La enseñanza de la Geometría a través de la Arquitectura

Carlos Ajenjo López

Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato
Especialidad Matemáticas

MÁSTERES DE LA UAM
2018 - 2019

Facultad de Educación y Formación del Profesorado

UAM Universidad Autónoma de Madrid

UAM
UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE MADRID

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO

TÍTULO: La enseñanza de la Geometría a través de la Arquitectura

AUTOR: Don Carlos Ajenjo López
TUTOR: Don Álvaro Nolla de Celis

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Cuatrimestre de Primavera - Verano, Curso 2018 – 2019

Resumen

El presente Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo principal la creación de una propuesta didáctica para la enseñanza de conocimientos específicos del Bloque de Geometría de Matemáticas Académicas en 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) a través de elementos y herramientas metodológicas empleadas en arquitectura. El trabajo se estructura de la siguiente forma:

En primer lugar, se desarrolla un marco teórico para dar contexto al tema, en el que presenta un análisis de la situación actual de la enseñanza de las matemáticas en España y la Comunidad de Madrid, profundizando en los contenidos del Bloque de Geometría e indagando sobre las dificultades a las que se enfrentan los alumnos durante su aprendizaje. Además, se realiza un estudio de las competencias clave asociadas y su relación con las matemáticas.

En segundo lugar, se estudia la relación histórica de la geometría y la arquitectura y su aplicación como herramienta metodológica, desarrollando sus características y posibilidades dentro de los contenidos del Bloque de Geometría, sumado a las ventajas de la aplicación del programa *Geogebra* en el aprendizaje, entre otros recursos TIC.

En tercer lugar, se pone en práctica la metodología propuesta en un centro público de enseñanza para adultos, analizando los resultados obtenidos y extrayendo una serie de conclusiones.

Palabras clave: Geometría, Arquitectura, *Geogebra*, Recursos didácticos, Educación Secundaria Obligatoria.

Abstract

This Master's Thesis has as its main objective the creation of a didactic proposal for the teaching of technical geometrical knowledge of the 3rd year of Secondary Education through elements and methodological tools used in architecture. The work is structured as follows:

In the first place, a theoretical framework is developed for the context, presenting an analysis of the current situation of mathematics education in Spain and the Madrid Province, exploring the Geometry Contents and surveying the difficulty of the students during the learning. In addition, a study of the key competences is carried out.

In the second place, this work studied the historical relationship between geometry and architecture and its application as a methodological tool, developing the characteristics and the possibilities of the Geometry Contents and the advantages of the application of the *Geogebra* program in learning, among other ICT resources.

Finally, the methodological proposal is put into practice in a public Adult Education Centre and the results are analyzed, in order to receive feedback and obtain a series of conclusions.

Key words: Geometry, Architecture, *Geogebra*, Teaching resources, Secondary Education

Índice:

1. Introducción

1.1. Justificación

El proceso de aprendizaje de las matemáticas se considera un pilar fundamental en la formación de los alumnos y es reconocida, junto con la lengua castellana, como una de las asignaturas troncales de las que surgen el resto de ramas del conocimiento, por lo que tiene una gran presencia e importancia en el currículo.

Sin embargo, las matemáticas constituyen uno de los principales escollos con los que se chocan los estudiantes durante su periodo escolar, como queda patente en los últimos Informes PISA (MECD, 2016a y OCDE, 2016), en las pruebas aplicadas a la Educación Primaria TIMSS (MECD, 2016b) y en multitud de informes presentados por diferentes entidades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid (CEI, 2018 y CEI, 2019) o la Real Sociedad Matemática Española (RSME, 2008).

De acuerdo con la mayoría de estos estudios, España se sitúa por debajo de la media de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) y de la Unión Europea (UE) en cuanto a competencia matemática y, pese a una mejora paulatina de los datos a lo largo de los últimos años, siguen existiendo deficiencias en determinadas áreas que necesitan ser subsanadas, como ocurre con la Probabilidad, la Estadística o la Geometría.

En el caso concreto de la Geometría, desde la segunda mitad del siglo XX ha sufrido una pérdida progresiva de su relevancia dentro de la enseñanza de las matemáticas en favor de otras ramas, como el cálculo numérico o el álgebra, y aunque esta tendencia ha ido remitiendo en los últimos años, introduciendo de nuevo aspectos de la geometría euclidiana, sigue siendo una disciplina de papel y lápiz o pizarra y tiza, con un desarrollo lento y, en muchos casos, aproximado, como señalan Vargas y Gamboa (2013). Por tanto, la priorización por parte de los docentes de otras áreas del temario provoca que sea relegada al final del curso escolar y que se estudie de manera superficial, impartiendo menos contenidos de los deseados.

Por otro lado, para los alumnos la geometría precisa de una entrenada visión espacial que no todos poseen, sobre todo cuando pasa de ser una geometría sintética en el Primer Ciclo (1º - 3º) de la ESO (desarrollándose en un espacio sin referencias) a una geometría analítica a partir de 4º ESO y Bachillerato (ligada al álgebra y al trabajo en el espacio cartesiano). Asimismo, en ocasiones se prioriza un aprendizaje exclusivamente memorístico de conceptos, formas, teoremas y fórmulas, sin una adecuada relación o justificación, lo que provoca incomprensión y desinterés en el alumnado. Todo esto, sumado a una ausencia de cultura sobre la geometría y sus manifestaciones tangibles, provoca que no sean capaces de extraer unos conocimientos elementales aplicables a su vida cotidiana.

Sin embargo, la geometría constituye un nexo claro entre las matemáticas y diferentes disciplinas tanto artísticas como técnicas, como son el Arte, el Diseño, la Arquitectura y la Ingeniería, tal y como explican Alsina, Fortuny y Pérez (1997). Potenciar en los alumnos el reconocimiento de elementos y relaciones de la geometría en elementos arquitectónicos que están presentes en su día a día puede suponer una mejor comprensión y asimilación de los mismos, además de un aumento de su interés, su curiosidad y su capacidad de observación.

Por último, la relevancia que la postrera reforma educativa, la LOMCE (BOE, 2013), ha dado al uso de las herramientas TIC en el aula como apoyo a la labor docente favorece el empleo de programas didácticos para desarrollar actividades en el aula, como pueden ser *Geogebra, Pepakura, Rhinoceros, Sketch Up* u otras plataformas.

Partiendo de este supuesto, el presente trabajo busca emplear la Arquitectura como un recurso didáctico más a la hora de impartir el Bloque de Geometría, buscando crear dinámicas que despierten el interés de los alumnos y les motiven a aprender, además de aportar recursos que faciliten la enseñanza de estos contenidos a los profesores y dar un toque de atención a la hora de evaluar las políticas educativas actuales, planteando la necesidad de buscar alternativas que solucionen de manera efectiva el problema de la educación en nuestro país.

1.2. Planteamiento del problema

En la actualidad, las matemáticas suponen un temor constante para una gran parte del alumnado y uno de las principales causas de fracaso escolar, siendo, por tanto, uno de los factores condicionantes de abandono de los estudios secundarios.

En el caso concreto de la geometría, y fundamentado en las razones expuestas en el punto anterior, considero que este trabajo puede ayudar al establecimiento de relaciones directas entre la geometría impartida en el aula y sus manifestaciones a nuestro alrededor mediante una metodología sustentada en el estudio de la arquitectura. Cuestiones básicas de geometría, como son el concepto de escala, el reconocimiento de las formas geométricas básicas o el manejo de las proporciones pueden ser comprendidas de manera mucho más sencilla si cambiamos el punto de vista empleado hasta el momento y empezamos a mirar las cosas desde otro prisma.

Se nos plantean, por tanto, una serie de preguntas a las que el presente trabajo tratará de dar respuesta, como son: ¿Puede convertirse la arquitectura en un elemento motivador para los alumnos? ¿Puede facilitar a los profesores la enseñanza de contenidos del Bloque de Geometría y a los alumnos su aprendizaje? ¿La introducción de elementos arquitectónicos presentes en su día a día puede mejorar la comprensión de conceptos geométricos más complejos?

1.3. Objetivos

El objetivo general del presente trabajo es:

- Diseñar una propuesta didáctica fundamentada en la arquitectura para la enseñanza y el aprendizaje del Bloque de Geometría de Matemáticas Académicas en 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO).

Los objetivos específicos del trabajo son:

- Realizar un acercamiento a la situación actual de la enseñanza de las matemáticas y, en especial, de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO).
- Conocer las dificultades de los alumnos respecto del temario de geometría y encontrar en ellas potencialidades de mejora a través de entrevistas y cuestionarios.
- Recopilar aspectos útiles y de aplicación directa de la arquitectura en la geometría correspondientes al temario de 3º ESO y presentar una propuesta didáctica acorde.
- Recoger información sobre los resultados de su aplicación y obtener conclusiones.

1.4. Metodología para consecución de los objetivos

A continuación, se desglosan los pasos para llegar a alcanzar los objetivos señalados en el apartado anterior:

- Búsqueda y análisis de fuentes bibliográficas que puedan aportar información relevante sobre alguno de los apartados a estudiar, desde la relación de las matemáticas con la arquitectura (tratada por numerosos autores desde la antigüedad) hasta los desafíos actuales de su enseñanza.

- Análisis del desarrollo en los últimos veinte años de la enseñanza de las matemáticas tanto a nivel europeo como a nivel nacional, así como del temario de geometría, a través del examen de diferentes estudios educativos.
- Estudio de las competencias educativas claves presentes en la normativa oficial y desarrollo de su implementación desde las matemáticas.
- Desarrollo de los contenidos recogidos en el currículo de Matemáticas Académicas de 3º ESO con recursos del campo de la arquitectura.
- Análisis breve de las potencialidades de la enseñanza de la Geometría a través de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, popularmente conocidas como TIC.
- Determinación mediante la investigación sociológica del contexto social y educativo del centro de prácticas CEPA Mar Amarillo – Hortaleza, así como una valoración crítica de la educación para adultos en la actualidad.
- Estudio de la metodología y los recursos empleados por los profesores a la hora de impartir el temario de geometría, a través de entrevistas personales.
- Control del trabajo con los alumnos y detección de pautas que permitan orientar la propuesta educativa, estableciendo una serie de patrones como el nivel inicial de conocimientos, sus sentimientos hacia la geometría y la arquitectura, relación con la misma o pruebas de capacidad y visión espacial.
- Desarrollo de una Unidad Docente a la medida de las necesidades de los alumnos y su aplicación práctica en el aula.
- Redacción de un cuestionario para evaluación de la práctica docente que de voz a los alumnos sobre las propuestas realizadas en el aula.
- Análisis de los resultados conseguidos y obtención de una serie de conclusiones.

2. Marco teórico

2.1. La Geometría a través de la Arquitectura

El origen de la geometría y su relación con la arquitectura se remonta hasta hace más de 4000 años, durante las civilizaciones de Babilonia y el Antiguo Egipto.

Babilonia (1792 – 539 a.C.) fue un imperio localizado en la región de Mesopotamia (que en griego significa “Entre dos ríos”, haciendo referencia a la zona comprendida entre los ríos Tigris y Éufrates), en lo que hoy conforman parcialmente Irak, Turquía y Siria. Los babilonios poseían conocimientos muy avanzados en temas de leyes, matemáticas, astronomía y física, y son considerados en la actualidad los inventores de la rueda.

Sin embargo, uno de los aspectos que más llama la atención de los historiadores es que ya conocían las relaciones existentes entre los lados de un triángulo rectángulo siglos antes de que Pitágoras y los pitagóricos enunciaran el conocido teorema. Sucesivas excavaciones arqueológicas han permitido arrojar más luz sobre este misterio, pues el desciframiento de una tablilla de barro tallada con escritura cuneiforme (Figura 1) permitió descubrir que los babilonios habían creado complejos y exactos prontuarios en los que se desglosaban de forma numérica las relaciones entre las longitudes de los lados de triángulos rectángulos, con los que poder obtener la medida de un cateto conociendo la hipotenusa y el otro cateto (Vázquez Hoys, 2007).

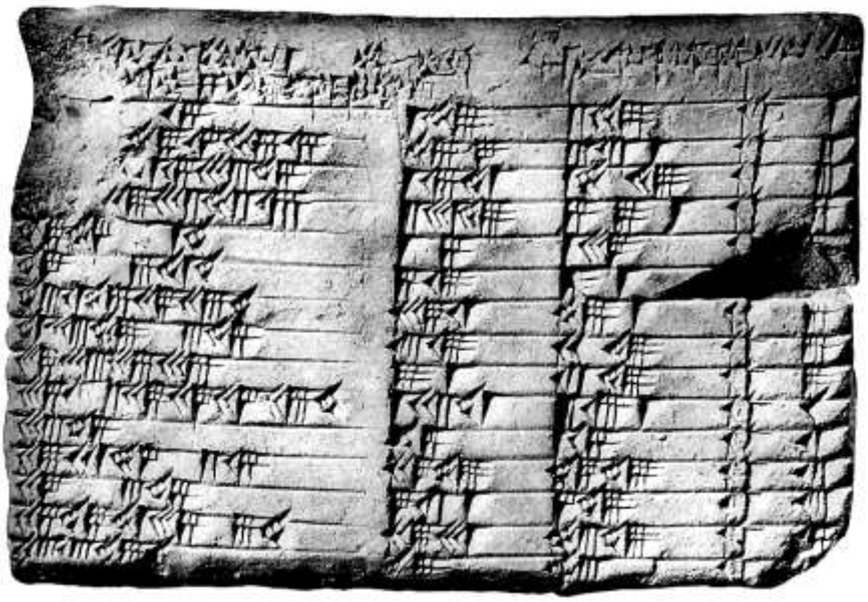


Figura 1: Tablilla de barro denominada “Plimpton 322” (Wikipedia, 2006). Los números que aparecen en escritura cuneiforme en las diferentes columnas corresponden a ternas pitagóricas (conjuntos de tres números enteros positivos a, b y c que son solución a la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, de acuerdo al sistema reflejado a continuación:

$\left(\frac{p^2+q^2}{2pq}\right)^2$	p^2-q^2	p^2+q^2	nº cardinal

En el Antiguo Egipto (3100 – 332 a.C.), fue decisivo el uso de la geometría que trabaja con los triángulos y sus propiedades, la trigonometría, a la hora de acometer la construcción de las pirámides, los colosales monumentos funerarios de los faraones. Prueba de ello se encuentra en un papiro del siglo XVI a.C. hallado cerca de la ciudad de Tebas en el siglo XIX, conocido como el papiro de Ahmes o papiro de Rhind (ver Figura 2), donde se exponen a lo largo de sus casi seis metros de longitud y treinta y dos centímetros de anchura diversos problemas matemáticos que abordan cuestiones básicas de aritmética, proporciones, reglas de tres, ecuaciones y, por supuesto, geometría.

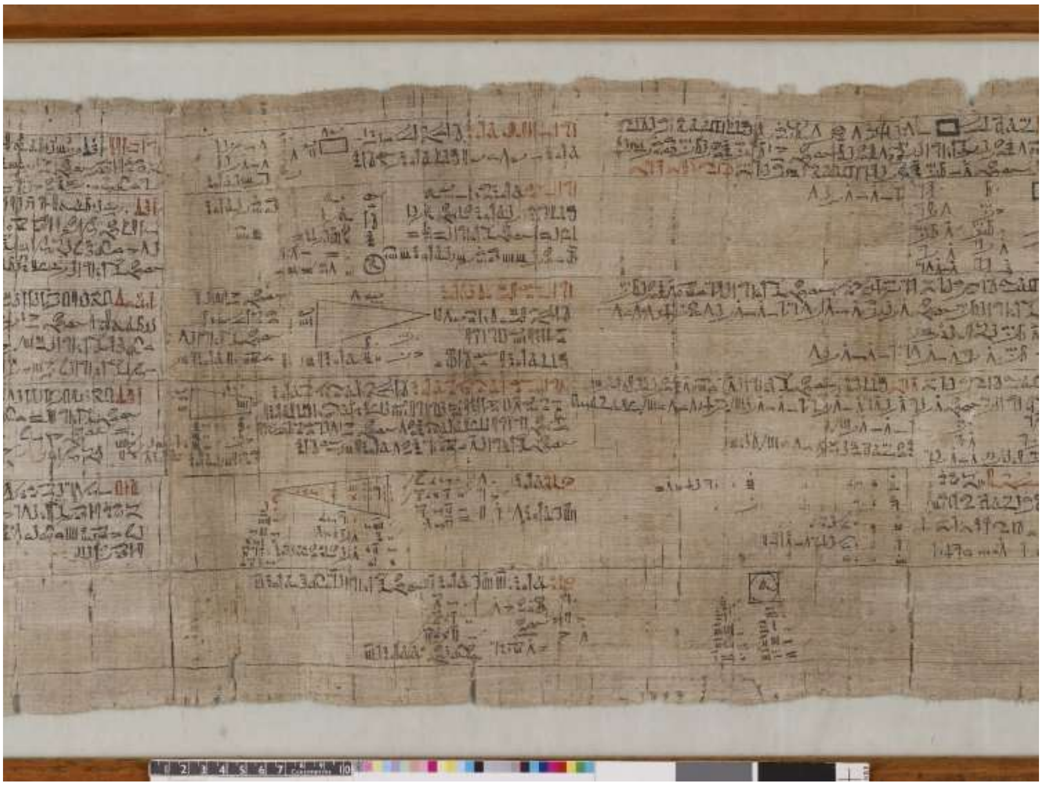


Figura 2: Papiro de Ahmes o de Rhind. (Fuente: British Museum, 2010)

El intercambio constante de información entre las diferentes civilizaciones que poblaban el mar Mediterráneo, además de la influencia asiática por parte de India y China a través de Mesopotamia, supuso el esplendor de ciudades como Alejandría, cuya privilegiada posición geográfica la convirtió en un valioso enclave portuario y un importante centro de comercio, ya fuese de mercancías o conocimientos. La Biblioteca de Alejandría, fundada por la dinastía Ptolomeica en el siglo III a.C., atesoró incalculables pergaminos, papiros y manuscritos, lo que permitió que todo el saber acumulado hasta la época sobre la geometría pasase íntegramente a la cultura griega de la mano de eruditos como Euclides, Tales de Mileto, Pitágoras y los pitagóricos, entre otros.

