El cálculo matricial a través de la resolución de problemas de dinámica de poblaciones

Laura Plata Jiménez

Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato
Especialidad Matemáticas

MÁSTERES DE LA UAM
2018 - 2019

Facultad de Educación y Formación del Profesorado

UAM Universidad Autónoma de Madrid

MÁSTER EN FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN

SECUNDARIA Y BACHILLERATO

El cálculo matricial a través de la resolución de problemas de dinámica de poblaciones

2º de Bachillerato - Matemáticas II

Autora: Laura Plata Jiménez

Tutor: Jesús García Azorero

Trabajo de fin de máster

Curso 2018/19

Índices

Contenidos

Índice de tablas, figuras e imágenes

1. Resumen

Este Trabajo de Final de Máster presenta el cálculo matricial de 2º de Bachillerato a través de problemas de dinámicas de poblaciones. Con este hilo conductor se consigue ir desarrollando los contenidos de una forma natural, llegando a los resultados a través de la necesidad, no siendo presentados de forma aislada. Tratando de justificar en todo momento el porqué de ciertos procedimientos matemáticos a través de conceptos fundamentales como las aplicaciones lineales.

En primer lugar, se justificará la oportunidad de plantear un nuevo modelo de desarrollo para este tema, fundamentado en distintas teorías pedagógicas. Además, el punto de partida será el análisis del contexto actual a través de la normativa, libros de texto y un cuestionario realizado a los estudiantes.

Posteriormente, gracias a los problemas de dinámicas de poblaciones, se irán planteando a los estudiantes distintas simulaciones y preguntas a través de las que ellos serán los que o bien lleguen a las respuestas o bien lleguen a comprender la necesidad de construir nuevos conocimientos para poder responderlas.

El hecho de realizar todo el desarrollo con una aplicación real conseguirá asentar la idea en los estudiantes de que el cálculo matricial tiene una utilidad práctica en la vida cotidiana, así como incrementar su motivación e interés en el tema.

Palabras clave

Matrices, dinámica poblaciones, aplicaciones lineales, autovalor.

2. Introducción

2.1. Justificación

Actualmente, la forma de presentar y desarrollar los contenidos se basa en distintas teorías constructivistas, que exponen la necesidad de dar al estudiante herramientas que le permitan construir conocimientos. Los máximos exponentes de estas teorías son Jean Piaget y Lev Vygotsky. Según la teoría de este último, el alumno tiene una zona de desarrollo próximo que se fundamenta en la diferencia entre lo que un estudiante puede aprender por sí mismo, que se definiría como nivel potencial, y lo que puede aprender con ayuda de un guía o tutor, que se define como nivel tutor. Este guía sería en nuestro caso el docente, que proporciona el conjunto de herramientas necesarias para que el estudiante alcance ese conocimiento, denominado andamiaje.

Otro de los grandes exponentes del constructivismo es David Paul Ausubel, psicólogo y pedagogo que definió el aprendizaje significativo, el cual hace énfasis en el aprendizaje basado en conocimientos previos del estudiante. Según su teoría, los nuevos conocimientos conectan con los antiguos, dotándolos de significado. En esto se fundamenta la conexión realizada en el presente trabajo con otros contenidos anteriores, como espacios de vectores, propiedades de las operaciones entre ellos, y resolución de sistemas lineales. Igualmente, los conocimientos adquiridos en este tema actuarán como base para otros avances posteriores, cuando se estudien temas como determinantes, el concepto de límite o la resolución de sistemas más complejos.

El pedagogo John Elliott es también defensor del aprendizaje significativo. Se enfoca en que los estudiantes no aprendan contenidos sin razón o sin sentido aparente sino que aprendan los contenidos y su naturaleza, siendo conscientes de sus aplicaciones prácticas y creativas en el interior de sus vidas. Esto respalda el hilo conductor tomado a lo largo del desarrollo de este trabajo, que conecta los nuevos conocimientos con respecto al cálculo matricial con ejemplos de su uso en la vida real en situaciones como las dinámicas de poblaciones.

En último lugar, se tiene en cuenta el aprendizaje por descubrimiento, desarrollado por el psicólogo y pedagogo Jerome Bruner en el que el docente motiva a los estudiantes a que ellos mismos descubran relaciones entre distintos conceptos y construyan el conocimiento, produciéndose un diálogo activo entre el docente y el alumnado. Durante todo el desarrollo del presente trabajo se llevará a cabo este diálogo, fomentando que los estudiantes respondan a las preguntas a través de la observación, consiguiendo así que ellos mismos lleguen al conocimiento, convirtiéndose así en sujetos activos del proceso de Enseñanza-Aprendizaje. Un ejemplo claro, que se presentará más adelante, ~~en~~ la comprensión de las distintas características de la matriz de Leslie, así como de los valores asociados a dichas matrices, que aparecen en distintas simulaciones.

2.2. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo se establecen de acuerdo a la legislación vigente *Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre*, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Para el desarrollo del mismo definiremos tres objetivos. El primero, trabajar las distintas competencias que aparecerán reforzadas de manera natural durante todo el desarrollo de los contenidos. El segundo, relacionar las matemáticas y su uso con otras materias como la biología y situaciones de la vida cotidiana en las que se emplean. Y en tercer lugar, los objetivos específicos directamente relacionados con los estándares de aprendizaje evaluables definidos por la ley.

Competencias

Tal como se ha mencionado, gran parte de las competencias aparecen reforzadas de manera natural durante todo el desarrollo de los contenidos. Como muestra de ello podemos dar algunos ejemplos. La comunicación lingüística será trabajada a través de la compresión de los problemas planteados y en la necesidad de expresar correctamente sus conjeturas acerca de las cuestiones planteadas. Del mismo modo, se aprenderá el lenguaje matemático para una correcta expresión en la disciplina y comprensión de contenidos de forma general. La competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología es intrínseca a la propia asignatura, pero además, se trabajará al resolver problemas de la vida cotidiana a través de las matemáticas por lo que las verán desde un punto de vista más aplicado. Por otro lado, en lugar de seguir únicamente el método tradicional en el que los contenidos son expuestos y posteriormente copiados por los estudiantes, se les proporcionarán ejemplos y datos sobre los que, a través de la observación y la respuesta a preguntas construirán su propio conocimiento. De este modo, aprenderán a razonar por sí mismos y a extraer conclusiones sobre las que trabajar y desarrollarán la competencia de aprender a aprender (CPAA). Además, durante todo el desarrollo se emplearán diversas TIC, por lo que se reforzará la competencia digital. En último lugar las competencias social y cívica aparecerán durante todo el desarrollo, porque se fomentará la participación activa y constante por parte de los estudiantes para ir llegando al conocimiento. Por lo tanto, se trabajará el respeto por las opiniones de los demás, el pensamiento crítico y los intercambios de opiniones.

Transversalidad

En este caso, la transversalidad es entendida en primer lugar con respecto a la relación con otras asignaturas como es la biología, más concretamente la ecología, ya que todo el desarrollo se realiza en base a ejemplos de poblaciones. Por este motivo, sería factible coordinar el aprendizaje de estos conocimientos matemáticos con conocimientos sobre el concepto de población y otros relacionados en la asignatura de Biología. Esto puede ser muy positivo para los estudiantes, al evitar que vean las distintas asignaturas de forma aislada. Además, con respecto a la importancia que dan a las propias matemáticas, es necesario que asimilen la multitud de utilidades que tienen en la vida cotidiana y no únicamente en relación a campos que puedan considerar más afines, como ingenierías, sino que están íntimamente relacionadas con gran cantidad de disciplinas.

Hay otro concepto de transversalidad que cobra gran peso en este trabajo al relacionar conceptos como límite o aplicaciones lineales. Usualmente, durante la enseñanza de las matemáticas los bloques suelen tratarse de forma aislada y compartimentadas entre sí. Un ejemplo de ello es la propia ley educativa, que cuenta con cinco bloques y únicamente el primero se trabaja de forma transversal. Los otros cuatro correspondientes a: “Números y álgebra”, “Análisis”, “Geometría” y “Estadística y Probabilidad” son definidos de forma aislada. Igualmente ocurre en los libros de texto, por lo que los cuatro bloques terminan siendo temporalizados de forma aislada. Durante un determinado bloque, los estudiantes aprenderán todos los contenidos del mismo y todos los ejercicios y problemas se resolverán según esa perspectiva aunque pudieran ser resueltos de otra forma. Sabemos que las matemáticas son parte de un todo y, aunque se pueden compartimentar, es realmente importante para los estudiantes que aprendan a conectar los distintos conocimientos y emplearlos simultáneamente.

Objetivos específicos

Tal como se mencionaba anteriormente los objetivos específicos se corresponden con los estándares evaluables definidos para el “Bloque 2. Números y álgebra” de la ley. Este bloque se suele desarrollar en la práctica y en los libros de texto en tres unidades: una correspondiente a matrices, otra a determinantes y otra a sistemas de ecuaciones. Por lo tanto, y ya que el presente trabajo se centra en las matrices, no todos los estándares serán objetivo del mismo, o al menos no de forma completa. Por lo tanto, tendremos objetivos que serán completamente desarrollados y trabajados y otros objetivos que deberán ser completados con el desarrollo de las otras dos unidades posteriores. Por este motivo los denominaremos objetivos específicos completos y parciales respectivamente.

Objetivos específicos completos

- Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos adecuados.

- Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos.

- Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

Objetivos específicos parciales

- Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.

- Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

3. Contexto actual

3.1. Contexto normativo

Los contenidos correspondientes a cálculo matricial corresponden al nivel de 2º de Bachillerato, tanto en Matemáticas II como en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, tal como viene definido en el *Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre*, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Estos contenidos aparecen en ambos casos definidos en el "Bloque 2. Números y álgebra", en el que se definen además los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y álgebra		
Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Clasificación de matrices. Operaciones. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales. Determinantes. Propiedades elementales. Rango de una matriz. Matriz inversa. Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas.	1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.	1.1. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos adecuados. 1.2. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos. 2.1. Determina el rango de una matriz, hasta orden4, aplicando el método de Gauss o determinantes. 2.2. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. 2.3. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. 2.4. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

Tabla 1. Extracto del currículo de Matemáticas II.

Si observamos el currículo, se nos plantean varias cuestiones. En primer lugar, realizando una comparación entre los contenidos definidos para Matemáticas II (Anexo I) y los definidos para las Matemáticas Aplicadas a las CCSS (Anexo II), observamos una clara diferencia. En lo relativo a Matemáticas II menciona la aplicación de las matrices a la resolución de problemas, pero no define de qué tipo, por lo que puede ser interpretado como problemas formales en los que aparezcan matrices, pero no es necesaria ninguna conexión con situaciones reales, es decir, se trataría de problemas fundamentalmente abstractos. Por el contrario, en los contenidos de Matemáticas Aplicadas a las CCSS dice "*Resolución de problemas de las ciencias sociales y de la economía*." Aunque en principio este detalle pueda parecer un aspecto menor, nos aporta una idea clara acerca de la problemática que enfrentamos. Muchos de los contenidos únicamente tienen importancia por sí mismos y no les damos un contexto ni uso concreto más allá del estudio de sus propiedades algebraicas formales.

Cualquier propuesta de una posible metodología para presentar uno de los temas de segundo de bachillerato debe tener en cuenta el tiempo disponible. Según el currículo oficial de bachillerato y la normativa de las pruebas de acceso a la universidad, los contenidos se estructuran en bloques que tienen todos el mismo peso a la hora de la evaluación final. Sin embargo, habitualmente estos bloques (cálculo diferencial, geometría, álgebra lineal y probabilidad) no son homogéneos y ocupan una extensión desigual en los libros de texto, y como consecuencia también en el calendario, que en segundo de bachillerato está bastante sobrecargado. Por todo ello, entendemos que la propuesta que desarrollamos a continuación no debe exigir un incremento sustancial del tiempo de clase dedicado a este tema.

3.2. Libros de texto

Otro de los aspectos que podemos analizar para conformar una idea global de la situación y del modo en que se imparte actualmente esta parte de los contenidos son los libros de texto. Aunque hay profesores que pueden, y de hecho aportan contenido propio a sus estudiantes, en líneas generales los libros determinan cómo y qué se enseña. Por este motivo hemos analizado una muestra de cuatro libros de texto diferentes, teniendo en cuenta la introducción general del tema, la forma de exponer los contenidos y los ejercicios y problemas propuestos para su resolución.

<u>Análisis libro de texto 1 (Grence Ruiz *et al*., 2016)</u>

En primer lugar, comienza introduciendo el tema con una referencia a un problema real, citando la navegación por GPS y comentando cómo estos sistemas eligen la ruta más rápida, pero realmente no aporta una solución a la pregunta ni explica de qué modo está relacionado con el cálculo de matrices, posponiendo hasta el final del tema a la respuesta. Por lo tanto, al hacerlo en este orden en ningún momento su utilización puede ser considerado como elemento motivacional del tema tratado.

Con respecto al desarrollo de los contenidos, se realiza de una manera completamente expositiva, saltando de un concepto a otro, cubriendo todo el currículo, pero sin una justificación de por qué son necesarios o se emplean más allá de la resolución de ejercicios abstractos. Únicamente aparece un ejemplo en el cual utiliza las matrices como herramienta de cálculo para la resolución de un problema relacionado con el gasto de un restaurante en la elaboración de tres menús (Anexo III).

En último lugar, de los 145 ejercicios y problemas propuestos en el tema únicamente 7, que representan menos de un 5% del total, son problemas con algún tipo de contexto o referencia a la vida real. En dichos problemas únicamente se emplea el producto de matrices.

Tal como he mencionado anteriormente, en la última página del tema se hace una breve referencia a la teoría de grafos, pero aparece como algo superficial y marginal con respecto al resto del tema.

<u>Análisis libro de texto 2 (Ruiz Jiménez *et al*., 2016)</u>

En este libro encontramos un gran contraste con el analizado anteriormente, ya que en la primera página del bloque se menciona un gran número de aplicaciones de las matrices en la vida real, tal como se puede ver en el Anexo III. Entre otras, menciona la aplicación de las matrices al estudio de la dinámica de poblaciones desarrollada por Patrick H. Leslie (Leslie, 1945). Además, en la introducción del tema vuelve a hablar de sus usos y asemeja las matrices y su organización y distribución a situaciones de la vida real como la disposición de alumnos en una clase o un tablero de ajedrez.

A partir de ahí, comienza a presentar los contenidos de manera expositiva, aunque en el último apartado denominado “8. Las matrices en la vida real” propone y resuelve cinco problemas acerca de temáticas y aplicaciones diferentes mediante matrices. En este libro también se menciona la utilización de una herramienta informática, en este caso Wiris, para trabajar con matrices.

