .

Lema A.10. *Se cumple que*

$$\frac{D}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right) = \frac{D}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial u} \right).$$

Demostración. Basta comprobar esta igualdad en entornos coordenados $(U, (x_1, \dots, x_n))$. Ahí podemos escribir la forma local de s como $(x_1(u, v), \dots, x_n(u, v))$. Así,

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial u} \right) &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial u} \nabla_{\frac{\partial s}{\partial v}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

y esa última expresión es claramente simétrica en u y v , gracias a que la conexión es simétrica. $\square$

También necesitaremos este lema, atribuido a Gauss. Obsérvese que en él abusamos de que $T_v(T_p M) \cong T_p M$, cosa que seguiremos haciendo a lo largo de este trabajo.

Lema A.11 (de Gauss). *Sean $(p, v) \in T_p M$ con $\exp_p$ definido, y $w \in T_v(T_p M)$. Entonces*

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Demostración. Se puede encontrar en [5]. $\square$

Definición A.12. Sea la bola abierta $B_\varepsilon(0) \subset T_p M$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, para que $\exp_p$ sea difeomorfismo desde la bola a su imagen. Llamaremos **bola normal** de centro p y radio ε a $\exp_p(B_\varepsilon(0))$.

El lema de Gauss nos dice que su frontera será una hipersuperficie ortogonal a las geodésicas que parten de p . Esto nos recuerda al caso euclídeo, donde la esfera es ortogonal a sus radios.

Proposición A.13. *Tomemos B una bola normal de centro $p \in M$, contenida en un entorno coordenado U . Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ una geodésica que parte de p . Entonces será de longitud mínima entre las curvas con los mismos extremos. Y si existe otra curva minimal, serán iguales.*

Demostración. Tomemos $\alpha(t)$ una curva contenida en B con extremos $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = \gamma(1)$. Podemos escribirla de la forma

$$\alpha(t) = \exp_p(r(t)v(t)) = f(r(t), t),$$

siendo r una cierta función positiva y $v(t)$ una curva en $T_p M$ con $|v(t)| = 1$.

Entonces, salvo en puntos de no regularidad, se cumple que

$$\alpha'(t) = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Y como el lema de Gauss nos dice que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$, tenemos que

$$|\alpha'(t)|^2 = |r'(t)|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 \geq |r'(t)|^2.$$

Por tanto,

$$\ell(\alpha) = \int_0^1 |\alpha'(t)| dt \geq \int_0^1 |r'(t)| dt = r(1)$$

y esa cota inferior es justamente la longitud de γ , pues su descomposición es $\exp_p(r(t)v)$ para v un vector fijo.

Obsérvese que la igualdad ocurre si y solo si v es constante, por tanto deberán coincidir las imágenes de las curvas. $\square$

Teorema A.14. *Todo punto $p \in M$ tiene un entorno W y un $\delta > 0$ tal que para todo $q \in W$, $\exp_q : B_\delta(0) \rightarrow M$ es difeomorfismo a su imagen.*

Obsérvese que esto implica por la proposición anterior que las geodésicas minimizan la distancia en todo W .

Demostración. Sea U un entorno abierto de $(p, 0) \in TM$ donde esté definida la aplicación exponencial. Trabajemos con la aplicación $F : U \rightarrow M \times M$ definida por

$$(q, v) \mapsto (q, \exp_q v)$$

Partamos la matriz jacobiana de F en cuatro cajitas $n \times n$. La de arriba a la izquierda tendrá que ser la identidad, pues F es la identidad $M \rightarrow M$ mirando solo las primeras componentes de la aplicación. La cajita de abajo a la izquierda se anula, pues el

espacio tangente no afecta a la primera parte de la imagen. Y la cajita de abajo a la derecha vuelve a ser la identidad, pues coincide con la jacobiana de la exponencial que ya hemos calculado.

En particular, dF es invertible en $(p, 0)$, y por tanto podemos tomar un entorno $U' \subset U$ donde F sea difeomorfismo a su imagen. Podemos además asumir que U' es de la forma $W \times B_\delta(0)$ para cierto W entorno de p . Estos serán los conjuntos deseados. $\square$

Con esto hemos concluido que hay entornos para todo punto $p \in M$ donde las geodésicas son minimizantes. Pero existen entornos aún mejores, donde además de cumplirse esta propiedad sabemos que podemos unir dos puntos q_1, q_2 por una única geodésica minimal, enteramente contenida en ese abierto. Este será un conjunto **fuertemente convexo**. Las bolas normales cumplirán esto si el radio es suficientemente pequeño. Una breve discusión sobre estos conjuntos se puede encontrar en [5].

Concluiremos nuestro estudio de las geodésicas probando que en esencia (es decir, salvo reparametrizaciones) son estas las curvas que minimizan la distancia.

Proposición A.15. *Si una curva γ minimiza la distancia entre dos puntos y tiene velocidad constante (en módulo), entonces debe ser geodésica.*

Demostración. Para cada parámetro en el dominio de definición de la curva $t \in [a, b]$ podemos elegir un entorno totalmente normal W , como el del teorema anterior. También podemos restringir γ a un intervalo cerrado I con $\gamma(I) \subset W$. Ahí dentro, γ minimizará la distancia (o cambiando ese camino por un camino menor en el total de la curva tendríamos otra más corta). Y en estos entornos ya sabemos que las curvas minimizantes son justamente las geodésicas. $\square$

A.4. Curvatura

Ha llegado el momento de empezar a estudiar uno de los objetos más interesantes de una variedad riemanniana, la curvatura. Su interés reside en que es un objeto puntual que encierra una gran cantidad de información sobre la variedad, y conociéndola se pueden obtener muchas conclusiones importantes.

En esta sección nos limitaremos a dar definiciones y propiedades. Mantendremos el misterio sobre su significado geométrico hasta que conozcamos los campos de Jacobi, más adelante.

Definición A.16. La **curvatura** R de una variedad riemanniana M es una aplicación $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ definida como sigue:

$$(A.2) \quad (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

Se puede entender como una medida de la conmutatividad de la derivada covariante.

¡Ojo! Algunos autores intercambian la posición de los dos primeros argumentos. Nosotros, siguiendo a do Carmo, no utilizaremos esa notación.

Proposición A.17. *R es $C^\infty(M)$ -lineal en cada uno de sus argumentos.*

Esta proposición es muy importante, pues nos dice que el campo $R(X, Y)Z$ evaluado un punto depende únicamente del valor de los campos X, Y y Z en ese punto, cosa nada evidente por su definición.

Comentario sobre la demostración. La prueba no es inmediata, pero sí muy metódica. Bastará con expandir la expresión de R evaluada en alguna combinación lineal, y aplicar propiedades de la conexión hasta deducir el resultado. Se puede encontrar en [5]. $\square$

A la hora de operar con este objeto es importantísimo conocer sus **simetrías**. Están recogidas en las siguientes dos proposiciones.

Proposición A.18. *Se cumple la **identidad de Bianchi***

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

Demostración.

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y, Z]} X \\ &\quad + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_Y([X, Z]) + \nabla_Z([Y, X]) + \nabla_X([Z, Y]) \\ &\quad + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

Definamos la cantidad $(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle$, la proyección de R contra un campo T .

Proposición A.19. *Se tienen las simetrías*

1. $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$
2. $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$
3. $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$
4. $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$

Demostración. **1.** Por la identidad de Bianchi.