En la Antigua Grecia (1200 – 146 a.C.), la influencia de la lógica y los principios que de esta emanaban llevó a los matemáticos a crear proposiciones para construir el saber geométrico, definiendo de manera precisa los elementos, características y propiedades que lo conformaban. El descubrimiento de patrones y relaciones matemáticas existentes en la naturaleza supuso una revolución en el pensamiento de la época y el surgimiento de figuras como Pitágoras y los pitagóricos, cuyo lema era “Todo es número”.

La aspiración por reflejar en sus obras los principios geométricos conocidos, que asociaban con la perfección atribuida a sus divinidades, potenció su desarrollo en la arquitectura y el urbanismo, incorporando la geometría de manera esencial en el diseño de templos, palacios y ciudades. En este aspecto, la aportación más importante de la geometría a la arquitectura griega fue el uso de la proporción, que consistía en establecer entre las diferentes partes de una construcción una relación justa y armoniosa, desde la posición de columnas y dinteles a su dimensión, pasando el diámetro de las basas y los capiteles, la forma de los acanalamientos o la longitud de los fustes.

A lo largo de los siglos, los griegos crearon tres órdenes arquitectónicos diferentes, cada uno asociado a un lenguaje y un estilo propios: el dórico, el jónico y el corintio (ver Figura 3), en los que todas sus dimensiones y posiciones relativas guardaban una determinada armonía entre sí. Algunas de esas armonías geométricas han llegado hasta nuestros días, como es el caso de la proporción áurea (φ).

Otras civilizaciones posteriores, como la Antigua Roma (Siglo VIII a.C. – 476 d.C.), adoptaron, desarrollaron y asimilaron los conocimientos griegos. En el caso de los órdenes arquitectónicos, añadieron dos nuevos con características propias, el compuesto y el toscano. Estos cinco conforman en la actualidad los denominados “órdenes clásicos” (ver Figura 3). Por otra parte, los romanos desarrollaron enormemente la arquitectura civil, construyendo grandes obras como puentes, acueductos, termas o basílicas, apoyados en los principios geométricos desarrollados por los griegos. Cabe destacar la importancia que tenía para ellos la simetría y la axialidad en sus edificios, tanto en planta como en alzado, y que en siglos posteriores supondrá una constante en la arquitectura occidental.

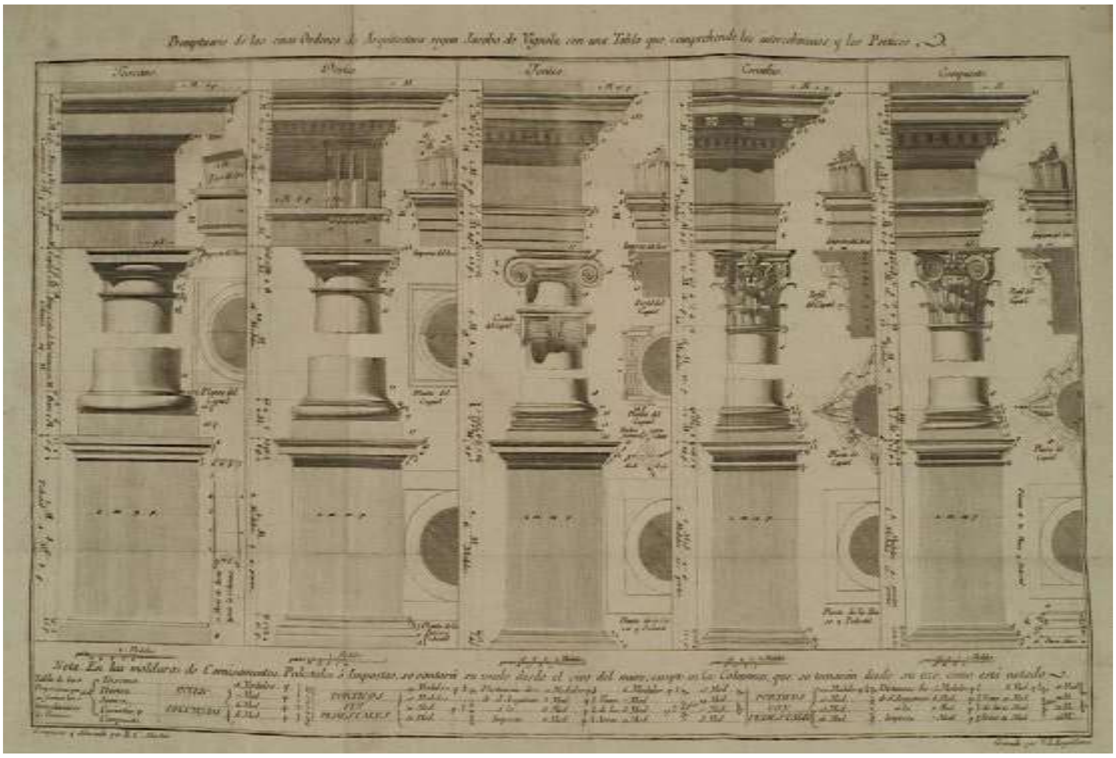


Figura 3: Los cinco órdenes clásicos de arquitectura de izq. a dcha.: toscano (romano), dórico, jónico, corintio (griegos) y compuesto (romano), por Vignola (1562). (Fuente: Brayan Rado García, 2017)

Tras la caída del Imperio Romano (Siglo V), los progresos en el campo de la Geometría se reducen significativamente en Occidente y se concentran en la Trigonometría (que estudia los triángulos y sus relaciones) y en el Álgebra, debido a la importancia de su uso en navegación. Es por tanto que la Edad Media (476 – 1492 d.C.) en Occidente supone un estancamiento, ya que apenas hay aportaciones de cierta entidad. Sin embargo, el auge del islam por Asia, África y Europa propició el desarrollo de la geometría como herramienta decorativa de su arquitectura religiosa y palaciega, debido a la prohibición del arte figurativo. Esto permitió importantes avances en la distribución de figuras geométricas en el plano y en las operaciones con teselas, como la simetría, la traslación, la rotación o la composición de movimientos. Todos estos recursos sirvieron para la creación de relevantes composiciones geométricas, como los mosaicos presentes en la Alhambra, los Reales Alcázares o la Mezquita de Córdoba.

Durante el Renacimiento (Siglo XV), las nuevas necesidades en el Arte y en la Arquitectura llevaron a los humanistas italianos a abandonar los valores del Románico y el Gótico, movimientos artísticos desarrollados durante la Edad Media, y recuperar los principios artísticos de Grecia y Roma. Es en este momento en que se comenzó a estudiar el concepto de la perspectiva y la deformación que se producía a la hora de proyectar (o de dibujar), entendiendo cómo se producía y cómo se podía trabajar con ella. El dominio de esta geometría, denominada Geometría Proyectiva, propició una revolución a la hora de concebir las obras, ya no de manera frontal y estática para el espectador, sino de manera dinámica.

La asimilación del arte clásico recuperó los órdenes arquitectónicos y las formas geométricas fundamentales, consideradas más puras. Esta visión se mantendrá en Europa durante el siguiente siglo hasta la llegada de Michelangelo Buonarroti y su concepción del Arte y la Arquitectura en el siglo XVI, llamado el Manierismo (a la manera de Miguel Ángel), que anticipará la llegada del Barroco. Miguel Ángel lucha contra la rigidez que representan las formas del clasicismo, proponiendo una nueva forma de mirar la arquitectura a través de la geometría curva, que introduce el movimiento en las obras. A partir de este momento, las líneas rectas desaparecen de las fachadas de los edificios y son sustituidas por arcos, círculos, elipses, óvalos y espirales, todos compositivamente relacionados.

El Barroco (Siglos XVI y XVII) recoge estas premisas y lleva más lejos el movimiento de esas formas geométricas curvas y su complicación formal, introduciendo además una mayor ornamentación en la composición. Simultáneamente, el matemático francés René Descartes propuso un nuevo sistema para la resolución de problemas geométricos a través del álgebra, representándolos en el espacio mediante coordenadas cartesianas, un sistema de referencia invariable y muy empleado en la arquitectura.

Tras el Rococó (XVIII), un movimiento que reducía los excesos ornamentales del Barroco introduciendo aspectos naturalistas, se vuelve a recuperar la esencia de los valores de la cultura clásica en Europa, aunque a través del filtro del pensamiento romántico de la época. Surge así el Neoclasicismo (XVIII), un movimiento que regresa a la pureza geométrica de los órdenes clásicos con los que se identificaba el movimiento ilustrado, tras la Revolución Industrial y la crisis del Antiguo Régimen.

Finalmente, se produce durante el periodo de entreguerras (entre la Primera Guerra Mundial de 1914 - 1918 y la Segunda Guerra Mundial de 1939 - 1945) una gran explosión creativa en la Arquitectura al calor de los diversos movimientos artísticos y sociales surgidos a principios de siglo. El término “Arquitectura Moderna” o “Movimiento Moderno” se emplea para englobar todas las corrientes que se desarrollaron a lo largo del mundo durante la primera mitad del Siglo XX, cada una con características y peculiaridades concretas, pero con una aproximación común a la geometría a través de formas geométricas simples (como el cubo, el cono y el cilindro), la modulación, la simpleza de las composiciones formales y la renuncia a los órdenes arquitectónicos de la Antigüedad pero no a la proporción como base de la armonía entre los elementos de una obra. Entre estas corrientes destacan las siguientes:

- El Expresionismo Alemán, que recurría a la naturaleza como fuente de inspiración, creando una arquitectura de formas curvas y líneas puras. Algunos de sus exponentes fueron Erich Mendelsohn, Bruno Taut o Hans Scharoun.
- El Futurismo Italiano, que basaba en la arquitectura industrial su concepción de la realidad de movimiento permanente y grandes volúmenes másicos. Destacó la figura de Antonio Sant'Elia.
- El Neoplasticismo Holandés, que desarrolló un estilo marcado por las composiciones geométricas, en las que superficies lisas y líneas verticales y horizontales se intersecaban entre sí creando los diferentes espacios habitables. Las figuras más relevantes fueron Piet Mondrian y Theo Van Doesburg.
- El Constructivismo Ruso, reflexionó sobre las formas puras y el movimiento, proponiendo una geometrización de la realidad en busca de una mayor funcionalidad. El mayor exponente de esta corriente fue Vladimir Tatlin.
- El Organicismo, un movimiento surgido de la mano del arquitecto estadounidense Frank Lloyd Wright quien, sobre la base de un racionalismo de las formas geométricas, proponía su integración en la naturaleza de forma armoniosa.
- El Racionalismo, corriente artística que surge en la Escuela de la Bauhaus, en Alemania, que destacó por el uso de la contraposición de planos horizontales y verticales y la búsqueda de la simplicidad compositiva en sus obras. Los arquitectos que más destacaron fueron Mies Van der Rohe y Le Corbusier.

Con este breve recorrido de los últimos 4000 años de la historia de la humanidad se busca documentar de manera clara y concisa la estrecha relación que la Arquitectura y la Geometría han mantenido desde su origen en Babilonia hasta nuestros días. La potencialidad de su aplicación a la enseñanza reside en que la arquitectura no puede ser construida sin geometría y la geometría no puede ser comprendida de forma plena sin la arquitectura que la materializa.

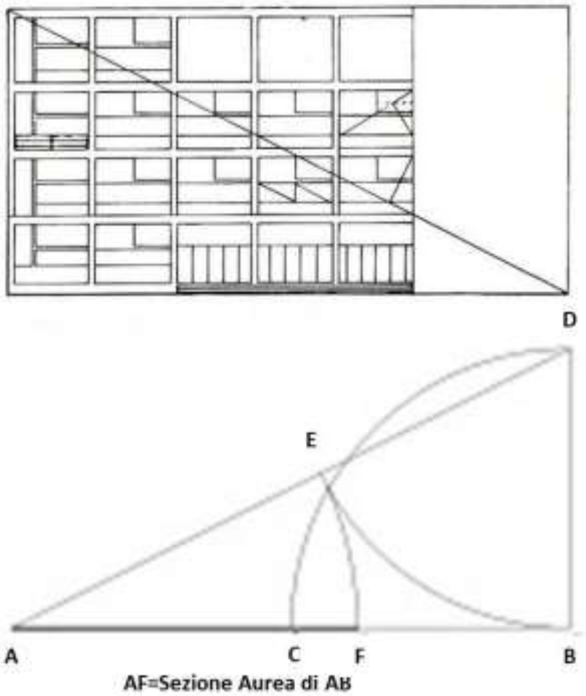


Figura 4: Fachada principal de La Casa del Fascio de Giuseppe Terragni (1932), ejemplo de la aplicación de la proporción áurea. (Fuente: Pinterest, 2017)

2.2. El estado de las matemáticas en la actualidad

Hoy en día existen numerosos estudios y análisis que nos permiten comprender la situación de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en España. De todos ellos, el Informe PISA es el más conocido, aunque existen otros de diferentes instituciones y entidades dedicadas a la enseñanza de las matemáticas en Primaria y Secundaria.

El Informe PISA (*Program for International Student Assessment*, Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes) es un estudio pormenorizado de los resultados que evalúan los diferentes sistemas educativos de 72 países, en su mayoría pertenecientes a la OCDE, obtenidos por sus alumnos en las pruebas de tres categorías troncales: ciencias (biología, geología, física, química y tecnología), lectura y matemáticas. En ellas se evalúa lo que el alumno ha aprendido, tanto en el ámbito escolar como fuera del mismo por medio de enseñanzas formales e informales, y su capacidad para aplicarlo. En el caso concreto de las matemáticas, se evalúa la lectura y la resolución colaborativa de problemas.

Esta prueba y su informe asociado se realizan cada tres años y los resultados son publicados al año siguiente, por lo que, pese a haberse efectuado en 2018, en las fechas actuales de junio de 2019 todavía no disponemos del informe correspondiente. Por lo tanto, el Informe PISA analizado será el del año 2015 (MECD, 2016a), centrándonos en los aspectos relacionados con las matemáticas.

En dicho informe se ofrecen tres tipos de análisis:

- Resultados globales y por niveles de rendimiento en ciencias, lectura y matemáticas.
- Relación entre los resultados y diversos factores asociados, como el contexto social, económico y cultural, así como las circunstancias personales del alumno y la organización y funcionamiento de los centros.
- Tendencias sobre la evolución de los resultados.

Para analizar las diferentes competencias, el Informe PISA establece una serie de cinco niveles de conocimientos aplicados, siendo el Nivel 1 el más bajo y el Nivel 5 el más alto dentro de la clasificación. El Nivel 1 corresponde al grado más básico de adquisición de competencias y los alumnos que se encuentran en este nivel tienen riesgo de no afrontar con suficiente garantía de éxito sus retos formativos, laborales y ciudadanos. Los estudiantes que han adquirido el Nivel 2 poseen el nivel de competencia mínimo requerido para el aprendizaje posterior y el acceso a la vida social y laboral. El Nivel 3 corresponde a los alumnos que saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. También pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos, y saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Además, son capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos. Los alumnos en los Niveles 4 y 5 tienen desarrollado en mayor medida el espíritu crítico y la capacidad de obtener reglas generales a problemas particulares. Por tanto, la mejora de este indicador supone, asimismo, la mejora de la calidad y la eficacia de la educación y la formación.

En su introducción, el Informe PISA arroja una serie de conclusiones sobre diferentes aspectos de la enseñanza de las matemáticas en España, desglosados a su vez por Comunidades Autónomas. En este trabajo analizaremos los resultados de España en su conjunto y de la Comunidad Autónoma de Madrid. En el caso de España, se sitúa en la posición 27 de 44 países con 486 puntos, entrando en el Nivel 3 de conocimientos en que se encuentran la mayoría de los países miembros de la OCDE, pero 4 puntos por debajo de su promedio y a 7 puntos del promedio de la UE, estando a poca distancia de los 480 puntos, que marcan la barrera entre el Nivel 2 y el Nivel 3. En el análisis específico por comunidades autónomas, la Comunidad Autónoma de Madrid se encuentra en la 4ª posición con 503 puntos, mejorando sus resultados respectos a años anteriores y con una diferencia entre el nivel de los diferentes centros apenas reseñable.