Con respecto a las actividades propuestas como ejercicios para resolver, hay 54 actividades, de las cuales 10, casi el 19%, requieren ir más allá de la aplicación mecánica de los contenidos, incluyendo varias actividades en las cuales los alumnos no tienen que utilizarlas únicamente como herramienta sino entender qué representan.

En resumen, este libro sí hace una conexión con la vida real y las aplicaciones de las matrices, pero continúa mostrando los contenidos principales de la unidad de una manera aislada y expositiva.

Análisis libro de texto 3 (Bescós i Escruela and Pena i Terrén, 2016)

Siguiendo el mismo criterio que en el análisis de los libros anteriores, comenzaremos observando la introducción al tema. En este caso, se hace una mínima mención al uso de matrices en la teoría de toma de decisiones, pero de manera un tanto superficial.

A partir de ahí, comienza de manera expositiva a presentar todos los contenidos descontextualizados y de una manera abstracta. Únicamente realiza breves referencias en forma de leyendas de las imágenes que aparecen a lo largo del tema. Por ejemplo, una de estas referencias al pie de una imagen en la que aparecen dos aviones parados es "Entre las numerosas aplicaciones de las matrices se incluye el control del tráfico aéreo." Los escasos ejemplos son todos de este tipo.

Cuenta en uno de los puntos de teoría con el apartado "6. Aplicación de las matrices a la resolución de problemas". En este apartado menciona campos en los que se pueden aplicar y resuelve un problema a través del producto de matrices. Sin embargo, elabora de una forma más detallada y con un ejemplo la relación entre matrices y grafos (sección 6.2).

En último lugar, de los 63 ejercicios propuestos para su resolución solo 5 (aproximadamente el 8%) corresponden a problemas no abstractos.

Análisis libro de texto 4 (Hernández Rodríguez, Quirós Gracián and Tarrés Freixenet, 2001)

En este último libro analizado observamos que sí hace una breve introducción mencionando algunos de los usos de las matrices.

A la hora de desarrollar la unidad, prácticamente en su totalidad lo hace de manera similar al resto de materiales analizados en cuanto a motivación. Es decir, se desarrolla de una manera mayoritariamente expositiva, aunque más detallada que en alguno de los otros analizados, y sin referencias a situaciones que requieran de su utilización. Sin embargo, sí apreciamos tres diferencias. La primera, dedica más espacio a definir una matriz y explicar qué es, con el objetivo de que este contenido sea realmente entendido, algo más allá de lo que normalmente se aporta con respecto a este aspecto. En segundo lugar, es el único libro que, al explicar el producto de matrices, da una justificación o referencia al motivo por el cual esta operación se realiza de este modo. En concreto, lo explica a través de una analogía con el producto escalar de vectores. En tercer lugar, cuenta con un apartado *“9. Algunas aplicaciones de las matrices”,* en el que desarrolla aplicaciones de las matrices de una manera más detallada, no únicamente nombrando los usos, sino explicando cómo se aplican. En concreto, habla de teoría de juegos, movimientos en el plano, teoría de grafos y dinámica de poblaciones. Esta última aplicación es de gran importancia en el contexto de este trabajo, puesto que es el tema que hemos elegido como motivación central para el desarrollo de nuestra unidad. Además, el texto amplía algunas de las aplicaciones en la última página del tema dando un contexto histórico a la teoría de juegos y conectando los códigos QR o de barras con la teoría de matrices.

A pesar de estas tres diferencias, en cuanto a las actividades planteadas nos encontramos que la diferencia con los otros libros es menos importante. Es decir, de los 76 ejercicios y problemas planteados, únicamente 4 de ellos (5% aproximadamente) no son abstractos. Concretamente, dos de ellos trabajan la primera parte relacionada con el concepto de matriz y los otros dos están relacionados con las aplicaciones mencionadas de grafos y movimientos en el plano.

Otro aspecto a remarcar de este último libro es la inclusión de los conceptos de autovalores y autovectores en un apartado de profundización. En la presente propuesta ambos conceptos también serán tenidos en cuenta.

Este último libro es de un año muy anterior a los demás analizados, por lo que debemos valorar que es de otro plan educativo distinto, pero sigue teniendo interés de cara a nuestro trabajo, puesto que el contenido de tema de matrices en el plan antiguo y en el plan moderno es básicamente el mismo.

En conclusión, después del análisis de los cuatro libros que tomamos como muestra, dos de ellos tratan de dar una idea, contexto y motivación al porqué del estudio de las matrices y su utilidad. Además, uno de ellos sí aplica lo trabajado a ejemplos reales. Sin embargo, en ninguno se realiza una conexión directa entre los ejemplos y los contenidos. Este trabajo pretende, no solo usar los ejemplos en la fase de consolidación de la unidad, como hace el segundo libro analizado, sino ***emplearlos como hilo conductor y motivacional durante el desarrollo de los contenidos, dando sentido y coherencia a su estudio***.

3.3. Análisis respuesta cuestionario alumnos

Durante el periodo de prácticas en el centro se realizó un cuestionario como el que aparece en el Anexo IV a 47 estudiantes de 2º de Bachillerato, que ya habían estudiado el tema correspondiente a Matrices, y a 15 estudiantes de 1º de Bachillerato, que no las estudiarán hasta el curso siguiente.

El objetivo era justificar la necesidad de un nuevo enfoque. Nuestra hipótesis previa era que, a pesar de haber estudiado ese tema, al hacerlo tal como hemos analizado en los libros de texto de manera mayoritariamente expositiva y descontextualizada, los estudiantes sabrían operar con ellas, pero no serían capaces de definirlas, de explicar su significado o de comentar alguna de sus aplicaciones en la vida real. Esta hipótesis, en caso de confirmarse, justificaría la necesidad de enfocar la unidad didáctica de una manera menos abstracta, como se pretende en este trabajo.

A continuación, se analizan algunas de las respuestas obtenidas.

En primer lugar, se les preguntaba a los estudiantes "¿Qué es una matriz?". Tal como se aprecia en el diagrama de sectores de la figura 1, el 55% de las respuestas eran del tipo "un conjunto de números ordenados en filas y columnas". La segunda respuesta más común (17%) consistía en expresar gráficamente una matriz. De estas respuestas, aproximadamente la mitad (8,5%) respetaba la representación genérica establecida. Es decir, había respuestas similares a estos dos tipos:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El 9% de las respuestas correspondían a estudiantes que afirmaban cosas tales como "Un método para mantener datos numéricos organizados".

Cabe destacar que el 2% restante corresponde a una respuesta que por primera y única vez se refería a las matrices como una "herramienta matemática", tal como se puede ver en el anexo V.

Con respecto a las respuestas incluidas como "Respuestas no válidas" son aquellas correspondientes a estudiantes que lo han dejado en blanco, han respondido "No lo sé" o incluso "=(".

Figura 1. Resultados cuestionario acerca de la definición de matriz.

Es interesante que, leyendo estas respuestas analizadas, la sensación es que prácticamente la mayoría podían definir una matriz a través de una descripción de su forma de representación gráfica, ya fuera escribiéndola como tal o describiéndola, pero no a través de su uso. Si tenemos en cuenta que la media de la nota de la muestra es de 7,95 vemos que prácticamente todos los grupos son cercanos a la misma, sin apreciarse diferencias entre los estudiantes que daban una respuesta no válida y el resto. Todo esto sugiere que los estudiantes no han entendido el concepto completamente pero que esto no afecta a sus notas.

En el siguiente gráfico se presenta una nueva respuesta de los estudiantes de 2º de Bachillerato, que, como ya hemos mencionado, han estudiado las matrices durante este curso.

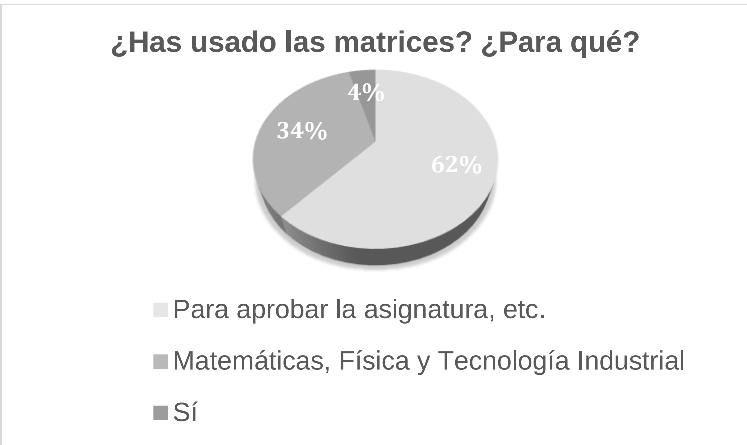
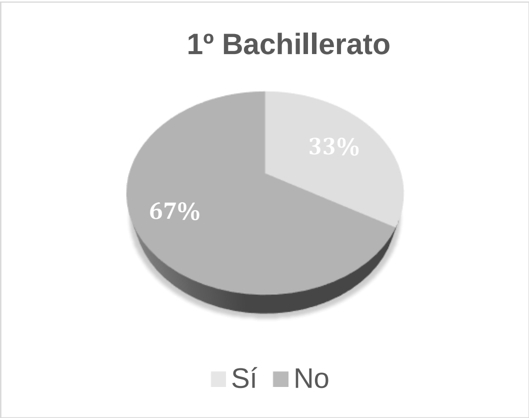


Figura 2. Resultados cuestionario acerca del empleo de las matrices por los estudiantes.

Las respuestas más repetidas son del tipo: “Sí, para aprobar matemáticas.”, “Sí, para aprobar el examen.” o “Sí, para aprobar 2º de Bachillerato.”. El 34% de los estudiantes dan respuestas más específicas como: “Para resolver sistemas de ecuaciones”, “en física en ejercicios de inducción electromagnética” o “los determinantes para el producto mixto y el producto vectorial”. Es decir, menos de la mitad de los estudiantes son capaces de decir usos directos que han dado a dicho conocimiento, a pesar de que todos ellos los han empleado en distintas situaciones en distintas asignaturas. De ello podemos interpretar que, a pesar de que sí las emplean, para la gran mayoría el motivo para el que sirven las matrices es “para aprobar”. Se ven obligados a ello y no tienen más usos ni intereses.

En mi opinión, parte del problema es debido a que en la enseñanza de los contenidos no se relacionan con sus usos en la vida cotidiana, por lo que su sensación es que las matemáticas únicamente sirven para aprobar. Esta teoría la respaldan las respuestas dadas a la pregunta “¿Conoces alguno de los usos de las matrices en el día a día? Si la respuesta es sí, ¿cuáles?”. A continuación, se exponen dos gráficas que representan el porcentaje de alumnos que conocían algún uso en la vida cotidiana de las matrices y los que no de ambos cursos, tanto 1º como 2º de Bachillerato. Es llamativo que en ambos cursos el porcentaje es bastante similar, el conocimiento de las aplicaciones de las matrices no parece estar relacionado directamente con que lo hayan estudiado en clase,



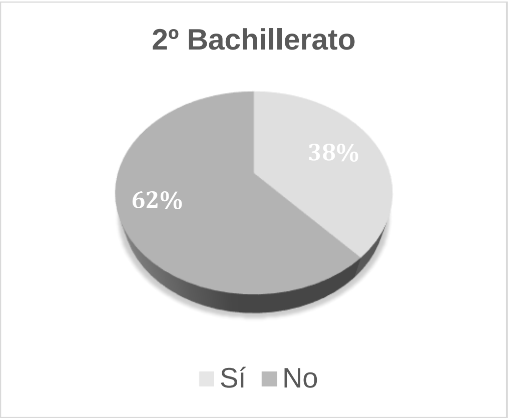


Figura 3. Comparativa resultados acerca del conocimiento de usos de las matrices.

De entre los que sí dieron respuesta, estos fueron los usos mencionados: informática (38%), volúmenes y áreas (15%), triangulación, movimientos en el espacio y cartografía (15%), códigos QR (12%), datos de un hotel o restaurante (8%), redes neuronales en AI (4%), criptografía (4%) y poblaciones (4%).

Es muy interesante que él o la estudiante que definió la matriz como una "herramienta matemática", además de ser capaz de dar más de un uso es la única respuesta que incluye la dinámica de poblaciones, objeto del presente trabajo. Si analizamos ese cuestionario con más detenimiento, Anexo V, observamos que dicha estudiante es capaz de asociar su uso con la geometría analítica y la resolución de sistemas de ecuaciones. Además, su respuesta a la pregunta con respecto a las operaciones con matrices nos da una idea de la problemática general, que es que las operaciones y demás aspectos formales trabajados ya los han olvidado pero al contrario que este estudiante tampoco recuerdan usos.

En definitiva, los resultados obtenidos sustentan la idea principal del presente trabajo, en el que se pretenden acercar los conocimientos matemáticos a los estudiantes de una forma más interrelacionada, tanto con la vida cotidiana como con otros conceptos de la propia materia. Ya que el objetivo no es que los estudiantes únicamente "aprueben la asignatura" sino que vean utilidad y sean capaces de responder a estas preguntas como la mayoría responderíamos a qué es una determinada cosa, es decir, a través de nuestra experiencia y uso de ello y no como simple memorización de un concepto.

4. Propuesta

4.1. Desarrollo

Concepto de matriz

Empezamos con un ejemplo. Hacia el año 1.202, Leonardo Pisano Fibonacci publicó un libro llamado “Liber Abaci” en el que aparecía un problema que será utilizado como motivación.

Supongamos que vamos al mercado y compramos cuatro parejas de conejos jóvenes. Los animales tienen unos ciclos vitales y siguen unos patrones a la hora de reproducirse. En nuestro caso, suponemos que las parejas jóvenes se convierten en adultas al cumplir un mes de vida. Las parejas adultas se reproducen dando lugar a una nueva pareja cada mes. En este ejemplo vamos a suponer que no hay mortalidad, por lo que todas las parejas jóvenes pasarán a ser adultas y las adultas se multiplicarán continuamente.

Siguiendo estas normas, al final del primer mes las cuatro parejas jóvenes que hemos comprado se han transformado en adultas, que comienzan a reproducirse. Así, al final del segundo mes tendremos cuatro parejas jóvenes y cuatro parejas adultas y al final del tercer mes tendremos cuatro parejas jóvenes y ocho parejas adultas. Si observamos esta sucesión podemos apreciar que hay un patrón: siempre tenemos el mismo número de parejas jóvenes que parejas adultas había el mes anterior, y el número de parejas adultas es la suma de las parejas que había el mes anterior, tanto jóvenes como adultas. Podemos formularlo como sistema suponiendo que J_n son el número de parejas jóvenes en un mes n y A_n el número de parejas adultas.

$$J_n = A_{n-1}$$

$$A_n = J_{n-1} + A_{n-1}$$

Este sistema representa un proceso iterativo, en el que a partir de los datos del mes $n-1$ obtenemos los resultados del mes n.