2. Es obvia por la definición de R .

3. Por la multilinealidad, basta ver que $(X, Y, Z, Z) = 0$. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
 (X, Y, Z, Z) &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\
 &= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\
 &= \frac{1}{2} Y X \langle Z, Z \rangle - \frac{1}{2} X Y \langle Z, Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

4. Aplicamos la identidad de Bianchi para X, Y, Z, T cuatro veces, con cada uno escrito al final:

$$\begin{aligned}
 (X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) &= 0 \\
 (Y, Z, T, X) + (Z, T, Y, X) + (T, Y, Z, X) &= 0 \\
 (Z, T, X, Y) + (X, Z, T, Y) + (T, X, Z, Y) &= 0 \\
 (T, X, Y, Z) + (X, Y, T, Z) + (Y, T, X, Z) &= 0
 \end{aligned}$$

Sumando todas esas identidades y utilizando las simetrías 2 y 3 para cancelar términos, concluimos

$$2(Z, X, Y, T) + 2(T, Y, Z, X) = 0,$$

de donde se sigue la cuarta simetría. $\square$

A continuación daré un cierto lema sobre la curvatura en una superficie parametrizada, que nos será de utilidad en las próximas secciones. Recuerde el lector que eso es una función $f : A \rightarrow M$, con A un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ cuya frontera viene dada por una curva.

Lema A.20. Sea $f : A \rightarrow M$ una superficie parametrizada, y $V : A \rightarrow TM$ un campo de vectores sobre f . Entonces

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V.$$

Omitiré la demostración, al no aportarnos nada nuevo. Consiste en trabajar en un entorno coordenado y desarrollar la expresión de la izquierda con las reglas de cálculo conocidas, hasta transformarla en el lado derecho. Si el lector tiene curiosidad aún así, puede encontrarlo en la proposición 4.1 de [5].

Ahora que sabemos operar con R , es el momento de presentar a su hermana pequeña, la curvatura seccional. En seguida veremos que es un objeto más sencillo e intuitivo.

Teorema-definición A.2. Sea σ un plano (de dimensión 2) de $T_p M$, y $\{x, y\}$ una base de σ . Se define la **curvatura seccional** de σ como

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{\langle x, y, x, y \rangle}{|x \wedge y|^2},$$

donde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ es el área del paralelepípedo que generan x e y . La definición es correcta, pues $K(\sigma)$ no depende de la base elegida para calcularla.

Demostración. Podemos transformar una base en cualquier otra combinando las operaciones elementales

$$\begin{aligned}\{x, y\} &\mapsto \{y, x\}, \\ \{x, y\} &\mapsto \{\lambda x, y\}, \\ \{x, y\} &\mapsto \{x + \lambda y, y\}.\end{aligned}$$

Y es fácil ver que ninguna de esas operaciones altera $K(x, y)$. $\square$

Afortunadamente no perdemos información sobre R al restringirnos a ese tipo de combinaciones:

Lema A.21. *Sea V un espacio vectorial de dimensión ≥ 2 con un producto escalar. Sean R y R' aplicaciones $V \times V \times V \rightarrow V$ que cumplen las simetrías vistas antes. Definimos*

$$(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t \rangle \quad y \quad (x, y, z, t)' = \langle R'(x, y)z, t \rangle,$$

y después podemos definir unas “curvaturas seccionales” K y K' como antes.

Si para todo plano $\sigma \subset V$ tenemos que $K(\sigma) = K'(\sigma)$, también coincidirán R y R' .

Demostración. Como $R(x, y)z$ está determinado con sus productos escalares contra todo $t \in V$, bastará ver que $(x, y, z, t) = (x, y, z, t)'$.

Por hipótesis sabemos que $(x, y, x, y) = (x, y, x, y)'$. Similarmente, podemos escribir

$$(x + z, y, x + z, y) = (x + z, y, x + z, y)'.$$

Aplicando la linealidad, simetrías de la curvatura y nuestra hipótesis, se deduce

$$2(x, y, z, y) = 2(x, y, z, y)'.$$

Ahora, podemos reescribir esa igualdad (haciendo una sustitución $y = y + t$, contado con un cierto abuso del lenguaje) de la forma

$$(x, y + t, z, y + t) = (x, y + t, z, y + t)'.$$

Otra vez utilizando linealidad, simetrías y la identidad demostrada antes, podemos extender eso a

$$(x, y, z, t) - (x, y, z, t)' = (y, z, x, t) - (y, z, x, t)'.$$

Esto quiere decir que la diferencia $(x, y, z, t) - (x, y, z, t)'$ es invariante por 3-ciclos en los primeros argumentos. Así que aplicando la identidad de Bianchi, esa cantidad debe ser 0, como queríamos demostrar. $\square$

Una aplicación muy útil para este lema será dar explícitamente la curvatura R de una variedad M con curvatura seccional constante.

Lema A.22. Sea M una variedad riemanniana, y $p \in M$. Definamos $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por

$$(X, Y, W, Z)' = \langle R'(X, Y)W, Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle$$

Entonces M tendrá curvatura seccional constante K_0 en el punto p si y solo si $R = K_0 R'$.

Demostración. Como $\langle R'(X, Y)X, Y \rangle = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2$, una implicación es trivial.

Para la otra, observamos que $(X, Y, W, Z)'$ cumple las 4 simetrías de la curvatura. Y por hipótesis,

$$R(X, Y, X, Y) = K_0(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) = K_0 R'(X, Y, X, Y),$$

así que por el lema anterior, $R = K_0 R'$. $\square$

Antes de cerrar nuestra introducción a la curvatura, se debe señalar ciertas combinaciones de la curvatura seccional de gran importancia, debido a su repetida aparición en distintos resultados.

Definición A.23. Sea $x = z_n$ un vector unitario (es decir, $|x| = 1$) en $T_p M$, y $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ lo completan a una base ortonormal. Definimos

1. La **curvatura de Ricci** como

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle.$$

2. La **curvatura escalar** como

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} \langle R(z_j, z_i)z_j, z_i \rangle.$$

Ninguna de esas expresiones depende de la base elegida, pues $K(x, y)$ es una forma bilineal en cada entrada, y Ric_p no es más que fijar x y tomar la traza en y . Y la curvatura escalar consistirá en tomar trazas otra vez en la curvatura de Ricci, que es a su vez otra forma bilineal. Claro está, la traza es invariante bajo cambios de base.

A.5. Campos de Jacobi

Después de ese pequeño esfuerzo para aprender a trabajar con la curvatura nos gustaría encontrarle un sentido geométrico y probar su utilidad. Para ello debemos estudiar los llamados **campos de Jacobi**, una de las herramientas fundamentales de la geometría riemanniana.

Su interés reside, entre otras cosas, en que unen los conceptos de geodésica y de curvatura. Nos servirán por ejemplo para demostrar que la curvatura seccional $K(p, \sigma)$

determina con qué ritmo dos geodésicas que pasan por el punto p tangentes al plano σ se separan.

Estos campos no son más que soluciones a una cierta ecuación diferencial. Para intentar motivar su aparición quedémonos con el objetivo de medir cómo se separan las geodésicas en el punto p .

Las geodésicas por el punto p tienen la forma $t \mapsto \exp_p(tv)$. Y si variamos $v = v(s)$ con un parámetro real s de manera que $v(0) = v$ y $v'(0) = w$, uno obtiene una colección de geodésicas próximas. Fijando $t = 1$ y derivando respecto a s , uno obtiene una medida de lo rápido que se separan las geodésicas. Estamos hablando de la cantidad

$$|(d\exp_p)_v(w)|.$$

Ahora, $f(t, s) = \exp_p(tv(s))$ es una superficie parametrizada de las que ya hemos hablado varias veces. Y la derivada que estamos estudiando es $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$, con $t = 1$. Pero esa cantidad deseada cumple una ecuación diferencial, ya que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial s} \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= \frac{D}{\partial t} \left(\frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - R \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

La primera igualdad es porque para s fijo, $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}$ es la aceleración de una geodésica, y por tanto cero. La segunda igualdad es el lema A.20. Y la tercera igualdad es utilizando el lema A.10 y las simetrías de la curvatura.