Las conclusiones del estudio son las siguientes:

- El 22,2% de los alumnos de 15 años cursando 4º ESO (curso escogido para la realización del estudio) no alcanza el nivel 2, lo que supone que un cuarto del alumnado tiene problemas graves a la hora de seguir las explicaciones y entender los conocimientos expuestos en clase. Esto supone un empeoramiento en comparación con años anteriores y se aleja del objetivo del 15% que marca el Consejo Europeo en su plan Estrategia Europa 2020. La Comunidad de Madrid ha logrado reducir este porcentaje del 22% al 17%, aunque todavía no llega a cumplir los parámetros exigidos.
- Existe una gran diferencia entre el rendimiento de chicos y chicas, siendo el de ellas peor en matemáticas. En el caso de la Comunidad de Madrid, esta diferencia llega a los 18 puntos.
- Se ha mejorado considerablemente el promedio de integración de alumnos inmigrantes, generalmente con peores resultados. En la Comunidad de Madrid, este porcentaje supone un 20% de total de alumnos y posee de media un rendimiento 43 puntos menor.
- En cuanto a las diferencias de rendimiento en la repetición de curso, se calcula que en España en torno a un tercio de los alumnos de 4º ESO son repetidores, oscilando entre las diferentes comunidades entre un 20% y un 40%. Este alumnado, aparte de un rendimiento mucho menor, se encuentra muy desmotivado ante la repetición de contenidos ya impartidos y su presencia en clase siendo mayor en edad.

El Informe PISA también destaca las tendencias en educación a nivel global, señalando aquellas áreas en las que las políticas educativas deben incidir más, como son la mejora de la atención al alumnado con deficiencias graves o la motivación y el apoyo como herramienta para combatir el desencanto escolar, entre otras. Sin embargo, no aporta datos concretos sobre las matemáticas, por lo que necesitamos recurrir a otros estudios para profundizar en la materia, sobre todo en el apartado de geometría.

Otro de los informes más reconocidos para el estudio de cuestiones relacionadas con la educación es el Informe TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*, Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencia) (MECD, 2016b), que analiza de manera similar al Informe PISA las competencias de los alumnos de Educación Primaria. Sin embargo, estando este trabajo centrado en la Educación Secundaria Obligatoria y siendo la muestra de alumnado de 4º de Primaria (alejado del último curso de Primaria, 6º, y por tanto no relevante) no lo tendremos en cuenta.

Otros mecanismos disponibles a la hora de evaluar la calidad de la educación en España estaban recogidos en las diferentes leyes educativas hasta la entrada en vigor de la LOMCE (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa) de 2014 (BOE, 2013), que lo suprimió. Este es el caso de la Evaluación General de Diagnóstico (EGD), establecida por la Ley Orgánica de Educación (LOE) (BOE, 2006), que evaluaba las competencias en educación del alumnado en los cursos de 2º y 4º de ESO.

Los resultados de la única vez que se realizó, en el año 2010 (ME, 2011), son similares a los obtenidos en otros estudios oficiales, como el Informe PISA de 2009 (ME, 2010 y OCDE, 2010). Sin embargo, la particularidad de la EGD reside en que analiza la competencia matemática desglosándola de acuerdo al temario en los apartados de Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y Probabilidad, permitiendo detectar patrones o dificultades comunes al global del alumnado.

La geometría está presente en los requisitos que deben comprender los alumnos, señalando su relación directa y aplicación en la realidad: "Aplicar el conocimiento geométrico adquirido para interpretar y describir el mundo físico." y "Utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar situaciones y problemas de la vida cotidiana", tal y como se señala en la Evaluación General Diagnóstico (ME, 2011, p. 78).

En las cuestiones previas a los gráficos se nos indica que debemos considerar que "los resultados de cada dimensión están afectados por un error de muestreo que puede ser, en muchos casos, elevado porque se dispone de un reducido número de ítems (…) lo que obliga a extraer las conclusiones con las debidas cautelas" (ME, 2011, p. 83). Sin embargo, el informe es muy claro en su recapitulación: "Los bloques de contenido que han resultado con mayor dificultad son el álgebra y la geometría, aspectos esenciales del aprendizaje, cuyo dominio asegura un éxito posterior en esta competencia" (ME, 2011, p. 85), lo que refuerza la premisa inicial de este trabajo (ver Tabla 1).

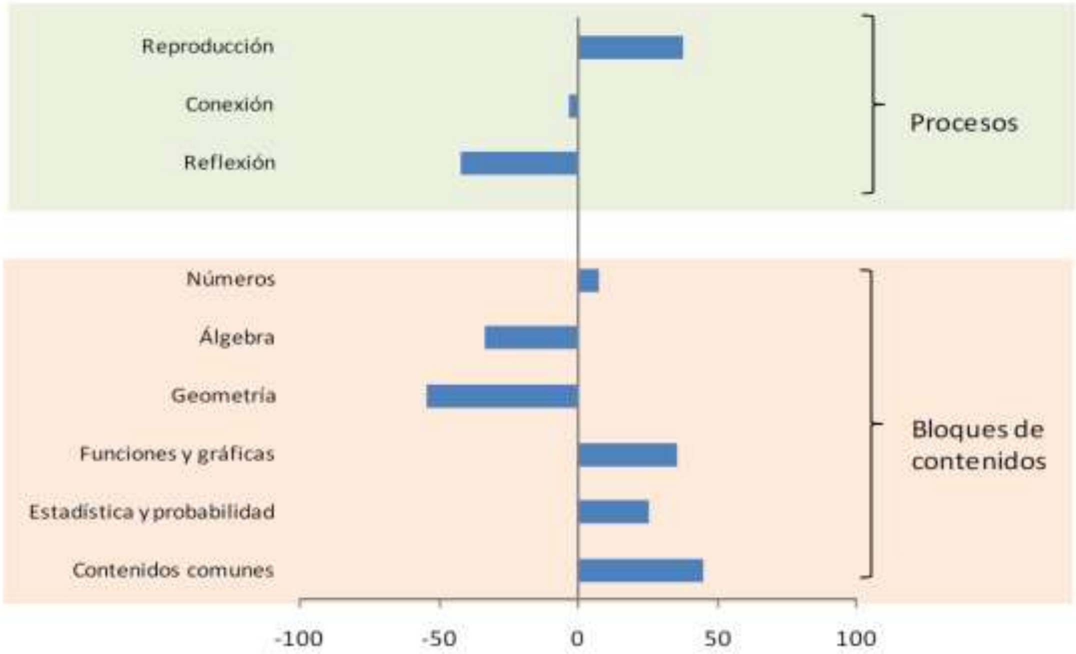


Tabla 1: Rendimiento del alumnado en la Competencia matemática, Evaluación General de Diagnóstico de 2010 (ME, 2011, p. 86).

Por otra parte, también se destaca la evidente dificultad del alumnado a la hora de pasar de la reproducción de contenidos a la conexión y a la reflexión, siendo importante en matemáticas el desarrollo de "destrezas que implican un cierto grado de perspicacia y creatividad a la hora de identificar los elementos matemáticos de un problema" (ME, 2011, p. 86).

Los datos que recoge la Evaluación General Diagnóstico de 2010 (ME, 2011) pueden compararse con los recogidos por el Diagnóstico del Sistema Educativo de 1997 (MEC, 1998), trece años anterior. En este estudio se concluía que la competencia matemática media en España a los 14 y a los 16 años era de 226,61 y 263,31 puntos respectivamente, superiores en ambos casos a los valores de 200 puntos y 250 puntos señalados como límite para cada curso. Sin embargo, la diferencia se hacía más pequeña entre los alumnos de 16 años, no siendo su desarrollo proporcional.

La media de aciertos por bloque (Tabla 2) nos permite identificar que, realizando una misma prueba, los alumnos de 14 años y 16 años poseían el mismo conocimiento de Geometría y Medida, y tan solo el 44% del alumnado era capaz de entender y resolver los ejercicios relacionados con estos contenidos. El progreso que se produce en otras subáreas no se manifiesta en estos bloques, por lo que podemos concluir que, en general, los conocimientos que adquieren con 14 años no se desarrollaron en los posteriores cursos, produciéndose un estancamiento.

A continuación, se detallan en una tabla los aciertos medios por subáreas:

Porcentaje medio de aciertos por subáreas en Matemáticas		
Subáreas	14 años (eq. a 2ºESO)	16 años (eq. a 4ºESO)
Números y Operaciones	46%	54%
Medida	40%	39%
Geometría	44%	44%
Análisis de datos, Estadística y Probabilidad	44%	47%
Álgebra y Funciones	40%	60%
TOTAL	44%	49%

Tabla 2: Porcentaje medio de aciertos por subáreas en Matemáticas, obtenido a partir de los datos del INCE recogidos en la Tesis Doctoral de Arteaga Martínez (2006).

Teniendo en cuenta los diferentes estudios analizados, podemos concluir que en los últimos veinte años se ha producido una mejora progresiva de las competencias matemáticas de los alumnos españoles. Esta mejora no implica, sin embargo, que los resultados sean excepcionales, y se manifiesta que el nivel de los estudiantes supera con escaso margen la barrera del aprobado. Esto supone un toque de atención a nuestro sistema educativo actual y señala la necesidad de introducir cambios para abordar mejor el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y atender a las dificultades y necesidades que eso conlleva.

En el caso de la geometría, los estudios realizados hasta el momento no suelen desglosar el dominio de la competencia matemática por bloques, por lo que los datos a los que se puede hacer referencia concreta son de 1997 y 2010, con dos planes educativos diferentes. En los nueve años que nos separan del último estudio, la introducción en el aula de nuevas herramientas TIC, el acceso de forma masiva a la información a través de internet, la mejora de la documentación gráfica y los recursos didácticos y la implantación de nuevas metodologías han supuesto un cambio muy importante a la hora de impartir las matemáticas y, en concreto, la geometría. En consecuencia, podemos suponer que, si se ha producido una mejora gradual en el conjunto de bloques de matemáticas, también se ha producido en la geometría.

Sin embargo, y dado los pésimos resultados que ofrecían los estudios previos en este campo, considero que todavía este conocimiento está alejado del deseable y que se deben dedicar más esfuerzos a la hora de completar y optimizar las metodologías, proponiendo nuevas formas de reforzar la transmisión de estos conocimientos.

2.3. Las competencias clave

El trabajo por competencias se planteó de forma explícita en España con la llegada de la Ley Orgánica de Educación (LOE) en 2006, siguiendo la línea de las recomendaciones que desde la Unión Europea (UE) buscaban dar respuesta a los cerca de ochenta millones de personas calificables como "poco cualificadas" (Rec. 2006/962 del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006).

Es en este momento en que surge el interés de promover el desarrollo de la ciudadanía a través de las denominadas competencias básicas, que no son sino "la forma en la que cualquier persona utiliza sus recursos personales (habilidades, actitudes, conocimiento y experiencias) para actuar de manera activa y responsable en la construcción de su proyecto de vida". Es decir, las competencias básicas representan "los aprendizajes imprescindibles para llevar una vida plena" (Moya Otero y Luengo Horcajo, 2011, p. 223).

Competencias en la LOE	Competencias en la LOMCE
1. Competencia en comunicación lingüística 2. Competencia matemática 3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico 4. Tratamiento de la información y la competencia digital 5. Competencia social y ciudadana 6. Competencia cultural y artística 7. Competencia para aprender a aprender 8. Autonomía e iniciativa personal	1. Comunicación lingüística 2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología 3. Competencia digital 4. Aprender a aprender 5. Competencias sociales y cívicas 6. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor 7. Conciencia y expresiones culturales

Tabla 3: Comparación entre las competencias de la LOE (2006) y de la LOMCE (2014).

En el contexto de la LOE, se habla de ocho competencias básicas (RD 1631/2006, de 29 de diciembre), mientras que en el de la Ley Orgánica de Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), se habla de siete competencias (RD 1105/2014, de 26 de diciembre) que no dejan de ser fundamentalmente lo mismo, si bien con pequeñas modificaciones, como son el renombramiento de algunas de ellas, la integración del pensamiento científico y matemático en una única competencia y la sustitución de la autonomía personal por espíritu emprendedor (ver Tabla 3).

A continuación, se analiza el desarrollo de las diferentes competencias clave en Matemáticas Académicas de 3º ESO, remarcando las características más destacables y sus potencialidades.

Comunicación lingüística (CCL)

En el apartado dedicado a la presentación del currículo básico de Matemáticas en la LOMCE, se expone que “la comprensión lectora, la expresión oral y escrita, la argumentación en público y la comunicación audiovisual se afianzarán durante esta etapa” (BOE, 2014).

Por tanto, esta competencia se debe trabajar desarrollando la comprensión lectora de los problemas, atendiendo no solo a la información que se da sino también a lo que se pide, ejercitando en clase la expresión oral y escrita de la información, de manera ordenada y clara, enseñando los principios del lenguaje matemático para su correcto uso y expresión, así como la comunicación audiovisual mediante herramientas TIC. Actividades como la lectura en clase de anécdotas y demás curiosidades relacionadas con las matemáticas ayudan a optimar esta competencia y aumentar el interés por la materia.

Competencia digital (CD)

Otra de las competencias a adquirir por el alumno especificadas tanto en la LOE como en la LOMCE es la referida a la aptitud digital. Si bien se puede considerar una aptitud aplicable a todas las materias curriculares en mayor o menor medida, en la asignatura de Matemáticas, y en concreto en el temario de Geometría, su importancia es muy relevante.

Las técnicas de trabajo tradicionales en geometría han consistido principalmente en explicaciones teóricas acompañadas de dibujos con papel y lápiz. Siendo la geometría una disciplina de considerable nivel de experimentación, los recursos digitales permiten en gran medida facilitar, agilizar y favorecer la adquisición de estos conocimientos mediante prueba y error. Por otra parte, la competencia digital no solo se traduce en la sustitución parcial de los recursos materiales, asimismo en la forma de aprendizaje y desarrollo de aptitudes del propio alumno.

Otros elementos, como la calculadora científica, que mantiene su importancia a la hora de agilizar cálculos y operaciones; la pizarra digital, que agiliza las explicaciones y facilita las exposiciones en público; y otras aplicaciones tecnológicas, que permiten, por ejemplo, generar en 3 dimensiones cuerpos y formas geométricas complejas, también contribuyen a desarrollar esta competencia.

Los programas más utilizados son *Wiris* y *Geogebra,* pues facilitan el aprendizaje del Álgebra y Geometría a través de la visualización y manipulación intuitiva, aunque también existen otros como *Rhinoceros, AutoCAD*, *Sketch Up* (para el dibujo geométrico plano y volumétrico de manera más profesional) o *Pepakura* (para el desarrollo plano de volúmenes).

Por último, también requiere la puesta en práctica de las que podríamos denominar "Competencias auxiliares a la competencia digital" dispuestas en la LOMCE, principalmente dos: cribar la información de internet para obtener información fidedigna y ser capaces de crear contenido con estos recursos.

Aprender a aprender (CPAA)

Esta competencia permite desarrollar las aptitudes asociadas a la forma en que construimos y transmitimos el conocimiento, buscando dotar a los alumnos de destrezas ligadas al desarrollo del carácter tentativo del conocimiento, la integración y búsqueda de información, y la autorregulación de la misma.

En Matemáticas se considera necesaria una reflexión sobre los resultados obtenidos, primero de manera individual y después en grupo, de forma que se establezca un diálogo permanente en la clase y puedan ayudarse entre ellos. Con esto se busca que aprendan a razonar por sí mismos y a extraer conclusiones sobre las que trabajar. Además, se pueden ejercitar otras formas de resolver ejercicios, como el descarte, la aproximación o el tanteo, y aprender a entender qué resultados son factibles y coherentes y cuáles no, justificándolo.

Competencias sociales y cívicas (CSC)

Estas competencias permiten comprender la realidad social en la que se vive, convivir, cooperar y ejercer la ciudadanía democrática en una sociedad plural, así como contribuir a su mejora. La contribución de las Matemáticas al desarrollo de las competencias sociales y cívicas requiere reconocer el importante papel de la cultura científica en la formación de ciudadanos (RD 1105/2014). Los descubrimientos en este campo científico tienen una aplicación tangible en el día a día de los alumnos y, por lo tanto, es fácil encontrar ejemplos que les resulten cercanos, desde la encriptación de los mensajes a las recomendaciones de Instagram. Esta competencia se trabaja realizando actividades en grupo, por lo que está muy relacionada con Aprender a aprender, y se enseña a los alumnos a realizar presentaciones en clase, a expresarse y a comunicar de forma correcta los conocimientos matemáticos, además de aprender a respetar a sus compañeros.

A nivel práctico, es un momento en que pueden proyectarse recorridos por la ciudad en las que se muestra todo este pensamiento matemático, desde las manifestaciones de la naturaleza al arte, la arquitectura o el urbanismo.

Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SIE)

Esta competencia permite desarrollar al individuo un espíritu crítico, cuestionando dogmas y prejuicios, así como desarrollar la autonomía e iniciativa personal. En el caso de las Matemáticas, es especialmente relevante su contribución a despertar el interés por lo que popularmente se conoce como la “aventura del saber”, que no es más habilidad para emprender y llevar a cabo proyectos analíticos valorando los factores y sus consecuencias.