A partir de la situación planteada podemos realizar una simulación a través de Excel para observar cómo se desarrolla la población a lo largo de los n primeros meses, en este caso se exponen los quince primeros meses. En ella se aprecia que, a partir de los once primeros meses, la proporción entre los jóvenes de un periodo y los del anterior permanece constante, siendo igual a la existente entre los adultos de un periodo y del anterior. De igual modo, permanece constante a partir del octavo mes la proporción de jóvenes con respecto al total de individuos.

n	J_n	A_n	J_n/J_{n-1}	A_n/A_{n-1}	$J_n/(J_n+A_n)$
0	4	0	-	-	-
1	0	4	-	-	-
2	4	4	-	1,000	0,500
3	4	8	1,000	2,000	0,333
4	8	12	2,000	1,500	0,400
5	12	20	1,500	1,667	0,375
6	20	32	1,667	1,600	0,385
7	32	52	1,600	1,625	0,381
8	52	84	1,625	1,615	0,382
9	84	136	1,615	1,619	0,382
10	136	220	1,619	1,618	0,382
11	220	356	1,618	1,618	0,382
12	356	576	1,618	1,618	0,382
13	576	932	1,618	1,618	0,382
14	932	1508	1,618	1,618	0,382
15	1508	2440	1,618	1,618	0,382

Tabla 2. Primera simulación evolución de la población ejemplo de Fibonacci.

Este experimento podría realizarse empleando más decimales, en ese caso se observaría que la estabilización se produciría cada vez más tarde cuantos más decimales quisiéramos igualar. Este hecho debe ser empleado para conectar con el concepto de límite que se incluye en el bloque de cálculo, favoreciendo así la comprensión por parte del alumnado.

Sin embargo, esta simulación no nos permite definir a qué se debe dicha tendencia que define el desarrollo de la población. Para comprobar la influencia del dato inicial, se realiza una nueva simulación suponiendo que en lugar de comprar cuatro parejas de conejos jóvenes, compramos dos parejas de conejos adultos y veinte de jóvenes. A continuación se puede ver el desarrollo de la población partiendo de esta nueva situación inicial.

n	J_n	A_n	J_n/J_{n-1}	A_n/A_{n-1}	$J_n/(J_n+A_n)$
0	20	2	-	-	-
1	2	22	-	-	-
2	22	24	-	1,091	0,478
3	24	46	1,091	1,917	0,343
4	46	70	1,917	1,522	0,397
5	70	116	1,522	1,657	0,376
6	116	186	1,657	1,603	0,384
7	186	302	1,603	1,624	0,381
8	302	488	1,624	1,616	0,382
9	488	790	1,616	1,619	0,382
10	790	1278	1,619	1,618	0,382
11	1278	2068	1,618	1,618	0,382
12	2068	3346	1,618	1,618	0,382
13	3346	5414	1,618	1,618	0,382
14	5414	8760	1,618	1,618	0,382
15	8760	14174	1,618	1,618	0,382

Tabla 3. Segunda simulación evolución de la población ejemplo de Fibonacci.

Gracias a estas dos simulaciones observamos que, a pesar de que el número de parejas de conejos tanto jóvenes como adultas varía, las distintas proporciones existentes siempre van a permanecer estables. Realizamos una tercera simulación para contrastar las anteriores suponiendo que compramos cuatro parejas adultas y únicamente una joven para confirmar nuestra hipótesis de que las proporciones se mantienen.

n	J_n	A_n	J_n/J_{n-1}	A_n/A_{n-1}	$J_n/(J_n+A_n)$
0	1	4	-	-	-
1	4	5	-	-	-
2	5	9	-	1,800	0,357
3	9	14	1,800	1,556	0,391
4	14	23	1,556	1,643	0,378
5	23	37	1,643	1,609	0,383
6	37	60	1,609	1,622	0,381
7	60	97	1,622	1,617	0,382
8	97	157	1,617	1,619	0,382
9	157	254	1,619	1,618	0,382
10	254	411	1,618	1,618	0,382
11	411	665	1,618	1,618	0,382
12	665	1076	1,618	1,618	0,382
13	1076	1741	1,618	1,618	0,382
14	1741	2817	1,618	1,618	0,382
15	2817	4558	1,618	1,618	0,382

Tabla 4. Tercera simulación evolución de la población ejemplo de Fibonacci.

Por lo tanto, podemos deducir que la evolución de una población no viene definido por el número de individuos inicial sino por otro aspecto interno del problema. Recuperando el sistema anteriormente planteado que regía la evolución de nuestra población:

$$J_n = A_{n-1}$$

$$A_n = J_{n-1} + A_{n-1}$$

Podemos afirmar que la información relevante en este esquema iterativo está recogida en los tres coeficientes que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones, y que podemos extraer de forma ordenada en lo que llamaremos **matriz**:

$$\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n-1} \\ A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Más adelante explicaremos por qué este es el modo en que se escribe y como el hecho de hacerlo así define cómo se realiza el producto de matrices.

Si el sistema evolucionara de acuerdo con otra ley distinta (por ejemplo, un mayor número de crías, como que cada pareja tuviera una descendencia mensual de dos parejas) esto se reflejaría en un cambio de alguno de los números anteriores.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizando las simulaciones correspondientes a la nueva ley pero con las parejas iniciales de los casos anteriormente tratados obtendríamos los siguientes resultados. En el caso de contar con cuatro parejas jóvenes:

n	J_n	A_n	J_n/J_{n-1}	A_n/A_{n-1}	$J_n/(J_n+A_n)$
0	4	0	-	-	-
1	0	4	-	-	-
2	8	4	-	1,000	0,667
3	8	12	1,000	3,000	0,400
4	24	20	3,000	1,667	0,545
5	40	44	1,667	2,200	0,476
6	88	84	2,200	1,909	0,512
7	168	172	1,909	2,048	0,494
8	344	340	2,048	1,977	0,503
9	680	684	1,977	2,012	0,499
10	1368	1364	2,012	1,994	0,501
11	2728	2732	1,994	2,003	0,500
12	5464	5460	2,003	1,999	0,500
13	10920	10924	1,999	2,001	0,500
14	21848	21844	2,001	2,000	0,500
15	43688	43692	2,000	2,000	0,500

Tabla 5. Simulación evolución de la población ejemplo 2.

En ambos casos observamos que las proporciones se estabilizan igualmente pero con respecto a una constante diferente que cuando se regía por el sistema anterior. Es decir, podemos resumir la información relevante que nos permite reconstruir el sistema simplemente con estos cuatro números. Además, podemos concluir que esos cuatro números son los que definen esa constante. Pero, ¿qué relación guardan con ella? ¿Realmente las constantes dependen de esos cuatro números? ¿Qué significan y cómo podemos hallarlas?

En último lugar, para ver si hay alguna diferencia cuando los números que aparecen no son enteros, si suponemos que todas las parejas jóvenes pasan a ser adultas, cada pareja de conejos jóvenes se reproduce a razón de una pareja joven y que el 20% de las parejas adultas mueren tras cada ciclo reproductivo la matriz asociada a dicho sistema sería la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Realizando las correspondientes simulaciones igual que en los casos anteriores observamos los mismos patrones. Para el caso inicial de cuatro parejas jóvenes:

n	J_n	A_n	J_n/J_{n-1}	A_n/A_{n-1}	$J_n/(J_n+A_n)$
0	4	0	-	-	-
1	0	4	-	-	-
2	4	3	-	0,800	0,556
3	3	7	0,800	2,050	0,328
4	7	8	2,050	1,288	0,437
5	8	13	1,288	1,577	0,388
6	13	19	1,577	1,434	0,411
7	19	29	1,434	1,497	0,400
8	29	42	1,497	1,468	0,405
9	42	62	1,468	1,481	0,403
10	62	92	1,481	1,475	0,404
11	92	136	1,475	1,478	0,404
12	136	200	1,478	1,477	0,404
13	200	296	1,477	1,477	0,404
14	296	437	1,477	1,477	0,404
15	437	645	1,477	1,477	0,404

Tabla 6. Simulación evolución de la población ejemplo 3.

Por lo tanto, gracias a estos ejemplos podemos definir qué es una matriz más allá de una serie de números dispuestos de una determinada manera. Por ello, definiremos una **matriz** como una herramienta matemática en la cual se representan unos datos relacionados entre sí y que nos sirve para codificar sistemas de ecuaciones y finalmente procesos. La representación genérica es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada componente de la matriz se denomina **elemento** y sus subíndices definen la posición que ocupan en ella. En primer lugar en la **fila** y en segundo lugar en la **columna**. Es decir, a_{ij} representa el elemento que ocupa la posición que corresponde a la fila i y la columna j.

Otra característica que define a las matrices es el número de filas y columnas, que determina lo que se denomina **dimensión de la matriz** y se representa de la forma $m \times n$, en donde m es el número de filas y n el número de columnas.

Por ejemplo, si en lugar de tener únicamente parejas de conejos jóvenes y parejas de conejos adultos incluyéramos un tercer grupo de edad que cumpliera otros condicionantes, obtendríamos una matriz de distinto orden. Supongamos pues que los conejos vivieran tres años. En los cuales las parejas jóvenes (J_n) no se reproducen el primer año y mueren el 30%, lo cual quiere decir que sobreviven el 70%. Las parejas de conejos del segundo año (A_n) se reproducen a razón de dos parejas cada pareja, y además muere un 10% de ellas. Y por último, las parejas del tercer año (B_n) únicamente tienen una pareja cada una y después mueren. Quedaría representado por el siguiente sistema:

$$J_n = 2A_{n-1} + B_{n-1}$$

$$A_n = 0.7J_{n-1}$$

$$B_n = 0.9A_{n-1}$$

Por lo tanto, la matriz asociada a este caso sería la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensión de esta matriz es 3×3 (3 filas y 3 columnas). Cuando una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas $(m = n)$ se le llama **matriz cuadrada,** y n es el **orden** de la matriz. En este caso es una matriz cuadrada de orden 3. Todas las matrices asociadas a problemas de este tipo son siempre cuadradas, pero las matrices no tienen por qué serlo siempre. Es decir, el número de filas y de columnas no tienen que ser iguales. De hecho, para escribir el sistema anterior de forma matricial lo haríamos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n-1} \\ A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix}$$

Ahora nos fijaremos en que en este caso vemos que las dos matrices nuevas son de dimensión 3×1. Otros ejemplos de matrices de distinta dimensión son:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 9 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/3 & -12 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4/5 & 6 & 0 \\ 32 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dimensión: 3×2 2×3 5×3 1×2

La dimensión de una matriz tiene gran importancia a la hora de realizar operaciones. Al igual que los sistemas de ecuaciones, las matrices se pueden sumar y restar. Pero para poder hacerlo, las matrices que intervengan en la operación deben tener la misma dimensión.

Además de las matrices cuadradas, existen otros tipos de matrices según su dimensión. Todas aquellas que no son cuadradas, es decir que su número de filas y de columnas es diferente ($m \neq n$) se llaman **matriz rectangulares.** Si una matriz rectangular tiene una única fila se llama **matriz fila** y su dimensión será $1 \times n$. Si tiene una única columna se le denomina **matriz columna** y su dimensión será $m \times 1$.

Matrices y aplicaciones lineales

El modelo de partida de la sucesión de Fibonacci es en realidad un ejemplo de lo que se conoce con el nombre de aplicación lineal. Es una fórmula que, a cada par $(J_{n-1,}\, A_{n-1})$, le hace corresponder otro par $(J_{n,}\, A_n) = (A_{n-1,}\, J_{n-1} + A_{n-1})$, de modo que tenemos una aplicación $L: R^2 \to R^2$ que podemos comprobar que cumple dos propiedades:

$$Def. \begin{cases} L(\bar{x} + \bar{y}) = L(\bar{x}) + L(\bar{y}) \\ L(c\bar{x}) = cL(\bar{x}) \quad \forall c \in R \end{cases}$$

Estas son las dos propiedades que caracterizan lo que se denomina como aplicación lineal. Teniendo esto en cuenta, dada una aplicación lineal genérica de R^2 en R^2, podemos escribir:

$$\bar{x} = (x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

$$L(\bar{x}) = (l_1, l_2)$$

Por lo tanto,

$$(l_1, l_2) = L(\bar{x}) = L(x_1, x_2) = L\big(x_1(1,0) + x_2(0,1)\big) = x_1 L(1,0) + x_2 L(0,1)$$

Si nombramos $L(1,0)$ como (A, B) y $L(0,1)$ como (C, D)entonces,

$$(l_1, l_2) = L(\bar{x}) = x_1(A, B) + x_2(C, D) = (Ax_1 + Cx_2, Bx_1 + Dx_2)$$

Entonces,

$$l_1 = Ax_1 + Cx_2 \qquad l_2 = Bx_1 + Dx_2$$

Es decir, tenemos un sistema análogo al obtenido en el caso del ejemplo de Fibonacci, que se puede representar en este caso por la matriz $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$.

En dimensión 2, estas aplicaciones lineales admiten una representación gráfica muy atractiva, que permite presentar algunas propiedades bastante interesantes. En este caso, hemos optado por una animación basada en GeoGebra:

Pincha aquí para ver la representación en GeoGebra

Al ver la animación, se plantea una observación natural: en el movimiento de los dos vectores, hay unos instantes especiales en los que los dos tienen la misma dirección. Estos valores especiales jugarán un papel importante más adelante.

Pero una vez que hemos conectado las matrices con estas aplicaciones lineales, surge de manera natural la pregunta de cómo se comportan las matrices con respecto a las operaciones que se pueden establecer entre estas funciones.

En lo que sigue, y puesto que en ningún caso se puede prestar a confusión, vamos a usar la misma notación para las aplicaciones lineales y las matrices que las representan. Es decir, según el contexto, el símbolo M puede referirse a una aplicación lineal, o a la matriz asociada. Si en algún momento tuviéramos que distinguir entre ambos conceptos, usaremos la notación L_M para la aplicación lineal.

Operaciones con matrices

Suma de matrices

En primer lugar podemos definir la suma de matrices escribiéndolo de forma matricial y a partir de la definición de la suma de vectores y basándonos en la primera condición de la definición de aplicación lineal.