Así, poniendo $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = J(t)$, y $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ se cumple la **ecuación de Jacobi**

$$(J) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0.$$

Definición A.24. Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica, y J un campo de vectores sobre γ . Diremos que J es un **campo de Jacobi** si satisface (J).

Hagamos un breve estudio de la EDO sobre una geodésica γ fija. Podemos elegir una base ortonormal $e_1(0), \dots, e_n(0)$ en $T_{\gamma(0)}M$, y transportarla paralelamente a cada $\gamma(t)$, obteniendo otra base ortonormal $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$. Así podremos escribir J de la forma $J(t) = \sum f_i(t)e_i(t)$, y la ecuación se traducirá en una EDO de segundo orden para los coeficientes f_i .

Así, por la teoría general de ecuaciones diferenciales sabremos que existirán $2n$ soluciones de (J) linealmente independientes. De hecho, tendremos la unicidad fijados valores para $J(0)$ y $J'(0)$ (donde el apóstrofe indica derivada covariante, claro está).

Obsérvese que $\gamma'(t)$ y $t\gamma'(t)$ serán siempre campos de Jacobi. Así que para hacer un verdadero estudio de estos objetos bastará con mirar los campos normales a $\gamma'(t)$. También habíamos comentado cómo tomando $f(t, s) = \exp_p(tv(s))$ y considerando

$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ obteníamos campos de Jacobi. Pero en realidad todos los campos de Jacobi con $J(0) = 0$ son de esa forma:

Proposición A.25. Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica, y J un campo de Jacobi con $J(0) = 0$. Pongamos $J'(0) = w$, $\gamma(0) = p$, y $\gamma'(0) = v$. Si tomamos una curva $v(s) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$ con $v(0) = av$ y $v'(0) = w$. Entonces la superficie $f(t, s) = \exp_p(\frac{t}{a}v(s))$ cumple que $\bar{J} = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ coincide con $J(t)$.

Demostración. Como $\bar{J}(0) = (d\exp_p)_0(0) = 0$, bastará ver que $\bar{J}'(0) = w$. Calculemos:

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{dt} ((d\exp_p)_{tv}(tw)) = (d\exp_p)_{tv}(w) + t \frac{D}{dt} (d\exp_p)_{tv}(w)$$

Evaluando en $t = 0$ concluimos

$$\left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} \frac{\partial f}{\partial s} = (d\exp_p)_0(w) = w. \quad \square$$

Obsérvese que por la regla de la cadena ese campo también puede escribirse como $J(t) = (d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tw)$.

Proposición A.26. Sea γ una geodésica con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Tomemos J el campo de Jacobi sobre γ con $J(0) = 0$ y $J'(0) = w$, para $|w| = 1$. Entonces

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3} \langle R(v, w)v, w \rangle t^4 + o(t^4).$$

Idea de la demostración. Es muy sencilla. Se utiliza el teorema de Taylor, calculando las derivadas de $|J(t)|^2 = \langle J, J \rangle$ con facilidad gracias a la ecuación diferencial (J). $\square$

Corolario A.27. Si $|\gamma'(t)| = 1$ y $\langle v, w \rangle = 0$, aparece la curvatura escalar $K(p, \sigma) = \langle R(v, w)v, w \rangle$ (con $\sigma = \text{span}\{v, w\}$), y tenemos

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3} K(p, \sigma) t^4 + o(t^4).$$

Corolario A.28. Si además tomamos una raíz cuadrada,

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6} K(p, \sigma) t^3 + o(t^3).$$

Esto es un resultado que habíamos comentado hace tiempo, y por fin nos aporta un significado geométrico para la curvatura seccional. $|J(t)|$ era una medida de lo rápido que se alejaban las geodésicas en p , y esta se distinguirá por el término $K(p, \sigma)$. En curvatura positiva las geodésicas se separarán más lento que en el caso plano, y en curvatura negativa se separarán más rápido.

Dicho esto, es el momento de hablar de la íntima relación entre las singularidades de $\exp$ y los campos de Jacobi.

Definición A.29. Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica. Diremos que $\gamma(t_0)$ es un **punto conjugado a $\gamma(0)$** si existe un campo de Jacobi J no trivial cumpliendo $J(0) = J(t_0) = 0$. Si puedo encontrar j campos linealmente independientes que cumplan eso, j será la **multiplicidad del punto conjugado $\gamma(t_0)$** .

Observación. La multiplicidad j debe ser menor que $n - 1$, pues si $J(0) = 0$ hay como mucho n campos de Jacobi linealmente independientes, y el campo $t\gamma'(t)$ cumple $J(0) = 0$ pero no se vuelve a anular.

Proposición A.30. Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica con $\gamma(0) = p, \gamma(t_0) = q$. Entonces se tiene la equivalencia

$$p \text{ y } q \text{ son conjugados} \iff v_0 = t_0\gamma'(0) \text{ es un punto crítico de } \exp_p.$$

De hecho, la multiplicidad de q coincide con $\dim(\ker((d\exp_p)_{v_0}))$.

Demostración. Ya hemos visto en la proposición A.25 que podemos escribir $J(t)$ como $(d\exp_p)_{tv}(tw)$, así que $J(t_0) = 0$ equivale a $(d\exp_p)_{v_0}(t_0w) = 0$. $\square$

Esta ingenua proposición nos será de gran utilidad, pues por medio de campos de Jacobi podremos aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales para estudiar las singularidades de $(d\exp_p)$, que tendrán mucho que ver con la minimalidad de las geodésicas.

Cerremos esta sección comentando algunas propiedades sobre $\langle J, \gamma' \rangle$.

Proposición A.31. Sea J un campo de Jacobi sobre la geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$. Entonces

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t + \langle J(0), \gamma'(0) \rangle, \quad \forall t \in [0, a].$$

Demostración. La prueba es sencilla. Como γ es geodésica, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \langle J(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J'(t), \gamma'(t) \rangle.$$

Y tomando una segunda derivada tenemos que

$$\frac{d}{dt} \langle J'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J''(t), \gamma'(t) \rangle = \langle -R(\gamma', J)\gamma', \gamma' \rangle(t) = 0. \quad \square$$

Este resultado tiene consecuencias bastante fuertes:

Corolario A.32. Si el valor de $\langle J, \gamma' \rangle$ coincide para varios tiempos t_i , entonces será constante. En particular esto sucederá si J es un campo que conjuga dos puntos.

Corolario A.33. Si $J(0) = 0$, la perpendicularidad $J'(0) \perp \gamma'(0)$ implicará $J(t) \perp \gamma'(t)$ para todo t .

Ya sabemos que podemos elegir campos de Jacobi dados valores para $J(0)$ y $J'(0)$. Pero en ocasiones también nos gustaría seleccionarlos de manera que los valores fijados sean $J(0)$ y $J(a)$. Y si estos vectores no están sobre puntos conjugados, podremos:

Proposición A.34. Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodésica. Tomemos valores $v_1 \in T_{\gamma(0)}M$, $v_2 \in T_{\gamma(a)}M$. Si $\gamma(a), \gamma(0)$ no son conjugados, existirá un único campo de Jacobi J con $J(0) = v_1$ y $J(a) = v_2$.

Demostración. Como esos puntos no son conjugados, $(d\exp_p)_{a\gamma'(0)}$ será biyectiva. Así que basta tomar el $J'(0)$ decidido por $(d\exp_p)_{a\gamma'(0)}(J'(0)) = J(a)$. $\square$

Corolario A.35. Sea $\mathcal{J}^\perp$ el espacio de campos de Jacobi sobre una geodésica γ que cumplen $J(0) = 0$ y $J'(0) \perp \gamma'(0)$. Tomemos una base $\{J_1, \dots, J_{n-1}\}$. Si el punto $\gamma(t)$ no es conjugado a $\gamma(0)$, la evaluación $\{J_1(t), \dots, J_{n-1}(t)\}$ nos dará una base de $\{\gamma'(t)\}^\perp$.