Se puede trabajar buscando ejemplos en la realidad de contenidos trabajados en clase, que permitan entender la influencia de las matemáticas en todos los aspectos de nuestro día a día, como modelos sencillos de probabilidad y estadística en periódicos y revistas en forma de gráficas o diagramas; o conceptos de geometría en manifestaciones artísticas y arquitectónicas. Por otra parte, existen varios concursos y convenciones de Matemáticas en los que los alumnos pueden participar, tanto de manera individual como colectiva, poniendo en práctica los conocimientos aprendidos y despertando sus inquietudes matemáticas, como son el Concurso de Primavera, las Olimpiadas Matemáticas o el Concurso Pangea, entre otros.

Conciencia y expresiones culturales (CEC)

Esta competencia busca instruir sobre la diversidad cultural existente en el mundo, enseñando a comprender y valorar el patrimonio de pueblos diferentes, así como desarrollar la plasmación del conocimiento aprendido a través de la expresión oral, escrita, interpretativa o física.

Esta competencia es fundamental para enseñar a los alumnos que las matemáticas están presentes a nuestro alrededor, desde la naturaleza hasta el arte o la arquitectura, ya sea la sucesión de Fibonacci aplicada a la reproducción de los conejos o la distribución de las pipas de girasol, la proporción áurea en las tarjetas de crédito que usamos a diario o a las proporciones de muchos edificios en sus fachadas, la perspectiva o la simetría, por citar solo algunas. Enseñar a los alumnos la belleza que se extrae de las matemáticas puede realizarse a través de excursiones o convocando un concurso de fotografía matemática. Por otra parte, es importante que los alumnos sean conscientes de que el conocimiento que se tiene es fruto de mucho esfuerzo y siglos de desarrollo, transmitiendo esta historia de la que formamos parte.

2.4. La competencia matemática

La Competencia matemática o, como es denominada en la LOMCE (BOE, 2013), la Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT**)**, es intrínseca a la asignatura de Matemáticas, y consiste en "la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto", además de proporcionar al alumno "un acercamiento al mundo físico y a la interacción responsable con el mismo desde acciones, tanto individuales como colectivas, orientadas a la conservación y mejora del medio natural" (BOE, 2013).

Según la LOMCE, "la competencia matemática requiere de conocimientos sobre los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos", señalando las diferentes destrezas que los alumnos deben aprender. En resumen, la competencia matemática es, como se define en el Informe PISA, "la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (MECD, 2016a).

La consecución de habilidades competenciales en matemáticas requiere conocimientos sobre cuatro bloques temáticos: Números, Álgebra, Geometría y Estadística, subdivididos a su vez en otros apartados. Para ello se puede trabajar realizando diversos tipos de ejercicios y problemas con una temática atractiva para generar interés por la materia, e insistir en sus aplicaciones prácticas, además de buscar que las respuestas tengan sentido y que obedezcan a lo que se pide en el enunciado.

En el caso concreto de las matemáticas, la Comunidad de Madrid (BOCM, 2015) establece el “Grado del logro de los objetivos y de adquisición de las competencias del currículo”, por el cual las competencias que serán trabajadas principalmente en la asignatura, si bien todas deberán ser ejercitadas, son la Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, la Competencia de aprender a aprender y la Competencia de conciencia y expresiones culturales (ver Tabla 4). Podemos observar que, excluyendo a la Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, las otras dos competencias son comunes a todas las asignaturas del currículo.

Competencias del currículo	1ºESO	2ºESO	3ºESO	4ºESO
Comunicación lingüística				
Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología				
Competencia digital				
Aprender a aprender				
Competencias sociales y cívicas				
Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor				
Conciencia y expresiones culturales				

Tabla 4: Grado del logro de los objetivos y de adquisición de las competencias del currículo en Matemáticas. (BOCM, 2015)

Este aspecto es especialmente significativo, pues si bien desde la docencia se tiende a impartir una enseñanza que recoja todas las competencias, desde los documentos oficiales se priorizan únicamente estas tres. En cualquier caso, este trabajo busca reforzar la docencia desde la perspectiva que aportan todas las competencias a las matemáticas.

2.5. La Geometría analítica y sintética

La geometría, de acuerdo a la definición del *National Council of Teachers of Mathematics* (2003) que proporcionan Vargas y Gamboa (2013, p.76) es “la materia mediante la cual el estudiante estudia las formas y estructuras geométricas, y aprende a analizar sus características y relaciones”.

Numerosos autores han escrito sobre la enseñanza de la Geometría en Secundaria, aportando diferentes metodologías y recursos, entre los que destacan Van Hiele, Freudenthal, Brousseau o Bkouche. Sin embargo, todos coinciden al destacar la existencia de dos geometrías, la sintética y la analítica, y la dificultad que supone su convivencia en los planes de estudio.

La geometría sintética, también denominada geometría pura, es aquella que se construye a partir de axiomas o postulados aplicando un razonamiento lógico - deductivo y, en esencia, se trabaja en un contexto espacial neutro, sin referencias. Es la geometría empleada para el desarrollo de la visión espacial, así como la asimilación de los conceptos y operaciones básicas. Por otro lado, la geometría analítica se fundamenta en el uso de un sistema de referencias en el que relacionar unos elementos respectos de otros en el espacio, recurriendo para ello al establecimiento de los denominados ejes cartesianos. Está fundamentada en el álgebra lineal y espacial, desarrollándose de manera paralela.

En el caso de la enseñanza en Secundaria, la geometría sintética se desarrolla a lo largo de los cuatro cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), principalmente en los tres primeros cursos, correspondientes al Primer Ciclo según la LOMCE (BOE, 2013). A partir de 4º ESO, el álgebra y la geometría analítica asumen el protagonismo y durante el bachillerato se imparte únicamente la geometría analítica.

Entre los objetivos de la geometría sintética que se deben destacar están los de dotar al alumno de una serie de herramientas y mecanismos mentales con los que afrontar los desafíos planteados. Uno de los más notables es la visión espacial, que permite entender las relaciones de las figuras y su posición relativa respecto a otras tanto en el plano como en el espacio, y que resulta de vital importancia a la hora de trabajar con la geometría analítica, que se presenta habitualmente de manera algebraica a través de sus coordenadas, por lo que el entendimiento de las relaciones se tiene que producir de manera mental, gracias a herramientas previamente trabajadas.

En este sentido se manifestó Josep Gascón en su conferencia “Cuestionamiento y reorganización de la geometría escolar” del 20 de marzo de 2019 en la Universidad

Autónoma de Madrid (UAM), reclamando que no "se dejara morir" a la geometría sintética y que se retomara para dar sentido a la geometría analítica y reducir las dificultades que sufrían los alumnos. Por tanto, es muy relevante la decisión de trabajar sobre el Bloque de Geometría en 3º de ESO, último curso del Primer Ciclo, en el que se deben asentar todos los conocimientos básicos de geometría sintética antes de abordar la analítica.

2.6. Los contenidos de Geometría de 3º ESO de Matemáticas Académicas

De acuerdo a lo establecido por el Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid (BOCM, 2015), se desglosan a continuación los contenidos obligatorios que se deben impartir en el Bloque de Geometría de la asignatura de Matemáticas Académicas de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO):

Bloque de Geometría

1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.

1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos.

1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos.

2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.

2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.

2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.

2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.

3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.

3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.

4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.

5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.

5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.

5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

2.7. Adaptación de la Arquitectura a los contenidos de Geometría de 3º ESO de Matemáticas Académicas

En este apartado se realiza una aproximación a las diferentes cuestiones recogidas en los contenidos del currículo de matemáticas (Ver apartado 2.6.) a través del Arte y la Arquitectura, buscando ofrecer una respuesta consistente, coherente y didáctica a la problemática que cada una plantea. Esta propuesta didáctica se fundamenta en las premisas que desde la Ley Orgánica de Educación (LOE) (BOE, 2006) aparecen en nuestro sistema educativo:

> *La geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas.* ***El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos.*** *Su estudio ofrece excelentes oportunidades de* ***establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte****, que no debería quedar al margen de atención.*
>
> *La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico.* ***Especial interés presentan los programas de geometría dinámica al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas****.*

Por tanto, a continuación se desglosan los diferentes apartados de los contenidos del currículo de Matemáticas Académicas de 3º de ESO, de acuerdo con lo publicado por el BOCM de 20 de mayo de 2015 (BOCM, 2015), desarrollando seguidamente aquellos aspectos que pueden tratarse desde la perspectiva del Arte y la Arquitectura, aportando un nuevo enfoque a la enseñanza de la Geometría:

0. Introducción al Bloque de Geometría

Introducir, pero también presentar, motivar, atraer o despertar la curiosidad son solo algunas características que la introducción a un nuevo tema debe cumplir, ya sea recurriendo a anécdotas históricas, eventos representativos o divertidos, elementos de nuestro día a día consecuencia directa de ellos o figuras renombradas que los permitieron. Establecer la relación histórica entre la geometría y la arquitectura es sencillo (ver apartado 2.1.): desde la aplicación de los triángulos rectángulos y sus propiedades por los babilonios para la construcción y delimitación de parcelas, a las proporciones en las fachadas de los edificios, pasando por la medición de la pirámide de Keops por Tales o el urbanismo del Barroco italiano basado en las cónicas.

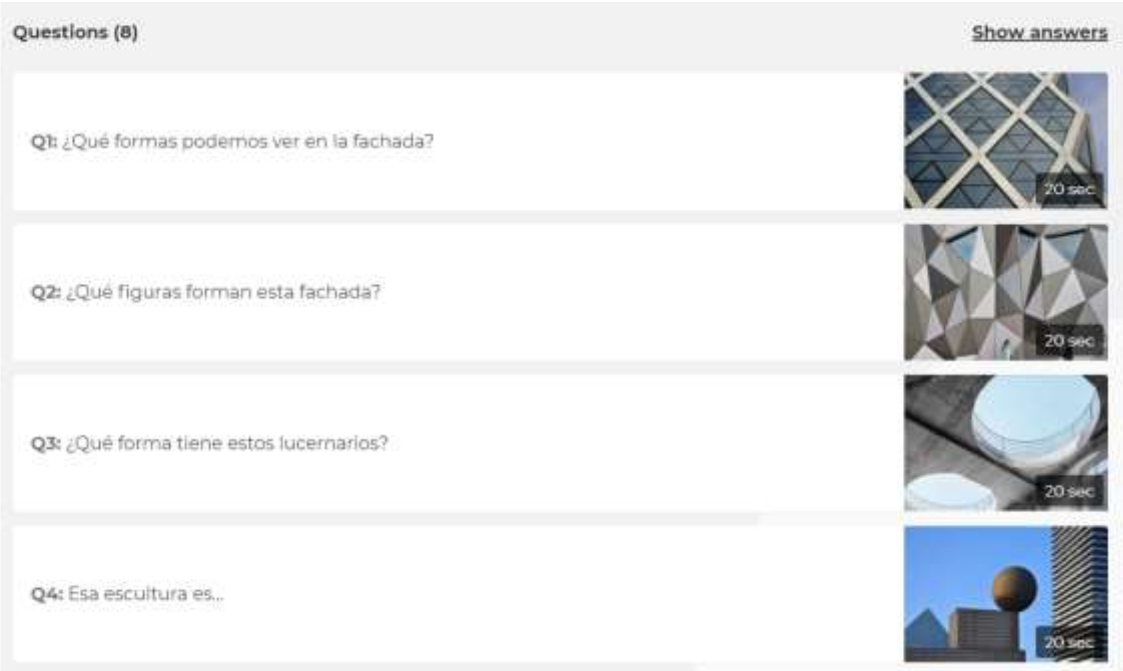
Conseguir despertar en los alumnos el interés sobre los temas a tratar antes de empezar permite trabajar de una manera más efectiva, haciendo que los contenidos se perciban cercanos y accesibles y, sobre todo, interesantes.

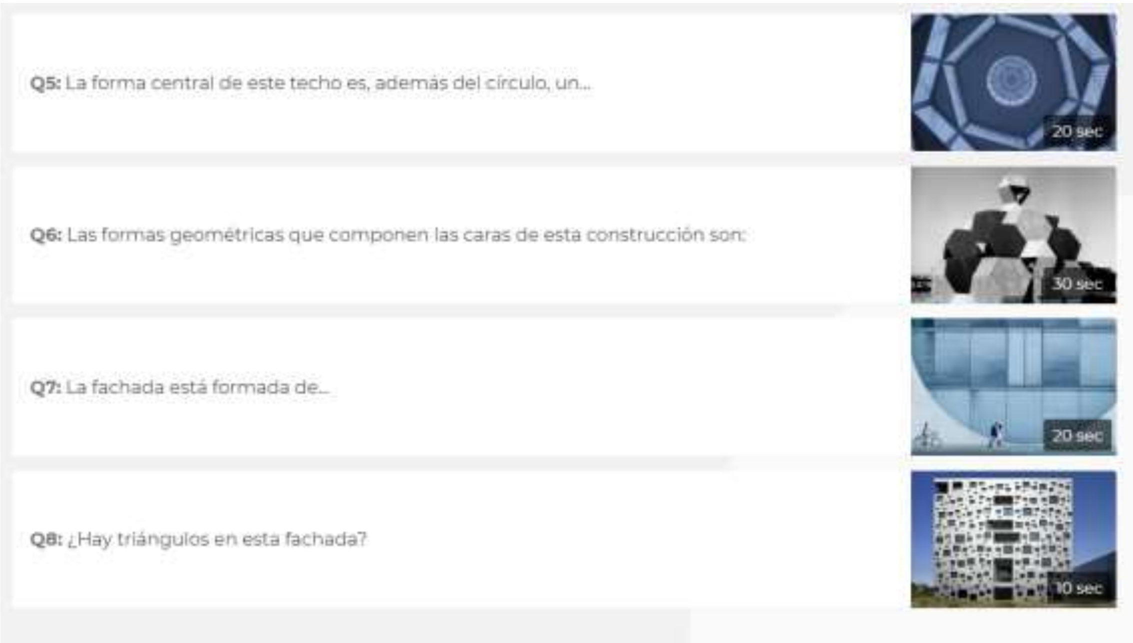
1. Reconocer y describir los elementos y propiedades características de las figuras planas, los cuerpos geométricos elementales y sus configuraciones geométricas.

A la hora de trabajar con los alumnos el Bloque de Geometría, al igual que sucede con el resto de bloques temáticos, es recomendable comenzar con ejercicios que permitan al profesor evaluar el nivel de conocimientos que poseen, con el fin de configurar mejor las sucesivas clases, incidiendo más en unos aspectos o reforzando otros.

Las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) tienen la ventaja de que posibilitan la realización de ejercicios de reconocimiento de tipo visual de forma rápida y sencilla, ya sea mediante el ordenador o el móvil. Para este apartado emplearemos un ejercicio diseñado mediante el programa gratuito *Kahoot*. Este programa permite la realización en línea de tests multirrespuesta en los que cada alumno, desde su dispositivo, emite una respuesta de manera individual para cada cuestión planteada. Además, el ejercicio se puede configurar controlando el tiempo destinado a cada pregunta (evitando que la actividad se alargue más de un tiempo establecido) y al finalizar se obtienen los resultados de aciertos y fallos de manera individual y colectiva, lo que permite controlar aquellos conceptos que dominan mejor y peor, reforzándolos.

El ejercicio diseñado consiste en una sesión de reconocimiento y evaluación de conocimientos previos de Geometría, una vez repasada la clasificación de diferentes formas y figuras geométricas que deben saber. Para comprobar los conocimientos ya refrescados y, además, evaluar su visión espacial, las figuras geométricas forman parte de ejemplos de arquitectura y urbanismo. A continuación, capturas del ejercicio realizado (cuestionario de 8 preguntas):





Figuras 5 y 6: Cuestionario de preguntas sobre Geometría. (Fuente: https://create.kahoot.it/share/geometria-en-arquitectura/6b3098fe-3c34-4252-bb72-91852f970d51)

Figura 7: Pregunta con las diferentes respuestas posibles. Cuestionario de preguntas sobre Geometría. (Fuente: https://create.kahoot.it/share/geometria-en-arquitectura/6b3098fe-3c34-4252-bb72-91852f970d51)

1.1. Conoce las propiedades de los puntos de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo, utilizándolas para resolver problemas geométricos sencillos.

Es recomendable que la explicación de conceptos generales y fundamentales de la geometría se realice de la manera más clara y precisa posible, sin que la atención del alumno se dirija a otros aspectos secundarios. En este caso, la explicación de la bisectriz y la mediatriz como lugares geométricos es complicada de entender, por lo que no se proponen recursos de arquitectura para trabajarla. Sí se recomienda, por otra parte, que se desarrolle mediante el programa *Geogebra*, que facilita enormemente el aprendizaje por su capacidad para manipular a voluntad los conceptos matemáticos gráficamente.

1.2. Maneja las relaciones entre ángulos definidos por rectas que se cortan o por paralelas cortadas por una secante y resuelve problemas geométricos sencillos.