Definiendo la aplicación lineal M y escribiendo el sistema de forma matricial como anteriormente,

$$M(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

Expresado como vector de n filas y una columna,

$$\begin{pmatrix}A & C\\ B & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ax_1+Cx_2\\ Bx_1+Dx_2\end{pmatrix}$$

Del mismo modo definimos la aplicación lineal N y la expresamos como vector,

$$N(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}E & G\\ F & H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ex_1+Gx_2\\ Fx_1+Hx_2\end{pmatrix}$$

A partir de aquí, podemos definir la suma teniendo en cuenta la forma ya conocida de suma de vectores.

$$M(x_1,x_2)+N(x_1,x_2)$$

En primer lugar llevaremos a cabo la operación trabajando con vectores:

$$M(x_1,x_2)+N(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}Ax_1+Cx_2\\ Bx_1+Dx_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}Ex_1+Gx_2\\ Fx_1+Hx_2\end{pmatrix}$$

En este caso sumaremos cada componente del vector,

$$M(x_1,x_2)+N(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}Ax_1+Cx_2+Ex_1+Gx_2\\ Bx_1+Dx_2+Fx_1+Hx_2\end{pmatrix}$$

Si sacamos factor común,

$$M(x_1,x_2)+N(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}(A+E)x_1+(C+G)x_2\\ (B+F)x_1+(D+H)x_2\end{pmatrix}$$

Expresándolo con el formato inicial $Matriz * Vector$, obtendríamos la forma en que se suman,

$$M(x_1,x_2)+N(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}A+E & C+G\\ B+F & D+H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, de este modo queda definido cómo realizar la suma de matrices, como se muestra a continuación.

$$M(x_1, x_2) + N(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Extrayendo factor común obtenemos,

$$M(x_1, x_2) + N(x_1, x_2) = \left(\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como conclusión, y dado que el resultado tiene que ser igual que en la demostración con vectores, obtenemos el modo en el que se suman matrices:

$$M + N = \begin{pmatrix} A + E & C + G \\ B + F & D + H \end{pmatrix}$$

Este mismo proceso define también la resta de matrices.

Tal como hemos visto, para sumar o restar matrices ambas tienen que tener la misma dimensión al igual que para sumar o restar vectores estos deben tener la misma dimensión. Al igual que en la suma de vectores podemos sumar dos o más vectores sumando los componentes que ocupan la misma posición, en la suma de matrices también podemos sumar dos o más matrices del mismo modo.

Por lo tanto, para sumar o restar matrices se suman o se restan entre sí los elementos que ocupan la misma posición.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} \pm b_{i1} & a_{i2} \pm b_{i2} & \cdots & a_{in} \pm b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

A continuación se exponen algunos ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 3+1 \\ -1-1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 17/4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por una constante

Una vez definida la suma y resta de matrices apoyándonos en la primera condición de la definición de aplicación lineal, podemos definir cómo realizar el producto de una matriz por una constante k gracias a la segunda condición de la definición.

$$L(c\bar{x}) = cL(\bar{x})$$

Utilizando la aplicación M definida anteriormente y suponiendo una constante k esta propiedad quedaría del siguiente modo expresada:

$$M(kx_1, kx_2) = kM(x_1, x_2)$$

Desarrollando la primera parte de la ecuación anterior

$$M(kx_1, kx_2) = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$$

Expresándolo de forma vectorial,

$$M(kx_1, kx_2) = \begin{pmatrix} Akx_1 + Ckx_2 \\ Bkx_1 + Dkx_2 \end{pmatrix}$$

Si lo expresamos de nuevo tal como lo hacíamos de forma matricial obtenemos,

$$M(kx_1, kx_2) = \begin{pmatrix} Ak & Ck \\ Bk & Dk \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ahora, expresaremos de forma matricial la segunda parte de la ecuación de partida por la cual,

$$kM(x_1, x_2) = k \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, basándonos en la ecuación inicial establecida basándonos en la definición de aplicación lineal,

$$M(kx_1, kx_2) = kM(x_1, x_2)$$

Obtenemos que,

$$\begin{pmatrix} Ak & Ck \\ Bk & Dk \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Quedando así definido el producto de una constante por una matriz.

Por lo tanto, para **multiplicar una matriz por un número o constante**, cada elemento de la matriz resultante queda multiplicado por dicho número o constante.

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo,

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3/2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

Producto entre matrices

Continuando con la identificación realizada anteriormente con las aplicaciones lineales podemos definir también como se realiza el producto entre matrices.

$$L(\bar{x}) = x_1(A,B) + x_2(C,D) = (Ax_1 + Cx_2, Bx_1 + Dx_2)$$

La forma en la que según convenio expresaremos esto de forma matricial definirá la manera en la que se realiza el producto de matrices por vectores columna (que se pueden entender como una matriz con varias filas y una única columna).

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 + Cx_2 \\ Bx_1 + Dx_2 \end{pmatrix}$$

Veamos un ejemplo con coeficientes para asentar esta definición,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tal como hemos visto queda definido el producto de una matriz por un vector columna o matriz de dimensión $2x1$. Pero para justificar el producto general entre matrices y sus características principales nos basaremos en otra operación importante entre aplicaciones lineales como es la composición.

A continuación, veamos cómo se refleja esta operación composición con respecto a las matrices que representan a las aplicaciones lineales correspondientes.

$$R^2 \xrightarrow{L_M} R^2 \xrightarrow{L_N} R^2$$

Donde,

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \; y \; N = \begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, y con la nomenclatura anteriormente utilizada, el proceso llevado a cabo sería:

$$(x_1, x_2) \to L_M(x_1, x_2) \to L_N(L_M(x_1, x_2))$$

O lo que es lo mismo,

$$L_N\big(L_M(x_1, x_2)\big) = L_N(Ax_1 + Cx_2, Bx_1 + Dx_2)$$

Expresado de forma matricial según lo establecido anteriormente,

$$L_N\big(L_M(x_1, x_2)\big) = \begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax_1 + Cx_2 \\ Bx_1 + Dx_2 \end{pmatrix}$$

Y operando la matriz por el vector columna,

$$L_N\big(L_M(x_1, x_2)\big) = \begin{pmatrix} E(Ax_1 + Cx_2) + G(Bx_1 + Dx_2) \\ F(Ax_1 + Cx_2) + H(Bx_1 + Dx_2) \end{pmatrix}$$

Agrupamos los términos sacando factor común,

$$L_N\big(L_M(x_1, x_2)\big) = \begin{pmatrix} (EA + GB)x_1 + (EC + GD)x_2 \\ (FA + HB)x_1 + (FC + HD)x_2 \end{pmatrix}$$

Si lo expresamos de nuevo de forma matricial obtenemos,

$$L_N\big(L_M(x_1, x_2)\big) = \begin{pmatrix} EA+GB & EC+GD \\ FA+HB & FC+HD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo, si expresamos el proceso con matrices directamente obtenemos,

$$L_N\big(L_M(x_1, x_2)\big) = \begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

Al igualar ambas ecuaciones obtenemos que,

$$\begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA+GB & EC+GD \\ FA+HB & FC+HD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por lo que queda definido cómo realizar el **producto de dos matrices**,

$$\begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA+GB & EC+GD \\ FA+HB & FC+HD \end{pmatrix}$$

Debemos tener muy presente, teniendo en cuenta lo demostrado, que el producto de matrices es la composición de dos aplicaciones lineales, y tal como sabemos, la operación de composición **no es conmutativa**. Es decir, el orden en que se produce el producto define el resultado.

Como ejemplo de ello compararemos con la composición en orden inverso:

$$L_{\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}} \left(L_{\begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = L_{\begin{pmatrix} EA+GB & EC+GD \\ FA+HB & FC+HD \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Que como producto de matrices es,

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+CF & AG+CH \\ BE+DF & BG+DH \end{pmatrix}$$

Comparando ambos productos confirmamos lo definido,

$$\begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & G \\ F & H \end{pmatrix}$$

Y, en general,

$$\begin{pmatrix} EA+GB & EC+GD \\ FA+HB & FC+HD \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} AE+CF & AG+CH \\ BE+DF & BG+DH \end{pmatrix}$$

La demostración ha sido realizada únicamente para aplicaciones lineales entre espacios de dos dimensiones, pero a partir de aquí se puede definir exactamente igual en el resto de dimensiones.

En el caso del producto, al contrario que en la suma, para que se pueda realizar la condición no es que las dos tengan la misma dimensión, sino que las dimensiones sean compatibles entre sí. Hay que tener en cuenta que la dimensión de los espacios entre los que se produce la aplicación lineal y la matriz correspondiente guardan relación, siendo determinado el número de columnas de la matriz por la dimensión del espacio origen y el número de filas por la dimensión del espacio imagen. Para poder realizar dos aplicaciones lineales consecutivas, la dimensión del espacio imagen de la aplicación que actúa en primer lugar (L_M en el ejemplo) debe ser igual a la dimensión del espacio origen de la que actúa en el segundo lugar (L_N).

$$R^{\mathrm{a}} \xrightarrow{L_M} R^{\mathrm{b}} \xrightarrow{L_N} R^{c}$$

Esto traducido al producto de matrices, define que para que el **producto entre dos matrices** se pueda realizar el número de **columnas** de la primera matriz debe ser **igual** al número de **filas** de la segunda, obteniendo una matriz resultante con el mismo número de filas que la primera matriz y el mismo número de columnas que la segunda matriz.

Por lo tanto, para realizar el producto entre dos matrices se multiplicarán y sumarán de forma ordenada los elementos uno a uno de cada fila por cada columna. Escrito de forma genérica:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}*b_{11}+\cdots+a_{1n}*b_{n1} & \cdots & a_{11}*b_{1k}+\cdots+a_{1n}*b_{nk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}*b_{11}+\cdots+a_{mn}*b_{n1} & \cdots & a_{m1}*b_{1k}+\cdots+a_{mn}*b_{nk} \end{pmatrix}$$

Estos son un par de ejemplos con coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*(-3)+3*(-1) & 2*1+3*(-3) \\ (-1)*(-3)+2*(-1) & (-1)*1+2*(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -7 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 \\ 4 & 2/5 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * 1 + 3 * (-3) + 1/2 * 2 \\ 4 * 1 + 2/5 * (-3) + (-2) * 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6/5 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta

Como hemos visto, inicialmente definíamos el producto entre una matriz y un vector columna pero, ¿y si el vector se colocara de forma horizontal? Es decir, si lo escribiéramos como una matriz fila. En ese caso, debemos tener en cuenta dos condicionantes. El primero es que deberíamos cambiar el orden de las matrices, ya que como hemos dicho para poder realizar el producto la primera matriz debe tener el mismo número de columnas que la segunda de filas. Además, para que el producto sea lo mismo debemos llevar a cabo un cambio en la matriz: tendremos que cambiar el orden de los elementos, pasando las filas a ser las columnas y viceversa, para que se multipliquen en el orden correcto. Esta nueva matriz será la **matriz traspuesta** ($\boldsymbol{M^t}$) de la anterior. Si nos fijamos, en realidad al escribir el vector como fila también estamos realizando su traspuesta del vector columna correspondiente. Veamos esto con uno de los ejemplos utilizado anteriormente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \; y \; N = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si cambiamos los elementos de las filas y los colocamos como columnas obtenemos las matrices traspuestas:

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \; y \; N^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si realizamos el producto entre estas dos matrices,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Observando el resultado, que es la traspuesta del producto podemos deducir una propiedad muy interesante y fácil de demostrar en general del producto de la traspuesta:

$$(M \cdot N)^t = N^t \cdot M^t$$

Matriz simétrica

Otra pregunta interesante que surge a partir de las matrices traspuestas es saber si hay alguna matriz que sea igual a su traspuesta $(M = M^t)$, lo que significaría que los elementos que componen una fila serían iguales que los que componen la columna de la misma posición. Escrito de forma genérica: $a_{ij} = a_{ji}$

Estas son las **matrices simétricas**, ya que los elementos bajo la diagonal principal son simétricos con respecto a ella de los elementos sobre la misma.

Una vez definidas estas operaciones podemos volver a nuestro supuesto inicial en el que suponíamos que vamos al mercado y compramos cuatro parejas de conejos jóvenes. Las parejas jóvenes se convierten en adultas al cumplir un mes de vida y las parejas adultas se reproducen dando lugar a una nueva pareja cada mes. En este ejemplo no hay mortalidad, por lo que todas las parejas jóvenes pasarán a ser adultas y las adultas se multiplicarán continuamente.

Este era el sistema que regía dicho caso,

$$J_n = A_{n-1}$$

$$A_n = J_{n-1} + A_{n-1}$$

Y que ahora podemos escribir de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n-1} \\ A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si queremos calcular el número de parejas al final del primer bastaría con sustituir con los datos iniciales y operar como hemos definido,

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que el primer mes las parejas de conejos jóvenes se habrán convertido en adultos y al no haber adultos inicialmente no tendremos nuevas crías.

Si quisiéramos saber cuántas parejas de conejos tendremos el segundo mes, bastaría con sustituir con los nuevos datos, es decir, con ninguna pareja joven y cuatro parejas adultas,

$$\begin{pmatrix} J_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el segundo mes tendremos cuatro parejas jóvenes y cuatro adultas.

Sin embargo, gracias al producto de matrices definido anteriormente, podríamos obtener una nueva matriz que representara este proceso.

$$\begin{pmatrix} J_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix} \right)$$

Como el producto de matrices tiene **propiedad asociativa**,

$$\begin{pmatrix} J_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos,

$$\begin{pmatrix} J_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

Si comprobamos con los datos iniciales,

$$\begin{pmatrix} J_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, gracias a nuestro ejemplo, podemos observar cómo el proceso iterativo del cual habíamos hablado al principio es en realidad el producto de forma iterativa de matrices. De hecho, podemos comprobar que el resultado es el mismo que en nuestra simulación por ordenador.

Hasta ahora hemos definido gracias a nuestro ejemplo con poblaciones y las aplicaciones lineales qué es una matriz y cómo podemos realizar las operaciones y suma y producto.

Matriz identidad

Como bien sabemos, las operaciones cuentan con elementos especiales. Por ejemplo, en el producto de números reales el número 1 es el elemento neutro o elemento identidad. En el caso del producto de matrices también hay un elemento neutro llamado **matriz identidad.** Esta matriz representa la aplicación lineal llamada aplicación identidad, que va de un espacio vectorial a sí mismo, identificando cada elemento con sí mismo.

Al contrario que en el producto de números reales, no hay una única matriz identidad pues su dimensión depende de la del espacio de trabajo, aunque todas ellas tendrán unas características comunes.

Las matrices identidad son siempre matrices cuadradas de orden n en cuya **diagonal principal**, que es la compuesta por todos los elementos que van desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha, todos los elementos son la unidad y el resto son el cero.

Por ejemplo, según la dimensión, tenemos:

$$I_1 = (1) \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escrita de forma genérica,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que se cumple realizando el producto de una matriz cualquiera por la matriz identidad correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1/5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & 0+1/5 \\ -2+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1/5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad, además de ser cuadrada es también del tipo diagonal. Las **matrices diagonales** son todas aquellas en las que todos sus elementos son nulos (0) excepto aquellos pertenecientes a su diagonal principal. Si además todos los elementos de su diagonal principal son iguales se las denominan **matrices escalares,** que son múltiplos de la matriz identidad.