Demostración. La independencia lineal viene de la proposición anterior, y la ortogonalidad viene de la proposición previa a esa. $\square$

A.6. Inmersiones isométricas

En esta sección nos vamos a dedicar a estudiar inmersiones $i : M \hookrightarrow \bar{M}$, donde $\bar{M}$ es una variedad riemanniana de dimensión $n + k$, y M es una variedad de dimensión n . Nos interesará particularmente cómo M heredará la métrica de la variedad grande $\bar{M}$.

Pero antes, observemos que en abiertos $U \subset M$ suficientemente pequeños, $i(U)$ será una subvariedad de $\bar{M}$, y así para todo $q \in M$ podemos hablar de que $T_q M \subset T_{i(q)} \bar{M}$ (con el pequeño abuso del lenguaje $(di)_q(T_q M) = T_q M$, que gracias a la inyectividad de $(di)_q$ es aceptable).

De esta manera, dado $p = i(q)$ tendrá sentido hacer una descomposición

$$\begin{aligned} T_p \bar{M} &= T_p M \oplus (T_p M)^\perp \\ v &= v^T + v^N. \end{aligned}$$

Esta descomposición también nos permite hablar de **campos de vectores perpendiculares a M** .

Es importante observar que las proyecciones $(p, v) \mapsto (p, v^T)$ y $(p, v) \mapsto (p, v^N)$ serán diferenciables en $T\bar{M}$.

Así, M tendrá una métrica inducida por la métrica en $\bar{M}$ de la siguiente manera:

$$\langle v, w \rangle_M := \langle (di)v, (di)w \rangle_{\bar{M}}$$

Proposición A.36. Sea $\bar{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de $\bar{M}$, y sea ∇ la conexión de Levi-Civita de la métrica inducida. Entonces, sobre los puntos de M se cumplirá que

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T,$$

siendo X, Y campos de vectores en M y $\bar{X}, \bar{Y}$ extensiones a $\bar{M}$.

Quizá tengamos que hablar de estas extensiones localmente, donde i es un *embedding*, pero no nos importará porque la conexión es un objeto local.

Idea de la demostración. Consiste en utilizar que el campo $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T$ queda definido por sus productos $\langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T, Z \rangle$. Escribiendo la definición de esta conexión y restringiendo los vectores, veremos sin dificultad que este producto coincide con $\langle \nabla_X Y, Z \rangle$. $\square$

Ahora busquemos definir una **segunda forma fundamental** de la inmersión. Estamos hablando de un objeto que mida la diferencia entre las curvaturas entre M y $\bar{M}$. Es decir, buscamos una medida de cómo se curva M dentro de $\bar{M}$.

Para ello, definiremos una aplicación auxiliar $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ de la forma

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^N,$$

para cualesquiera extensiones $\bar{X}, \bar{Y}$ de los campos X e Y definidos en un abierto U de M .

Obsérvese que esta no dependerá de la extensión elegida.

Proposición A.37. *B es una forma $\mathcal{C}^\infty(U)$ -bilineal simétrica, y por tanto solo dependerá del valor puntual de X e Y .*

Demostración. Gracias a las propiedades de la conexión ya conocemos la aditividad en ambos argumentos, y la $\mathcal{C}^\infty(U)$ -linealidad en el primero. Para la linealidad en el segundo argumento tomemos $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, y $\bar{f}$ una extensión de f a algún abierto de $\bar{M}$ que contenga a U . Así,

$$B(X, fY) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{f}\bar{Y} - \nabla_X fY = \bar{X}(\bar{f})\bar{Y} - X(f)Y + fB(X, Y),$$

y $\bar{X}(\bar{f})$ coincide con $X(f)$ sobre puntos de M , así que tenemos la bilinealidad.

Para la simetría de B basta observar que, por la simetría de la conexión tenemos

$$B(X, Y) = B(Y, X) + [\bar{X}, \bar{Y}] - [X, Y],$$

y esos dos corchetes coincidirán sobre puntos de M . $\square$

Después de esto estamos listos para definir la segunda forma fundamental de forma dual a $B(X, X)$. En concreto, primero definimos para $p \in M$ y $\eta \in (T_p M)^\perp$ la aplicación $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

Definición A.38. La forma cuadrática

$$\Pi_\eta(x) := H_\eta(x, x)$$

es llamada **segunda forma fundamental**.

Podemos asociar un operador $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ autoadjunto a la forma H_η , definido por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y).$$

Obsérvese que aunque hayamos definido un montón de aplicaciones en esencia son el mismo objeto. Dada cualquiera de ellas podemos recuperar cualquier otra con únicamente álgebra lineal.

Definidos estos objetos, vamos a probar resultados que nos aportarán significado sobre ellos.

Proposición A.39. *Sean $p \in M$ y $x \in T_p M$. N un campo de vectores normal a M que extiende al vector η . Entonces*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

Es decir, $S_\eta(x)$ mide la variación del vector normal en la dirección de x . Así se observa que estamos haciendo una medida de cómo se curva la variedad M dentro de $\bar{M}$. Por eso será de esperar una relación entre las curvaturas de M y $\bar{M}$ por medio de la segunda forma fundamental.

Demostración. Para probar la igualdad de esos vectores de $T_p M$ bastará ver que coinciden sus productos con cualquier $y \in T_p M$. Tomemos Y una extensión de y . Ciertamente:

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(X, Y)(p), N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, N \rangle(p) \\ &= -\langle Y, \bar{\nabla}_{\bar{X}} N \rangle(p) \\ &= -\langle y, \bar{\nabla}_x N \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

Ahora denotemos por K y $\bar{K}$ las curvaturas seccionales en M y $\bar{M}$ respectivamente.

Teorema A.40 (de Gauss). *Sea $p \in M$ y $x, y \in T_p M$ ortonormales. Entonces*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

Demostración. Consiste en escribir la expresión de la izquierda e ir expandiendo la expresión, buscando que aparezca el operador H . Está explicada en [5]. $\square$

Este resultado nos ayudará a dar mucha intuición sobre la curvatura seccional. Esto es porque coincide con la curvatura gaussiana que ya conocemos para superficies $S \subset \mathbb{R}^3$, y en variedades abstractas se reduce a mirar la curvatura de ciertas subvariedades inmersas de dimensión 2. En concreto, las siguientes:

Definición A.41. Una inmersión $i : M \rightarrow \bar{M}$ es **geodésica** en $p \in M$ si $\forall \eta \in (T_p M)^\perp$, Π_η es idénticamente cero en p . Si lo es en todo punto, diremos que es **totalmente geodésica**.

Proposición A.42. *Una inmersión $i : M \rightarrow \bar{M}$ es geodésica en $p \in M$ si cada geodésica en $p \in M$ también lo es en $\bar{M}$.*

Demostración. Tomemos una geodésica $\gamma(0) = p$ con $\gamma'(0) = x$. Elijamos N un campo vectorial extensión de η normal a M , y X un campo vectorial tangente a M extensión de $\gamma'(t)$. Así,

$$\Pi_\eta(x) = \langle S_\eta(x), x \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X N, X \rangle = -X \langle N, X \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_X X \rangle = 0.$$

pues $\nabla_{\bar{X}} X$ coincide con $\frac{D\gamma'}{dt}$ en $\gamma(0)$, que por hipótesis se anulará tanto en M como $\bar{M}$. $\square$

Con esto podremos detallar un poco mejor la interpretación de la curvatura seccional que mencionábamos. Sea $p \in M$, y $B \subset T_p M$ una bola normal. Tomemos también $\sigma \subset T_p M$ un subespacio de dimensión 2.