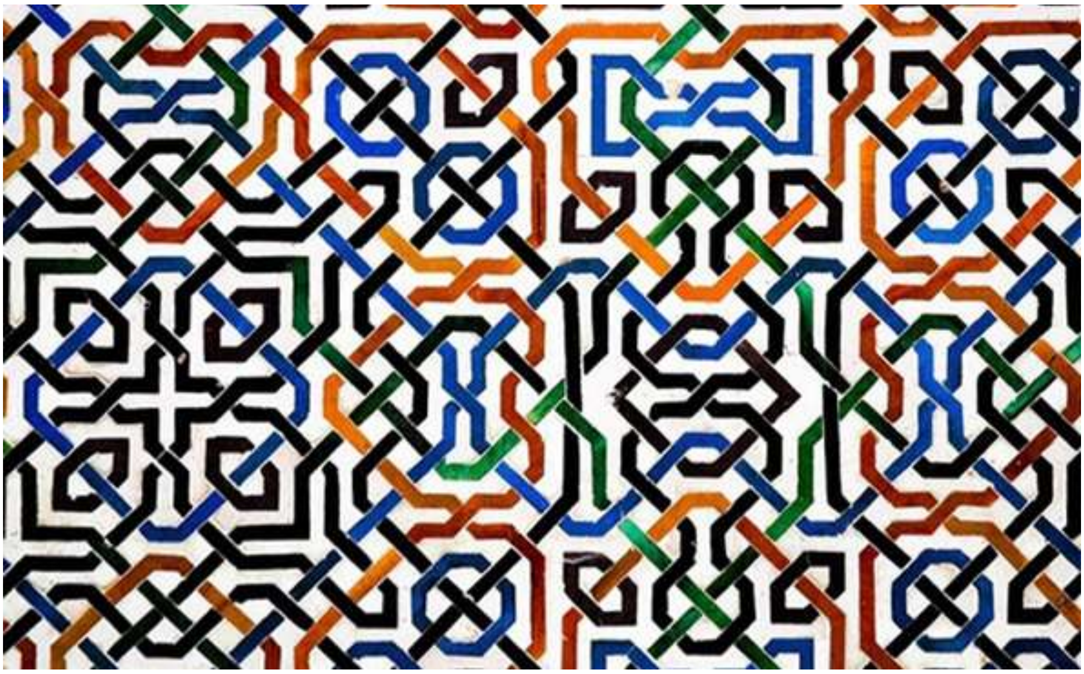
Existen numerosos ejemplos de elementos arquitectónicos en los que las relaciones geométricas se manifiestan de manera clara. En este caso, se han seleccionado una serie de mosaicos de origen islámico con motivos geométricos en los que las figuras se intersecan unas con otras, generando ángulos de diversa amplitud.

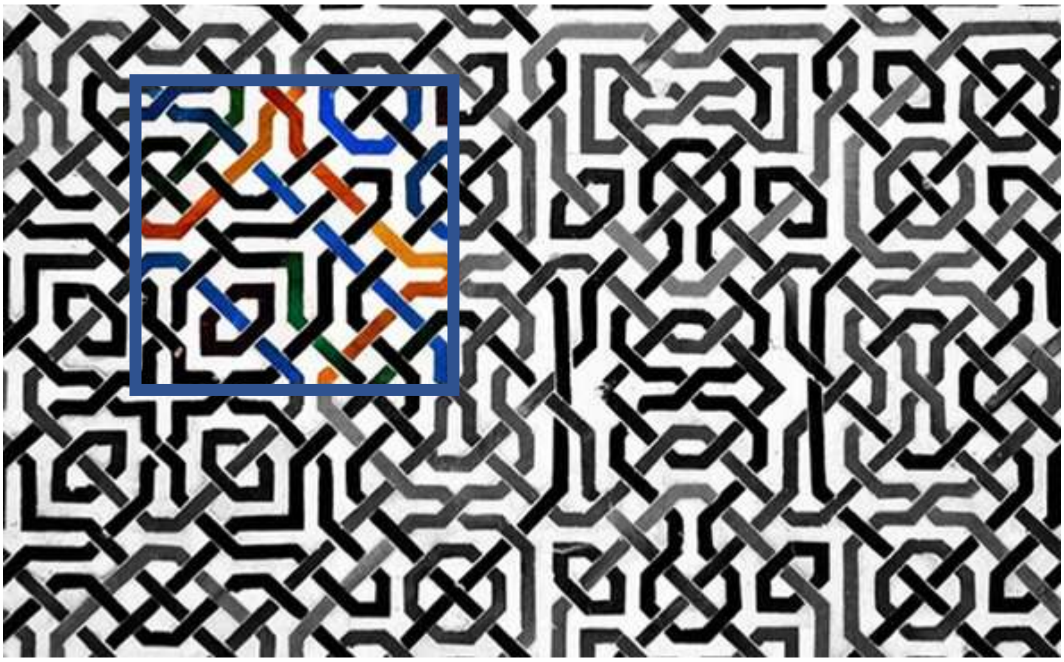
Para trabajar este apartado, se propone que los alumnos trabajen de manera manual (imprimiendo copias de los mosaicos) o mediante el ordenador sobre las diferentes composiciones, calculando los ángulos que forman las figuras entre sí mediante transportadores y reglas.

Figura 8: Ejemplo de mosaico con teselación de cuadrados, rectángulos y estrellas. Las relaciones angulares entre los paralelepípedos forman 90º entre sí, mientras que la estrella forma ángulos de 45º. (Fuente: Cosmos y Matemáticas, una Miscelánea de Euclides 59, 2015)

Figura 9: Ejemplo de mosaico de la Alhambra con teselaciones lineales libres en el que las figuras forman ángulos de 45º y 90º entre sí.

A continuación, se explica la estructura de un ejercicio de reconocimiento de ángulos y problemas sencillos con ellos. En primer lugar, sobre un diseño geométrico de la decoración interior de la Alhambra (ver Figura 10), se aísla una región a voluntad del alumno con la que trabajará (ver Figura 11). En segundo lugar, se simplifican las formas geométricas existentes convirtiéndolas en rectas (ver Figura 12). En tercer y último lugar, se calculan las relaciones entre estas rectas de manera gráfica.





Figuras 9 y 10: Ejemplo de mosaico de la Alhambra, con zona seleccionada. (Fuente del original sin modificar: https://myloview.es/cuadro-geometria-magica-mosaico-de-la-alhambra-no-F880DC)

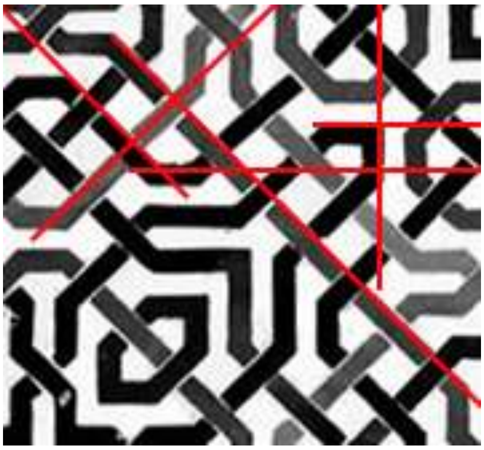


Figura 11: Zona seleccionada del mosaico con líneas marcadas. Los ángulos entre las diferentes teselas son variables, existiendo de 30º, 45º, 60º y 90º. (Fuente del original sin modificar: https://myloview.es/cuadro-geometria-magica-mosaico-de-la-alhambra-no-F880DC)

2. Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos.

El Teorema de Tales tiene una relación directa con arquitectura, pues se cuenta en muchos libros de texto la anécdota de cómo Tales de Mileto calculó la altura de la pirámide de Keops usando únicamente su bastón y la luz del sol. Empleando su ingenio, esperó a que la sombra proyectada por la pirámide estuviese paralela a su lado y clavó su bastón en la arena. La longitud de la sombra de la pirámide sumada a la distancia desde el lado al eje central, la longitud del bastón y de la sombra arrojada por él le permitieron calcular con notable precisión su altura real mediante una regla de tres, una proporción (ver Figura 12).

Sobre este concepto se puede trabajar en clase, introduciendo formas arquitectónicas más sencillas sobre las que puedan aplicar la semejanza de triángulos o triángulos en posición de Tales. Una vez comprendido su funcionamiento, se pueden proponer ejercicios en los que se calculan las alturas de diferentes espacios de un edificio en sección, conociendo la relación entre las sobras que arrojan sobre el suelo (ver Figura 13).

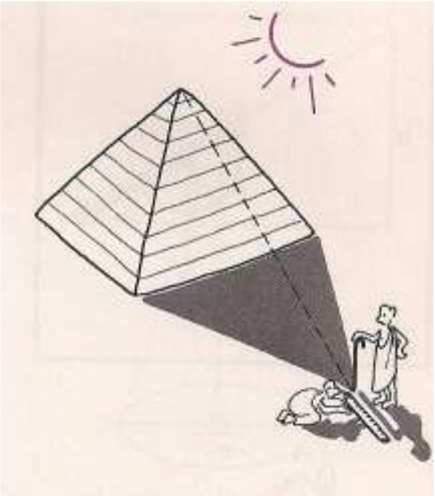


Figura 12: Tales de Mileto calculando de la altura de la pirámide de Keops. (Fuente: https://matematicascercanas.com/2014/04/06/la-piramide-de-keops/)

Figura 13: Cálculo de altura de un edificio en sección a partir de las sombras arrojadas. (Fuente: https://mrmannoticias.blogspot.com/2010/04/secciones-en-arquitectura.html)

2.1. Calcula el perímetro y el área de polígonos y de figuras circulares en problemas contextualizados aplicando fórmulas y técnicas adecuadas.

Siguiendo la misma premisa que en otros apartados, una vez que se poseen los conocimientos básicos a la hora de operar con las diferentes figuras geométricas, áreas y perímetros, se puede recurrir a ejemplos de arquitectura reales para que los alumnos dejen de calcular dimensiones o medidas solo de figuras abstractas. Se propone trabajar con áreas y perímetros de elementos conocidos o cercanos a ellos, como pueden ser estancias o espacios del instituto, zonas próximas y conocidas de su entorno o elementos arquitectónicos de la cultura popular, como un estadio de fútbol, con el fin de despertar su curiosidad por el tema.

En el caso de recurrir a superficies del centro educativo, las dimensiones exactas de cada aula son de acceso público y su geometría está resuelta por la obligación de todos los centros de presentar un plan de evacuación de incendios de cada aula, por lo que el profesor no tiene que ponerse a medir y calcular previamente los espacios.

Para obtener las medidas de la clase se puede realizar una sesión en la que se trabaje aprendiendo a usar los diferentes aparatos y herramientas existentes, como la regla, el metro, el cuentapasos u otros. Una vez obtenidas las medidas, se pueden situar sobre el plano y obtener la superficie. Es habitual que la forma de la clase no sea un rectángulo o un cuadrado perfecto, sino figuras geométricas complejas, por lo que, para calcular el área, aprenderán a realizar la división en figuras más sencillas con las que trabajar. También es interesante introducir en esta etapa el concepto de "triangulación", muy utilizado en arquitectura y que sirve para comprobar ángulos rectos y verificar ángulos en polígonos irregulares, aunque lo aplicaremos solo al primer caso.

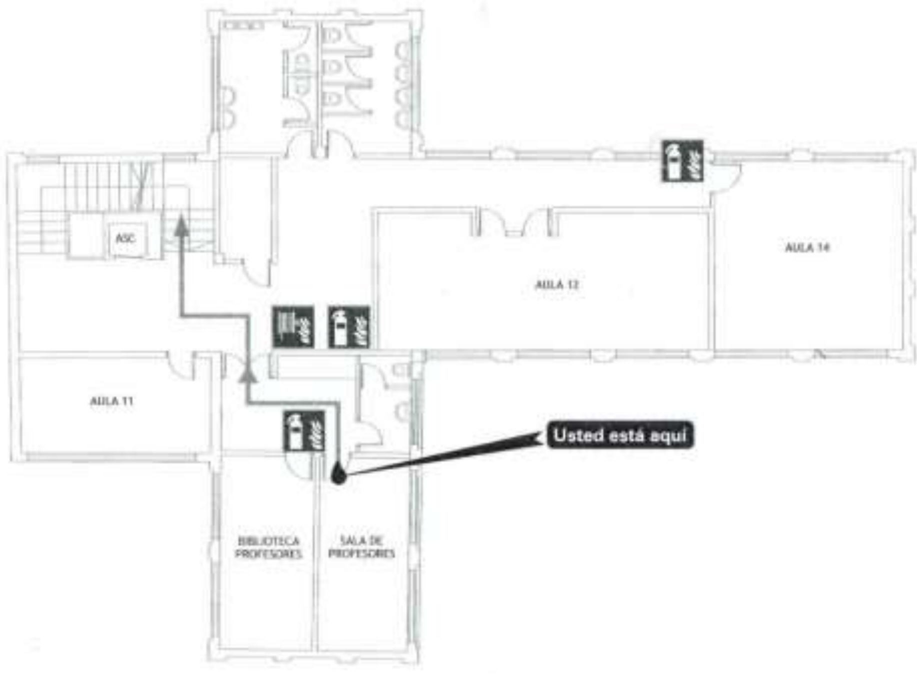


Figura 14: Plano de la 1ª planta del CEPA Mar Amarillo de Hortaleza. (Fuente: CEPA Mar Amarillo).

Por otra parte, considero que la introducción de elementos arquitectónicos de edificios relevantes para ejercitar el cálculo de perímetros y áreas puede ayudar a mejorar su visión espacial y entender las relaciones que pueden deducirse entre diversos elementos geométricos, además de despertar la curiosidad por la historia y la cultura y motivar su estudio, especialmente con aquellos edificios a los que no tienen acceso y tienen características únicas.

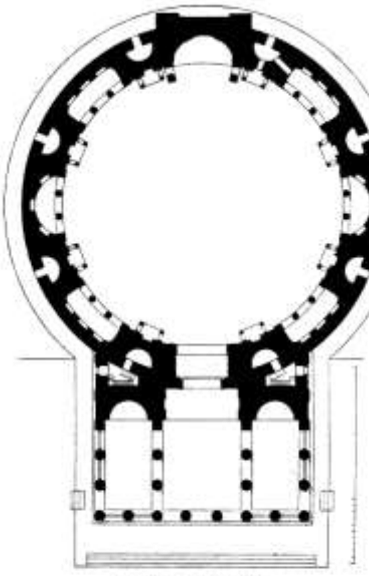


Figura 15: Planta del Panteón de Roma. Ejemplo claro de relación entre elementos circulares y rectangulares. (Fuente: Roth, L., 2012)

2.2. Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.

Uno de los conceptos de geometría que más les cuesta asimilar a los alumnos es el teorema de Tales, por el cual la división de dos rectas secantes por otras rectas paralelas entre sí genera segmentos proporcionales. Partiendo de este teorema se puede trabajar con triángulos semejantes, como se ha explicado en el apartado 2.

En la arquitectura civil existen numerosos ejemplos de puentes construidos con tensores, como es el caso del Golden Gate de San Francisco, en el que las catenarias forman, vistas de perfil, triángulos rectángulos casi perfectos. Un ejercicio puede consistir en que los alumnos, gráficamente, calculen las proporciones entre los lados de cada triángulo delimitado por un tensor vertical, aumentando progresivamente y comprobando que esta relación se mantiene. En otras figuras geométricas se pueden aplicar construcciones gráficas semejantes, aislando elementos proporcionales a otros como en el caso de las fachadas por panelización.

Figura 16: Golden Gate de San Francisco. (Fuente: Miguel García García)

2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.

De acuerdo con la definición, un triángulo es semejante a otro si sus ángulos no cambian, por lo que se aplicaría el teorema de Tales. Su puesta en práctica puede realizarse a través de ejercicios como los vistos anteriormente o, de manera más entretenida para los alumnos, a través de cuestionarios como los del programa *Kahoot*.

3. Calcular (ampliación o reducción) las dimensiones reales de figuras dadas en mapas o planos, conociendo la escala.

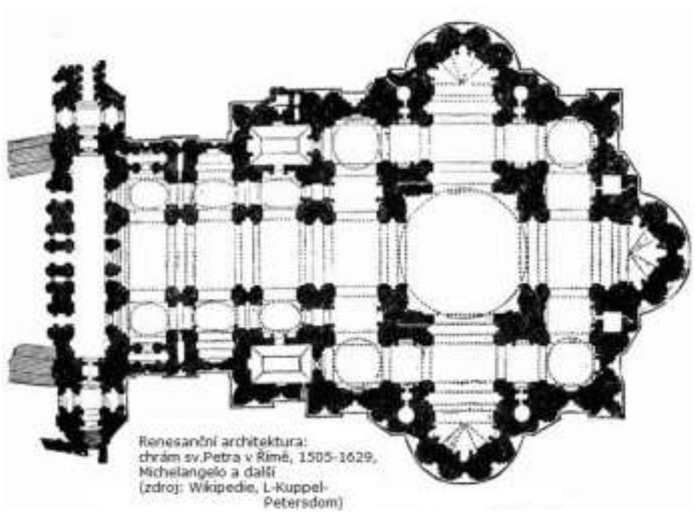
El tema de semejanza es uno de los apartados que más oportunidades presenta a la hora de trabajar desde una perspectiva arquitectónica, y el concepto de escala permite explicar de manera muy visual y sencilla la relación entre ambos.