Lo tanto, la matriz identidad es una matriz cuadrada, porque tiene el mismo número de filas que de columnas, diagonal, porque todos sus elementos son nulos excepto los de la diagonal principal, y escalar, ya que los elementos que forman esa diagonal principal son iguales.

Matriz inversa

Tal como hemos definido, la matriz identidad corresponde a la aplicación lineal que va desde un espacio vectorial a sí mismo. Por ejemplo:

$$R_1^2 \xrightarrow{I} R_1^2$$

Del mismo modo, si suponemos una matriz M que es la aplicación lineal que va de un espacio a otro, es posible que exista una matriz M^{-1} que vuelve del segundo espacio al original dejando las cosas como estaban al principio.

$$R_1^2 \underset{M^{-1}}{\overset{M}{\rightleftarrows}} R_1^2$$

Por lo tanto, la composición de esas dos aplicaciones lineales, o como ya hemos visto, el producto de ambas matrices es equivalente a la aplicación lineal identidad o matriz identidad. Así que si hay una matriz M^{-1} que multiplicada por M es igual a la matriz identidad, esta matriz se denomina **matriz inversa**. En este caso, si podemos cambiar el orden de las matrices en el producto y seguimos obteniendo la matriz identidad puesto que si se da primero la aplicación M^{-1} y después M iríamos del segundo espacio vectorial a sí mismo.

Así que sabemos que,

$$M \cdot M^{-1} = I$$

$$M^{-1} \cdot M = I$$

Gracias a esta condición con respecto al producto, podemos intentar hallar la matriz inversa. Si suponemos que M es la matriz que regía nuestro primer ejemplo, sabiendo cuál es su matriz identidad correspondiente y definiendo la matriz inversa a hallar:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Sustituimos las matrices en la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si operamos tal como hemos definido el producto de matrices,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ x+z & y+t \end{pmatrix}$$

Y lo igualamos a la matriz identidad, obtendremos un sistema de ecuaciones sencillo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas ya que sabemos que para que dos matrices sean iguales deben tener la misma dimensión y que todos sus elementos sean iguales,

$$\begin{pmatrix} z & t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z = 1 \\ t = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto la matriz inversa en este caso es,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Desgraciadamente, el sistema anterior no siempre es compatible como podemos ver en el siguiente ejemplo.

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Operando directamente,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z & -y+t \\ x-z & y-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtendríamos el siguiente sistema que es incompatible.

$$\begin{cases} -x+z=1 \\ x-z=0 \\ -y+t=0 \\ y-t=1 \end{cases}$$

Por lo tanto, es importante tener en cuenta que no siempre existe matriz inversa, es decir, no todas las matrices son invertibles. Para que una matriz tenga inversa debe ser cuadrada y la matriz inversa también debe serlo. ¿Existe alguna otra condición que permita saber si una matriz es invertible? Como se muestra en el ejemplo, si el sistema obtenido es incompatible no habrá matriz inversa. En unidades posteriores se desarrollarán métodos más rápidos y gracias a los que podremos concluir por qué las matrices con las que estamos tratando en nuestro ejemplo de poblaciones siempre son invertibles.

Matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

Una forma de hallar esta matriz inversa de manera rápida, puesto que no todos los sistemas serán tan sencillos como el anterior, consiste en el llamado “Método de Gauss-Jordan”. En este método consiste en dos pasos: uno primero en el cual se construye una nueva matriz $(M|I)$ formada por la matriz a invertir (M) y la matriz identidad (I) de la misma dimensión. Y un segundo paso en el que realizaremos ordenadamente transformaciones consistentes en hacer combinaciones lineales entre las filas de la matriz con el objetivo de que al final la identidad quede en la mitad izquierda. En este punto, la matriz inversa buscada será lo que quede a la derecha $(I|M^{-1})$. Este proceso será imposible si en la mitad izquierda nos aparece alguna fila de ceros, con lo que nunca podremos llegar a la identidad. En este caso, M no tendría inversa.

Vuelta al problema inicial

Recuperando la simulación sobre la evolución de la población del ejemplo de Fibonacci (*Tabla 2*), vamos a analizar qué son y qué significan las distintas columnas y valores. Según la nomenclatura empleada es sencillo deducir las tres primeras columnas pero, ¿qué significa que las tres últimas columnas tiendan a estabilizarse?

Si nos fijamos en la tabla, observamos que dos de las columnas tienden siempre a estabilizarse en torno al mismo valor cuando la n aumenta. Por lo tanto, podemos decir que cuando n tiende a infinito se cumple que,

$$\frac{J_n}{J_{n-1}} = \frac{A_n}{A_{n-1}}$$

O lo que es lo mismo,

$$\frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{A_{n+1}}{A_n}$$

Esto significa que existe un valor λ para el que, aproximadamente (tanto más preciso cuanto mayor es n)

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

Además, tal como ya sabemos existe otra forma de hallar la cantidad de individuos en el mes siguiente, y corresponde con la igualdad,

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si lo equiparamos obtenemos una nueva ecuación,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

Gracias a los conocimientos que ya tenemos podemos expresarlo como una ecuación igualada a cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y multiplicaremos la constante por la matriz identidad con el objetivo de conseguir una homogeneidad y facilitar su operación.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos operar para convertirlo en la forma matricial de un sistema,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escrito como sistema,

$$\begin{cases} -\lambda J_n + A_n = 0 \\ J_n + (1-\lambda)A_n = 0 \end{cases}$$

Como bien sabemos hay tres tipos de sistemas: sistemas incompatibles, que son aquellos que no tienen solución; y dentro de los sistemas compatibles, que son aquellos que si la tienen, pueden ser compatibles determinados, los que tienen una única solución, y compatibles indeterminados, que tienen más de una solución.

Si pensamos cómo podemos hallar esa constante podemos valorar las distintas opciones. Como queremos que tenga solución debemos hacer que la constante no sea un valor que haga incompatible el sistema. Ahora bien, dentro de las dos opciones que tenemos para que sea compatible, si asignamos a λ un valor que hiciera que el sistema sea compatible determinado, y al ser todas las ecuaciones iguales a cero, la única solución sería la trivial. Podemos deducir que en nuestro caso esta situación carecería de sentido puesto que entonces estaríamos diciendo que no hay individuos.

Por lo tanto, el objetivo es encontrar los valores de λ para los cuales el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Este sistema se puede resolver de forma muy sencilla por el método de sustitución:

Despejando A_n en la primera ecuación obtenemos que $A_n = \lambda J_n$

Sustituyendo en la segunda ecuación,

$$J_n + (1-\lambda)\,\lambda J_n = 0$$

Operando y sacando factor común J_n obtenemos,

$$(1+\lambda-\lambda^2)J_n = 0$$

Para que esta igualdad se cumpla sin importar el valor de J_n, lo que convertiría el sistema en compatible indeterminado, lo contenido en el interior del paréntesis $(1+\lambda-\lambda^2)$ debe ser igual a cero. Por lo tanto hallaremos los valores de λ para los cuales se cumple la siguiente igualdad.

$$-1-\lambda+\lambda^2 = 0$$

Esta ecuación de segundo grado se corresponde con el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, concepto que se verá más adelante en unidades didácticas posteriores pero que en matrices de orden dos se corresponde con el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria. Este ejemplo nos sirve como excelente introducción a dicho tema explicando posteriormente cómo se realiza en matrices de orden superior.

Resolviendo mediante la fórmula obtenemos dos valores,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; y \; \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Si sustituimos el mayor en valor absoluto, que es el **autovalor dominante**, en el sistema inicial, daría lugar al siguiente:

$$\begin{cases} -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} J_n + A_n = 0 \\ J_n - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} A_n = 0 \end{cases}$$

Este sistema lo podemos resolver empleando el método de Gauss aprendido en cursos anteriores. En primer lugar lo escribimos de forma matricial,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Como ya sabemos, el objetivo es hacer ceros mediante operaciones entre filas para dejarlo de forma escalonada. Si a la segunda fila la multiplicamos por $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y le sumamos la primera obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto sabemos que tal como queríamos se trata de un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones obtenemos asignando una variable.

$$J_n = z \qquad A_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} z \approx 1{,}618$$

Utilizando el dato aproximado a tres cifras decimales obtenemos cualquier vector de la forma,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} z \\ 1{,}618z \end{pmatrix}$$

Existen distintos tipos de normalizaciones, por ejemplo en la normalización euclídea se busca que la longitud del vector sea igual a 1. En este caso, lo normalizaremos con el objetivo de que la suma de ambos elementos del vector sea 1. Posteriormente encontraremos sentido al porqué de esta normalización.

$$z + 1{,}618z = 1$$

Por lo que $z = 0{,}382$, teniendo en cuenta siempre la aproximación realizada anteriormente. Sustituyendo dicho valor obtenemos el llamado vector normalizado,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}382 \\ 0{,}618 \end{pmatrix}$$

Si nos fijamos en ese valor y en la simulación (*Tabla 2*) pronto observamos que es la constante a la que tiende la última columna.

En este caso, al tratarse de un ejemplo muy sencillo podemos resolverlo por este método. Sin embargo, si aumentáramos el número de rangos de edad, es decir, la dimensión de la matriz, la resolución ya no sería tan sencilla y requeriría nuevos conocimientos. Además, como ya sabemos, no todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución real por lo que no siempre podremos hallar el valor λ. Gracias a conocimientos de temas posteriores, como el empleo de determinantes podremos deducir qué tienen de especial las matrices del caso estudiado y por qué siempre aparecen estos valores.

Por lo tanto es posible continuar y resolver otros ejemplos de poblaciones y llegar a nuevas respuestas ante preguntas que surgen de este estudio. Esto nos dará pie a continuar con las siguientes unidades didácticas correspondientes a determinantes y su aplicación a la resolución de sistemas. Permitiéndonos así, explicar todo el bloque correspondiente a Álgebra de 2º de Bachillerato a través de un ejemplo real siguiendo el modelo planteado en este trabajo.

A raíz de lo desarrollado se plantean una serie de preguntas: ¿Qué son estos valores obtenidos? ¿Qué representan con respecto a una población? ¿Tienen algo de especial las matrices que representan poblaciones? Estas preguntas son muy interesantes para responderlas mediante la observación y la comprensión de: todo lo realizado para obtener los valores, de los datos obtenidos, de la representación gráfica de GeoGebra y de las tablas que representan la simulación del desarrollo de la población. Por lo tanto, se intentará que los estudiantes lleguen a estas respuestas, consiguiendo así una comprensión real y no únicamente una memorización de pasos a seguir.

¿Qué son los valores obtenidos?

Recuperando la representación en GeoGebra visualizamos que el vector obtenido indica la dirección en la cual ambos vectores ($\vec{v}\ y\ \vec{u}$) de la representación coinciden. Además, los valores (λ) se corresponden con los módulos del vector cuando esto ocurre. Teniendo lugar dos veces, siendo el autovalor dominante el módulo en el momento que la dilatación es mayor.

El vector que cumple esto y que hemos obtenido es llamado autovector. Los valores obtenidos ($\lambda_1\ y\ \lambda_2$), de los cuales nos quedamos con el mayor en valor absoluto, son llamados autovalores y autovalor dominante respectivamente. Ambos conceptos con esta denominación serán desarrollados cuando se amplíen sus conocimientos matemáticos en su formación académica posterior. Por lo tanto son mencionados pero no desarrollados más profundamente en el presente trabajo.

En caso de que el grupo de estudiantes con los que se esté desarrollando el tema estuvieran motivados para continuar profundizando, podrían proponerse cálculos adicionales. Por ejemplo, intentar establecer condiciones que debe cumplir una matriz de dimensión $2x2$ para que tenga autovalores. Poniendo especial énfasis en el caso simétrico.

¿Qué representan estos valores con respecto a una población?

Si observamos los valores calculados y la simulación del ejemplo analizado (*Tabla 2)* podemos llegar a la conclusión de que: el valor obtenido en la cuarta y en la quinta columna se corresponden con lo denominado autovalor dominante y el valor obtenido en la sexta columna se corresponde con el primer componente del autovector asociado a este autovalor. Podríamos elaborar una columna más que representara el valor de $A_n/(J_n + A_n)$ y se correspondería con el segundo componente del vector.

Por lo tanto, partiendo de esta afirmación y observando el resto de simulaciones podremos llegar a diversas conclusiones. En relación al autovalor dominante, analizando la cuarta columna, que representan la proporción entre jóvenes en un determinado periodo y jóvenes en el periodo anterior, junto con la quinta columna que representa esa misma relación pero entre adultos, podemos apreciar que ese valor es el factor por el que se multiplica la población cada mes. Es decir, el autovalor dominante es el coeficiente por el cual se multiplica la población cada ciclo reproductor.

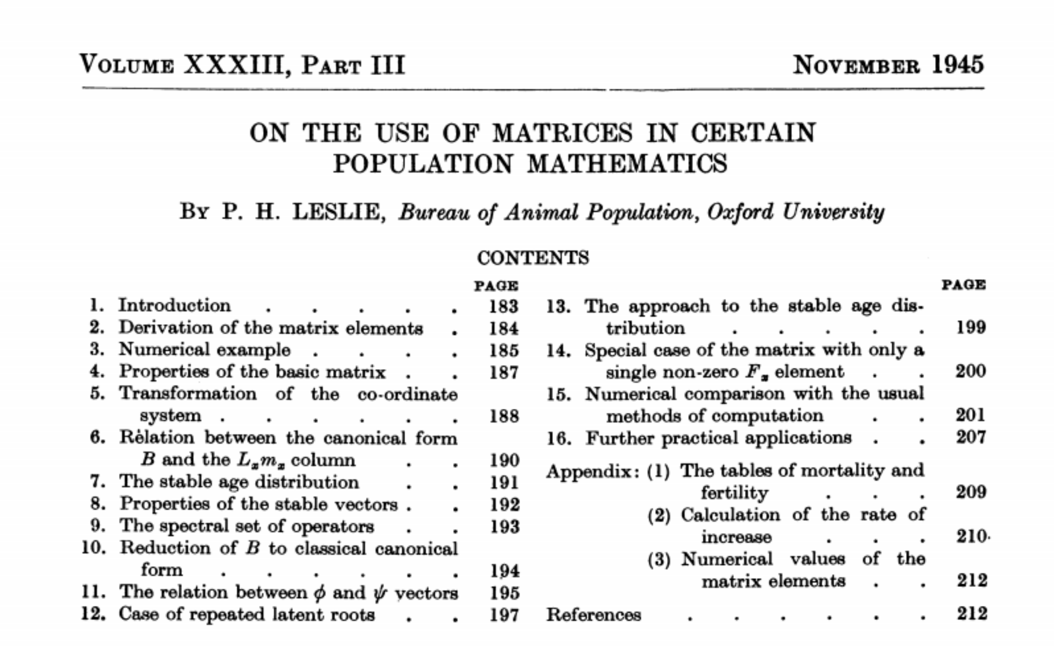
Si se comprende esto, es sencillo llegar a la conclusión de que si dicho valor es menor que uno, debiendo estar siempre entre cero y uno ya que una población no puede multiplicarse por un factor negativo, la población tenderá a decrecer. Llegando a desaparecer, puesto que tenderá a cero cuando n tiende a infinito. Por el contrario, si el factor es mayor que uno la población irá en aumento constantemente. ¿Hay alguna posibilidad de que la población se mantenga constante? Obviamente, si el factor (autovalor dominante) asociado es igual a uno la población no variará.