Entonces, $\exp_p(\sigma \cap B) = S$ será una subvariedad de dimensión 2 en M . Por la proposición S será geodésica en p , así que la segunda forma fundamental se anulará. Así, el teorema de Gauss nos dice que

$$K_M(p, \sigma) = K_S(p).$$

Es decir, **la curvatura seccional $K(p, \sigma)$ es la curvatura de la superficie de geodésicas que pasan por p tangentes a σ** . Como curiosidad, así fue la definición de curvatura que propuso Riemann al hablar de geometría en estos espacios abstractos.

También es interesante tener en mente que ser una variedad totalmente geodésica es en realidad una condición muy restrictiva. Un teorema de Cartan dice que si M tiene para todo p y $\sigma \subset T_p M$ una subvariedad totalmente geodésica tangente a σ , entonces M tendrá curvatura seccional constante.

Antes de cerrar nuestra introducción a la geometría riemanniana, parece obligatorio comentar la existencia de las **ecuaciones fundamentales**, que son una serie de relaciones entre campos vectoriales con la curvatura de por medio. Cumplen un rol muy similar al de las **ecuaciones de compatibilidad** en geometría de curvas y superficies cuando $\bar{M}$ tiene curvatura seccional constante.

Fijemos la notación. X, Y y Z serán campos de vectores tangentes a M , y ξ, η, ζ campos normales. Definamos también la componente normal de la conexión:

$$\eta_X^\perp := (\bar{\nabla}_X \eta)^N = \bar{\nabla}_X \eta - (\bar{\nabla}_X \eta)^T$$

Esta “conexión” también será lineal en X , pero aditiva y cumple la regla producto en η .

Así podremos definir una **curvatura normal** en $TM^\perp$ de la forma

$$R^\perp(X, Y)\eta := \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta.$$

Y, sin más dilación, las ecuaciones fundamentales:

Teorema A.43. *Se verifican las ecuaciones*

- *de Gauss:*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle$$

- *de Ricci:*

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle = \langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y \rangle$$

- *de Codazzi:*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Obsérvese que las ecuaciones de Gauss y de Ricci son puramente algebraicas, solo involucran a la métrica y nuestros operadores. En cambio, en la operación de Codazzi debemos derivar B .

Esta derivada $(\nabla_Z B)$ se define de forma que se cumpla la siguiente regla de derivación:

$$Z(B(X, Y)) = B(\nabla_Z X, Y) + B(X, \nabla_Z Y) + (\nabla_Z B)(X, Y)$$

Como todos los elementos salvo $(\nabla_Z B)$ son conocidos, podemos despejar este último y definir así la derivada.

APÉNDICE B

Otros teoremas globales

En este capítulo recogeré algunos resultados globales que, aunque también sean de gran importancia, he decidido apartar de la parte principal del trabajo al no tener una conexión tan inmediata con las variedades sin puntos conjugados.

B.1. Espacios con curvatura constante

Conocidos los teoremas de Hopf-Rinow y Hadamard, estamos en posición de abordar el problema de encontrar **todas** las variedades con curvatura seccional constante. En concreto veremos que una variedad completa y simplemente conexa tendrá que ser la esfera S^n , el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ o el espacio hiperbólico H^n . Esto es, asumiendo que $K = 1, 0$ o -1 , pues cualquier otro valor se logrará reescalando la métrica.

Antes de nada conviene presentar esas variedades riemannianas y comprobar que efectivamente tienen curvatura constante. No hacen falta presentaciones en el caso de $\mathbb{R}^n$, donde su métrica es el producto escalar euclídeo, y la conexión coincide con la derivada direccional usual. Es inmediato ver que en ese caso $R \equiv 0$.

La esfera S^n se puede entender como una subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$, así que heredará una métrica de este espacio como vimos en el capítulo anterior. Además, las isometrías de $\mathbb{R}^{n+1}$ que fijan el origen también fijarán la esfera unidad, y por tanto serán isometrías de S^n . Conocido eso, es fácil ver que dado $p \in S^n$ y $v_1, v_2 \in T_p S^n$, existe una isometría que traslade ese par a cualquier otro $w_1, w_2 \in T_q S^n$ para cualquier $q \in S^n$. De esta manera la curvatura seccional no puede ser otra cosa que constante, pues en esencia siempre la estaremos mirando en el mismo sitio. Y esa curvatura es positiva porque si fuese ≤ 0 , el recubridor universal de S^n sería $\mathbb{R}^n$, cosa que no tiene sentido¹.

El espacio hiperbólico consiste en el conjunto $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n > 0\}$ con una métrica distinta a la usual. Como ese abierto de $\mathbb{R}^n$ solo tiene una carta, bastará por dar una expresión local de esa métrica. Esa es $g_{ij} = \delta_{ij}/x_n^2$. Omitiré la demostración de que tiene curvatura constante -1 , pues pasa por varias recetas para el cálculo que por sintetizar he omitido de esta memoria.

¹Este argumento está pensado para librarme del problema en un único párrafo. Es matar moscas a cañonazos, pues en realidad los cálculos sobre la esfera se pueden hacer muy bien.

Antes de hacer la clasificación pasaremos por un teorema de Cartan de determinación de la métrica según la curvatura. Es enrevesado, así que conviene fijar bastante notación antes. M y $\tilde{M}$ serán variedades riemannianas en las que elegiremos puntos $p \in M$ y $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Tomaremos V un entorno normal de p de manera que $i \circ \exp_p^{-1}$ tenga bien definida $\exp_{\tilde{p}}$. Así definiremos también una función $f : V \rightarrow \tilde{M}$ como $f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p$.

Para todo $q \in V$ existe una única geodésica normalizada γ que une p con q .

Llamaremos P_t al operador que toma un $v \in T_p M$ y devuelve su transporte paralelo hasta $\gamma(t)$. Definiremos también $\tilde{P}_t$ el transporte paralelo sobre la geodésica con valores iniciales $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ y $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. También podremos definir $\phi_t : T_q M \rightarrow T_{f(q)} \tilde{M}$ por $\phi_t(v) = \tilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v)$.

Teorema B.1 (Cartan). *Si para todo $q \in V$ y para todos $x, y, u, v \in T_q M$ se tiene que*

$$\langle R(x, y)u, v \rangle = \langle \tilde{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v) \rangle,$$

entonces f será una isometría local con $df_p = i$.

Demostración. Sea $q \in V$, y $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ la geodésica que une p con q . Sea $v \in T_q M$, y J el campo de Jacobi que cumple $J(0) = 0, J(l) = v$.

Sea también $e_1, \dots, e_n = \gamma'(0)$ una base ortonormal en $T_p M$, y $e_i(t)$ el transporte paralelo de e_i sobre γ . Entonces podemos escribir J como $J(t) = \sum_i y_i(t)e_i(t)$ para ciertas funciones. Y como los vectores e_i son paralelos, se cumple que

$$y_j'' + \sum \langle R(e_n, e_i)e_n, e_j \rangle y_i = 0,$$

por la ecuación de Jacobi.

Por otro lado, tomemos $\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow \tilde{M}$, y definamos sobre esa curva el campo de vectores $\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t))$. Obsérvese que $\tilde{J}(t) = \sum y_i \tilde{e}_i$, para $\tilde{e}_i = \phi_t(e_i)$. Y claro, por hipótesis se satisface

$$y_j'' + \sum_i \langle R(e_n, e_i)e_n, e_j \rangle y_i = 0,$$

que no es más que la ecuación de Jacobi para $\tilde{J}$.