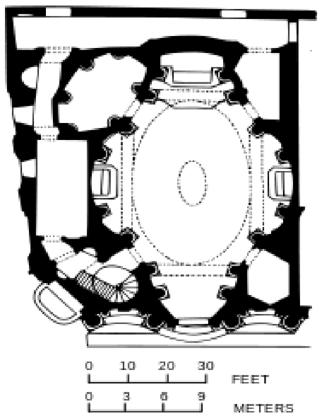
Para ello se puede trabajar con fotografías de objetos, que se ven más pequeños de lo que son en la realidad (aunque en el fondo es la semejanza entre un objeto en 3 dimensiones y uno de dos dimensiones), pero sobre todo con maquetas y planos de edificios o lugares relevantes o conocidos por el alumnado. También se puede aplicar a mapas, aunque las dimensiones mucho mayores del territorio, con escalas de 1:10000, 1:250000 o 1:1250000, son poco abarcables por los alumnos e interesa que manejen con soltura el concepto.

Es por ello que las escalas recomendables sean aquellas que, además de ser de uso más común, permitan unos cálculos redondos y directos. Es el caso de escalas como 1:1 (para la escala real); 2:1, 5:1 y 10:1 (para ampliación) y 1:10, 1:100 y 1:200 (para reducción).

Las escalas nos permiten relacionar elementos en un mismo espacio. Se propone, como ejercicio muy sencillo, comprobar si una serie de objetos introducidos en un plano a escala de su clase están representados de manera correcta. Algunas piezas de mobiliario podrían ser demasiado grandes y otras demasiado pequeñas, y ellos, de manera gráfica, podrían calcular la escala real a la que están dibujados si se da una medida de la misma, calculando también cuál debería ser su representación correcta.

Otra forma de expresar estas relaciones de diferentes escalas es, por ejemplo, comparar dos edificios muy significativos como, por ejemplo, las iglesias de San Pedro del Vaticano y San Carlo alle Quattro Fontane, ambas en Roma. Si ponemos una planta al lado de la otra (ver Figuras 17 y 18) (convendría explicar previamente qué es una planta, así como el concepto de sección y otra terminología propia de arquitectura que pudiese suscitar dudas) no observamos gran diferencia. Pero si podemos ambas juntas a la misma escala, veremos el tamaño de San Carlo, popularmente conocida como San Carlino, en comparación con San Pedro (ver Figura 19).





Figuras 17 y 18: San Pedro del Vaticano y San Carlo alle Quattro Fontane, Roma. (Fuente: Wikipedia)

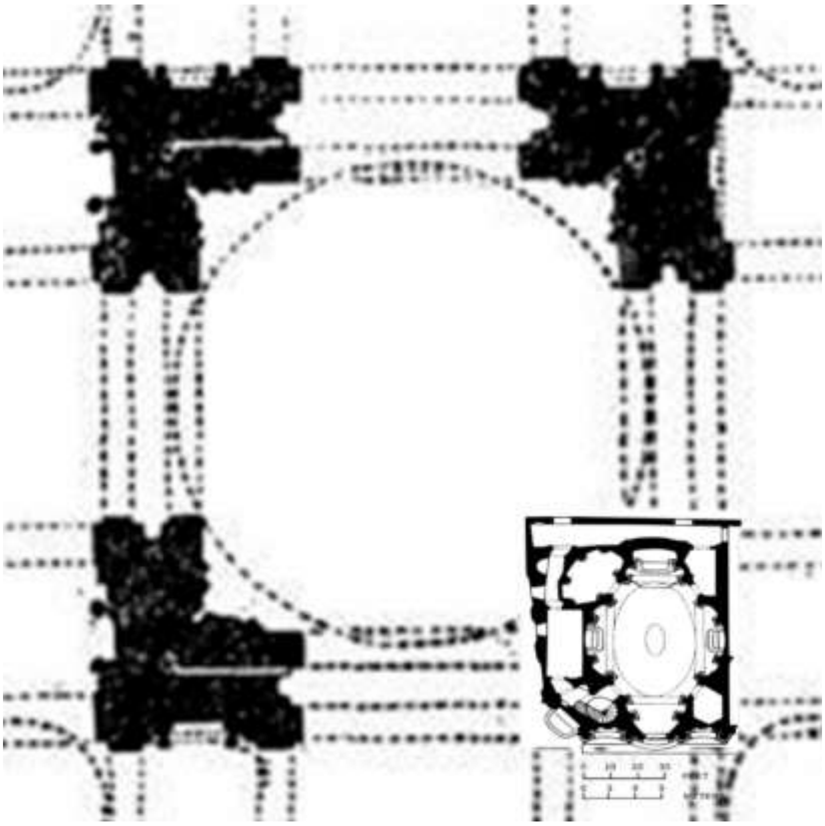


Figura 19: Simulación del tamaño real de San Carlo alle Quattro Fontane comparándolo con un pilar del crucero de San Pedro del Vaticano.

3.1. Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.

En el apartado 3. Se ha desarrollado de manera extensa las posibilidades de calcular las dimensiones reales de elementos conociendo una medida y la escala a la que está dibujado.

4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Existen numerosos ejemplos de diseños y obras de arte compuestas a partir de los movimientos en el plano de una serie de figuras, aunque quizás los más significativos sean los mosaicos geométricos del arte islámico, que fueron llevados a su máxima expresión por la prohibición expresa del Corán de crear arte figurativo.

Los movimientos en el plano son los siguientes:

- Movimientos isométricos o isometrías: No alteran la relación entre los ángulos y las distancias entre sus puntos. Son las traslaciones, las simetrías (también denominadas reflexiones) y los giros.
- Movimientos no isométricos u homotecias: Alteran la relación entre los ángulos de las figuras.

Los movimientos que se estudian dentro de los contenidos de 3º ESO son las isometrías, por lo que no se desarrollarán las homotecias.

La traslación consiste en el desplazamiento de una figura mediante un vector, que marca como referencias el punto de origen y el punto final. Las traslaciones pueden ejercitarse mediante el análisis de frisos griegos y romanos (cuyo símil más próximo en la actualidad serían las cenefas decorativas de los cuartos de baño) y la identificación del patrón que se repite. Además, la actividad podría desarrollarse más, proponiendo la creación de un motivo o elemento que, puesto en hilera, simulase una composición continua.

La simetría, considerando solo la simetría plana, consiste en la correspondencia de forma, posición y tamaño respecto de un punto o una recta de un elemento o elementos, como si del reflejo de un espejo se tratase. La simetría puede ejercitarse a través del análisis de plantas y fachadas de edificios de influencia clásica, buscando y dibujando los ejes o puntos de simetría (ver Figura 20).

El giro consiste en hacer rotar cada punto de una figura un mismo ángulo en torno a un punto que se denomina centro. El giro puede trabajarse mediante el análisis de elementos decorativos circulares, como los rosetones de las iglesias góticas.

La realización de dos o más movimientos isométricos en el plano es considerada una composición de movimientos, cuyos ejemplos más destacados son los mosaicos, obras consistentes en la colocación de piedras de diferentes formas y colores para crear dibujos. Una propuesta de trabajo con este apartado consiste en la realización de un mosaico partiendo de piezas geométricas dadas (normalmente rígidas o de gomaespuma), que los alumnos deben colocar hasta cubrir todo el espacio sin dejar huecos entre ellas. Este ejercicio sirve para desarrollar sus capacidades de visión espacial y aprenden, a través de prueba y error, a reconocer qué figuras pueden ponerse juntas y cuáles no. Una vez hayan aprendido a trabajar con ellas, pueden dar el paso y crear un mosaico con sus propias teselas, como si de un cuadro de Escher se tratase.

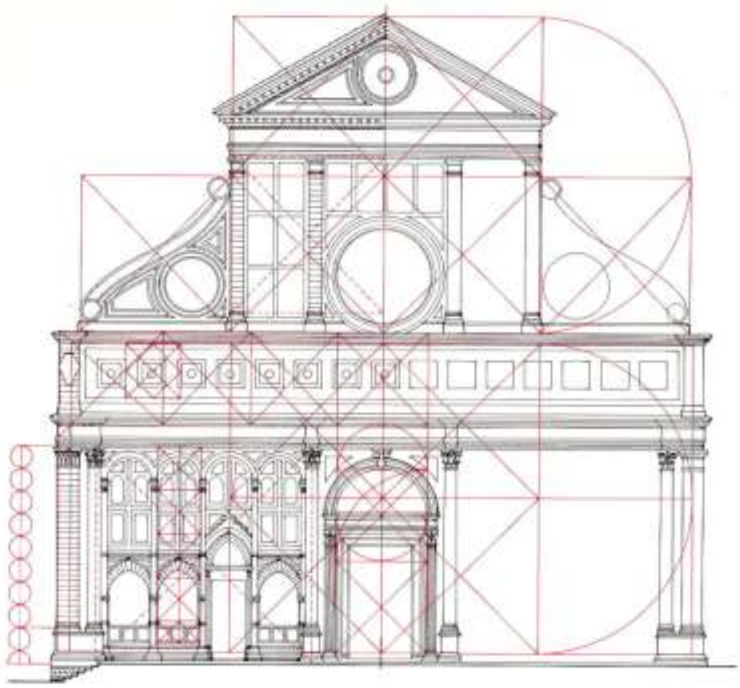


Figura 20: Santa María Novella en Florencia, de Brunelleschi. (Fuente: Wikipedia, 2016)

4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte.

Este contenido está desarrollado de manera extensa en el apartado 4.

4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

Este contenido está desarrollado de manera extensa en el apartado 4., señalando que, si bien cuando empiezan a entender cómo funciona un mosaico y qué piezas pueden poner juntas es recomendable que trabajen de manera manual, a la hora de crear su propia tesela pueden trabajar mejor con el programa *Geogebra*.

5. Identificar centros, ejes y planos de simetría de figuras planas y poliedros.

En relación con lo expuesto en el apartado 4., se pueden identificar centros y ejes de simetría en ejemplos de plantas y alzados de arquitectura clásica y moderna. Sin embargo, para trabajar con los planos de simetría es necesario que el alumno haya desarrollado una visión espacial volumétrica suficiente para entenderlo. Una actividad para ejercitar este apartado se puede llevar a cabo mediante programas de realidad aumentada, como es el caso de la aplicación gratuita AR Platonic Solids, que permite mediante el escaneado de un código QR observar diferentes poliedros complejos. Diversos programas similares permiten interactuar con las figuras, realizando cortes al azar o por sus ejes de simetría, pudiendo ver el resultado.

5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.

Este contenido está desarrollado de manera extensa en el apartado 5.

5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.

Para calcular áreas y volúmenes de poliedros, se puede comenzar recurriendo al mismo ejemplo de la parte de perímetros y áreas de figuras planas: la propia clase o espacios cercanos o conocidos por los alumnos. Existen numerosos ejemplos en arquitectura, sobre todo en arquitectura moderna, en los que se trabaja con formas puras no habituales, por lo que puede presentar el edificio y posteriormente calcularlo.

Figura 21: Ericsson Globe Arena de Estocolmo. (Fuente: Wiwibloggs, 2016)

Introducir la geometrización de la realidad como una manera de percibir la matemática de todas las formas abstractas que nos rodean. El hecho de que el tronco de un árbol pueda ser un cilindro y la copa un cono o una esfera o que los edificios sean prismas permiten a los alumnos visualizar y relacionar los conceptos estudiados con la realidad y obtener de ella ejemplos con los que trabajar.

5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

Una forma de trabajar este contenido es el desarrollo de los mosaicos, vistos en apartados anteriores, pero en este caso de manera volumétrica, planteando al alumno el reto de crear una tesela en 3D que fuese capaz de llenar todo el espacio. Los programas de software como *Rhinoceros* o *Sketch Up* permiten operar de manera rápida, intuitiva y visual con ello, y el programa *Pepakura* permite obtener el desarrollo plano de esa figura con pestañas para poder pegarla o imprimirla mediante una impresora 3D.

Otro ejemplo son las escaleras de caracol, que sirven para estudiar los giros con traslaciones en el espacio.

6. Interpretar el sentido de las coordenadas geográficas y su aplicación en la localización de puntos.

En este apartado no es posible introducir conceptos de arquitectura que ayuden a comprender mejor los contenidos que se imparten.

6.1. Sitúa sobre el globo terráqueo ecuador, polos, meridianos y paralelos, y es capaz de ubicar un punto sobre el globo terráqueo conociendo su longitud y latitud.

En este apartado no es posible introducir conceptos de arquitectura que ayuden a comprender mejor los contenidos que se imparten.

Otros conceptos

- Presencia de las cónicas en plazas de toros y rotondas (circunferencias) y como ornamentación y trazado de jardines (elipses, parábolas e hipérbolas).
- Demostración del teorema de Pitágoras mediante el método con cuerdas inventado por los babilonios.
- Composición de figuras a partir de fractales, un recurso vital a la hora de recubrir con paneles una fachada sin necesidad de cortar las piezas.
- Análisis del concepto de triangulación y su relación con la arquitectura y las estructuras de los edificios. Existen numerosos ejemplos de su uso para cubrir grandes luces, como en gimnasios, estadios, etc. De su aplicación podemos enseñar el concepto de triángulo como la forma irreducible e indeformable de la geometría.

3. Propuesta de intervención y trabajo de campo

3.1. Introducción

Durante la elaboración de este trabajo, uno de los objetivos específicos era poder llevar a la práctica alguna de las propuestas recogidas para la adaptación de la Arquitectura a los contenidos de Geometría de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Para poder realizarlo, se prolongó el periodo de prácticas del módulo específico que se iban a realizar en el CEPA Mar Amarillo de Hortaleza con el fin de coincidir con la impartición de estos contenidos según la Programación del Departamento de Matemáticas. La propuesta consta de las siguientes partes:

En primer lugar, se desarrolla el contexto del centro de prácticas y su alumnado, señalando los condicionantes del entorno, las particularidades de la Enseñanza para Adultos y los retos a los que se enfrenta, así como las necesidades del alumnado.

En segundo lugar, se estructura la propuesta de acuerdo a los contenidos que se quiere impartir, la metodología a emplear y el tiempo disponible, secuenciando la propuesta en seis sesiones a lo largo de dos semanas.

En tercer lugar, se establecen una serie de objetivos a conseguir sobre la experiencia y la manera de evaluar su complimiento

Por último, se realiza un análisis y una posterior evaluación de los resultados obtenidos en el trabajo de campo, obteniendo unas conclusiones parciales de la propuesta de intervención.

3.2. Contexto de centro y alumnado

El centro educativo donde se ha realizado el trabajo de campo es el Centro de Educación Para Adultos (C.E.P.A.) Mar Amarillo de Hortaleza (Madrid), situado en el casco antiguo del que fue el pueblo con el mismo nombre, y más concretamente en el barrio de Pinar del Rey, uno de los seis barrios que lo componen en la actualidad. Este barrio es el de mayor densidad de población y el más poblado del distrito, con unos 52.274 habitantes de un total de 183.930 (Censo de enero de 2018). Además, es el barrio con mayor presencia de población extranjera, con un 9,7 %, frente al 5,6% del distrito.

Pinar del Rey se considera un entorno social de clase media-baja, tanto en lo económico como en lo cultural, y no ha sido ajeno a la crisis económica que ha afectado a todo país, con un porcentaje de paro que asciende al 14,37%, ligeramente por encima de la media de Madrid, siendo además un 36,44% los parados de larga duración, afectando más a las mujeres que a los hombres. Es también significativo el aumento del desempleo juvenil, entre 20 y 34 años, que alcanza el 27,8%.En cuanto al nivel de estudios entre la población mayor de 25 años, el barrio de Pinar del Rey es el que concentra el mayor número de personas sin estudios que no saben leer ni escribir o que no han acabado la Educación Secundaria Obligatoria de todo el distrito de Hortaleza, llegando hasta el 23,93%. Para dar formación y oportunidades a este gran porcentaje de la población, existen en el distrito de Hortaleza tres Centros de Educación Para Adultos (C.E.P.A.): el C.E.P.A. Mar Amarillo, el C.E.P.A. Dulce Chacón y el C.E.P.A. Pablo Guzmán. Sin embargo, debido a la mayor presencia de población extranjera en Pinar del Rey, el C.E.P.A Mar Amarillo es el único que cuenta en su oferta educativa con Español para Extranjeros.

El C.E.P.A. Mar Amarillo es un centro que alberga una gran diversidad de alumnado con características muy heterogéneas, conviviendo todos en un espacio muy reducido. Un porcentaje elevado del alumnado matriculado en el centro pertenece a las Enseñanzas de formación básicas (Enseñanzas Iniciales y Secundarias), y el resto está matriculado en las Enseñanzas para el Desarrollo Personal y la Participación y en Español para Extranjeros. Respecto a la edad, un 46% son mayores de 50 años y un 30% están entre 18 y 24 años, existiendo por tanto una gran pluralidad en el alumnado.

Centrándonos en las Enseñanzas Secundarias, estas están divididas en dos ciclos: el Nivel I, que corresponde con los cursos de 1º y 2º E.S.O., y el Nivel II, que corresponde con los cursos de 3º y 4º E.S.O. Están enfocadas en la obtención del Título de Graduado en Educación Secundaria, requisito casi imprescindible en la actualidad para encontrar un empleo medianamente digno. En estos grupos la distribución por sexos es de un 60% hombres y un 40% mujeres, y son muy heterogéneos, aunque la mayor parte del alumnado se sitúa en la franja de edad comprendida entre los 18 y los 30 años. El resto se sitúa entre los 30 y los 55 años.