Esto nos sugiere la pregunta de cómo el ser humano u otros factores podrían influir en variar estos autovalores. Observando las distintas simulaciones o realizando el cálculo de los autovalores y autovectores, veremos que siempre están definidos por la matriz a la que están asociados. Por lo que si por ejemplo el ser humano cazara con el objetivo de mantener una población estable, dicha acción se vería reflejada en la matriz. Al igual que si se introdujera un depredador en el ecosistema.

En último lugar, observamos que el autovector normalizado asociado se corresponde con la última columna de la tabla Excel. Esta representa la proporción de individuos jóvenes con respecto al total de individuos. Por lo tanto, podemos saber que la proporción entre ambos siempre tenderá a ser constante. Estando en el ejemplo siempre un 38,20% de la población compuesta por jóvenes y un 61,8% por adultos. Valores que se corresponden con el autovector asociado calculado, una vez normalizado convenientemente. Por lo que al tratarse de porcentajes el objetivo es que el total sume el 100%, este es el motivo por el que se normaliza haciendo que la suma sea 1.

¿Tienen algo de especial las matrices que representan poblaciones?

En el año 1945, el ecólogo escocés Patrick Holt Leslie escribió un artículo (Leslie, 1945) en el cual explicaba las matrices que regían las poblaciones.



VOLUME XXXIII, PART III NOVEMBER 1945

ON THE USE OF MATRICES IN CERTAIN POPULATION MATHEMATICS

BY P. H. LESLIE, *Bureau of Animal Population, Oxford University*

CONTENTS

Imagen 1. Artículo original P. H. Leslie.

Estas matrices se siguen empleando hoy en día para el estudio de poblaciones tanto de animales como de plantas, así como incluso en el campo de los seguros de vida.

Tal como hemos visto en nuestros ejemplos, las poblaciones se deben poder estructurar en grupos de edad y tener ciclos reproductivos determinados. En muchas especies, los ciclos reproductivos van asociados a la edad de los individuos. Por ejemplo, la campanilla púrpura, una flor de las praderas, no se reproduce en sus tres primeros años de edad pero posteriormente produce semillas durante el resto de su vida. P. H. Leslie define modelos en tiempo discreto estructurados por edades, en ellos se estudia únicamente a los individuos hembra, ya que son los que producen las crías, se supone una única reproducción en el período definido y se censa la población al final de cada ciclo reproductivo.

En dicho artículo, y tal como los estudiantes pueden deducir de distintos ejemplos empleados, se explican las características de estas matrices en las que la mortalidad y la natalidad ocupan siempre las mismas posiciones y el resto de elementos son 0. Además se demuestra que siempre hay autovalores y en concreto hay un autovalor dominante real. Esta demostración es necesaria ya que no todas las matrices tienen autovalores y por lo tanto autovectores. El estudio de en qué casos hay o no se realizará en niveles superiores una vez los estudiantes cuenten con conocimientos más amplios.

A continuación, veamos en el siguiente ejemplo a través del que los estudiantes tendrán que deducir y definir qué expresa cada dato en la matriz de Leslie y por el que llegaremos a la forma genérica dada en su artículo. La matriz de Leslie de la población a estudiar es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tal como se ha visto en los ejemplos podemos deducir que en este caso habrá cuatro grupos de edad, ya que las matrices de Leslie son siempre cuadradas de orden el número de grupos de edad de los que se componga la población.

Si expresamos la dinámica de forma matricial obtenemos,

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{pmatrix}$$

Continuando con el análisis, y tal como hemos definido que se multiplican las matrices, obtenemos que los nuevos miembros que compondrán el grupo de edad más joven resultarán de la multiplicación de la primera fila de la matriz de Leslie por la matriz columna.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, esta primera fila representa la natalidad, incluyendo las crías que tienen cada grupo de edad. Además, podemos llegar a la conclusión de que la aparición de cifras decimales, como el 1,5 se debe a que se calcula la media de crías que tiene cada grupo. Con respecto a esta fila también deducimos que el grupo de edad más joven y el más viejo no se reproducen.

Observando las tres filas restantes y al igual que en el caso anterior según lo aprendido en cuanto al producto de matrices. Vemos que de forma obligatoria algunos elementos de la matriz deberán ser ceros. Puesto que el envejecimiento es siempre lineal y un individuo no podrá saltarse un grupo de edad en su maduración.

En último lugar observamos los elementos en diagonal bajo la diagonal principal, que son los únicos que no son necesariamente nulos junto con la primera fila.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Estos elementos se corresponden con la mortalidad de la población. Podemos observar que en cada grupo de edad sobreviven un determinado porcentaje de individuos en cada ciclo reproductivo. Por ejemplo, el valor nos indica que el 60% de los individuos del primer grupo de edad mueren y solo el 40% pasa a ser adulto. Por ello, si no hubiera mortalidad dentro de estos grupos de edad el valor de los elementos correspondientes sería 1, es decir, el 100%. Es importante ser conscientes de que nunca podría ser mayor ya que no pueden pasar a ser de un grupo de edad más individuos de los que había en el periodo anterior en el grupo inmediatamente más joven. Además, debemos ser conscientes de que ese valor nunca podría ser 0, ya que significaría que mueren todos los individuos de un grupo lo que haría que los grupos de mayor edad posteriores nunca existieran dando lugar a una matriz distinta.

Una vez comprendido lo que significan estos valores y tal como hemos mencionado antes al referirnos a la estabilidad de la población si el autovalor dominante es igual a 1. Llegamos a la necesidad de discutir una matriz en función de un parámetro c que en este caso se correspondería con el porcentaje de caza permitido y en qué grupos de edad se permite.

Realizando el ejemplo con el caso inicial de Fibonacci y permitiendo la caza únicamente en adultos vamos a determinar el porcentaje de caza que se necesitaría para conseguir mantener la población estable. Llegaríamos a la conclusión de que dicha variable que se expresaría igualmente como un número real entre 0 y 1 debería restarse en los elementos correspondientes tal como aparece a continuación:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-c & 1 \end{pmatrix}$$

Empleando la fórmula definida antes para matrices de orden 2

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot (1-\mathrm{c})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5-4\mathrm{c}}}{2}$$

Si queremos que el autovalor dominante sea 1 necesitamos que $\sqrt{5-4\mathrm{c}} = 1$, lo que significa que tiene que ser $5 - 4\mathrm{c} = 1$. Por lo tanto en este caso, $\mathrm{c} = 1$ o lo que es lo mismo, se deben cazar el 100% de los conejos adultos después de la reproducción. Esto tiene sentido en nuestro caso ya que este supuesto era sin mortalidad.

Volviendo al ejemplo con cuatro clases de edad anterior y planteando la cuestión de qué porcentaje de caza se tiene que permitir en el tercer y cuarto grupo de edad para conseguir que la población sea estable, teniendo en cuenta que la cada se produce justo después de la reproducción y antes del final del periodo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1{,}5 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2-c & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso aún no se cuenta con la capacidad de calcular el determinante correspondiente ya que se aprenderá en unidades posteriores. Sin embargo, los estudiantes podrán realizar un análisis numérico con WolframAlpha que les proporcionará los autovalores y podrán llegar a la solución por tanteo, siguiendo el método de bisección con el objetivo de que el autovalor dominante sea 1. Después de realizarlo tal como se ve en el anexo VI aproximaremos el valor c a dos cifras decimales obteniendo un autovalor equivalente a 1,00002 siendo c igual a 0,0666. Por lo tanto, se podría permitir un porcentaje del 6,66% en cada clase.

Es importante tener en cuenta que los autovectores que nos proporciona WolframAlpha no están normalizados del modo que define Leslie en su artículo (Leslie, 1945) por lo que para conseguir la proporción deberíamos adaptarlo. Para ello cada componente tiene que dividirse entre la suma total de los componentes. Es decir, el autovector normalizado al estilo Leslie partiendo de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sería

$$\vec{w} = (\frac{v_1}{v_1 + v_2 + v_3}, \frac{v_2}{v_1 + v_2 + v_3}, \frac{v_3}{v_1 + v_2 + v_3})$$

En último lugar, podemos plantear un ejercicio resumen que por un lado nos servirá para consolidar los contenidos trabajados, y por otro nos permitiría avanzar un paso más allá si el interés de los alumnos lo requiere. Dada una matriz de Leslie de orden 2 como por ejemplo $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, correspondiente al segundo ejemplo planteado en las simulaciones, en primer lugar se les pedirá que calculen los autovalores ($\lambda_1 \ y \ \lambda_2$) y los autovectores asociados ($\vec{v} \ y \ \vec{u}$). Una vez calculados deberán interpretar qué significa el autovalor dominante y el autovector asociado, tal como se ha realizado en los ejemplos. Posteriormente se les planteará que comprueben la siguiente igualdad,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_+ & u_- \\ v_+ & u_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+ & u_- \\ v_+ & u_- \end{pmatrix}^{-1}$$

A través de dicha comprobación practicarán el cálculo de la matriz inversa así como el producto de matrices.

Además, dicha comprobación nos daría una base sobre la que poder explicar el motivo por el que se elige el autovalor dominante. Esto podría ser demostrado fácilmente en dimensión 2, conectando nuevamente de modo natural con el concepto de límite. Dicha demostración quedaría fuera de los contenidos del nivel, pero podría ser muy positivo de cara a no dejar sin respuesta a algún estudiante especialmente interesado.

Reforzando así de manera natural una de la atención a la diversidad contemplada por la ley.

4.2. Herramientas TIC empleadas

Del mismo modo que se han ido enlazando y desarrollando contenidos a raíz de la necesidad impuesta por los ejemplos del hilo conductor, durante el desarrollo propuesto también se requerirá del uso de diversas Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) a través de las cuales se trabajará la competencia digital. Estas herramientas son el programa informático Excel, el software matemático GeoGebra, la aplicación móvil Matrix Calculator y el software WolframAlpha.

Los estudiantes podrán realizar sus propias simulaciones de evolución de una población con el programa Excel o el software Google Sheets, de empleo prácticamente idéntico. Gracias a ello aprenderán a realizar cálculos iterativos de forma rápida incluyendo la introducción de fórmulas así como las distintas configuraciones que deben dar a las celdas para obtener el número de decimales que quieran en cada situación.

Para ilustrar el concepto de aplicación lineal se ha empleado una simulación hecha con el software GeoGebra. Si los estudiantes tuvieran en ese momento unas nociones del mismo podrían realizar pruebas modificando los distintos datos para entender mejor cómo afecta a la simulación. Además, se ampliaría su conocimiento sobre él en relación al uso de deslizadores, introducción de texto con fórmulas y otros comandos útiles.

También se empleará la aplicación para móviles y tablets Matrix Calculator, que también cuenta con versión para ordenadores. Hoy en día los estudiantes están completamente acostumbrados al uso de aplicaciones móviles por lo que es importante que conozcan nuevas aplicaciones con distintas utilidades. Esta aplicación servirá para confirmar cálculos hechos por ellos, como por ejemplo el cálculo de una traspuesta, así como para respaldar las afirmaciones hechas en cuanto a las características que deben cumplir distintas matrices para realizar operaciones o la neutralidad de la matriz identidad con respecto al producto. Probando en la aplicación qué matrices permite multiplicar y cuáles no.

Por último se utilizará el software WolframAlpha, una herramienta muy útil en el campo de las matemáticas y que la gran mayoría de los estudiantes no conoce. En este caso aprenderán la sintaxis para introducir matrices e interpretar los distintos datos que les proporcionará. En el anexo VI se encuentra un ejemplo del método a realizar con algunos de los pasos dados.

Todas las TIC empleadas son gratuitas y de libre acceso con el objetivo de que ningún estudiante tenga dificultades a la hora de su utilización.

5. Conclusiones

En la actualidad, el modo el modo en que se explican las matemáticas continua empleando mayoritariamente una metodología tradicional en la que el docente expone los contenidos y el estudiante es un mero receptor. Prácticamente todos los contenidos se exponen de manera descontextualizada de sus usos, dejando los mismos como un apartado meramente anecdótico en el desarrollo de los mismos. Este hecho dificulta el interés y la motivación de los estudiantes en el mismo así como la comprensión de ciertos conceptos más allá de la mera memorización de mecanismos y procedimientos. Por estos motivos el presente trabajo se desarrolla a través de un hilo conductor generando los conocimientos a través de un problema perfectamente visualizable y entendible por los estudiantes. Propiciando además el descubrimiento de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes a través de preguntas y ejemplos dirigidos a tal objetivo.

El presente trabajo es un documento inicial que proporciona las pautas en cuanto a qué contenido desarrollar, cómo hacerlo y cómo conectarlo, con el objetivo de que todo aparezca de forma completamente natural y coherente cuando los ejemplos así lo requieren. Además de dar pie en diversas ocasiones a otros contenidos del currículo de esta misma manera. A partir del mismo podríamos continuar con un desarrollo más exhaustivo de la unidad didáctica llevando a cabo una temporalización, diseñando las distintas actividades para la misma siguiendo el modo en el cual se ha explicado la misma, etcétera. Además, se podría continuar desarrollando el presente trabajo incluyendo todos los contenidos del bloque de números y álgebra, es decir, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales, siguiendo con el mismo hilo conductor. También se podría utilizar como muestra este documento para llevar a cabo un desarrollo alternativo de la unidad con otro tipo de modelos como por ejemplo cadenas de Markov, pudiendo quedar las mismas relacionadas con las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

Gracias a este trabajo podemos confirmar la teoría de que es factible explicar las matrices en particular y las matemáticas en general, de un modo distinto incorporando nuevas teorías de aprendizaje, reforzando además las distintas competencias establecidas por la legislación vigente y cumpliendo de igual manera con los estándares de aprendizaje evaluables. Por ello, el presente trabajo asienta unas bases que podrían ser tomadas como modelo para el desarrollo completo de la asignatura en distintos niveles y a través de diversos ejemplos, intentando mantener siempre la relación, no solo con la vida cotidiana y otras asignaturas, sino con el resto de conocimientos de la propia asignatura.