Además, $|\tilde{J}(l)| = |J(l)|$, pues ϕ_t es una isometría (los transportes paralelos e i lo son).

Si viesemos que $\tilde{J}(l) = df_q(J(l))$, habríamos terminado, pues df_q sería isometría lineal en cada q y por tanto f sería isometría local. Pero claro, $\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t))$ es el campo de Jacobi con dato inicial $\tilde{J}'(0) = i(J'(0))$. Así que podemos escribir ambos campos como

$$\begin{aligned} J(t) &= (d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)) \\ \tilde{J}(t) &= (d\exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)}(t\tilde{J}'(0)). \end{aligned}$$

Así que efectivamente $\tilde{J}(l) = (d\exp) \circ i \circ (d\exp^{-1})(J(l))$, y hemos demostrado el teorema de Cartan. $\square$

Observación. Si las aplicaciones fuesen difeomorfismos, esa isometría sería global. Así será fácil en cierto sentido encontrar isometrías entre espacios con curvaturas coincidentes.

Corolario B.2. Sean M y $\tilde{M}$ variedades con la misma curvatura (seccional constante). Para $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$, elegidas bases ortonormales $\{e_j\}$ en $T_p M$ y $\{\tilde{e}_j\}$ en $T_{\tilde{p}} \tilde{M}$, existirá una isometría $f : V \rightarrow \tilde{V}$ para entornos $p \in V$, $\tilde{p} \in \tilde{V}$, con $(df)_p(e_j) = \tilde{e}_j$.

Corolario B.3. Sea M una variedad con curvatura seccional constante, existirá una isometría $g : U \rightarrow V$ entre entornos de dos puntos $p, q \in M$ cualesquiera.

Y ya estamos listos para probar el teorema central de la sección. Antes, unos breves comentarios sobre espacios recubridores. Se sabe que una variedad M cualquiera tendrá un recubrimiento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, con $\tilde{M}$ un espacio topológico simplemente conexo único salvo homeomorfismo, y π una aplicación recubridora.

Como una aplicación recubridora π es un homeomorfismo local, $\tilde{M}$ heredará una estructura de variedad diferenciable de M que convierte a π en difeomorfismo local. Y ese difeomorfismo local inducirá una métrica en $\tilde{M}$ a partir de la métrica en M . Así hemos justificado hablar del recubridor universal como una variedad riemanniana.

Teorema B.4. Sea M una variedad completa de dimensión n con curvatura seccional constante $K = -1, 0, 1$. Entonces su recubridor universal $\tilde{M}$ con la métrica inducida será isométrico a

1. H^n , si $K = -1$.
2. $\mathbb{R}^n$, si $K = 0$.
3. S^n , si $K = 1$.

Para digerir mejor la prueba adelantaremos un lema que, en términos poco rigurosos, dice que no puede haber demasiadas isometrías.

Lema B.5. Sean $f_i : M \rightarrow N$, con $i = 1, 2$ dos isometrías locales. Supongamos que M es conexa. Si existe $p \in M$ con $f_1(p) = f_2(p)$ y $(df_1)_p = (df_2)_p$, entonces $f_1 \equiv f_2$.

Demostración. Tomemos V un entorno normal de p tal que $f_1|_V$ y $f_2|_V$ sean difeomorfismos a su imagen, y esté definida $\varphi = f_1^{-1} \circ f_2 : V \rightarrow V$. Esta aplicación cumplirá $\varphi(p) = p$ y $d\varphi_p \equiv \text{id}$.

Y como $d\varphi_p$ lleva cada $v \in T_p M$ en si mismo, φ llevará la geodésica con dato inicial (p, v) a si misma. Pero podemos escribir cualquier $q \in V$ de la forma $\exp_p(v)$, el valor para $t = 1$ de la geodésica $\exp_p(tv)$. Así pues, $\varphi(q) = q$. Por conexión de M se seguirá que $f_1 \equiv f_2$, al coincidir en entornos de cada punto. $\square$

Demostración (del teorema). Primero demostraremos los casos $K = -1, 0$, cuya prueba es la misma. Escribiremos $\Delta = \mathbb{R}^n, H^n$ según corresponda.

Elegimos $p \in \Delta$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ puntos cualesquiera, y fijamos $i : T_p\Delta \rightarrow T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ una isometría lineal. El teorema de Hadamard nos dice que

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : \Delta \rightarrow \tilde{M}$$

es un difeomorfismo. Además, el teorema de Cartan nos garantiza que sea isometría local.

El caso $K = 1$ requiere un poquito más de esfuerzo. Como antes, fijamos $p \in S^n$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e $i : T_p S^n \rightarrow T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ una isometría lineal. Y llamemos q al punto antipodal a p . Definimos

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : S^n \setminus \{q\} \rightarrow \tilde{M}.$$

El teorema de Cartan nos dice que es una isometría local.

Ahora, tomemos $p' \neq p, q$, y pongamos $\tilde{p}' = f(p')$, $i = df_{p'}$. Como f era isometría local, i' es isometría lineal. Así que como antes, tendremos

$$f' = \exp_{\tilde{p}'} \circ i' \circ \exp_{p'}^{-1} : S^n \setminus \{q'\} \rightarrow \tilde{M}.$$

Donde q' es el antipodal a p' . Así, $W = S^n \setminus \{q, q'\}$ es un abierto, conexo y $p' \in W$. Además f y f' coinciden en W . Así podremos pegar f y f' en una sola $g : S^n \rightarrow \tilde{M}$ que será isometría local. En particular, debe ser un difeomorfismo local. Y como S^n es compacta, g será aplicación recubridora (es un resultado conocido de geometría diferencial, no muy difícil). Como $\tilde{M}$ es simplemente conexo, g será un difeomorfismo y por tanto isometría global. $\square$

Hasta ahora hablabamos de una variedad M y construir su recubridor $\tilde{M}$. Pero también podemos cocientar la variedad para obtener otras. Para espacios topológicos, esto funcionaba así:

Supongamos que tenemos X un espacio topológico y G un grupo de homeomorfismos $M \rightarrow M$ que actúa de forma **propiamente discontinua**, es decir, $\forall x \in X$, tiene un entorno U tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para toda $g \in G \setminus \{\text{id}\}$. Entonces $\pi : X \rightarrow X/G$ será aplicación recubridora. Cada elemento de G “separará las hojas del cociente”.

Ahora, si $X = M$ es una variedad riemanniana, y $G = \Gamma$ es un grupo de isometrías que actúa de forma propiamente discontinua, M/Γ heredará una estructura diferenciable de forma que $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ sea difeomorfismo local. Así, heredará también una métrica de M para que π sea isometría local.

Observación. M/Γ es completa si y solo si lo es M , ya que las geodésicas de M se relacionan con las de M/Γ por π , proyectando o levantando según convenga.

También sabemos que M/Γ tiene curvatura seccional constante si y solo si la tiene M . En particular, los cocientes de $\mathbb{R}^n$, H^n y S^n nos darán otras variedades de curvatura seccional constante. Pero, ¿son esas todas las posibles?

Proposición B.6. *Sea M una variedad de curvatura seccional constante $K = -1, 0, 1$. Entonces M es isométrica a $\tilde{M}/\Gamma$, con $\tilde{M} = H^n$, $\mathbb{R}^n$ o S^n respectivamente y Γ un subgrupo de isometrías que actúa de forma propiamente discontinua.*

Demostración. Ya sabemos que $p : \tilde{M} \rightarrow M$ es el recubridor universal de M , con la estructura de variedad riemanniana inducida. Consideremos también Γ el grupo de transformaciones recubridoras. Estas se encuentran como levantamientos $\tilde{p} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ de la proyección $p : \tilde{M} \rightarrow M$. Habrá uno por cada capa del recubrimiento.