El perfil de los alumnos más jóvenes varía en cada caso, si bien presentan una serie de características comunes, como son su procedencia del abandono o fracaso escolar, presencia de unos malos hábitos de estudio, déficit de atención, hiperactividad, deficiencias psíquicas, escasa cultura del esfuerzo, problemas de adicciones, causas judiciales, escaso nivel en las áreas instrumentales, absentismo o baja autoestima. Su participación en la clase es, en general, escasa o nula. En la mayoría de los casos, una vez obtenido el título de Secundaria continúan estudiando, accediendo a los Ciclos Formativos de Grado Medio de la Formación Profesional.

Por otro lado, los alumnos de mediana edad poseen en su mayoría responsabilidades laborales y/o familiares, que les restan tiempo para dedicar al estudio. Gran parte de ellos abandonaron los estudios hace mucho tiempo, pero muestran gran interés por aprender y esfuerzo, aunque su ritmo de aprendizaje es más lento y se encuentran con más dificultades para adquirir conocimientos complejos, normalmente necesitando más tiempo para alcanzar los objetivos y completar los ciclos. Son participativos y se involucran en las actividades del centro. El profesorado destaca que su influencia en el grupo suele conllevar la creación de un buen clima de trabajo y un elevado grado de cohesión.

3.3. Estructura de la propuesta

En primer lugar, se realizó una búsqueda de los contenidos de Geometría que se tenían que impartir en el Nivel II del Ámbito Científico-tecnológico, que fueron obtenidos del Anexo I.B del Currículo de la Enseñanza Secundaria para las personas adultas, Ámbito Científico-Tecnológico (BOE, 2017). Estos contenidos eran muy concretos en cuanto a los aspectos que se tenían que impartir, y estaban centrados en el reconocimiento de figuras y ángulos y el cálculo de áreas y volúmenes. Una vez consultado el tutor del centro al respecto, se llegó al acuerdo de abordar en la propuesta los siguientes aspectos:

- Aproximación histórica a la Geometría a través de la Arquitectura.
- Repaso de los conocimientos de geometría más básicos (elementos, propiedades y características).

- Iniciación en el manejo del programa *Geogebra*.
- Desarrollo de las U.D. Movimiento y semejanzas y U.D. Áreas y perímetros.
- Evaluación mediante una prueba objetiva de la U.D. Movimiento y semejanzas.

Para su adecuado desarrollo se diseñó un calendario y una propuesta de intervención adaptada al centro durante 17 sesiones, si bien por falta de tiempo se redujo únicamente a la U.D. Movimiento y semejanzas para su impartición en 6 sesiones. A continuación, se desarrolla de forma pormenorizada la temporalización:

U.D.10: Movimiento y semejanzas y U.D. 9: Áreas y perímetros (8 y 9 sesiones)				
Fase inicial	Fase de desarrollo	Fase de síntesis y evaluación	Fase generalización	Total
1	13	3	1	17

Sesión 1	Prueba de uso de *Kahoot* y sondeo inicial de conocimientos de Geometría mediante *Kahoot*. Aproximación histórica a la Geometría a través de la Arquitectura. Presentación del programa *Geogebra*.
Sesión 2	Presentación de los diferentes elementos geométricos y sus características principales mediante *Geogebra*. Presentación de los movimientos sobre el plano. Estudio de las traslaciones. Actividades relacionadas con *Geogebra*.
Sesión 3	Estudio de los giros. Estudio de las simetrías axiales. Actividades relacionadas con *Geogebra*.
Sesión 4	Composición de movimientos. Actividades relacionadas con *Geogebra*.
Sesión 5	Simulacro de prueba objetiva. Realización de un mosaico con *Geogebra*.
Sesión 6	Actividad en el aula de ordenadores relacionada con la U.D. 10. Realización de manera individual de un mosaico con *Geogebra*.
Sesión 7	Relaciones angulares. Actividades con cuerpos geométricos.
Sesión 8	Semejanza de triángulos. Teorema de Tales y sus aplicaciones. Actividades relacionadas.

Sesión 9	Actividades con triángulos semejantes y aplicación del Teorema de Tales.
Sesión 10	Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones. Actividades relacionadas.
Sesión 11	Aplicación algebraica del Teorema de Pitágoras. Lugares geométricos. Actividades relacionadas.
Sesión 12	Áreas de los polígonos. Actividades relacionadas.
Sesión 13	Áreas de figuras curvas. Actividades relacionadas.
Sesión 14	Las cónicas como lugares geométricos. Actividades relacionadas.
Sesión 15	Actividades sobre el temario de la U.D. 9. Y la U.D. 10
Sesión 16	Prueba escrita.
Sesión 17	Corrección de la prueba escrita.

Tabla 5: Pormenorización de la U.D. Movimiento y semejanza (recuadro más oscuro).

3.4. Objetivos

Los objetivos generales de la propuesta de intervención son:

- Mejorar el rendimiento y la actitud de los alumnos hacia la Geometría.
- Evaluar la eficacia y viabilidad de los recursos didácticos planteados.

Los objetivos específicos del trabajo de la propuesta de intervención son:

- Evaluar la estrategia utilizada en el planteamiento y desarrollo de la U.D. Movimiento y semejanzas.
- Recopilar información sobre la asimilación por parte de los alumnos de conocimientos generales sobre la historia de la Geometría.

- Dotar a los alumnos de conceptos geométricos básicos, como son sus elementos, propiedades y características.
- Recoger información sobre la asimilación de los alumnos de los movimientos en el plano y su aplicación a la construcción de un mosaico.

Para estudiar la consecución de los objetivos se han realizado varias entrevistas personales y se ha repartido un cuestionario para la evaluación de la práctica docente, además de llevar a cabo una prueba objetiva con *Geogebra*.

3.5. Análisis y evaluación de los resultados

Las sesiones se realizaron entre los días 1 y 11 de abril en dos grupos diferentes de Nivel II de Educación Secundaria, el Grupo A y el Grupo B.

Grupo A:

SEMANAS	MARTES	MIÉRCOLES	VIERNES	DÍAS
Sistemas de ecuaciones y Geometría	Grupo A (1h) Clase ecu sist.	Grupo A (1h) Clase ecu sist.	Grupo A (2h) Sesiones 1 y 2	1 – 5 ABRIL
Geometría	Grupo A (1h) Sesión 3	Grupo A (1h) Sesión 4 y Prueba	FIESTA	8 – 11 ABRIL

Tabla 6: Horario del Grupo A.

Grupo B:

SEMANAS	MARTES	MIÉRCOLES	VIERNES	DÍAS
Sistemas de ecuaciones y Geometría	Grupo A (1h) Clase ecu sist.	Grupo A (1h) Sesiones 1 y 2	Grupo A (2h) Sesión 3	1 – 5 ABRIL
Geometría	Grupo A (1h) Sesión 4	Grupo A (1h) Sesión 5 y Prueba	FIESTA	8 – 11 ABRIL

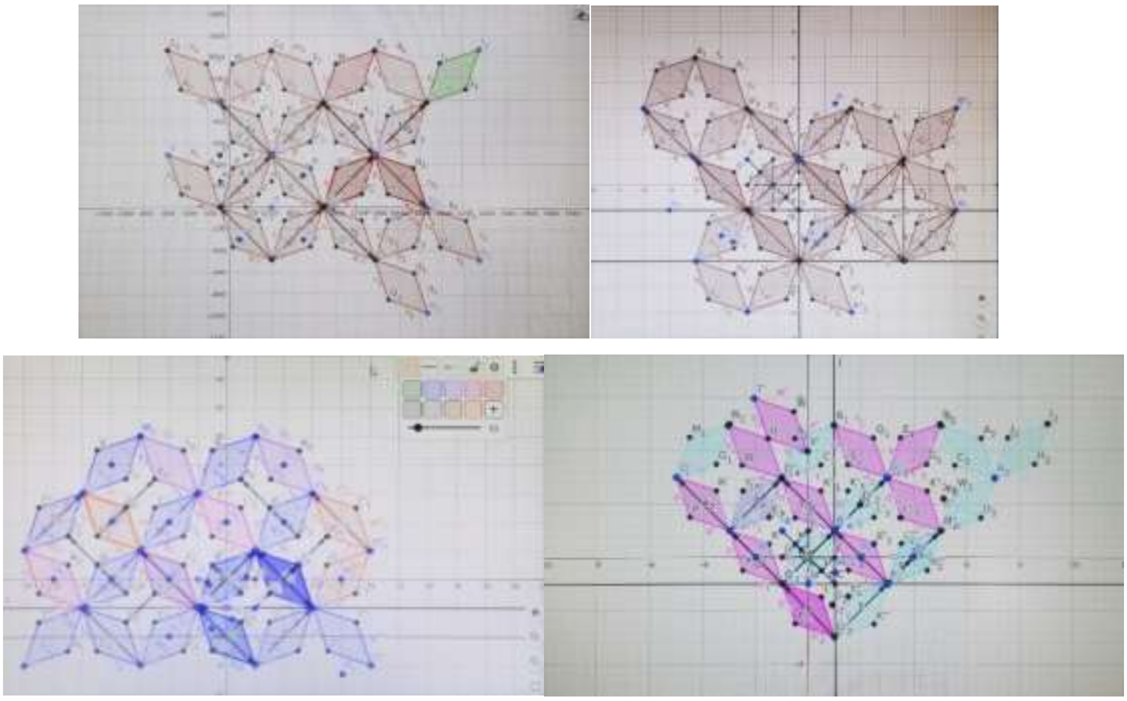
Tabla 7: Horario del Grupo B.

En el Grupo A, el número de alumnos que de manera habitual acudían a clase oscilaba entre 8 y 12, siendo el día de la prueba objetiva 10. En el Grupo B, el número de alumnos variaba entre 3 y 5, siendo el día de la prueba objetiva 5. Por tanto, para la evaluación de los objetivos de la propuesta de intervención se dispone de una muestra de 15 valoraciones, siendo complementadas por 5 entrevistas personales para desarrollar algunos puntos concretos.

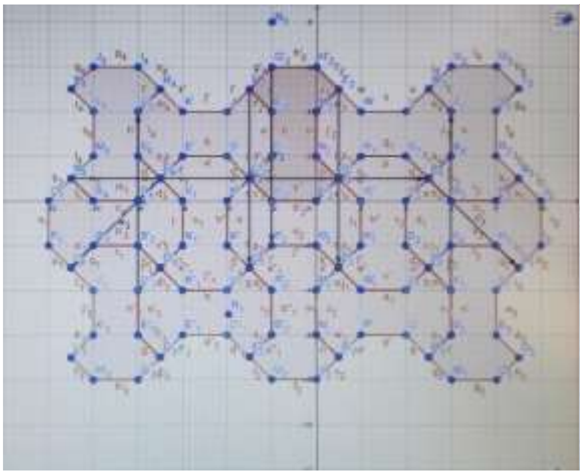
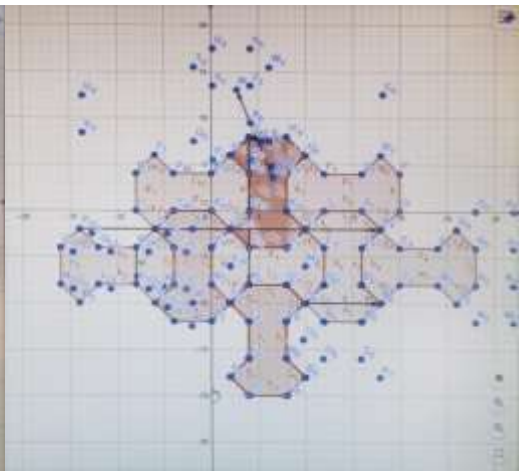
La prueba objetiva consistió en realizar mediante *Geogebra* uno de los diseños de mosaicos propuestos en el plazo de 50 minutos. Aunque la actividad era de carácter individual, se permitió a los alumnos hablar siempre que lo hiciesen puntualmente para resolver dudas sobre el ejercicio. De los 4 diseños sugeridos, 13 alumnos escogieron realizar el modelo 1 (ver Anexo) y 2 alumnos el modelo 4 (ver Anexo). Cabe destacar que uno de los alumnos no solo hizo uno de los mosaicos propuestos, sino que dedicó el resto de la hora a crear su propio diseño.

Durante la prueba, las dificultades se dieron a la hora de aplicar las transformaciones una vez obtenida la tesela, especialmente la traslación, pues el giro y la simetría resultaban más sencillos de utilizar. El programa *Geogebra* no les suponía un problema excesivo, debido a que su interfaz da indicaciones sobre cómo emplear cada elemento y podían borrar y repetir de nuevo con facilidad.

De las 15 personas que realizaron la prueba, solo dos alumnos no consiguieron realizar de manera satisfactoria el mosaico. A continuación, algunos de los resultados obtenidos:



Figuras 22, 23, 24 y 25: Alguno de los ejercicios del diseño de mosaico modelo 1 realizados por los alumnos

Figuras 26 y 27: Ejercicios de diseño de mosaico modelo 4 realizado por dos alumnos

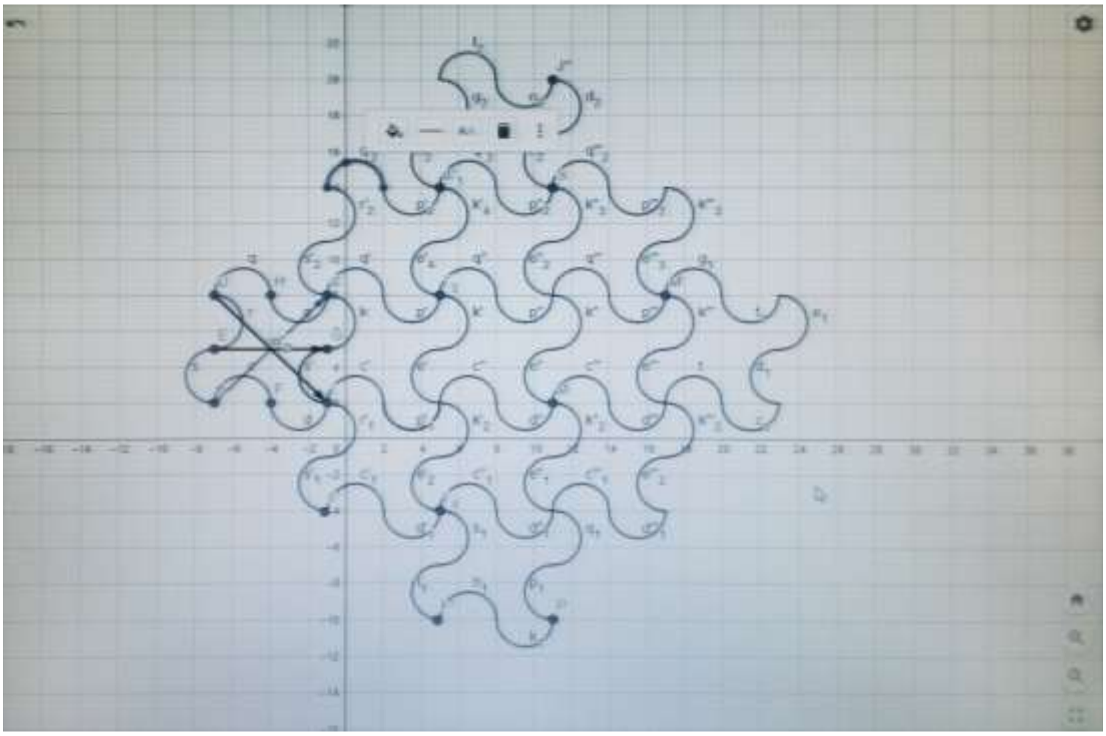


Figura 28: Ejercicio realizado por un alumno sobre un concepto propio.

La valoración final de la prueba es muy positiva, teniendo en cuenta la ausencia de conocimientos previos sobre Geometría y sobre el programa *Geogebra* que tenían, además de las limitaciones propias de unos ordenadores anticuados. Las dificultades técnicas fueron desapareciendo conforme se ejercitaba el programa en clase; sin embargo, no se consiguió que los alumnos fuesen capaces de operar autónomamente con los conceptos más complejos de geometría, debido a una falta de base matemática sólida y una ausencia de visión espacial.

Análisis del cuestionario

Al concluir la realización del ejercicio con *Geogebra*, les fue entregado a los alumnos de ambos grupos un cuestionario (ver Anexo) formado por 22 preguntas de respuesta abierta para que evaluasen la práctica docente por un lado y el apartado concreto de Geometría por otro.

Respecto a la primera parte, considero que no es objeto de estudio del presente trabajo, si bien se puede destacar que, ante la pregunta 2 - ¿Las clases están bien preparadas?, la mayoría de los alumnos respondió positivamente, destacando algunos comentarios como "todo organizado", "dinámicas" y "bastante bien preparadas", y en general todas las respuestas referentes a los aspectos organizativos de clase son positivas. Por tanto, puede decirse que la estrategia seguida ha sido la adecuada.