6. Bibliografía

- Bescós i Escruela, E., & Pena i Terrén, Z. (2016). *Matemáticas II. Inicia Dual. 2º Bachillerto.* (pp. 26-57). Oxford University Press.

- GeoGebra Manual. Recuperado de https://wiki.geogebra.org/es/Manual

- García Azorero, J. (Curso 2016/2017) *Notas para el curso de Matemáticas Primero de Biología, UAM.* Madrid, España.

- Grence Ruiz, T., Gámez Pérez, J., Marín García, S., Martín Palomo, A., Pérez Saavedra, C., & Sánchez Figueroa, D. (2016). *Matemáticas II. Serie Resuelve. 2º Bachillerato* (pp. 9-34). Tres Cantos: Santillana Educación.

- Hernández Rodríguez, E., Quirós Gracián, A., & Tarrés Freixenet, J. (2001). *EULER matemáticas 2. Ciencias de la naturaleza y de la salud/Tecnología* (pp. 24-45). Madrid: Ediciones SM.

- Leslie, P. (1945). On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrika*, 33(3), pp.183-212.

- Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para ciencias* (2nd ed., pp. 554-584). Madrid: PEARSON EDUCACIÓN, S. A.

- De Pablo González, G. (Curso 2018/2019) *Aprendizaje significativo y Teorías constructivistas del aprendizaje. Apuntes asignatura Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad, UAM.* Madrid, España.

- Ruiz Gálvez, J. (Curso 2018/2019) *Presentación Teorías Pedagógicas Contemporáneas. Asignatura Principios Educativos Sociedad Contemporánea, UAM.* Madrid, España.

- Ruiz Jiménez, M. J., Llorente Medrano, J., González García, C., Aparicio Peñas, A. M. & Arribas Ruiz, F. (2016). *Matemáticas II. 2º Bachillerato.* (pp. 10-39) Pozuelo de Alarcón, España: Editex.

7. Anexos

Anexo I. Currículo Matemáticas II. 2ºBachillerato.

Anexo II. Currículo Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

2ºBachillerato.

Anexo III. Ejemplo ejercicio libro.

Anexo IV. Página introducción del bloque del libro 2.

Anexo V. Cuestionario Matrices alumnos Bachillerato.

Anexo VI. Cuestionario estudiante.

Anexo VII. Análisis numérico WolframAlpha

Anexo I

Matemáticas II. 2º Bachillerato

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto. Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes. Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc. Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc. Razonamiento deductivo e inductivo Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático. Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas. Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado. Práctica de los proceso de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos; b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos; c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico; d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas; e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Realizar demostraciones sencillas de propiedades o teoremas relativos a contenidos algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 4. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema o en una demostración, con el rigor y la precisión adecuados. 5. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 6. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 7. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad. 9. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 10. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 11. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 12. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones similares futuras. 13. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 14. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.). 2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema. 2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia. 2.4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas. 2.5. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas. 3.1. Utiliza diferentes métodos de demostración en función del contexto matemático. 3.2. Reflexiona sobre el proceso de demostración (estructura, método, lenguaje y símbolos, pasos clave, etc.). 4.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. 4.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 4.3. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema, situación a resolver o propiedad o teorema a demostrar, tanto en la búsqueda de resultados como para la mejora de la eficacia en la comunicación de las ideas matemáticas. 5.1. Conoce la estructura del proceso de elaboración de una investigación matemática: problema de investigación, estado de la cuestión, objetivos, hipótesis, metodología, resultados, conclusiones, etc. 5.2. Planifica adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 5.3. Profundiza en la resolución de algunos problemas, planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc. 6.1. Generaliza y demuestra propiedades de contextos matemáticos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; tecnologías y matemáticas, ciencias experimentales y matemáticas, economía y matemáticas, etc.) y entre contextos matemáticos (numéricos y geométricos, geométricos y funcionales, geométricos y probabilísticos, discretos y continuos, finitos e infinitos, etc.). 7.1. Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación. 7.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 7.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 7.4. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema de investigación. 7.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 7.6. Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia. 8.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		8.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios. 8.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 8.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 8.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 9.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc. 10.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad para la aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, autocrítica constante, etc. 10.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 10.3. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc. 11.1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad. 12.1. Reflexiona sobre los procesos desarrollados, tomando conciencia de sus estructuras; valorando la potencia, sencillez y belleza de los métodos e ideas utilizados; aprendiendo de ello para situaciones futuras; etc. 13.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 13.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 13.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 13.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 14.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 14.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 14.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

cve: BOE-A-2015-37

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y álgebra		
Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Clasificación de matrices. Operaciones. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales. Determinantes. Propiedades elementales. Rango de una matriz. Matriz inversa. Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas.	1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.	1.1. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos adecuados. 1.2. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos. 2.1. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. 2.2. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. 2.3. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. 2.4. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.
Bloque 3. Análisis		
Límite de una función en un punto y en el infinito. Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad. Teorema de Bolzano. Función derivada. Teoremas de Rolle y del valor medio. La regla de L'Hôpital. Aplicación al cálculo de límites. Aplicaciones de la derivada: problemas de optimización. Primitiva de una función. La integral indefinida. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. La integral definida. Teoremas del valor medio y fundamental del cálculo integral. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.	1. Estudiar la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, aplicando los resultados que se derivan de ello. 2. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto, su interpretación geométrica y el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, de cálculo de límites y de optimización. 3. Calcular integrales de funciones sencillas aplicando las técnicas básicas para el cálculo de primitivas. 4. Aplicar el cálculo de integrales definidas en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables y, en general, a la resolución de problemas.	1.1. Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. 1.2. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. 2.1. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. 2.2. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto. 3.1. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. 4.1. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas. 4.2. Utiliza los medios tecnológicos para representar y resolver problemas de áreas de recintos limitados por funciones conocidas.
Bloque 4. Geometría		
Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos). Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).	1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores. 2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio. 3. Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico.	1.1. Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. 2.1. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. 2.2. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. 2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos. 2.4. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. 3.1. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades. 3.2. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades. 3.3. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. 3.4. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.

cve: BOE-A-2015-37

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 5. Estadística y Probabilidad		
Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov. Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso. Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica. Distribución binomial. Caracterización e identificación del modelo. Cálculo de probabilidades. Distribución normal. Tipificación de la distribución normal. Asignación de probabilidades en una distribución normal. Cálculo de probabilidades mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal.	1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos (utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento y la axiomática de la probabilidad), así como a sucesos aleatorios condicionados (Teorema de Bayes), en contextos relacionados con el mundo real. 2. Identificar los fenómenos que pueden modelizarse mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal calculando sus parámetros y determinando la probabilidad de diferentes sucesos asociados. 3. Utilizar el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando un conjunto de datos o interpretando de forma crítica informaciones estadísticas presentes en los medios de comunicación, en especial los relacionados con las ciencias y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones tanto en la presentación de los datos como de las conclusiones.	1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. 1.2. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. 1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. 2.1. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. 2.2. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica. 2.3. Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico. 2.4. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora, hoja de cálculo u otra herramienta tecnológica. 2.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial a partir de su aproximación por la normal valorando si se dan las condiciones necesarias para que sea válida. 3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar.

30. Primera Lengua Extranjera.

La lengua es el instrumento por excelencia del aprendizaje y la comunicación. Tanto las lenguas primeras como las lenguas extranjeras forman parte en la actualidad, y cada vez lo harán más en el futuro, del bagaje vital de las personas en un mundo en continua expansión en el que, a la vez, las relaciones entre individuos, países, organismos y corporaciones se hacen más frecuentes y más estrechas. En la medida en que ese bagaje comprende diversos conocimientos, destrezas y actitudes en diversas lenguas, es decir un perfil plurilingüe e intercultural, el individuo está mejor preparado para integrarse y participar en una variedad de contextos y de situaciones que suponen un estímulo para su desarrollo, y mejores oportunidades, en los ámbitos personal, público, educativo o académico, ocupacional y profesional.

En contextos y situaciones de comunicación real, la lengua se utiliza para realizar o acompañar acciones con diversos propósitos, por lo que el currículo básico incorpora el enfoque orientado a la acción recogido en el "Marco Común Europeo de Referencia para las Lenguas" y describe, en términos de actuación y tomando este Marco como base de dicha descripción, lo que los estudiantes deberán ser capaces de hacer en el idioma extranjero en diversos contextos comunicativos reales en los que, dada su edad y sus características dependiendo de las distintas etapas educativas, tendrán oportunidad de actuar. Las actividades de recepción, producción e interacción orales y escritas que conforman los estándares de aprendizaje en el currículo básico integran tanto las diversas competencias comunicativas específicas, cuya activación conjunta permite la realización de esas actividades, como las competencias básicas generales correspondientes a cada etapa.

La materia Primera Lengua Extranjera, en sus distintas modalidades, contribuye en primer lugar, y de manera fundamental, al desarrollo de la competencia en comunicación lingüística, no sólo en segundas lenguas sino también con respecto a las lenguas maternas. Por un lado, el aprendizaje de las segundas lenguas debe aproximarse al proceso de adquisición de las lenguas maternas para producir unos resultados de carácter natural y directamente aplicables al uso lingüístico en el mundo real; por otro, la reflexión consciente y el desarrollo sistemático de competencias variadas que conlleva el aprendizaje de segundas lenguas puede extenderse a las lenguas maternas con el fin de mejorar las competencias en éstas para comprender, expresarse, interactuar y articular pensamientos y sentimientos sobre uno mismo, el otro, y el entorno mental y físico en el que se actúa y se construyen las relaciones como agente social.

El uso efectivo de lenguas extranjeras supone necesariamente una visión abierta y positiva de estas relaciones con los demás, visión que se materializa en actitudes de valoración y respeto hacia todas las lenguas y culturas,

cve: BOE-A-2015-37

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO
Núm. 3 Sábado 3 de enero de 2015 Sec. I. Pág. 386

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas		
Planificación del proceso de resolución de problemas. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto, etc. Análisis de los resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos escritos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado. Práctica de los proceso de matematización y modelización, en contextos de la realidad. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para: a) la recogida ordenada y la organización de datos. b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidas. f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.	1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema. 2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. 3. Elaborar un informe científico escrito que sirva para comunicar las ideas matemáticas surgidas en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 4. Planificar adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 5. Practicar estrategias para la generación de investigaciones matemáticas, a partir de: a) la resolución de un problema y la profundización posterior; b) la generalización de propiedades y leyes matemáticas; c) Profundización en algún momento de la historia de las matemáticas; concretando todo ello en contextos numéricos, algebraicos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos. 6. Elaborar un informe científico escrito que recoja el proceso de investigación realizado, con el rigor y la precisión adecuados. 7. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad. 8. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos. 9. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático. 10. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas. 11. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ello para situaciones similares futuras. 12. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas, de forma autónoma, realizando cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos, haciendo representaciones gráficas, recreando situaciones matemáticas mediante simulaciones o analizando con sentido crítico situaciones diversas que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos o a la resolución de problemas. 13. Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación de modo habitual en el proceso de aprendizaje, buscando, analizando y seleccionando información relevante en Internet o en otras fuentes, elaborando documentos propios, haciendo exposiciones y argumentaciones de los mismos y compartiendo éstos en entornos apropiados para facilitar la interacción.	1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados. 2.1. Analiza y comprende el enunciado a resolver (datos, relaciones entre los datos, condiciones, conocimientos matemáticos necesarios, etc.). 2.2. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia. 2.3. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso seguido. 3.1. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación. 3.2. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 3.3. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema, situación a resolver o propiedad o teorema a demostrar. 4.1. Conoce y describe la estructura del proceso de elaboración de una investigación matemática: problema de investigación, estado de la cuestión, objetivos, hipótesis, metodología, resultados, conclusiones, etc. 4.2. Planifica adecuadamente el proceso de investigación, teniendo en cuenta el contexto en que se desarrolla y el problema de investigación planteado. 5.1. Profundiza en la resolución de algunos problemas planteando nuevas preguntas, generalizando la situación o los resultados, etc. 5.2. Busca conexiones entre contextos de la realidad y del mundo de las matemáticas (la historia de la humanidad y la historia de las matemáticas; arte y matemáticas; ciencias sociales y matemáticas, etc.). 6.1. Consulta las fuentes de información adecuadas al problema de investigación. 6.2. Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto del problema de investigación. 6.3. Utiliza argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. 6.4. Emplea las herramientas tecnológicas adecuadas al tipo de problema de investigación, tanto en la búsqueda de soluciones como para mejorar la eficacia en la comunicación de las ideas matemáticas. 6.5. Transmite certeza y seguridad en la comunicación de las ideas, así como dominio del tema de investigación. 6.6. Reflexiona sobre el proceso de investigación y elabora conclusiones sobre el nivel de: a) resolución del problema de investigación; b) consecución de objetivos. Así mismo, plantea posibles continuaciones de la investigación; analiza los puntos fuertes y débiles del proceso y hace explícitas sus impresiones personales sobre la experiencia. 7.1. Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés. 7.2. Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando del problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios. 7.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas. 7.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad. 7.5. Realiza simulaciones y predicciones, en el contexto real, para valorar la adecuación y las limitaciones de los modelos, proponiendo mejoras que aumenten su eficacia. 8.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc.

cve: BOE-A-2015-37

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
		9.1. Desarrolla actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada, convivencia con la incertidumbre, tolerancia de la frustración, autoanálisis continuo, etc. 9.2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación. 9.3. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas; revisar de forma crítica los resultados encontrados; etc. 10.1. Toma decisiones en los procesos (de resolución de problemas, de investigación, de matematización o de modelización) valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia por su sencillez y utilidad. 11.1. Reflexiona sobre los procesos desarrollados, tomando conciencia de sus estructuras; valorando la potencia, sencillez y belleza de los métodos e ideas utilizados; aprendiendo de ello para situaciones futuras; etc. 12.1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente. 12.2. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 12.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos 12.4. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 13.1. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, video, sonido,…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 13.2. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 13.3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.