Por construcción, serán isometrías, ya que p es isometría local. Actúan de forma propiamente discreta, y

$$\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$$

es aplicación recubridora. Además, $p(x) = p(y) \iff \Gamma x = \Gamma y \iff \pi(x) = \pi(y)$. O sea que π y p definen las mismas clases de conjugación en $\tilde{M}$. En particular tendremos una biyección inducida $M \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$, que de hecho es una isometría. $\square$

Nos hemos dejado sin explicar muchos detalles que en realidad corresponden a la teoría de espacios recubridores. Una buena referencia para consultarlos es el libro de Hatcher [13].

Eso último que hemos demostrado ha sido la reducción del estudio de variedades de curvatura constante al estudio de acciones propiamente discontinuas de grupos de isometrías en H^n , $\mathbb{R}^n$, y S^n . Una consecuencia bonita pero sencilla será el siguiente resultado:

Proposición B.7. *Supongamos que M es una variedad de dimensión $2n$ con curvatura seccional constante $K = 1$. Entonces será isométrica a la esfera o al plano proyectivo.*

Demostración. Hemos comentado que las matrices $O(2n+1)$ estaban contenidas en el grupo de isometrías de S^{2n} . Además, esas serán todas gracias al lema B.5.

Sea $\Gamma < O(2n+1)$ un subgrupo de isometrías que actúe de forma propiamente discontinua. Sea $\gamma \in \Gamma$.

1. Si $\det(\gamma) = 1$, habrá un autovalor 1, y γ fijará un punto. Así, $\gamma = \text{id}$.
2. Si $\det(\gamma) = -1$, $\gamma^2 = \text{id}$. En particular γ tiene por autovalores 1 o -1 .

Así, la única opción de γ no trivial tendrá todos los autovalores iguales a -1 . Y por tanto, $\gamma = -\text{id}$. Los únicos cocientes de S^{2n} admisibles como variedad riemanniana serán entonces la propia esfera y el plano proyectivo $S^{2n}/\{\pm \text{id}\}$. $\square$

B.2. El teorema de Moore

Inmediatamente después del teorema de Rauch estaríamos preparados para probar un preciosísimo teorema de Moore acerca de la existencia de inmersiones isométricas. En él, nuestro lema del índice (2.19) tendrá un papel fundamental.

Teorema B.8 (Moore). *Sea $\bar{M}$ una variedad completa simplemente conexa, con curvatura seccional $\bar{K} \leq b \leq 0$. Y sea M una variedad compacta tal que $K - \bar{K} \leq -b$. Si $\dim \bar{M} \leq 2 \dim M$, entonces no podrá existir una inmersión isométrica $f : M \rightarrow \bar{M}$.*

Un caso muy interesante será considerar inmersiones isométricas a $\bar{M} = \mathbb{R}^n$. Cualquier variedad compacta de curvatura ≤ 0 necesitará ser de dimensión $\leq n/2$ para ser encajada sin problemas dentro de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, el toro plano $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ no cabe en $\mathbb{R}^{2n-1}$, aunque sí lo hará en $\mathbb{R}^{2n}$.

Demostración. Supongamos que exista tal f y busquemos una contradicción. Primero observemos todas las piezas del puzzle.

Tomemos un $\bar{p} \in \bar{M} \setminus f(M)$. Existe, pues $\bar{M}$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ por el teorema de Hadamard, y en particular no es compacta. Después tomemos $q \in M$ tal que $d(f(q), \bar{p}) \geq d(f(p), \bar{p})$ para todo $p \in M$. Existe, pues la función $d(f(\cdot), \bar{p})$ alcanza un máximo en M por compacidad.

Ahora elijamos un entorno $U \subset M$ entorno de q tal que $f|_U$ sea un *embedding*. Así podemos permitirnos el abuso del lenguaje $U = f(U)$ y $q = f(q)$. Sea $\gamma : [0, l] \rightarrow \bar{M}$ la geodésica minimizante entre $\bar{p}$ y q .

Esta geodésica debería ser perpendicular a U en q , pues podemos considerar f una variación de γ que fije p pero mueva el otro extremo en U . La fórmula de la primera variación nos dice que

$$0 = \frac{E'(0)}{2} = - \int_0^l \left\langle V(t), \frac{D}{dt} \gamma'(t) \right\rangle dt + \langle V(l), \gamma'(l) \rangle.$$

La integral se anula, pues γ es geodésica. Por tanto, el producto escalar también se tiene que anular. Y podemos elegir variaciones tal que $V(l)$ sea cualquier vector tangente a U en q .

Ahora, $\forall v \in T_q M$ con $|v| = 1$, consideremos $c(s)$ una curva con dato inicial (q, v) . Definamos también $\hat{c}(s) = \exp_p^{-1}(c(s))$. Podemos definir una superficie parametrizada

$$f(t, s) = \exp_{\bar{p}} \frac{t}{l} \hat{c}(s),$$

que generará un campo de Jacobi $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ cumpliendo $V(0) = 0$, $V(l) = v$.

Obsérvese que $\gamma_s : t \mapsto f(t, s)$ serán geodésicas más cortas que γ , pues acaban en U y q es el punto más lejano a $\bar{p}$. Bajo este contexto, daremos un lema auxiliar.

Lema. Sea $E(s)$ la energía de γ_s . Entonces

$$\frac{E''(0)}{2} = I_l(V, V) + \langle S_{\gamma'(l)} V(l), V(l) \rangle,$$

donde S es el operador de forma definido en la sección 1.6.

Demostración. La fórmula de la segunda variación (2V simple) nos dice que

$$\frac{E''(0)}{2} = I_l(V, V) + \langle V'(l), \gamma'(l) \rangle = I_l(V, V) + \langle \bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{V}(q), \bar{N}(q) \rangle.$$

Hemos introducido $\bar{V}$ y $\bar{N}$ extensiones a $\bar{M}$ de $V(l)$ y $\gamma'(l)$ respectivamente, para buscar con ellos la segunda forma fundamental de la inversión. Basta observar que

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{V}, \bar{N} \rangle(q) = - \langle \bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{N}, \bar{V} \rangle(q) = \langle V(l), S_{\gamma'(l)} V(l) \rangle \quad \square$$

Continuamos con la demostración al teorema de Moore. Consideremos una variedad $\tilde{M}$ de curvatura seccional constante $K \equiv b$, con $\dim \tilde{M} = \dim M$. Sea un punto $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Tomemos también una geodésica $\tilde{\gamma}$ normalizada de longitud l , con punto inicial $\tilde{p}$.

Como hemos hecho ya otras veces, tomemos $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ una base de $T_{\gamma(t)}\bar{M}$ y $\{\tilde{e}_i(t)\}_{i=1}^n$ obtenidas por transporte paralelo. También recordaremos la aplicación

$$\varphi\left(\sum a_i e_i\right) = \sum a_i \tilde{e}_i.$$

Definamos $\tilde{V} := \varphi(V)$. Por las hipótesis sobre la curvatura se cumple que $I_l(V, V) \geq I_l(\tilde{V}, \tilde{V})$ (ver la demostración al teorema de Rauch). Nos gustaría estimar $I_l(\tilde{V}, \tilde{V})$ para acotar $I_l(V, V)$.

Para ello, busquemos el campo de Jacobi sobre $\tilde{\gamma}$ con $\tilde{J}(0) = 0, \tilde{J}(l) = \tilde{v}$. En el caso de curvatura constante esto es muy sencillo. Si consideramos $U(t) = f(t)w(t)$ para f una función y w un transporte paralelo, por la curvatura seccional constante la ecuación de Jacobi se reducirá a $f_i'' + b f_i = 0$, una EDO que conocemos muy bien.