En cuanto a la valoración de las preguntas sobre Geometría (ver Tabla 8), en las cuestiones sobre conocimientos adquiridos se supera el 80% de aprobación (14, 15 y 16), en la cuestión sobre aclaración de conceptos (18) se llega hasta el 85% y en las cuestiones sobre la enseñanza mediante *Geogebra* y *Kahoot* (20 y 21) la aceptación llega al 80%. En cuanto a la pregunta sobre la viabilidad de enseñar las transformaciones básicas a partir de mosaicos, 3 de 4 la consideran adecuada, si bien en los comentarios algunos matizaban que era "más entretenido que otra cosa".

La pregunta 19, no representada en la Tabla 8, evaluaba la percepción del alumnado acerca del contexto histórico con el que se introducía la Geometría, siendo considerado por un 66% de los alumnos como una mera curiosidad, frente al 33% que lo considera un elemento más de apoyo al aprendizaje.

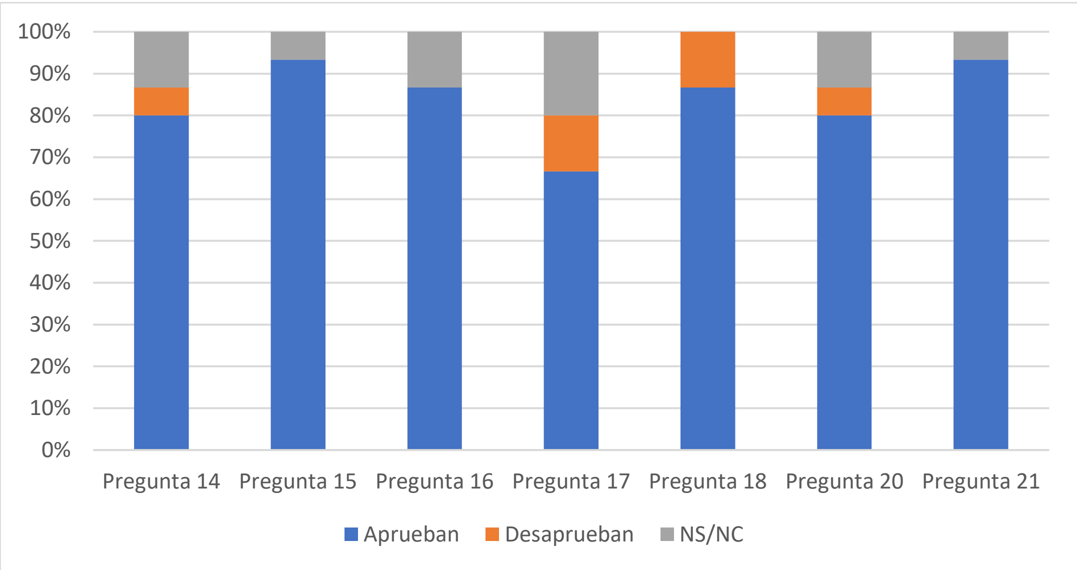


Tabla 8: Valoración de las preguntas sobre Geometría.

Se puede concluir, por tanto, que la percepción de la experiencia ha sido muy positiva, logrando los objetivos propuestos y probando la efectividad de algunos de los recursos didácticos diseñados. Cabe destacar la enorme aceptación que ha tenido la incorporación de las TIC al aprendizaje, sobre todo del *Geogebra*. Muchos de los alumnos han reconocido que "así es más fácil aprender geometría", aunque para ello "debes aprender a manejarlo". En cuanto al Kahoot, la experiencia también es positiva, con comentarios como "ameno y curioso", "adaptación a los avances de la tecnología", "divertido y entretenido", "las cosas se quedan mejor", "sirve como juego y es interesante", etc.

4. Conclusiones

Al inicio del presente trabajo se planteaban una serie de objetivos, de los cuales el principal era la elaboración de una propuesta didáctica fundamentada en la arquitectura para la enseñanza y el aprendizaje del Bloque de Geometría de Matemáticas Académicas en 3º ESO. Para ello se han desglosado los contenidos del currículo, aportando a cada apartado recursos e ideas de actuación, algunas de las cuales han sido puestas a prueba durante el Trabajo de Campo, con resultados positivos, por lo que se puede considerar que el objetivo se ha cumplido.

Por otra parte, se ha realizado un acercamiento profundo a la situación actual de la enseñanza de las matemáticas, a través del análisis y la comparación de diferentes estudios. En el caso concreto de la enseñanza de la Geometría, este aspecto ha quedado enormemente limitado debido a la ausencia de estudios recientes sobre el tema, teniendo que recurrir a estudios de hace más de 20 años. Sin embargo, la información obtenida ha permitido obtener una mirada bastante certera de las necesidades y potencialidades del sistema educativo.

En el caso de las dificultades de los alumnos respecto del temario de geometría, ha sido de gran utilidad poseer una formación específica en Arquitectura, pues permite extraer patrones y entender las dificultades ante determinados ejercicios, analizando hasta llegar a los aspectos más importantes que condicionan el aprendizaje. Por otra parte, la experiencia de las prácticas ha aportado mucha información, no solo sobre lo que puede llegar a saber una persona, sino también sobre lo que retiene, aprendiendo a incidir y reforzar más unos determinados aspectos frente a otros. También han contribuido a encontrar potencialidades de mejora las diferentes entrevistas personales y cuestionarios que se han realizado al alumnado, incorporándolas a los recursos didácticos y la metodología.

Por último, todos los aspectos anteriores han servido para elaborar una propuesta didáctica acorde, recopilando todos los aspectos útiles y de aplicación directa de la arquitectura en la Geometría de 3º ESO de Matemáticas Académicas. El análisis y evaluación de la información recopilada ha mostrado unos resultados sumamente positivos, siendo muy bien recibida la propuesta.

5. Limitaciones y perspectivas de desarrollo

Este trabajo se ha realizado teniendo en cuenta las numerosas limitaciones con las que se ha encontrado a la hora de recopilar información o ponerla en práctica. En primer lugar, se ha trabajado con los resultados de las pruebas PISA y TIMSS correspondientes al año 2015, puesto que los informes de las pruebas realizadas en el año 2018 aún no han sido publicados, limitando esto el alcance y vigencia de alguno de los temas teóricos que se querían tratar. Por otro lado, la ausencia de mecanismos de autoevaluación de la LOMCE y su escasa realización en otros planes educativos provoca que los únicos datos con los que se puede trabajar sobre el aprendizaje de la Geometría sean de los años 1998 y 2010.

Es necesario señalar también que las prácticas han sido realizadas en un CEPA, un Centro de Educación Para Adultos, donde todos los alumnos disponen de un nivel muy bajo, especialmente en matemáticas. Es por ello que, disponiendo de una gran cantidad de material didáctico con el que trabajar, haya tenido que limitarse la experiencia a un ámbito más reducido y con un nivel de exigencia menor.

Finalmente, es importante resaltar el gran potencial que posee el campo de estudio de la Arquitectura en la Geometría en un futuro, debido a la ausencia de publicación e investigación, así como de las propuestas didácticas que finalmente no se han llevado a la práctica.

6. Bibliografía

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para ESO.* Madrid: Síntesis.

Arteaga Martínez, B. (2006). *La educación adaptativa: una propuesta para la mejora del rendimiento en matemáticas de los alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria* (tesis doctoral). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

BOCM (2015). *Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid. Decreto 48/2015, de 14 de mayo, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.

BOE (2006). *Boletín Oficial del Estado. Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.* Madrid: Autor.

BOE (2013). *Boletín Oficial del Estado. Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.* Madrid: Autor.

BOE (2014). *Boletín Oficial del Estado*. *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.* Madrid: Autor.

BOE (2017). *Boletín Oficial del Estado. Orden ECD/651/2017, de 5 de julio, por la que se regula la enseñanza básica y su currículo para las personas adultas en modalidad presencial, a distancia y a distancia virtual, en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte*. Madrid: Autor.

Calderón, J. M. y Luelmo, M. J. (2009). *Rutas matemáticas por Madrid: el eje de la Castellana*. Madrid: Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas.

CEI (2018). *Consejería de Educación e Investigación. Informe 2017 sobre el sistema educativo en la Comunidad de Madrid. Curso 2015 – 2016*. Madrid: Autor.

CEI (2019). *Consejería de Educación e Investigación. Informe 2018 sobre el sistema educativo en la Comunidad de Madrid. Curso 2016 – 2017*. Madrid: Autor.

Corbalán, F. (2010). *La proporción áurea.* España: RBA.

Elam, K. (2017). *La geometría del diseño. Estudios sobre la proporción y la composición.* China: Gustavo Gili.

Gascón, J. (2019). *Cuestionamiento y reorganización de la geometría escolar.* (Conferencia impartida en la Universidad Autónoma de Madrid el 20 de marzo de 2019)

Gómez Urgellés, J. (2010). *Cuando las rectas se vuelven curvas.* España: RBA.

Martín Casalderrey, F. (2010). *La burla de los sentidos*. España: RBA.

Martínez Sevilla, Á., Fernández Morales, F. y Valderrama Ramos, J. (2017). *Paseos matemáticos por Granada.* España: Editorial Universidad de Granada.

ME (2010). *Ministerio de Educación. PISA 2009, Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos, Informe Español.* Madrid: Autor.

ME (2011). *Ministerio de Educación. Evaluación General de Diagnóstico 2010. Educación Secundaria Obligatoria. Segundo curso. Informe de resultados*. Madrid: Autor.

MEC (1998). *Ministerio de Educación y Cultura. INCE. Elementos para un diagnóstico del Sistema Educativo Español. El sistema educativo en el último tramo de la escolaridad obligatoria. Diagnóstico del Sistema Educativo en 1997*. Madrid: Autor.

MECD (2016a). *Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. PISA 2015, Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos, Informe Español.* Madrid: Autor.

MECD (2016b). *Ministerio de Educación, Cultura y Deporte*. *TIMSS 2015. Estudio internacional de tendencias en Matemáticas y Ciencias. IEA. Informe español: resultados y contexto.* Madrid: Autor.

Moya Otero, J. y Luengo Horcajo, F. (2009). *Proyecto Atlántida. Las competencias básicas en la práctica*. Madrid: Proyecto Atlántida.

Navarro, J. (2010). *Al otro lado del espejo.* Navarra: RBA

OCDE (2010). *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. PISA 2009: Tendencias de aprendizaje.* Disponible en https://www.oecd-ilibrary.org/informe-pisa-2009-tendencias-de-aprendizaje_5k9cr2prv...

OCDE (2016). *Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. Informe PISA 2015.* Disponible en https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf

Roth, L. (2012). *Entender la arquitectura, sus elementos, historia y significado.* Barcelona: Gustavo Gili.

RSME (2008). *Real Sociedad Matemática Española. Sobre el Informe PISA 2006 de Matemáticas: tres retos y una petición para los próximos años.* Disponible en https://www.rsme.es/2008/04/reflexiones-de-la-rsme-sobre-el-informe-pisa-2006/

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo Van Hiele y la enseñanza de la Geometría. *UNICIENCIA [En línea]*, Vol. 27, No. 1, [74-94]. Disponible en www.revistas.una.ac.cr/uniciencia (Enero – junio 2013)

Vázquez Hoys, A.M. (2007). *La tablilla Plimpton 322: La resolución del Teorema de Pitágoras antes de Pitágoras.* Disponible en https://www2.uned.es/geo-1-historia-antigua-universal/ASIRIA/BABILONIA/PLIMTOM%20322.htm

7. Anexos

Mosaico modelo 1

MOSAICOS DE LA ALHAMBRA

A continuación aparece la construcción geométrica de algunos de los mosaicos nazaries. Muchas de estas figuras las podemos encontrar en los diseños nazaries de la **Alhambra de Granada**. La construcción de casi todos éstos mosaicos está basada tomando como polígono base el **cuadrado**, en éste sentido podemos decir que, **La Alhambra, es el reino del cuadrado**, lo encontramos de forma explícita en azulejos que recubren las paredes y otras veces los cuadrados quedan ocultos tras otras formas.

1.-ROMBOS

1.-Dibuja un cuadrado. Traza en él una de las diagonales y las lineas que unen los puntos medios de lados opuestos. (Utiliza las herramientas punto medio y segmento) 	2.-Une con segmentos paralelos a la diagonal: 
3.-Traza la otra diagonal y marca los puntos de intersección 	4.-Marca el rombo y colorealo: 
5.-Mediante simetrías axiales con respecto a los lados del cuadrado, obtendrás la figura mínima:	6.-Selecciona la figura mínima y corta y pega para obtener el mosaico: 

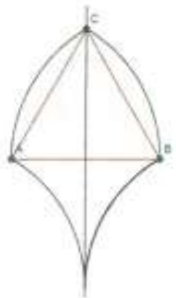
Mosaico modelo 2

2.-PÉTALO

1.-Dibuja un triángulo equilátero y desde el vértice B verde traza con la herramienta arco de circunferencia un arco de circunferencia de C a A

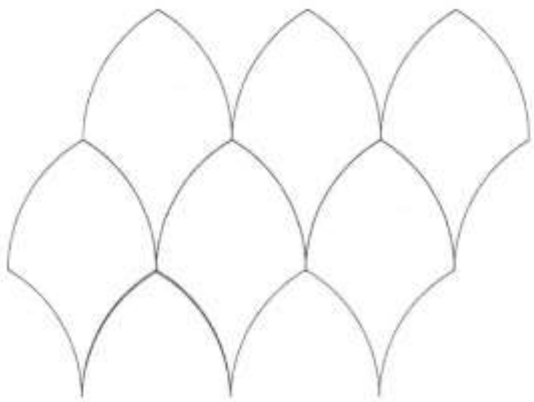
2.-Rota ese arco alrededor de A 120º en sentido horario

3.-Traza la mediatriz de la base y haz la simetría axial de ambos arcos respecto a la mediatriz



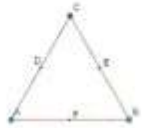
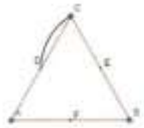
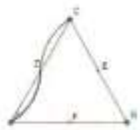
4.-Borra lo que sobra y tendrás el pétalo

5.-Selecciona la figura y dale a cortar y pegar para obtener tu mosaico



Mosaico modelo 3

3.-PAJARITA

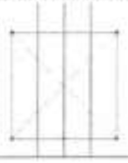
Dibuja un triángulo equilátero y señala los puntos medios de sus lados 	2.Traza un arco de circunferencia con centro E y que vaya de C a D 
3.-Haz la simetría central de ese arco respecto al punto D 	4.-Ahora haz la rotación del arco nuevo con respecto a A un ángulo de 60º en sentido horario 
5.-Alternando simetrías y giros, obtendrás la pajarita 	6.-Sin quitamos de la imagen el polígono y los puntos : 
7.- Decora tu pajarita del color que quieras y pon el trazo más grueso 	8.- En Edita dale a seleccionar todo y a copiar y Pegar para construir tu mosaico: 

4.-HUESO

Mosaico modelo 4

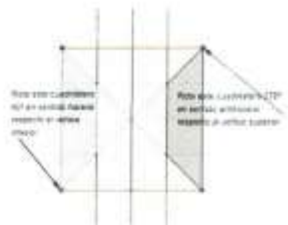
4.-HUESO

1.-Dibuja un cuadrado. Traza sus diagonales. Traza la mediatriz de la base y luego la mediatriz de cada mitad



Con la herramienta polígono, señala esos dos cuadriláteros

3.- Realiza los giros indicados:



4.-Ahora tendrás esta figura. Con la herramienta polígono, señala el hueso:

5.-Borra el resto de figuras:

6.-Mediante giros obtienes el mosaico:

Cuestionario

Preguntas	Respuesta: Sí o no, y por qué.
1 - ¿Qué opinas de criterios de evaluación de la asignatura?	
2 - ¿Las clases están bien preparadas?	
3 - ¿Las explicaciones de clase son claras?	
4 - ¿El profesor muestra el sentido de la asignatura?	
5 - ¿El profesor consigue despertar el interés por la asignatura?	
6 - ¿Se fomenta la participación en clase?	
7 - ¿Consideras adecuados los criterios de evaluación?	
8 - ¿El profesor resuelve las dudas surgidas en clase?	
9 - ¿Consideras que has aprendido?	
10 - ¿El modo de enseñar te motiva a aprender?	
11 - ¿Cómo consideras el ambiente que hay en clase?	
12 - ¿Qué cambiarías del modo de enseñar en clase?	
13 - Valora otros aspectos que te parezcan relevantes	
Preguntas sobre el apartado de Geometría	Respuesta: Sí o no, y por qué.
14 - ¿Conoces las diferencias entre rectas secantes, perpendiculares y paralelas?	
15 - ¿Sabrías nombrar los polígonos más sencillos y reconocerlos en ejemplos del día a día, como en arquitectura?	
16 - ¿Sabrías diferenciar una traslación, un giro y una simetría?	
17 - ¿Consideras que estudiar los mosaicos te ha servido para entender mejor estos movimientos?	
18 - ¿Consideras que has aclarado conceptos sobre los que antes tenías dudas?	

19 - ¿Consideras que conocer el contexto histórico en que surgió la geometría te sirve para aprender o solo son curiosidades?	
20 - ¿Cómo valorarías la introducción de la geometría a través de un programa como Geogebra? ¿Positiva o negativamente?	
21 - ¿Qué opinas de la introducción de otros recursos en el aula, como Kahoot o el programa de visualización en 3D?	
22 - Otras cuestiones que te gustaría comentar sobre el apartado de geometría:	