cve: BOE-A-2015-37

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 2. Números y álgebra		
Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas. Clasificación de matrices. Operaciones con matrices. Rango de una matriz. Matriz inversa. Método de Gauss. Determinantes hasta orden 3. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas en contextos reales. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales (hasta tres ecuaciones con tres incógnitas). Método de Gauss. Resolución de problemas de las ciencias sociales y de la economía. Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Resolución gráfica y algebraica. Programación lineal bidimensional. Región factible. Determinación e interpretación de las soluciones óptimas. Aplicación de la programación lineal a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos.	1. Organizar información procedente de situaciones del ámbito social utilizando el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de dicha información. 2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.	1.1. Dispone en forma de matriz información procedente del ámbito social para poder resolver problemas con mayor eficacia. 1.2. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas y para representar sistemas de ecuaciones lineales. 1.3. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual y con el apoyo de medios tecnológicos. 2.1. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, el sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales. 2.2. Aplica las técnicas gráficas de programación lineal bidimensional para resolver problemas de optimización de funciones lineales que están sujetas a restricciones e interpreta los resultados obtenidos en el contexto del problema.
Bloque 3. Análisis		
Continuidad. Tipos de discontinuidad. Estudio de la continuidad en funciones elementales y definidas a trozos. Aplicaciones de las derivadas al estudio de funciones polinómicas, racionales e irracionales sencillas, exponenciales y logarítimicas. Problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía. Estudio y representación gráfica de funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas sencillas a partir de sus propiedades locales y globales. Concepto de primitiva. Cálculo de primitivas: Propiedades básicas. Integrales inmediatas. Cálculo de áreas: La integral definida. Regla de Barrow.	1. Analizar e interpretar fenómenos habituales de las ciencias sociales de manera objetiva traduciendo la información al lenguaje de las funciones y describiéndolo mediante el estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características. 2. Utilizar el cálculo de derivadas para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función, para resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social y extraer conclusiones del fenómeno analizado. 3. Aplicar el cálculo de integrales en la medida de áreas de regiones planas limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables utilizando técnicas de integración inmediata.	1.1. Modeliza con ayuda de funciones problemas planteados en las ciencias sociales y los describe mediante el estudio de la continuidad, tendencias, ramas infinitas, corte con los ejes, etc. 1.2. Calcula las asíntotas de funciones racionales, exponenciales y logarítmicas sencillas. 1.3. Estudia la continuidad en un punto de una función elemental o definida a trozos utilizando el concepto de límite. 2.1. Representa funciones y obtiene la expresión algebraica a partir de datos relativos a sus propiedades locales o globales y extrae conclusiones en problemas derivados de situaciones reales. 2.2. Plantea problemas de optimización sobre fenómenos relacionados con las ciencias sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto. 3.1. Aplica la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas de funciones elementales inmediatas. 3.2. Aplica el concepto de integral definida para calcular el área de recintos planos delimitados por una o dos curvas.

cve: BOE-A-2015-37

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
Bloque 4. Estadística y Probabilidad		
Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Axiomática de Kolmogorov. Asignación de probabilidades a sucesos mediante la regla de Laplace y a partir de su frecuencia relativa. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Teoremas de la probabilidad total y de Bayes. Probabilidades iniciales y finales y verosimilitud de un suceso. Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra. Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual. Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.	1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples y compuestos, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento personales, diagramas de árbol o tablas de contingencia, la axiomática de la probabilidad, el teorema de la probabilidad total y aplica el teorema de Bayes para modificar la probabilidad asignada a un suceso (probabilidad inicial) a partir de la información obtenida mediante la experimentación (probabilidad final), empleando los resultados numéricos obtenidos en la toma de decisiones en contextos relacionados con las ciencias sociales. 2. Describir procedimientos estadísticos que permiten estimar parámetros desconocidos de una población con una fiabilidad o un error prefijados, calculando el tamaño muestral necesario y construyendo el intervalo de confianza para la media de una población normal con desviación típica conocida y para la media y proporción poblacional cuando el tamaño muestral es suficientemente grande. 3. Presentar de forma ordenada información estadística utilizando vocabulario y representaciones adecuadas y analizar de forma crítica y argumentada informes estadísticos presentes en los medios de comunicación, publicidad y otros ámbitos, prestando especial atención a su ficha técnica, detectando posibles errores y manipulaciones en su presentación y conclusiones.	1.1. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. 1.2. Calcula probabilidades de sucesos a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. 1.3. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. 1.4. Resuelve una situación relacionada con la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en función de la probabilidad de las distintas opciones. 2.1. Valora la representatividad de una muestra a partir de su proceso de selección. 2.2. Calcula estimadores puntuales para la media, varianza, desviación típica y proporción poblacionales, y lo aplica a problemas reales. 2.3. Calcula probabilidades asociadas a la distribución de la media muestral y de la proporción muestral, aproximándolas por la distribución normal de parámetros adecuados a cada situación, y lo aplica a problemas de situaciones reales. 2.4. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. 2.5. Construye, en contextos reales, un intervalo de confianza para la media poblacional y para la proporción en el caso de muestras grandes. 2.6. Relaciona el error y la confianza de un intervalo de confianza con el tamaño muestral y calcula cada uno de estos tres elementos conocidos los otros dos y lo aplica en situaciones reales. 3.1. Utiliza las herramientas necesarias para estimar parámetros desconocidos de una población y presentar las inferencias obtenidas mediante un vocabulario y representaciones adecuadas. 3.2. Identifica y analiza los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico sencillo. 3.3. Analiza de forma crítica y argumentada información estadística presente en los medios de comunicación y otros ámbitos de la vida cotidiana.

27. Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

La competencia matemática, reconocida como clave por la Unión Europea, se desarrolla especialmente gracias a la contribución de la asignatura de Matemáticas. Esta competencia se entiende como habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas diversos en situaciones cotidianas; en concreto, engloba los siguientes aspectos y facetas: pensar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas, utilizar los símbolos matemáticos, comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas, y utilizar ayudas y herramientas tecnológicas. Por otro lado, el pensamiento matemático ayuda a la adquisición del resto de competencias y contribuye a la formación intelectual del alumnado, lo que permitirá que se desenvuelva mejor tanto en el ámbito personal como social.

La resolución de problemas y los proyectos de investigación constituyen los ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Una de las capacidades esenciales que se desarrollan con la actividad matemática es la habilidad de formular, plantear, interpretar y resolver problemas, ya que permite a las personas emplear los procesos cognitivos para abordar y resolver situaciones interdisciplinares en contextos reales, lo que resulta de máximo interés para el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico. En este proceso de resolución e investigación están involucradas muchas otras competencias, además de la matemática, entre otras la comunicación lingüística, al leer de forma comprensiva los enunciados y comunicar los resultados obtenidos; el sentido de iniciativa y emprendimiento al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua en la medida que se va resolviendo el problema; la competencia digital, al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución del problema y comprobación de la solución; o la competencia social y cívica, al implicar una actitud abierta ante diferentes soluciones.

cve: BOE-A-2015-37

Anexo III

EJEMPLO

12 En un restaurante se sirven tres tipos de menús: el diario, el ejecutivo y el especial. En estas tablas se muestran los kilos que se compran semanalmente de carne, pescado y verduras para elaborar cada menú y los precios en las dos últimas semanas de cada producto.

	Carne	Pescado	Verduras
M. diario	6	14	12
M. ejecutivo	8	18	13
M. especial	12	26	15

	Semana 1	Semana 2
Carne	12,50	10,60
Pescado	16	11,90
Verduras	6,20	8,40

Calcula el coste semanal que han tenido ambos menús.

Para resolver el problema se considera cada tabla como una matriz y las multiplicamos.

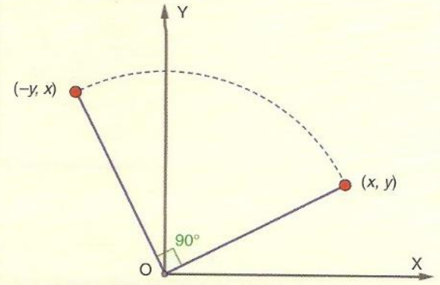
$$\begin{pmatrix} 6 & 14 & 12 \\ 8 & 18 & 13 \\ 12 & 26 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12{,}5 & 10{,}6 \\ 16 & 11{,}9 \\ 6{,}2 & 8{,}4 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Semana 1} & \text{Semana 2} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 373{,}4 & 331 \\ 468{,}6 & 408{,}2 \\ 659 & 562{,}6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Menú diario} \\ \leftarrow \text{Menú ejecutivo} \\ \leftarrow \text{Menú especial} \end{array}$$

La elaboración de los menús ha sido más barata la segunda semana.

Anexo IV

Aplicaciones de las matrices

En este curso vamos a utilizar las matrices en las diferentes expresiones que adopta un sistema de ecuaciones lineales, así como en su estudio y resolución por el conocido método de Gauss o por el de la matriz inversa. También aparecen en el estudio de la dependencia de vectores o al analizar las posiciones relativas de rectas y planos en el espacio. El uso de las matrices está muy extendido en numerosos ámbitos, mostramos brevemente algunos de ellos.



Las transformaciones geométricas planas, como las traslaciones, giros, simetrías y homotecias, pueden describirse mediante matrices. Así, por ejemplo, un giro de centro el origen de coordenadas y amplitud α viene dado por la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

En el dibujo puede verse un giro de centro el origen y amplitud 90°, con su expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El matemático ruso Andrei A. Markov (1856-1922) ideó unas matrices que llevan su nombre, también son conocidas como *matrices estocásticas*. Se caracterizan por que sus elementos son probabilidades y la suma de los elementos de cada fila o columna es 1. Se aplican en física, meteorología, epidemiología, juegos de azar, economía, evolución de determinas especies o el estudio de la estructura de determinadas proteínas, entre otros.

Las matrices *input-output,* o de entrada-salida, debidas a Wassily. W. Leontief (1906-1999), constituyen una de las aplicaciones más fructíferas de la economía. Este modelo es usado por países y empresas para predecir las necesidades futuras de producción, facilitar las relaciones económicas o estructurar la producción, orientando los sectores productivos.

El biólogo Patrick H. Leslie (1900-1974) publicó un modelo sobre estructura poblacional, basado en matrices, que permite determinar el crecimiento de una población teniendo en cuenta su estructura de edad. El modelo puede simular la dinámica de la vida animal y de las poblaciones humanas.

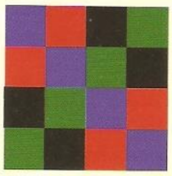
Otras aplicaciones las podemos encontrar en demografía, trabajando sobre la evolución de las poblaciones; en sociología, donde las denominadas *sociomatrices* permiten el estudio de las conexiones (amistad, influencia, tendencias, contagio, etc.) entre individuos; en los grafos asociados a mapas de vías, planos callejeros, redes de distribución de servicios (agua, calefacción, electricidad, etc.). Las matrices también se utilizan en criptografía para codificar y descodificar información.

También se trabaja con matrices cuyos elementos son no solo números, sino también letras, palabras o fórmulas. En la teoría de decisiones, que se aplica en la actividad empresarial y política, se utiliza, por ejemplo, la llamada matriz de Eisenhower, creada por Dwight D. Eisenhower (1890-1969):

		Urgencia	
		Alta	**Baja**
Importancia	**Alta**	Solucionar	Retrasar
	Baja	Delegar	Archivar

Las matrices también las podemos encontrar en las matemáticas recreativas como cuadrados mágicos, matrices de números cuyas filas, columnas y diagonales suman lo mismo. No se han encontrado aplicaciones a los cuadrados mágicos, más allá de ser un entretenimiento.

Otra aplicación que proviene del divertimento son los cuadrados latinos que fueron desarrollados sistemáticamente por Leonhard Euler (1707-1783) en 1779. Un cuadrado latino es una matriz cuadrada de orden *n,* con *n* elementos (letras, números, símbolos…) distintos, ninguno de los cuales se presenta más de una vez en cada fila o columna de la matriz. Se utilizan en el diseño de experimentos y en las comunicaciones como códigos de corrección de errores. En la imagen puede verse uno de los 576 cuadrados latinos de orden 4 que existen formado por colores.



Anexo V

Curso: _____________

El siguiente cuestionario es anónimo y no cuenta para la nota de la asignatura. Por favor, responde con la mayor sinceridad posible. No hay respuestas correctas o incorrectas.

1. ¿Qué es una matriz?

2. ¿Sabes operar con matrices? (Suma, resta, producto, inversa…)

3. ¿Has usado las matrices alguna vez? ¿Para qué?

4. ¿Conoces alguno de los usos de las matrices en el día a día? Si la respuesta es sí, ¿cuáles?

5. Si has estudiado matrices este curso, ¿qué nota obtuviste en el examen?

Anexo VI

Cuestionario estudiante “Herramienta matemática” y “poblaciones”

Curso: 2º Bach B

El siguiente cuestionario es anónimo y no cuenta para la nota de la asignatura. Por favor, responde con la mayor sinceridad posible. No hay respuestas correctas o incorrectas.

1. ¿Qué es una matriz?

Es una herramienta matemática que se estudia en el álgebra que lo que hace es relacionar una serie de valores.

2. ¿Sabes operar con matrices? (Suma, resta, producto, inversa…)

En teoría sí, otra cosa es que me acuerde!

3. ¿Has usado las matrices alguna vez? ¿Para qué?

Nunca he aplicado las matrices en la vida real. Las he usado para geometría analítica. Sirven para resolver sistemas de ecuaciones complejos (3 incógnitas).

4. ¿Conoces alguno de los usos de las matrices en el día a día? Si la respuesta es sí, ¿cuáles?

Sé que se utilizan para triangular, en la cartografía. En todos los estudios del territorio (creo que de población también).

5. Si has estudiado matrices este curso, ¿qué nota obtuviste en el examen?

Un 9.

Anexo VII

Computational Inputs:

» matrix: {{0,2,1.5,0},{0.4,0,0,0}

Compute

Input:

eigenvalues $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$

Open code

Results:

Exact forms | Step-by-step solution

$\lambda_1 \approx 1.01775$

$\lambda_2 \approx -0.660991$

$\lambda_3 \approx -0.356759$

$\lambda_4 = 0$

Input:

eigenvalues $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Open code

Results:

Exact forms | Step-by-step solution

$\lambda_1 \approx 0.961657$

$\lambda_2 \approx -0.807036$

$\lambda_3 \approx -0.154621$

$\lambda_4 = 0$

Input:

eigenvalues $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$

Open code

Results:

Exact forms | Step-by-step solution

$\lambda_1 \approx 0.990794$

$\lambda_2 \approx -0.747876$

$\lambda_3 \approx -0.242918$

$\lambda_4 = 0$

Input:

eigenvalues	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3334 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1334 & 0 \end{pmatrix}$

Results: Exact forms Step-by-step solution

$\lambda_1 \approx 1.00002$

$\lambda_2 \approx -0.723555$

$\lambda_3 \approx -0.276463$

$\lambda_4 = 0$

Corresponding eigenvectors: Exact forms Step-by-step solution

$v_1 \approx (56.2137, 22.4851, 7.49639, 1)$