Así, basta tomar $\tilde{w}(t)$ el transporte paralelo de $u_0/|u_0|$, siendo $u_0 = (d \exp_{\tilde{p}})_{l\tilde{\gamma}'(0)}(\tilde{v})$. Nuestro $\tilde{J}$ deseado será

$$\tilde{J}(t) = \begin{cases} \frac{\sinh t\sqrt{-b}}{\sinh l\sqrt{-b}} \cdot \tilde{w}(t) & \text{si } b < 0 \\ \frac{t}{l} \cdot \tilde{w}(t) & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

Ya tenemos una estimación

$$I_l(V, V) \geq I_l(\tilde{V}, \tilde{V}) \geq I_l(\tilde{J}, \tilde{J}).$$

Pero como conocemos explícitamente estos últimos, vamos a buscar algo más preciso. Si $b > 0$, tenemos que

$$I_l(\tilde{J}, \tilde{J}) = \left\langle \tilde{J}, \tilde{J}' \right\rangle \Big|_{t=l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=l} |\tilde{J}|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=l} \frac{\sinh^2(t\sqrt{-b})}{\sinh^2(l\sqrt{-b})} = \coth(l\sqrt{-b}) > \sqrt{-b}.$$

Y es aún más fácil ver que, si $b = 0$, $I_l(\tilde{J}, \tilde{J}) > 0$. Así concluimos que

$$I_l(V, V) > \sqrt{-b}.$$

Combinemos todas las piezas que han aparecido hasta ahora. Recordemos las geodésicas γ_s , que eran más cortas que γ . Así, γ maximizará la energía en esa variación, y por tanto

$$0 \geq \frac{E''(0)}{2} = I_l(V, V) + \langle S_{\gamma'(l)} V(l), V(l) \rangle > \sqrt{-b} + \langle S_{\gamma'(l)} V(l), V(l) \rangle.$$

Poniendo por fin $V(L) = v$, concluimos

$$\langle B(v, v), \gamma'(l) \rangle = \langle S_{\gamma'(l)} V, v \rangle < -\sqrt{-b}.$$

En particular tenemos que $\|B(v, v)\| > \sqrt{-b}$. Además, por la fórmula de Gauss y nuestra hipótesis inicial también tenemos que

$$\langle B(v, v), B(w, w) \rangle - \|B(v, w)\|^2 = K(v, w) - \bar{K}(v, w) \leq -b$$

Estas condiciones para una aplicación bilineal B serán incompatibles con que $\dim \bar{M} < 2 \dim M$. Este es un problema puramente algebraico, que solucionaremos con el próximo lema.

Lema (Otsuki). *Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ una aplicación simétrica bilineal tal que*

$$B(v, v)B(w, w) - \|B(v, w)\|^2 < \sqrt{-b} \quad y \quad \|B(v, v)\| > \sqrt{-b}$$

para todos los vectores v, w ortonormales. Entonces k debe ser mayor que n .

Demostración. Definamos una aplicación $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f(x) = \langle B(x, x), B(x, x) \rangle.$$

Sea v su mínimo. Definamos $v(t) = v \cos t + w \sin t$, $w \in S^{n-1}$, para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ elegido cierto $\varepsilon > 0$. Como v es mínimo, se tiene que

$$(a) \quad 0 = df_v(w) = 2 \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} B(v(t), v(t)), B(v, v) \right\rangle = 4 \langle B(w, v), B(v, v) \rangle.$$

Utilicemos ahora que v es mínimo para obtener una desigualdad

$$(b) \quad \begin{aligned} 0 \leq d^2 f_v(w, w) &= 4 \langle B(v'(0), v), 2B(v'(0), v) \rangle \\ &\quad + 4 \langle B(v''(0), v), B(v, v) \rangle + 4 \langle B(w, v'(0), B(v, v) \rangle \\ &= 8 \|B(w, v)\|^2 - 4 \langle B(v, v), B(v, v) \rangle \\ &\quad + 4 \langle B(w, w), B(v, v) \rangle \end{aligned}$$

usando que $v''(0) = -v$. Combinemos lo que sabemos para que $k < n$ llegue a un absurdo.

Definimos la aplicación lineal $L : T_v S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ por la identidad $L(w) = B(v, w)$. La igualdad (a) nos dice que $\langle L(w), B(v, v) \rangle = 0$. Así que $\dim L(T_v S^{n-1}) \leq k - 1$. O sea que $\ker L$ tendrá dimensión de al menos 1, y tendrá que existir $w_0 \neq 0$, $w_0 \perp v$ tal que $L(w_0) = 0 = B(v, w_0)$.

Haciendo $w = w_0$ en (b) obtenemos

$$0 \leq \langle B(w_0, w_0), B(v, v) \rangle - \|B(v, v)\|^2 < \langle B(w_0, w_0), B(v, v) \rangle - \sqrt{-b}^2 \leq -b + b = 0,$$

que es una contradicción. En la desigualdad estricta hemos aplicado a la vez (b) y las hipótesis sobre B . $\square$

Este lema termina de probar el teorema de Moore. $\square$

Bibliografía

- [1] D. Burago and S. Ivanov. Riemannian tori without conjugate points are flat. *Geom. Funct. Anal.*, 4(3):259–269, 1994.
- [2] D. Yu. Burago. Periodic metrics. In *Representation theory and dynamical systems*, volume 9 of *Adv. Soviet Math.*, pages 205–210. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [3] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry*. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975.
- [4] Christopher B. Croke and Viktor Schroeder. The fundamental group of compact manifolds without conjugate points. *Comment. Math. Helv.*, 61(1):161–175, 1986.
- [5] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [6] Jost-Hinrich Eschenburg. Horospheres and the stable part of the geodesic flow. *Math. Z.*, 153(3):237–251, 1977.
- [7] Jian Ge, Luis Guijarro, and Pedro Solórzano. Riemannian rigidity of the parallel postulate in total curvature. *Math. Ann.*, 376(1-2):177–185, 2020.
- [8] David González-Álvaro and Luis Guijarro. Soft restrictions on positively curved Riemannian submersions. *J. Geom. Anal.*, 26(2):1442–1452, 2016.
- [9] Detlef Gromoll and Gerard Walschap. *Metric foliations and curvature*, volume 268 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [10] Luis Guijarro and Frederick Wilhelm. Focal radius, rigidity, and lower curvature bounds. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 116(6):1519–1552, 2018.
- [11] Luis Guijarro and Frederick Wilhelm. Restrictions on submanifolds via focal radius bounds. *Math. Res. Lett.*, 27(1):115–139, 2020.
- [12] Colin Guillarmou, Marco Mazzucchelli, and Leo Tzou. Asymptotically euclidean metrics without conjugate points are flat, 2019.

- [13] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [14] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis*. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [15] Eberhard Hopf. Closed surfaces without conjugate points. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 34:47–51, 1948.
- [16] Sergei Ivanov and Vitali Kapovitch. Manifolds without conjugate points and their fundamental groups. *J. Differential Geom.*, 96(2):223–240, 2014.
- [17] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [18] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [19] John M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, second edition, 2018.
- [20] J. Milnor. *Morse theory*. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells.
- [21] Gabriel P. Paternain. *Geodesic flows*, volume 180 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.
- [22] Rafael O. Ruggiero. *Dynamics and global geometry of manifolds without conjugate points*, volume 12 of *Ensaio Matemáticos [Mathematical Surveys]*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.
- [23] Takashi Sakai. *Riemannian geometry*, volume 149 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Translated from the 1992 Japanese original by the author.
- [24] Wolfgang M. Schmidt. *Diophantine approximation*, volume 785 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.